RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Cours Équation Elliptique

Master 2 AFED

Mathématiques

Réalisé par

Dr **Souhila Sabit**

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ...x_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ multi-indice avec la longeur de α est $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ une partie non vide. $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ...x_n^{\alpha_n})$

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ......\partial^{\alpha_n} x_n}$$
$$D^\alpha(f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} g D^\beta f$$

1.1 Les fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

$$f \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ ssi } f \in C^\infty(\Omega) \text{ et } suppf \text{ est compact}$$
$$suppf = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.1. *Soit K une partie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.*

Alors K est compact ssi K est une partie fermée bornée.

Exemple 1.

1. $$\Phi(x) = \begin{cases} \exp^{\frac{-1}{1-\| x \|^2}} & , \quad \| x \|^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$$

   $supp\Phi = B(0, 1)$, la boule fermée est fermé et bornée pour la norme $\|\|$ alors $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

2.

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\dfrac{-1}{(x-a)(b-x)} & , \quad x \in]a,b[\\ 0 & , \quad x \notin]a,b[\end{cases}$$

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $supp\psi = [a,b]$ alors $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

3. Soit $B(a,r)$ une boule unitée de $\mathbb{R}^n$

$$\phi(t) = \begin{cases} \exp\dfrac{-1}{t} & , \quad t \geqslant 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

Alors $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ Soit $\psi(x) = \phi(r^2 - \| x-a \|^2)$

$$\begin{aligned} supp\psi &= \overline{\{x \in \mathbb{R}/r^2 - \| x-a \|^2 \geqslant 0\}} \\ &= \overline{\{x \in \mathbb{R}/r^2 \geqslant \| x-a \|^2\}} \\ &= B(a,r) \end{aligned}$$

donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

1.2 Les suites régularisantes

Soit $f_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est une suite régularisante ssi

1. $\forall j, \quad f_j \geq 0.$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_j = 1$
3. $suppf_j \subset B(0,\varepsilon_j)$ avec $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$

Exemple 1.1. *Soit*

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\dfrac{-1}{1 - \| x \|^2} & , \quad \| x \|^2 \leq 1 \\ 0 & , \quad \| x \|^2 > 1 \end{cases}$$

On prend $f_0(x) = \dfrac{\phi(x)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx}$ Alors

1. $f_0 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $suppf_0 \subset [-1,1]^n$.

3. $\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx = 1$

On pose $\varepsilon_j > 0$, $f_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n} f_0(\frac{x}{\varepsilon_j})$, $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$, on peut prendre $\varepsilon_j = \frac{1}{j}$

1. $f_j \geq 0$ car $f_0 \geq 0$ et $\varepsilon_j > 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon_j^n} f_0(\frac{x}{\varepsilon_j})dx = \frac{1}{\varepsilon_j^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(\frac{x}{\varepsilon_j})dx$

   On fait un changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon_j}$ alors $dy = \frac{1}{\varepsilon_j^n} dx$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = \frac{1}{\varepsilon_j^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\varepsilon_j^n dy = 1$$

3. $f_j(x) = 0$ quand $\frac{\| x\|}{\varepsilon_j} \geq 0$ Donc

$$supp f_j \subset \{\| x\| \leq \varepsilon_j\} \subset \overline{B(0, \varepsilon_j)}$$

Remarque 1.1. *Toujours, on peut construire une suite régularisante à partir d'une fonction test ϕ avec son $supp\phi \subset B(0,1)$*

$$f_0(x) = \frac{\phi}{\int \phi}, \; f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} f_0(\frac{x}{\varepsilon}), \; \varepsilon \longrightarrow 0$$

1.3 Les suites exhaustive

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, (K_j) des compact dans Ω tq

$$\cup K_j = \Omega \text{ et } K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$$

Exemple 1.2. $K_j = \overline{B(0,j)}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un compact*

$$K_j \subset \mathring{B}(0, j+1) = \mathring{K}_{j+1}, \forall j$$

$$\cup K_j = \cup \overline{B(0,j)} = \mathbb{R}^n$$

1.4 Les suites tranquante

Soit (Ω_j) une suite exhaustive de Ω et $\phi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq

$$0 \leq \phi_j \leq 1$$

et

$$\phi_j = 1 \text{ au } v(\overline{\Omega_j})$$

Donc ϕ_j est une suite tranquante.

1.5 Les distributions

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$T \in \mathcal{D}'(\Omega)(\text{ dual de } \mathcal{D}(\Omega))$$

ssi

$$\begin{cases} T & \text{est linéaire} \\ T & \text{est continue} \end{cases}$$

T est continue si $\forall f_j \longrightarrow f$ dans $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow < T, f_j > \longrightarrow < T, f >$

Théorème 1.1. *Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ application linéaire.*

$\forall K \subset \Omega$ compact : $\exists c > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tq :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : | < T, \phi > | \leq cP_{K,m}(\phi)$$

avec

$$P_{K,m}(\phi) = sup_{x\in K, |\alpha|\leq m} |D^\alpha \phi|$$

Exemple 1.3. *1. $f \in L^1_{loc}(\Omega), K$ compact, $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$:*

$$< T_f, \phi > = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

** T_f est linéaire.*

***

$$| < T_f, \phi > | = | \int_\Omega f(x)\phi(x)dx|$$
$$\leq sup_{x\in K}|\phi(x)| \int_\Omega |f(x)|dx$$
$$\leq csup_{x\in K}|\phi(x)| = cP_{K,0}(\phi)$$

2. $T = \delta(Dirac)$, $< \delta, \phi > = \phi(0)$, $< \delta_a, \phi > = \phi(a)$

3. $T = Heavside,$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$T_H = H \Leftrightarrow < H, \phi >= \int_0^x \phi(x)dx$

* H *est linéaire.*

*

$$\begin{aligned} | < H, \phi > | &= | \int_0^x \phi(x)dx| \\ &\leq sup_{x\in K}|\phi(x)||K| \\ &\leq csup_{x\in K}|\phi(x)| = cP_{K,0}(\phi) \end{aligned}$$

1.6 Les dérivées

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$< \partial_i T, \phi >_{\mathcal{D}'\mathcal{D}} = - < T, \partial_i \phi >_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}$$

$$< D^\alpha T, \phi >_{\mathcal{D}'\mathcal{D}} = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \phi >_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}$$

1.7 Distribution à support compact $\xi'(\Omega)$

$w \subset \Omega$ est le plus grand ouvert tq : $T_{|w} = 0$. s'appelle l'ouvert d'annulation de T. le support de T est $suppT = C_\Omega w$
$\xi'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$: $suppT$ est un compact.
$T \in \xi'(\Omega) \Rightarrow T$ est d'ordre fini m.

$$\forall K \text{ compact} : \exists c \geq 0. \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : | < T, \phi > | \leq cP_{K,m}(\phi)$$

1.8 La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\phi_j \in \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ ssi}$$

$$\begin{cases} \exists K \text{ compact } \subset \Omega, \phi_j \in \mathcal{D}_K(\Omega), \forall j \in \mathbb{N} \\ \\ D^\alpha \phi_j \longrightarrow D^\alpha \phi \text{ uniforme} \\ \\ ie(sup_{x\in K}|D^\alpha \phi_j(x) - D^\alpha \phi(x)| \xrightarrow{j \longrightarrow +\infty} 0) \end{cases}$$

Théorème 1.2. $\forall T_j \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall j$

$$T_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow D^\alpha T_j(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^\alpha T$$

Preuve 1.1.

$$\begin{aligned} < D^\alpha T_j, \phi > &= (-1)^{|\alpha|} < T_j, D^\alpha \phi >, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}'} (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \phi > \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} < \mathcal{D}^\alpha T, \phi > \\ &=< D^\alpha T, \phi > \end{aligned}$$

■

Exemple 1.4.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} < H', \phi > &= - < H, \phi' > = - \int_0^{+\infty} \phi'(x)dx = -[_0^{+\infty} \phi(x)] \\ &= \phi(0) =< \delta, \phi > \end{aligned}$$

Donc $H' = \delta$

Théorème 1.3. *I interval $\subset I\!R$*

1. $T' \equiv 0 \Rightarrow T \equiv cst$
2. $\forall v \in \mathcal{D}'(I), \exists u \in \mathcal{D}'(I) : u' = v$

Lemme 1. *Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$*

$$\psi' = \phi \text{ est le primitive de } \phi \text{ dans } \mathcal{D}(I) \text{ ssi } \int_I \phi = 0$$

S'il existe le primitive, il est unique.

Preuve 1.2 (Démonstaration de lemme)**.**

($\Rightarrow$) On suppose l'existance d'un primitive ψ de ϕ tq

$$\begin{aligned} &\psi'(x) = \phi(x), \forall x \in I \\ &\Rightarrow \int_I \psi'(x) = \int_I \phi(x) \\ &\Rightarrow \int_a^b \psi'(x) = \int_a^b \phi(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b \phi(x) = \psi(b) - \psi(a) = 0$$

($\Leftarrow$) Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$ avec $\displaystyle\int_I \phi(x) = 0$

On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$ Alors

$$\psi'(x) = \phi(x)$$

Donc ψ primitive de ϕ

* $\psi \in \mathcal{D}(I)$: $\psi \in C^\infty$ parce que $\phi \in C^\infty$

* $supp\psi$ compact ?

— $\psi = 0, x \notin I$ car

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(x) = 0, & x < a \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(x) = 0, & x > b \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(x) = \int_{a}^{x} \phi(x) \neq 0, & x \in]a, b[\end{cases}$$

$\Rightarrow supp\psi \subset I$

$supp\phi \subset [\alpha, \beta] \subset I$

$$\begin{cases} x < a \Rightarrow & \psi(x) = 0 \\ x > b \Rightarrow & \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$supp\psi \subset [\alpha, \beta]$ compact

— L'unicité : On suppose l'existance de deux primitive de ϕ sont ψ_1, ψ_2 dans $\mathcal{D}(I)$ tq $\psi_1' = \phi$ et $\psi_2' = \phi$

Puisque ϕ est continue alors il existe $c > 0, \forall x \in I$

$$\psi_1 - \psi_2 = c$$

Soit $x \notin supp\psi_1$ et $x \notin supp\psi_2$ alors $c = 0$, donc

$$\psi_1 = \psi_2$$

Alors l'unicité.

■

Théorème 1.4. (Convergence monotone de Lebesgue)
Soit f_n une suite croissante de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette suite converge vers une fonction mesurable f.

$$\text{et l'on a} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f d\mu$$

Exercice 1.1. *1. Montrer que* $\forall x \in I\!R_+$ $U_n = (1+\frac{x}{n})^n$ *est une suite croissante et*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2. Calculer la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{I\!R_+} (1+\frac{x}{n})^n e^{-bx} d_\mu(n) \quad , \quad b>1$$

Solution 1.1.

1. On a

$$\begin{aligned}(1+\frac{x}{n})^n &= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n,k}\frac{x^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \quad \frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}C_{n+1,k} &\geq C_{n,k}\\ &\geq \frac{n(n+1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\end{aligned}$$

parce que

$$\begin{aligned}\frac{n+1-l}{n+1} &\geq \frac{n-l}{n} \quad , \quad \forall l \in \mathbb{N}\\ \text{car} \qquad n^2+n-l\cdot n &\geq n^2+n-l(n+1)\end{aligned}$$

donc on utilise (a) pour la croissante

$$\begin{aligned}U_{n+1} &= (1+\frac{x}{n+1})^n\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1,k}\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1,k} \quad \frac{x^k}{k!} &\geq \sum_{k=0}^{n+1} C_{n,k} \quad \frac{x^k}{k!} \quad , x \in \mathbb{R}_+\\ &\geq \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \quad \frac{x^k}{k!} = U_n\end{aligned}$$

$\forall n \qquad U_{n+1} \geq U_n$

$*$On a :

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \frac{n(n)\cdots n}{n^k}$$
$$< 1$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} C_{n,k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n^k} = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{donc} \qquad U_n = (1+\frac{x}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \quad \frac{x^k}{k!} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\
\text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n &\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n &= e^x
\end{aligned}$$

2. on utiluse la Convergence monotone de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} (1+\frac{x}{n})^n e^{-bx} dx &= \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-bx} dx \\
&= \int_{mathbbR^+} e^x \cdot e^{-bx} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{(-b+1)x} dx \\
&= \frac{-1}{1-b}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Théorème 1.5. Convergence dominée de Lebesgues :

Soit f_n une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$, tq :

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad X.$$

et tq il existe une fonction g sur X à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, intégrable , tq :

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad X.$$

$$\text{alors} \qquad \int_X |f_n - f| d_\mu \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Exercice 1.2. *Montrer que :* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1+\frac{x}{n})^n x^m dx = m! \quad (\forall m \in I\!N)$

Solution 1.2.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$
on a

$$\begin{array}{lrcl}
 & (1-\frac{x}{n})^n & \leq & e^{-x} \\
\text{car} & lny & \leq & y-1 \quad ,\forall y>0 \\
\text{donc} & lny^{\frac{-1}{n}} & \leq & y^{\frac{-1}{n}}-1 \\
\text{alors} & 1-\frac{lny}{n} & \leq & y^{-\frac{1}{n}} \quad ,y=e^x \\
\text{on aura} & (1-\frac{x}{n})^n & \leq & e^{-x} \\
\text{et} & \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n & = & \lim_{n\to+\infty} e^{nln(1-\frac{x}{n})} \\
 & & = & \lim_{n\to+\infty} e^{n(\frac{-x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon(\frac{x}{n}))} \\
\text{donc} & \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n & = & e^{-x}
\end{array}$$

$$f_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n x^m \cdot \chi_{[0,n]}$$

$$f_n \xrightarrow{p.p} f = e^{-x}\cdot x^m \cdot \chi_{[0,n]}$$

$$\text{et} \quad |f_n| < e^{-x}\cdot x^m = g$$

$$\begin{array}{lrcl}
 & \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f_n & = & \lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x}\cdot x^n \\
\text{donc} & \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(1-\frac{x}{n})^n x^n & = & \int_0^{+\infty} e^{-x}x^m = \Gamma(m+1) = m!
\end{array}$$

$\blacksquare$

Les espaces L^p :

* $\forall p \in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} L^p &= \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , f \quad \text{mesurable, tq} \quad |f|^p \in L^1(\Omega) \right\} \\ \|f\|_{L^p} &= \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

* $p = 1$:

$$\begin{aligned} L^1 &= \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , tq \quad \int_\Omega |f| < \infty \right\} \\ \|f\|_{L^1} &= \int_\Omega |f| dx \end{aligned}$$

* $p = +\infty$

$$\begin{aligned} L^\infty &= \{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , f \quad \text{mesurable,} \exists c > 0 \text{ tq} \quad |f| \leq c \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega \} \\ \|f\|_{L^\infty} &= sup\{ c / |f| \leq c, \quad \text{p.p} \} \end{aligned}$$

Inégalité de Hôlder :

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$f.g \in L^1 \quad \text{et} \quad \|f.g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^q}$$

Exercice 1.3.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$: $\quad x.y \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
2. $\forall (p, q) \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad$ tq $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   a) montrer que $p > 1$
   b) montrer $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$: $\quad x.y \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ tq $a < b$, f et g deux fonctions définie sur $[a, b]$
   a) montrer que $\forall \lambda > 0$: $\quad \int_a^b |f.g| \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_a^b |f|^{\ p} + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_a^b |g|^{\ q}$
   b) En déduire pour λ bien choisis l'inégalité de Hôlder

$$\int_a^b |f.g| \leq \int_a^b |f|^{\ p} + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_a^b |g|^{\ q}$$

Solution 1.3.

1. On a

$$\begin{aligned}(x-y)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0\\ &\Leftrightarrow 2xy \leq x^2+y^2\\ &\Leftrightarrow x.y \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)\end{aligned}$$

2. a) on a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ et $q>0$ alors

$$\frac{1}{p}<1 \Longrightarrow p>1$$

b) On fixe $y \in \mathbb{R}^+$ et on étudié la fonction f

$$f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q-xy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Si $y=0$, $f(x) \geq 0$.

$$f'(x)=x^{p-1}-y \quad , \quad f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\begin{aligned}f(y^{\frac{1}{p-1}}) &= \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}y^q-y^{1+\frac{1}{p-1}}\\ &= \frac{1}{p}y^q+\frac{1}{q}-y^q\\ &= \frac{1}{p}y^q-(\frac{-1}{p}+1)y^q\\ &= \frac{1}{p}y^q-\frac{p-1}{p}y^q\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $f(x) \geq 0$ donc $x.y \leq \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$

3. a) Dans 2.b, on pose à la place de
$x \longrightarrow \lambda|f(x)|$
$y \longrightarrow \frac{1}{\lambda}|g(x)|$
on obtient : $|f(x)g(x)| \leq \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p+\frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q$

b) Supposons que $(\int f^p)^{\frac{1}{p}} \neq 0$ et $(\int g^q) \neq 0$

choisissons λ pour avons $\lambda^p \int f^p = \lambda^{-q} \int g^q$

$$\lambda^{p+q} = \frac{\int g^q}{\int f^p} \quad \Rightarrow \quad \lambda = (\frac{\int g^q}{\int f^p})^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}(\frac{\int_a^b g^q}{\int_a^b f^p})^{\frac{p}{p+1}} \int_a^b |f(x)|^p + \frac{1}{q}(\frac{\int_a^b g^q}{\int_a^b f^p})^{\frac{-q}{p+1}} \int_a^b |g(x)|^q$$

On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow pq = p + q$, alors $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}$ et $\frac{-q}{p+q} = \frac{-q}{pq} = \frac{-1}{p}$ Alors

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}(\int_a^b g^q)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b f^p)^{1-\frac{p}{p+q}} + \frac{1}{q}(\int_a^b g^q)^{1-\frac{q}{p+q}}(\int_a^b f^p)^{\frac{1}{p}}$$

On a $1 - \frac{p}{p+q} = 1 - \frac{p}{pq} = \frac{1}{p}$ et $1 - \frac{q}{p+q} = 1 - \frac{q}{pq} = \frac{1}{q}$ donc

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}(\int_a^b g^q)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b f^p)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}(\int_a^b g^q)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b f^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq (\frac{1}{p} + \frac{1}{q})(\int_a^b g^q)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b f^p)^{\frac{1}{p}}$$

On a $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, donc

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq (\int_a^b g^q)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b f^p)^{\frac{1}{p}}$$

■

1.9 Inégalité de Minkowski

Soient $f, g \in L^p(\Omega) \quad \forall \quad 1 \leq p < +\infty$ Alors

$$\| f+g \|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{L^p(\Omega)}$$

Preuve 1.3. *On a*

$$\| f+g \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega (f+g)^p dx = \int_\Omega |f+g||(f+g)|^{p-1} dx$$

$$\leq \int_\Omega |f||(f+g)|^{p-1} dx + \int_\Omega |g||(f+g)|^{p-1} dx$$

$$_{H\hat{o}lder} \leq \| f \|_p \times \| |(f+g)|^{p-1} \|_q + \| g \|_p \times \| |(f+g)|^{p-1} \|_q$$

$$\leq \| |(f+g)|^{p-1} \|_q (\| g \|_p + \| f \|_p)$$

On a

$$\| |(f+g)|^{p-1} \|_q = (\int_\Omega (f+g)^{(p-1)*(q)} dx)^{\frac{1}{q}}$$

avec $q = \dfrac{p}{p-1}$, *donc*

$$\| |(f+g)|^{p-1} \|_q = \| |(f+g)| \|_p^{p-1}$$

Alors

$$\| f+g \|_p^p \leq \| |(f+g)| \|_p^{p-1} \times (\| g \|_p + \| f \|_p))$$

Donc

$$\| f+g \|_p \leq \| g \|_p + \| f \|_p$$

■

1.10 Inégalité de Hôlder généralisée

Soient $p_1, p_2, p_3 .....p_n$, $r \in [1, +\infty]$ tq

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$$

Alors $f_1, f_2, f_3 .....f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ des fonctions $L^{p_i}(\Omega)$, Alors

$$\| \prod_{i=1}^n f_i \|_r \leq \prod_{i=1}^n \| f_i \|_{p_i}$$

Preuve 1.4. *Par réccurence.*

■

Théorème 1.6. *(Riesz-Fischer)*

Soit $p \in [1, +\infty]$, Alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Corollaire 1.1. *Si $p \in [1, +\infty[$, Alors $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Théorème 1.7. *Si $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $L^p(\Omega)$.*

$(\forall f \in L^p(\Omega) : \exists f_n$ croissante dans $\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \| f_n - f \|_{L^p} = 0)$

1.11 Produit de convolution

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mésurables
La fonction $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ soit intégrable.
On pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Ce produit est le produit de convolution.

Proposition 1.1. *1. $supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$*

2. Le produit de convolution est commutatif :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n) : f * g = g * f$$

3. Le produit de convolution est associatif :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n), h \in L^1(\mathbb{R}^n) : (f * g) * g = f * (g * h)$$

■

Preuve 1.5.

1. Si $x \notin suppf + suppg$ alors $(x - suppf) \bigcap suppg = \varnothing$
   ainsi $f(x-y)g(y) = 0 \forall y$ d'ou $f * g(x) = 0$
2. $$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$
   on fait un changement de variable $z = x - y$ alors $dy = -dz$
   $$f * g(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz$$
   $$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = g * f$$

3.

$$(f*g)*h = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_{\mathbb{R}^n} h(z)g(y-z)dy$$

on vas faire un changement de variable $x-y=t, dy=-dt$

$$\begin{aligned}
(f*g)*h &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(t)(\int_{\mathbb{R}^n} g(-t+x-z)dzh(z)dz))dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(t+x+z)h(z)dtdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f(t)\int_{\mathbb{R}^n} g(x-z)-t)dt)h(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (f*g(x-z))h(z) = f*(g*h)
\end{aligned}$$

■

1.12 L'inégalité de Young

Soit p, q et $r \in [1, +\infty[$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$
$\forall f, g$ deux fonction mesurables de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ alors

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

En particulier, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ alors $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$

Preuve 1.6.

On a

$$\begin{aligned}
|f*g(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y)|^p g(y)^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} |g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})})dy
\end{aligned}$$

comme $1 = (\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r}$ (Hôlder généralisé).

$$
\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leq \| \, (f(x-y)^p g(y)^q) \, \|_{L^r} \, \|f(x-y)^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|_{L^{\frac{pr}{r-p}}} \, \|g(y)^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|_{L^{\frac{qr}{r-q}}} \\
&\leq (|f|^p * |g|^q(x))^{\frac{1}{r}} \, \|f\|_p^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \, \|g\|_q^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \\
\|f * g\|_r^r &= \int |f * g(x)|^r \leq \int |f|^p * |g|^q(x) \|f\|_p^{(\frac{r-p}{r})r} \, \|g\|_q^{r-q} \\
&\leq \|f^p\|_1 \|g^q\|_1 \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \\
&\leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r
\end{aligned}
$$

alors

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

■

Remarque 1.2. *Les cas particuliers de l'inégalité de Young*

1. si $p = q = 1$ alors $r = 1$ et si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
2. si $p \in [1, +\infty]$ et q vérifie $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors $r = +\infty$
   Alors si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors $f * g \in L^\infty$ et $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$
3. si $p \in [1, +\infty]$ et $q = 1$ alors $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = 1$ donc $f \in L^p$ et $g \in L^1$ alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

1.13 Les espaces de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ tq } |\alpha| \leq k\}$$

et la norme de ce espace est définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\dfrac{1}{p}}, \qquad \forall p \in [1, +\infty[$$

et

$$W^{k,+\infty}(\Omega) = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^{+\infty}}$$

pour $p = 2$ on noté $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}$$

et $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

Définition 1.2. *soit $m \in \mathbb{N}$*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2 / D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq m\}$$

$$H^{-m}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \exists C \geq 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$$

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1^{|\alpha|}) \langle u, D^\alpha \varphi \rangle$$

1.14 Généralité

$$W^{p,m}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n), D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq m\}$$

$$\|u\|_W^{0,m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$$

pour

$$p = +\infty, \| u\|_W^{\infty,m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}$$

$$W^{2,m}(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 1.8. *$H^m(\mathbb{R}^n)$ espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$\forall u, v \in H^m(\mathbb{R}^n), \langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u.D^\alpha v(u)du$$

donc la norme définie sur $H^m(\mathbb{R}^n)$ est

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}$$

Théorème 1.9. *Soit $m \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$ alors ,$\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

(i) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$,on a $W^{p,m}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

(ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$,on a $W^{p,m}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$ avec $q \in [p, +\infty[$(mais pas pour $q = +\infty$ si $p > 1$).

(iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$,on a $W^{p,m}(\Omega) \circlearrowleft L^{+\infty}$.

1.15 Dualité et convergence faible

$\forall p \in]1, +\infty[$,le dual de $L^p(X, d\mu)$ est $L^{p'}(X, d\mu), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$\forall (u_n)_n$, une suite bornée dans $L^p(X, d\mu)$, on peut construise une sous suite $u_n \to u$ faiblement ($u_n \to u$ dans L^p ssi $\forall v \in L^{p'} : \int_X u_n v \to \int_X uv$).

Proposition 1.2. *$u_n \to u$ dans $W^{p,1}(\Omega)$ ssi $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to g_i$ dans $L^p(\Omega)$, avec $g_i = \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, i = 1, .., N$.*

1.16 Formulation variationnelles et leur interprétation

Théorème 1.10. *(Théorème de Lax-Milgram)*
V espace de Hilbert, l une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire et continue($|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|$) sur H

tq $\exists \alpha > 0 : \forall v \in V : a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$($a$ est elliptique)
alors le problème : trouver u tq

$$a(u,v) = l(v), \forall v \in V$$

admet une solution unique.

Exemple 1.5. *Le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega(\text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

associé le problème variationnel $V = H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, etl(v) = \int_\Omega f v dx, f \in H^1(\Omega)$$

par définition de distribution

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = -\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \rangle,$$

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $H_0^1(\Omega)$ donc $\forall v \in H_0^1(\Omega), \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\varphi_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$ comme a et l soi continues alors

$$\langle -\Delta u, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle -\Delta u, \varphi \rangle$$
$$\langle l, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle l, v \rangle$$

Théorème 1.11. *si $1 \leq p < +\infty, \varphi \in (L(\Omega))'$ alors*

* il existe une unique fonction $u \in L^{p'}(\Omega)$ tq

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u f \qquad \forall f \in L^{p'}(\Omega)$$

.

* De plus :$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$

1.16.1 La densité

$C_c^{+\infty}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

1.16.2 Convergence faible

Si $|\Omega| < \infty$
* $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée de $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$.
* $f_n \longrightarrow f p.p, x \in \Omega$.

Alors
* $f \in L^p$.
* $f_n \to f$ dans $L^q, 1 \leq q < p$.
* $f_n \to f$ dans $L^q, 1 < q < p < +\infty$, $(L^p \circlearrowleft L^q)$.

Définition 1.3. *On dit que une forme bilineaire $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$.*

1. continue s'il existe une constante c tq
$$|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|, \forall u, v \in H$$
2. coércive s'il existe une constante α tq
$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \qquad \forall v \in H$$

1.17 Inégalité de Sobolev

si Ω un ouvert borné quelconque et $1 \leq p \leq N$ alors il existe un constante c (depend de p et N)

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_0^{p,1}(\Omega)$$

$$W_0^{p.1}(\Omega) = \{u \in L^p, \nabla u \in L^p, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

1.18 Inégalité de Poincaré

On suppose que Ω un est un ouvert borné alors $\exists c > 0$ tq

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_0^{p.1}(\Omega), 1 \leq p < +\infty$$

1.19 L'espace dual de $W_0^{p.1}$

Notation 1.1. *On désigne par* $W^{p'.-1}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{p.1}(\Omega)$ *et* $1 \leq p < +\infty$ *et par* $H^{-1}(\Omega)$ *la dual de* $H_0^1(\Omega)$.

1. Le dual de $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$.
   On a $H_0^1(\Omega) \circlearrowleft L^2(\Omega) \circlearrowleft H^{-1}(\Omega)$ avec une injection continue et dense.
2. Si Ω est borné on a :

$$W_0^{p,1}(\Omega) \circlearrowleft L^2 \circlearrowleft W^{p',-1}(\Omega)$$

   por $1 \leq p < +\infty$ si $\frac{2n}{n+2} \leq p < +\infty$ sinon on a

$$W_0^{p.1}(\Omega) \circlearrowleft L^2 \circlearrowleft W^{p'.-1}(\Omega)$$

   $\frac{2n}{n+2} \leq p \leq 2.$

1.20 La convergence faible

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$(espace de Banach)et $u \in E$ on dit $u_n \to u$,quand $n \to +\infty$ si

$$\langle T, u_n\rangle \to \langle T, u\rangle$$

$$\int \varphi u_n \to \int \varphi u$$

.

1.21 Exercices

Exercice 1.4. *Soient* $N \geq 1, \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, |x_i| < 1, i = \overline{1, N}\}$ *et*

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & u(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \end{array}$$

1. Pour $i = \overline{1, N}$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} u(x)dx$ ne dépent que des valeurs prises par ϕ au bord de Ω.
2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 1.5. *Soit* $u \in L^1_{loc}(]0,1[$ *tq* $Du = 0$

1. Montrer que $\exists a \in \mathbb{R} : u = a$ p.p

Exercice 1.6.

soit $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$

a) On suppose ici $n = 1$. Montrer que $\| u \|_\infty \leq \| u' \|_1$

b) Par réccurence sur n, montrer que

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{\frac{1}{n}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_1^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_1^{\frac{1}{n}}$$

c) Montrer que $\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \nabla u \|_1$

d) Soit $1 \leq p < n$. Montrer qu'il existe $C_{n,p}$ ne dépend que de n et p tq

$$\| u \|_{p^*} \leq C_{n,p} \| \nabla u \|_p$$

avec $p^* = \dfrac{np}{n-p}$

1.22 Solutions

Solution 1.4.

1. $i = 1$ (les autres i traite de même maniére). Pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} u(x)dx = \int_{]-1,1[} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx$$

$$= \int_{]-1,1[^{n-1}} \int_{]-1,1[} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, y)dx_1 dy$$

$$= \int_{]-1,1[^{n-1}} [\phi(1, y) - \phi(-1, y)]dy$$

Qui ne dépond des valeurs prises par ϕ au bord de Ω.

2. On montre que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$:
Suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tq

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} u(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[\times] - 1, 1[^{n-1}$
On choisit une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\phi(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A_1 \\ \\ 1 & x = (1, y), y \in] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{n-1} \end{cases}$$

On choisit $\forall n \in \mathbb{N}^* : \phi_n(1 + x_1, y) = \phi(1 + nx_1, y), x_1 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ (normalement $\phi_n = 0, x \notin A_n$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} u(x)dx = \int_{]-1,1[^{n-1}} [\phi_n(1, y) - \phi_n(-1, y)]dy = \int_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^{n-1}} [1]dy = 1$$

et

$$|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi_n(x)dx| \leq \int_{A_n} |g(x)|dx$$

Alors

$$\int_{A_n} |g(x)|dx \geq 1$$

mais c'est imposible parceque le mesure de Lebegue de A_n tends vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$
Donc $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$

$\blacksquare$

Solution 1.5.

Soit $\phi_0 \in C_c^\infty(]0, 1[)$ tq $\int_0^1 \phi_0(x)dx = 1$
Pour $\psi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ et on définit la fonction

$$\phi(x) = \int_0^x \psi(t)dt - (\int_0^1 \psi(t)dt) \int_0^x \phi_0(t)dt, \forall x \in]0, 1[$$

Donc $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ et

$$\phi' = \psi(x) - \phi_0(x)(\int_0^1 \psi(t)dt)$$

Donc

$$0 =< Du, \phi >= - < u, \phi' >= - \int_0^1 u(x)\phi'(x)dx$$

$$= - \int_0^1 u(x)\psi(x)dx - (\int_0^1 \psi(t)dt) \int_0^1 u(x)\phi_0(x)dx$$

On pose $a = \int_0^1 u(x)\phi_0(x)dx$, donc

$$\int_0^1 u(x)\psi(x)dx = \int_0^1 a\psi(t)dt, \forall\psi \in C_c^\infty(]0,1[)$$

Alors

$$u = a \text{ p.p}$$

■

Solution 1.6. *Soit* $u \in C_c^1(I\!\!R^n)$

a) On suppose ici $n = 1$. Montrer que $\| u \|_\infty \leq \| u' \|_1$
Comme $u \in C_c^1(\mathbb{R})$, on a poue $x \in \mathbb{R}, u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t)dt$ et donc

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x |u'(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(t)|dt = \| u' \|_1$$

Donc

$$\| u \|_\infty \leq \| u' \|_1$$

b) Par réccurence sur n, montrer que

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \frac{\partial u}{\partial x_1} \|_1^{\frac{1}{n}} \| \frac{\partial u}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots \| \frac{\partial u}{\partial x_n} \|_1^{\frac{1}{n}}$$

* Pour $n = 1$, à partir de (a) on a démontrée que

$$\| u \|_\infty \leq \| u' \|_1$$

** Soit maintenant $n \geq 2$, on suppose que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \frac{\partial u}{\partial x_1} \|_1^{\frac{1}{n}} \| \frac{\partial u}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots \| \frac{\partial u}{\partial x_n} \|_1^{\frac{1}{n}}$$

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Pour $x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, y)|^{\frac{n+1}{n}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, y)| \times |u(x_1, y)|^{\frac{1}{n}} dy \text{ Hôlder} p = \frac{n}{n-1}, q = n$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, y)|^{\frac{n}{n-1}} dy\right)^{\frac{n-1}{n}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, y)| dy\right)^{\frac{1}{n}}$$

On a

$$\| u(x_1,y) \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_3} \|_1^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_{n+1}} \|_1^{\frac{1}{n}}$$

et

$$|u(x_1,y)| \leq \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1} \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1,y)| dy \leq \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1} \|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1,y)|^{\frac{n+1}{n}} dy \leq \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_3} \|_1^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_{n+1}} \|_1^{\frac{1}{n}} \times \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1} \|_1^{\frac{1}{n}}$$

Donc on intégre cette équation, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u(x_1,y)|^{\frac{n+1}{n}} dy dx_1 \leq \int_{\mathbb{R}} (\| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \cdots \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_{n+1}} \|_1^{\frac{1}{n}} \times \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1} \|_1^{\frac{1}{n}}) dx_1$$

Alors

$$\| u \|_{\frac{n+1}{n}} \leq \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_3} \|_1^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_{n+1}} \|_1^{\frac{1}{n}} \times \| \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1} \|_1^{\frac{1}{n}}$$

c) Montre que

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \nabla u_1$$

Nous avons $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ avec $a_i > 0$ On a

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \frac{\partial u}{\partial x_1} \|_1^{\frac{1}{n}} \| \frac{\partial}{\partial x_2} \|_1^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots \| \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \|_1^{\frac{1}{n}} \times \| \frac{\partial u}{\partial x_n} \|_1^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_1)$$

et $\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_1 \leq \| \nabla u \|_1$, donc

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \| \nabla u \|_1$$

d) Pour $p=1, C_{n,p}=1$

maintenant pour $1<p<+\infty$, on pose $\alpha = \dfrac{p(n-1)}{n-p}$(de sorte que $\alpha \times \dfrac{n}{n-1} = p^*$) et $v = |u|^{\alpha-1}u$

Comme $\alpha > 1$, $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ et $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, on peut appliquer le résultats de (c) à la fonction v

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*})^{\dfrac{n-1}{n}} = (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\dfrac{\alpha n}{n-1}})^{\dfrac{n-1}{n}} = (\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\dfrac{n}{n-1}})^{\dfrac{n-1}{n}}$$
$$\leq \| \nabla v \|_1$$

et comme $|\nabla v| = \alpha |u|^{\alpha-1} |\nabla u|$ et on applique Hôlder(p et $q = \dfrac{p}{p-1}$),

$$\| \nabla v \|_1 = \alpha \| |u|^{\alpha-1} \nabla u \| \leq \alpha \| |u|^{\alpha-1} \|_q \| \nabla u \|_p$$

et

$$(\alpha-1)q = (\alpha-1)\frac{p}{p-1} = \frac{p(n-1)-n+p}{n-p}\frac{p}{p-1} = \frac{pn-n}{n-p}\frac{p}{p-1}$$
$$= \frac{n(p-1)}{n-p}\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$

Donc

$$\| u \|_{p^*}^{p^*\dfrac{n-1}{n}} \leq \alpha \| u \|_{p^*}^{p^*\dfrac{p-1}{p}} \| \nabla u \|_p$$

Alors

$$\| u \|_{p^*}^{p^*\dfrac{p-1}{p} - p^*\dfrac{n-1}{n}} \leq \alpha \| \nabla u \|_p$$

On a

$$p^*\frac{n-1}{n} - p^*\frac{p-1}{p} = p^*\frac{p(n-1)-n(p-1)}{np} = p^*\frac{-p+n}{np} = 1$$

Donc

$$\| u \|_{p^*} \leq C_{n,p} \| \nabla u \|_p$$

avec $C_{n,p} = \alpha$

■

Chapitre 2

Théoréme de points fixe et application

Si une application $f : E \longrightarrow E$, on appelle point fixe de f tout les éléments de E tq $f(x) = x$

Théorème 2.1. *Soit* (E, d) *un espace metrique complet et*

$T : E \longrightarrow E$ une contraction stricte i.e

$$\exists k < 1 \text{ tq } \forall x, y \in E, d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0) \in E$
De plus,

$$\forall z \in E \text{ la suite } \lim_{m \longrightarrow +\infty} T^m(z) = x_0$$

2.1 Les théorémes de point fixe de Brouwer et de Schauder :

Le théoréme de Brouwer est le théoréme de point fixe fondamental en dimension finie.
Soit $\overline{B^m} = \{x \in \mathbb{R}^m \parallel x \parallel \leq 1\}$ la boule unite fermée de $\mathbb{R}^m$ muni de la norme euclidienne usuelle , et $S^{m-1} = \partial \overline{B^m}$ (la sphére que est la frontiere).

Théorème 2.2. *toute application continue de* $\overline{B^m} \longrightarrow \overline{B^m}$ *admet ou moins un point fixe.*

Théorème 2.3. *Il n'existe pas une application* $f : \overline{B^m} \longrightarrow S^{m-1}$ *de class* C^1 *tq* $f|_{S^{m-1}} = Id$

Théorème 2.4. *Il n'existe pas une application* $f : \overline{B^m} \longrightarrow S^{m-1}$ *de continue tq* $f|_{S^{m-1}} = Id$

Preuve 2.1. *Soit f une rétraction , On pose $g(x) = -f(x)$.*

— Alors $g \in C^{\circ}(\overline{B^m}, \overline{B^m})$ admet un point fixe x_0 ,$x_0 = -f(x_0)$, f à valeur dons S^{m-1} alors$x_0 \in S^{m-1}$ et comme f une rétraction alors $f(x_0) = x_0$ donc $x_0 = 0$
mais $\| x_0 \|= 1$
Donc contraduction

■

Théorème 2.5. *soit k un compact homéomorphe à la boule unité fermée de $I\!R^m$.*

Toute application continue de k dans k admet au moins un point fixe.

—

Preuve 2.2. *Soit g une application continue de $k \longrightarrow k$ et soit h un homeomorphisme qui envoie*
$k \longrightarrow \overline{B^m}$
l'application

$$h \circ g \circ h^{-1} : \overline{B^m} \longrightarrow \overline{B^m}$$

est continue, donc elle admet un point fixe

$$y = h \circ g \circ h^{-1}(y) \in \overline{B^m}$$

donc

$$h^{-1}(y) = g(h^{-1}(y))$$

donc $h^{-1}(y)$ est un point fixe de g.

■

Théorème 2.6. *Soit C un convexe compact non vide de $I\!R^m$ toute application continue de $C \longrightarrow C$ admet au moins un point fixe.*

Théorème 2.7. *Soit E un espace euclidien (dimension finie) et soit $P : E \longrightarrow E$ une application continue tq*

$$\exists \rho > 0, \forall x \in \text{ sphene de nayon } \rho \text{ satisfait } P(x) \cdot x \geq 0$$

alors

$$\exists x_0, \| x_0 \| \leq \rho \text{ tq } P(x_0) = 0$$

Preuve 2.3. *Supposons que $p \neq 0$ sur la boule $\overline{B}(0, \rho)$, d'autre terme*

— $\| x \| \leq \rho$, $\| P(x) \| > 0$ et on défini

$$g : \overline{B}(0, \rho) \longrightarrow \partial \overline{B}(0, \rho)$$

$$x \longrightarrow g(x) = \frac{-\rho}{\| P(x) \|} P(x)$$

Par théoréme de Brouwer , cette application admet un point fixe x^* tq

$$g(x^*) = x^* = \frac{-\rho}{\| P(x^*) \|} \cdot P(x^*)$$

$$\| x^* \| = \rho \Rightarrow \| x^* \|^2 = \rho^2 = g(x^*) \cdot x^*$$

$$= \frac{-\rho}{\| P(x^*) \|} \cdot P(x^*) \cdot x^* \geq 0$$

puisque $P(x) > 0$ donc $\rho < 0$ contraduction.

■

Théorème 2.8. *Soit E un espace vectoriel normé ,C un convexe compact de E et T une application continue $C \longrightarrow C$ Alors T admet un point fixe.*

Théorème 2.9. *Soit E un espace de Banach, c un convexe fermé de E et $T : C \longrightarrow C$*

une application continue tq $T(C)$ soit relativement compact Alors T admet un point fixe .

2.2 Résoulution d'un propoblème modéle par une méthode de point fixe

Nous intéressons dans cette section à un propobléme d'EDP elliptique non lineaire modéle trés simple , Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ Le propobléme consiste à trouver un fonction

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } -\Delta u = f(u) \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Proposition 2.1. *Soit $g \in H^{-1}(\Omega)$, $\exists! v \in H_0^1(\Omega)$ tq $-\Delta u = g$ de propobléme variationnel :*

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega) \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \omega dx = < g, \omega >$$

De plus , l'application $T : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, $g \longrightarrow (-\Delta)^{-1} g = v$ est continue

Preuve 2.4.

1. L'existance :
   On a
   $$a(v,\omega) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \omega dx = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx$$
   est continue sur $H_0^1(\Omega)$ et coercive par l'inégalité de Poincaré et la forme lineaire $l(\omega) =< g, \omega >$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ par défintion.
   Donc par **Lax-Milgrame** on a l'existance et l'unicité de la solution de l'équation ou on montre que cette solution est la solution de l'équation ou sens de distribution ,Δv est la distribution donnée par
   $$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) :< \Delta v, \varphi >= (-1)^1 < \partial \Delta v, \partial \varphi >= -\int_\Omega \partial \Delta v \partial \varphi dx$$
   Puisque $\partial v \in L^2(\Omega)$, comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, nous avons donc
   $< \Delta v, \varphi >=< -g, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $\Delta v = -g$

2. L'unicité :
   On considére $v \in H_0^1(\Omega)$ tq $\Delta v = 0$ ou sens de distribution
   donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega \partial v \partial \varphi dx = 0$ comme H_0^1 est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dons $H^1(\Omega)$.
   Il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\varphi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} \varphi$ et en particulier $\partial \varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \partial \varphi$
   Donc
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \partial v \partial \varphi_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \partial v \partial \varphi = 0$$
   donc $\nabla v = 0$ ce qui implique que $v = 0$ pa l'inegalité de poincarré (Donc l'unicité).
3. la continuité de $(-\Delta)^{-1}$:
   de coule directement de la formulation variationnelle et l'inégalité de poincarré $\omega = v$

■

Corollaire 2.1. *l'application $(-\Delta)^{-1}$ est continue de $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$*

Théorème 2.10. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ et $f \in C^0(I\!R) \cap L^\infty(I\!R)$,*
$$| f(t) |< a + b | t |$$
. Il existe ou moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de propobléme
$$-\Delta u = f(u) \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Exercice 2.1. *(Démonstration de (2.10))*

On pose $f(v)(x) = f(x, v(x))$

1. Montrer si $v \in E$ alors $f(v) \in E = L^2(\Omega)$
2. $T : E \to E$,$T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$
   a) Montrer que T est continue
   b) Montrer que tout point fixe de T est une solution de notre propobléme $-\Delta u = f(u)$.
3. On défeni $C = \left\{ v \in H_0^1(\Omega); \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \right\}$
   a) Montrer que C est compact et fermé
   b) On choisit , $M = C_\Omega \| f \|_\infty (mes\Omega)^{\frac{1}{2}}$ avec C_Ω la constante de l'inégalité de poincarré
   $$\forall z \in H_0^1(\Omega) \ \| z \|_{L^2} \leq C_\Omega \| \nabla z \|_{L^2}$$
   c) Montrer que
   $$\| \nabla T(v) \|_{L^2(\Omega)} \leq M$$
   et déduire que
   $$T(C) \subset C$$
4. Utiliser **Théoréme de Schauder** pour montrer l'existance d'une solutoin de
   $$-\Delta u = f(u)$$
   dans C

Solution 2.1.

1. On a $| f(t) | \leq a + b | t |$
   $\int_\Omega | f(v) |^2 \leq \int_\Omega (a + b | v |)^2 \leq \int_\Omega 2a^2 + 2b^2 | v |^2 \leq 2a^2 mes(\Omega) + 2b^2 \| v \|_{L^2} < \infty$
2. a) T est une composition de $(-\Delta)^{-1}$ est continue et $f \in C^0$ alors $T \in C^0$ b) $\exists u \in L^2$, $T(u) = u \Rightarrow (-\Delta)^{-1} f(u) = u \Rightarrow f(u) = -\Delta u$
3. $C = \{ u \in H_0^1(\Omega) / \| u \| \leq M \}$ C est compact et fermé , il est bornée et fermé alors compact

Chapitre 3

Les opérteurs de superposition

Nous avons rencontré dans l'étude de problème modèle des opérateurs du type $u \to f(u)$. Ce type est appelé opérateurs de superposition ou opérateur de Nemytsky.

3.0.1 Les opérateurs de superposition dans $L^P(\Omega)$

Proposition 3.1. *(continue faible)*

Soient Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$.
L'application $\widetilde{f}$ est continue de $L^2(\Omega)$ faible dans $L^2(\Omega)$ faible si et seulement si f est affine

Preuve 3.1. *Soit Q une cube inclus dans Ω*
Par un changement de coordonnées,nous pouvons toujours supposa $Q =]0,1[^n$, soit a et b deux réels qlq et θ une constante de $[0,1]$, on dèfinit une suite de fonction de $L^2(\Omega)$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin Q \\ \\ v_n(x_1) \text{ si } x \in Q \end{cases} \quad \text{avec } v_n(t) = \begin{cases} a \text{ si } \frac{[nt]}{n} \leq t \leq \frac{[nt]+\theta}{n} \\ \\ b \text{ si } \frac{[nt]+\theta}{n} < t < \frac{[nt]+1}{n} \end{cases}$$

La suite un oscille entre les valeurs a et b.
La suite $f \circ u_n$ a des propriétés analogue en effet :

$$f \circ u_n = \begin{cases} f(0) \text{ si } x \notin Q \\ \\ w_n(x_1) \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{avec } w_n(t) = \begin{cases} f(a) \text{ si } \frac{[nt]}{n} \leq t \leq \frac{[nt]+\theta}{n} \\ \\ f(b) \text{ si } \frac{[nt]+\theta}{n} < t < \frac{[nt]+1}{n} \end{cases}$$

Les suites u_n et $f \circ u_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$
Elles contiennent donc chacune une sous-suite faiblement convergente. Nous avons

$u_n \rightharpoonup u$ et $f \circ u_n \rightharpoonup g$
Il s'agit d'indentifiuer u et g
Il est claire que :$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin Q \\ v(x_1) \text{ si } x \in Q \end{cases}$
où v est la limite faible dans $L^2((0,1))$ de v_n

On considére un sous intervalle $[t_1, t_2]$ de $[0,1]$

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)dt \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

alors

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)dt = \int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)dt + \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v_n(t)dt + \int_{\frac{[nt_2]}{n}}^{t_2} v_n(t)dt$$

et

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v_n(t)dt = \int_{\frac{[nt_1]+1}{n}}^{\frac{[nt_1]+\theta+1}{n}} adt + \int_{\frac{[nt_1]+\theta+1}{n}}^{\frac{[nt_1]+2}{n}} bdt$$
$$= a\frac{\theta}{n} + b\frac{1-\theta}{n} = \frac{a\theta + (1-\theta)b}{n}$$

et

$$\max\left\{ \mid \int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)dt \mid, \mid \int_{\frac{[nt_2]}{n}}^{t_2} v_n(t)dt \mid \right\} \leq \frac{\max\{\mid a \mid, \mid b \mid\}}{n}$$

alors

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)dt = \int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)dt + \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]-1} \frac{a\theta + (1-\theta)b}{n} + \int_{\frac{[nt_2]}{n}}^{t_2} v_n(t)dt$$
$$= \frac{[nt_2] - [nt_1] - 1}{n}(a\theta + (1-\theta)b) + r_n$$

tq

$$r_n = \int_{t_1}^{\frac{[nt_1]+1}{n}} v_n(t)dt + \int_{\frac{[nt_2]}{n}}^{t_2} v_n(t)dt$$

Où

$$\mid r_n \mid \leq \frac{\max\{\mid a \mid, \mid b \mid\}}{n} \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{[nt_2] - 1 - [nt_1]}{n} \overset{converge}{\longrightarrow} t_2 - t_1$$

donc
$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)dt \longrightarrow (t_2-t_1)(a\theta+(1-\theta)b)$$
alors
$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v_n(t)dt = a\theta+(1-\theta)b$$
$$t_2 \longrightarrow t_1 \qquad \text{alors} \qquad v(t)=a\theta+(1-\theta)b \text{ p.p}$$
et par même raisenement applique a w_n
$$\text{On trouve } g(x)=\begin{cases} f(0), \text{ si } x\notin Q \\ \theta f(a)+(1-\theta)f(b) \text{ sinon}\end{cases}$$
et par le convergence faible dans $L^2(\Omega)$ donc $f(u)=g$
Donc
$$f(a\theta+(1-\theta)b)=\theta f(a)+(1-\theta)f(b),$$
alors f est affine.

■

Théorème 3.1. *(Convergence fort dans $L^2(\Omega)$)*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f\in C^0(\mathbb{R})$ tq $\mid f(t)\mid\leq a+b\mid t\mid$.
On dèfinit $f(u)=f\circ u$
Alors l'application $u\longrightarrow f\circ u$ envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et est continue pour la toplogie forte.

Preuve 3.2. *Si $u\in L^2(\Omega)$, alors*
$$\begin{aligned}\int_\Omega \mid f(u)\mid^2 dx &\leq 2a^2\int_\Omega dt+2b^2\int\mid u(t)\mid^2 dt\\ &\leq 2a^2 mes(\Omega)+2b^2\parallel u\parallel_{L^2}^2<+\infty\end{aligned}$$

Alors $f(u)\in L^2(\Omega)$
Montrons que l'application est continue $L^2\longrightarrow L^2$ (forte)
Soit u_n une suite convergente dans L^2 vers u .
Soit $u_{n'}$ une sous suite de u_n : On extraire une sous- suite $u_{n''}$ qui converge p.p i.e
Il existe ensenble N de $\mu(N)=0$ tq $\forall x\notin N : u_{n''}(x)\longrightarrow u(x)$
et $\exists g\in L^2(\Omega)$ tq $\mid u_{n''}(x)\mid\leq g(x)$ p.p
Nous avons $\mid f(u_{n''}(x))-f(u(x))\mid^2\xrightarrow{p.p} 0$ puisque f est continue
et
$$\mid f(u_{n''})-f(u)\mid\leq 4a^2+4b^2g^2+\mid f(u)\mid^2$$

On applique le théoreme de convergence dominée de lebegue en déduire que

$$\int_{\Omega} \mid f(u_{n''}) - f(u) \mid^2 \longrightarrow 0,$$

Donc

$$f(u_{n''}) \overset{(forte)L^2}{\longrightarrow} f(u)$$

■

3.0.2 les opérateurs de superposition dans $H^1(\Omega)$

Définition 3.1. *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega), c \in I\!R$, On pose*

$$E_c(u) = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{mesB(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} \mid u(y) - c \mid \overset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0dy \right\}$$

Proposition 3.2. *Soit u_1 est une fonction mesurable $\in L^1_{loc}(\Omega)$*
Alors

$$\begin{cases} u_1 = c \ pp \ sur \ E_c(u) \\ u_1 \neq c \ pp \ sur \ \Omega \setminus E_c(u) \end{cases}$$

Preuve 3.3. *D'après le théosène des points de lebesgue,il existe un ensemble $N \subset \Omega$ tq si $x \notin N$, on a*

$$\frac{1}{mesB(x,\rho)} \int_{B(x,\rho)} \mid u_1(y) - c \mid \overset{\rho \to 0}{\longrightarrow} \mid u_1(y) - c \mid$$

Donc si $x \in E_c(u_1) \backslash N \Rightarrow \mid u_1(y) - c \mid = 0$ et si $x \in \{\Omega \setminus E_c(u_1) \cup N\} \Rightarrow \mid u_1(y) - c \mid \neq 0$
Alors

$$\begin{cases} u_1 = c \text{ pp sur } E_c(u) \\ u_1 \neq c \text{ pp sur } \Omega \setminus E_c(u) \end{cases}$$

■

Théorème 3.2. *Soit $u \in H^1(\Omega)$ alors ,$\forall c \in I\!R, \nabla u = 0$ p.p $E_c(u)$*

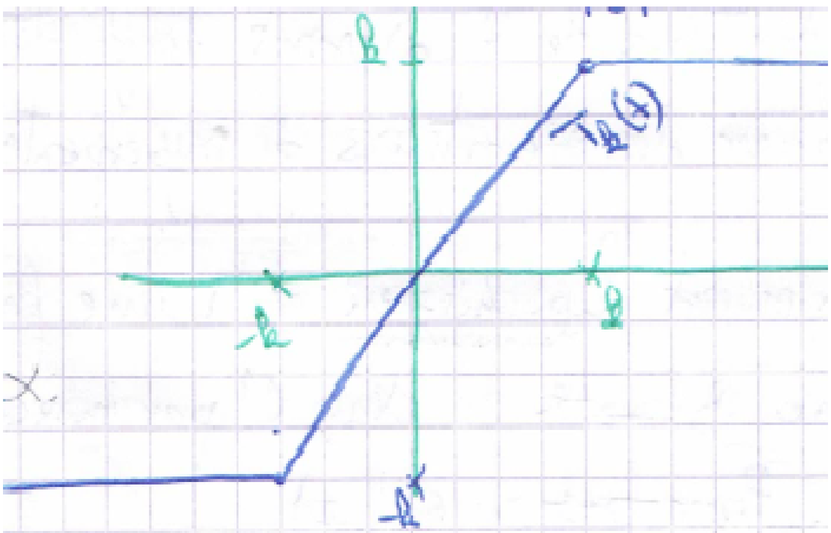
Théorème 3.3. *Soit T une fonction globalement lipschitziene de $I\!R$ à $I\!R$ de class C^1 par morceau et n'ayant qu'un nombre fini de pointS de non demrable $c_1, c_2 \dots c_k$. si $mes(\Omega) = +\infty$ on suppose que $T(0) = 0$ alors :$\forall u \in H^1(\Omega)$*

1. $T(u) \in H^1(\Omega)$
2. $\nabla(T(u)) = T'(u) \cdot \nabla u$ *sur* $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_{c_i}(u)$ *et*
   $\nabla(T(u)) = 0$ *p.p sur* $\bigcup E_{c_i}(u)$

3.0.3 L'opérateur du troncature

Un autre opérateieur également forte utile est **la troncature** à hauteur k :$\forall k > 0$

$$T_k(t) = \begin{cases} t \text{ si } \mid t \mid \leq k \\ \dfrac{kt}{\mid t \mid} \text{ si } \mid t \mid > k \end{cases}$$



Théorème 3.4. *si $u \in L^2(\Omega)$ alors $T_k(u) \overset{(forte)L^2}{\longrightarrow} u$,$k \to +\infty$*
si $u \in H^1(\Omega)$ alors $T_k(u) \overset{(forte)H^1(\Omega)}{\longrightarrow} u$,$k \to +\infty$

Preuve 3.4.

1.

$$\begin{aligned} \| u - T_k(u) \|_{L^2}^2 &= \int_{\{u<-k\}} \mid u + k \mid^2 dx + \int_{\{u>k\}} \mid u - k \mid^2 dx \\ &\leq \int_{\{u<-k\}} \mid u \mid^2 dx + \int_{\{u>k\}} \mid u \mid^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \mid u \mid^2 \cdot 1_{|u|>k} dx \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

donc $\| u - T_k(u) \|_{L^2}^2 \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $(mes\, \{x \in \Omega / \mid u \mid > k\})$

2. $u \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\| \nabla u - \nabla(T_k(u)) \|_{L^2}^2 &= \int_\Omega (T_k'(u) - 1)^2 \mid \nabla u \mid^2 dx \\ &= \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 \cdot 1_{|u|>k} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

■

3.0.4 Opérateurs de superposition et trace au bord

Comme les traces des fonctions $H^1(\Omega)$ de sont des fonction de $L^2(\partial\Omega)$, on peut appliquer des operateurs de superposition

Théorème 3.5. *soit Ω un ouvert lipschitziene et T une fonction globalement lischitzienne $I\!R \to I\!R$ de class C^1 par morceaux sauf $\{c_1 \dots c_k\}$ finis . pour tout $u \in H^1(\Omega)$* $\gamma_0(T(u)) = T(\gamma_0(u))$

Chapitre 4

La méthode de Galerkin

4.1 L'idée de la méthode de Galerkin

4.1.1 Étape (01)

Partant d'un problème variationnelposé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximationdans une suite de sous-espaces de dimension finie.

4.1.2 Étape (02)

On résout ensuite le problème approché en dimension finie, ce qui est en général plus facile que de résoudre di-rectement en dimension infinie.

4.1.3 Étape (03)

Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infinipour construire une solution du problème de départ.

4.2 Résolution du problème modèle par la méthode de Galerkin

Soit Ω unouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit f fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, il s'agit de trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. De façon équivalente, il s'agit de résoudre le problème variationnel : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f(u).v dx \tag{4.1}$$

4.2.1 Étape (01)

Lemme 2. *Soit V un espace vectoriel normé séparable de dimension infinie.*

Il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}, v_i \in V$, telle que les combinaisons linéaires des v_i sont denses dans V . De plus, on peut les choisir de telle sorte à ce que la suite des sous-espaces vectoriels

$$V_m = vect\{v_i, 0 \leq i \leq m\}$$

soit croissante.

Preuve 4.1. *Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de V .*

Il existe au moins un (w_n) non nul. On note $v_0 = w_{n0}$ le premier d'entre eux. On procède ensuite par récurrence. Supposons extraite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre $(w_{ni}), 0 \leq i \leq m($ on pose $v_i = w_{ni})$ telle que

$$vect\{w_k, 0 \leq k \leq n_m\} = vect\{v_i, 0 \leq i \leq m\} = V_m.$$

Comme $dimV_m = m + 1$, c'est un sous-espace vectoriel strict de V et il est fermé.
Comme la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans V, l'ensemble des entiers $n > n_m$ tel que $w_n \notin V_m$ n'est pas vide.
On prend pour $n_m + 1$ son plus petit élément ($\mathbb{N}$ est bien ordonné) et l'onpose $v_{m+1} = w_{n_m+1}$.
Par construction, on a bien $vect\{w_k, 0 \leq k \leq n_m + 1\} = V_{m+1}$.
La famille $(v_i)_{n\in\mathbb{N}}$ répond donc à la question et la famille de sous-espaces vectoriels associée est bien croissante.

■

4.2.2 Étape (02)

Lemme 3. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le problème variationnel : trouver $u_m \in V_m$ tel que*

$$\forall v \in V_m : \int_\Omega \nabla u_m.\nabla v dx = \int_\Omega f(u_m).v dx \tag{4.2}$$

admet au moins une solution.

Preuve 4.2. *On munit V_m du produit scalaire hérité de $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$(u|v)_m = \int_\Omega u.v dx,$$

et l'on identifie V_m, espace euclidien de dimension finie, et son dual par l'intermédiaire de ce produit scalaire.
L'application

$$(u,v) \longrightarrow a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$$

est une forme bilinéaire sur V_m. Il existe donc une application linéaire $A_m \in \mathcal{L}(V_m)$ telle que $a(u,v) = (A_m(u)|v)_m$.
Comme V_m est de dimension finie, cette application est continue.
De même, il existe une application $F_m : V_m \longrightarrow V_m$ telle que pour tout couple (u,v) de V_m,

$$\int_\Omega f(u) v dx = (F_m(u)|v)_m.$$

Il suffit de prendre $F_m = \prod_m \circ \widetilde{f}$, où $\prod_m$ est la projection orthogonale L^2 sur V_m. Cette application, non linéaire cette fois, est également continue, comme composée d'applications continues (on utilise ici le théorème de Carathéodory). Le problème (4.2) se réécrit donc : trouver

$$u_m \in V_m \text{ tel que } \forall v \in V_m, (A_m(u_m)|v)_m = (F_m(u_m)|v)_m,$$

soit, en introduisant la fonction continue $P_m : V_m \longrightarrow V_m, P_m(u) = A_m(u) - F_m(u)$,

$$P_m(u_m) = 0. \tag{4.3}$$

Pour résoudre ce problème, on va appliquer le Théorème (2.7). Pour cela, il faut calculer $(P_m(u)|u)_m$ sur une sphère et montrer que l'on peut choisir celle-ci pour que le produit scalaire soit positif. Par définition du produit scalaire sur V_m, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl}
(P_m(u)|u)_m & = & \displaystyle\int_\Omega P_m(u) u dx = a(u,u) - \int_\Omega f(u) u dx \\
& \geq & \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} - \| f \|_{L_\infty(\mathbb{R})} \| u \|_{L^2(\Omega)} (mes\Omega)^{1/2} \\
& \geq & \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} - C_\Omega \| f \|_{L_\infty(\mathbb{R})} \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} (mes(\Omega))^{1/2} \\
& = & \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} (\| \nabla u_{L^2(\Omega)} \| - C_\Omega \| f \|_{L_\infty(\mathbb{R})} (mes(\Omega))^{1/2})
\end{array}$$

où C_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré. Nous voyons donc que

$$\| \nabla u_{L^2(\Omega)} \| \geq C_\Omega \| f \|_{L_\infty(\mathbb{R})} (mes(\Omega))^{1/2} \Rightarrow (P_m(u)|u)_m \geq 0$$

Or toutes les normes sont équivalentes sur V_m, qui est de dimension finie. Par conséquent, il existe $\rho_m > 0$ tel que $\sqrt{(u|u)_m} \geq \rho_m$ entraîne que l'on a

$$\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \geq C_\Omega \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R})} (mes(\Omega))^{1/2}.$$

Par le Théorème (2.7), le problème (4.3) admet une solution u_m telle que

$$\sqrt{(u_m|u_m)_m} \leq \rho_m.$$

Nous avons construit une suite $(u_m)_m \in \mathbb{N}$ de solutions du problème approché. Notons que nous aurions également pu appliquer le théorème de Brouwer lui-même en suivant de plus près la démonstration d'existence par point fixe.

■

4.2.3 Étape (03)

Il s'agit maintenant de passer à la limite quand la dimension $m+1$ tend vers l'infini. On commence par une estimation uniforme par rapport à m.

Lemme 4. *La suite $(u_m)_{m\in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve 4.3. *On reprend le calcul précédent :*

$$a(u_m, u_m) = \int_\Omega f(u_m)u_m dx \leq C_\Omega \parallel f \parallel_{L_\infty(\mathbb{R})} (mes(\Omega)^{1/2}) \parallel \nabla u_m \parallel_{L^2(\Omega)}$$

Par conséquent,

$$\parallel \nabla u_m \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \parallel f \parallel_{L_\infty(\mathbb{R})} (mes(\Omega)^{1/2})$$

■

On peut maintenant passer à la limite dans le problème variationnel

Lemme 5. *Toute sous-suite faiblement convergente de la suite u_m converge vers une solution du problème (4.1).*

Preuve 4.4. *Soit une sous-suite $u_{m'}$ telle que $u_{m'} \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (il en existe d'après le lemme précédent).*

Par le théorème de Rellich, on a donc $u_{m'} \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Par conséquent, le théorème de Carathéodory implique que $f(u_{m'}) \longrightarrow f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort.
Fixons un entier i. Comme la suite V_m est croissante, pour tout $m \geq i, v_i \in V_m$.
Par conséquent, on peut appliquer l'équation (4.2) avec la fonction test v_i :

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla v_i dx = \int_\Omega f(u_m) v_i dx$$

Comme $\nabla u_{m'} \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a d'une part

$$\int_\Omega \nabla u_{m'} \nabla v_i dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v_i dx.$$

Comme $f(u_{m'}) \longrightarrow f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort d'autre part, on a également

$$\int_\Omega f(u_{m'}) v_i dx \longrightarrow \int_\Omega f(u) v_i dx.$$

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v_i dx = \int_\Omega f(u) v_i dx.$$

Comme cette équation est linéaire par rapport à v_i, elle reste vraie pour les combinaisons linéaires des v_i, soit

$$\forall z \in \cup_{j=0}^{\infty} V_j, \int_\Omega \nabla u \nabla z dx = \int_\Omega f(u) z dx. \tag{4.4}$$

Enfin, $\cup_{j=0}^{\infty} V_j$ est dense dans V . Pour tout $v \in V$, il existe une suite $zj \in Vj$ telle que $z_j \longrightarrow v$ dans V fort. On applique l'égalité précédente avec $z = z_j$ et l'on passe à la limite quand $j \longrightarrow +\infty$ sans difficulté pour conclure que u est bien solution du problème (4.1).

■

4.3 Résolution d'un modèle ultra-simplifier

4.3.1 Les équations de Naviers-Stokes stationnaires

Les équations de Navier-Stokes sont des équations extrêmement importantes qui décrivent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible ou compressible, stationnaire ou instationnaire. Dans le cas incompressible stationnaire, elles prennent la forme suivante. On cherche un couple (u, p), où u est la vitesse du fluide (laquelle a trois composantes en dimension trois, donc à valeurs vectorielles) et p la pression (une fonction scalaire), qui satisfait

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u\nabla)u - \nabla p & = f \quad \text{dans } \Omega \\ \\ \quad divu & = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

avec des conditions aux limites appropriées, par exemple $u = 0$ sur $\partial\Omega$. La constante ν est la viscosité du fluide, l'opérateur $u\nabla$ est défini par $[(u\nabla)v]_i = u_j \partial_j v_i$ avec sommation de 1 à 3 par rapport à l'indice répété j, et f est une densité de forces

appliquées, par exemple la gravité. La relation $divu = 0$ exprime l'incompressibilité du fluide. Il s'agit de la version stationnaire du problème, puisqu'il n'y a pas de dépendance en temps.
nous allons considérer une équation plus simple, mais qui présente une non linéarité analogue à celle des équations de Navier-Stokes et qui partage donc certaines de ses propriétés.
Nous allons donc chercher une fonction scalaire u telle que

$$\begin{cases} -\Delta u + u\partial_1 u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ \\ \qquad u &= 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.6}$$

Pour appliquer la méthode de Galerkin, nous allons avoir besoin d'une famille totale un peu particulière. On commence par un résultat de densité.

Lemme 6. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^d$ et soit $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.*

Lemme 7. *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u\partial_1 u \in L^s(\Omega)$ avec*

$$\begin{cases} Si \quad d = 1, \ alors \quad 1 \leq s \leq 2 \\ \\ Si \quad d = 2, \ alors \quad 1 \leq s < 2 \\ \\ Si \quad d \geq 3, \ alors \quad 1 \leq s \leq \dfrac{d}{d-1} \end{cases}$$

Preuve 4.5. *D'après les injections de Sobolev*

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega) \circlearrowleft L^\infty(\Omega), & Si \quad d = 1 \\ \\ H_0^1(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega), \ pour \ q < +\infty & Si \quad d = 2 \\ \\ H_0^1(\Omega) \circlearrowleft L^{2^*}(\Omega), \ avec \ 2^* = \dfrac{2d}{d-2} & Si \quad d \geq 3 \end{cases}$$

Par l'inégalité de Hôlder, pour tout couple de nombres positifs (θ, θ') tels que

$$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$$

on a

$$\int_\Omega |u\partial_1 u|^s dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{s\theta} dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_\Omega |\partial_1 u|^{s\theta'} dx\right)^{\frac{1}{\theta'}}.$$

Pour $d \geq 3$ On saura conclure si $1 \leq s\theta \leq 2^*$ et $1 \leq s\theta' \leq 2$, i.e., $s(\frac{1}{2^*} + \frac{1}{2}) \leq 1$ et $s \geq 1$. Comme $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{2} = \frac{d-1}{d}$, on obtient le résultat dans ce cas.

Pour $d = 2$ Le même calcul donne $s(\frac{1}{q} + \frac{1}{2}) \leq 1$ pour un certain $q < +\infty$, soit $s < 2$.
Pour $d = 1$ est trivial.

■

Remarque 4.1.

(i) Cette Lemme permet de préciser le sens à donner à l'équation aux dérivées partielles du problème (4.6). Étant donné $f \in H^{-1}(\Omega)$, on va donc chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u + u\partial_1 u = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.7}$$

Cette équation a un sens, puisque l'on a $\nabla u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et $-\Delta u = -div(\nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$. De plus, $u\partial_1 u \in L^s(\Omega)$ pour les valeurs de s données dans le lemme. Tous les termes de l'équation sont donc des distributions parfaitement bien définies.

(ii) Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (4.7), alors nécessairement $u\partial_1 u \in H^{-1}(\Omega)$.
L'information $u\partial_1 u \in H^{-1}(\Omega)$ est une information supplémentaire apportée par l'équation si on a $L^s(\Omega) \not\subset H^{-1}(\Omega)$.
Comme, par dualité, $L^s(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ est équivalent à $H_0^1(\Omega) \subset L^{s'}(\Omega)$ avec $s' = 2$ pour $d = 1, s' > 2$ pour $d = 2$ et $s' = d$ pour $d \geq 3$, on voit grâce aux injections de Sobolev que si $d \geq 5, L^s(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.
En particulier, dans les cas ń physiques ż, $d = 1, 2, 3$, l'équation (4.7) a lieu a priori au sens de $H^{-1}(\Omega)$.

Nous allons montrer le théorème d'existence suivant par la méthode de Galerkin

Théorème 4.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (4.6).*

On commence par construire une base de Galerkin appropriée. Dans la suite s' prend les valeurs indiquées dans la remarque (ii) qui suit le Lemme (7).

4.3.2 Étape (01)

Lemme 8. *Il existe une famille dénombrable $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont les combinaisons linéaires sont denses dans $H_0^1(\Omega) \cap L^s(\Omega)$.*

Preuve 4.6. *Comme $H_0^1(\Omega)$ et $L^{s'}(\Omega)$ sont tous deux séparables pour leur norme respective, il vient que $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{s'}(\Omega)$ est séparable pour sa norme naturelle*

$\| v \|_{H_0^1(\Omega)} + \| v \|_{L^{s'}(\Omega)}$. En effet, V est isométrique au sous-ensemble

$$\Delta = \{(v, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^s(\Omega)\}$$

du produit cartésien $H_0^1(\Omega) \times L^{s'}(\Omega)$ muni de la norme

$$\| (v,w) \| = \| v \|_{H_0^1(\Omega)} + \| w \|_{L^{s'}(\Omega)}$$

, lequel est clairement séparable. On utilise maintenant le fait que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est dense dans V , cf. Lemme (6), pour construire une famille dénombrable dense formée d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on conclut en utilisant le Lemme (2).

■

4.3.3 Étape (02)

Considérons maintenant le problème variationnel approché en dimension finie.

Lemme 9. *Soit $V_m = vect\{w_0, w_1, w_2, ..., w_m\}$. Le problème : trouver $u_m \in V_m$ tel que*

$$\forall v \in V_m : \int_\Omega \nabla u_m.\nabla v dx + \int_\Omega u_m \partial_1 u.v dx =< f, v > \tag{4.8}$$

admet au moins une solution. De plus cette solution satisfait

$$\| \nabla u_m \|_{L^2(\Omega)} \leq \| f \|_{H^{-1}(\Omega)} . \tag{4.9}$$

Preuve 4.7. *On commence par remarquer que par construction des w_i, $V_m \subset \mathcal{D}(\Omega)$. On*

munit V_m du produit scalaire L^2 (sans notation spécifique cette fois). Comme

précédemment, il existe deux applications continues A_m et B_m de V_m dans V_m telles que

$$\forall z, v \in V_m, \begin{cases} \int_\Omega \nabla z \nabla v dx &= \int_\Omega A_m(z) v dx \\ \int_\Omega z \partial_1 z v dx &= \int_\Omega B_m(z) v dx \end{cases}$$

,

De même, il existe $F_m \in V_m$ tel que

$$\forall v \in V_m, < f, v >= \int_\Omega F_m v dx.$$

Posant $P_m(z) = A_m(z) + B_m(z)?F_m$, le problème variationnel se réécrit donc sous la forme : trouver $u_m \in V_m$tel que

$$P_m(u_m) = 0.$$

Pour résoudre une telle équation en utilisant le Théorème (2.7), nous sommes donc

amenés à calculer les produits scalaires :

$$\int_\Omega P_m(z)zdx = \int_\Omega \nabla z \nabla z dx + \int_\Omega z^2 \partial_1 z dx - < f, z >, \tag{4.10}$$

pour $z \in V_m$. Or, comme $V_m \subset \mathcal{D}(\Omega)$, on a aussi $z^3 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\partial_1(z^3) = 3z^2\partial_1 z$. Par conséquent,

$$\int_\Omega z^2 \partial_1 z dx = \frac{1}{3} \int_\Omega \partial_1(z^3) dx = 0,$$

et le produit scalaire (4.10) se réduit donc à

$$\int_\Omega P_m(z)zdx = \int_\Omega \nabla z \nabla z dx - < f, z > . \tag{4.11}$$

On constate que le terme non linéaire a disparu. Il est alors élémentaire de trouver une sphère sur laquelle $\int_\Omega P_m(z)zdx \geq 0$, ce qui permet de conclure à l'existence de u_m.

Reprenant alors (4.11) pour $z = u_m$, on obtient

$$\| \nabla u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_m dx = < f, u_m > \leq \| \nabla u_m \|_{L^2(\Omega)} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)},$$

d'où l'estimation (4.9).

■

D'après l'estimation (4.9), nous pouvons extraire de la suite u_m une sous-suite, toujours notée u_m, qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite u. Nous sommes alors en mesure d'achever la démonstration du Théorème (**??**).

4.3.4 Étape (03)

Lemme 10. *. La limite faible $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème variationnel :*

$$\forall v \in V, \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega u \partial_1 u v dx = < f, v > . \tag{4.12}$$

En particulier, u est solution du problème (4.6).

Preuve 4.8. *Fixons un indice i. Pour tout $m \geq i, w_i \in V_m$ et nous avons donc*

$$\int_{\Omega} \nabla u_m \nabla w_i dx + \int_{\Omega} u_m \partial_1 u_m w_i dx =< f, w_i > . \tag{4.13}$$

Comme $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$, on a immédiatement

$$\int_{\Omega} \nabla u_m \nabla w_i dx \longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla w_i dx.$$

Par ailleurs, par le théorème de Rellich, $u_m \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Comme $w_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit tout aussi immédiatement que $u_m w_i \longrightarrow u w_i$ dans $L^2(\Omega)$ fort.
En effet,

$$\int_{\Omega} (u_m w_i - u w_i)^2 dx \leq \max_{\overline{\Omega}} (w_i^2) \parallel u_m - u \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

.

Combiné avec la convergence faible de $\partial_1 u_m$, ceci donne pour le terme non linéaire

$$\int_{\Omega} u_m w_i \partial_1 u_m dx \longrightarrow\longrightarrow \int_{\Omega} u w_i \partial_1 u dx.$$

Par conséquent, passant à la limite quand $m \longrightarrow +\infty$ dans (4.13), nous obtenons (le second membre ne dépend pas de m)

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla w_i dx + \int_{\Omega} u \partial_1 u w_i dx =< f, w_i > .$$

Cette égalité est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$. Elle implique par combinaisons linéaires que

$$\forall v \in \cup_{j=0}^{\infty} V_j, \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u \partial_1 u v dx =< f, v > .$$

Ici encore, $\cup_{j=0}^{\infty} V_j$ est dense dans $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{s'}(\Omega)$. Pour tout $v \in V$, il existe donc une suite $v_j \in V_j$ telle que $v_j \longrightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort et dans $L^{s'}(\Omega)$ fort. D'après la première convergence

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v_j dx \longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, < f, v_j > \longrightarrow < f, v >$$

d'une part, et d'autre part, par la deuxième convergence

$$\int_{\Omega} u \partial_1 u v_j dx \longrightarrow \int_{\Omega} u \partial_1 u v dx.$$

En effet, on a vu que $u \partial_1 u \in L^s(\Omega)$. On obtient donc bien le problème variationnel (4.12).

Pour conclure, on remarque que $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$, ce qui implique que u est bien solution du problème (4.6) de départ.

$\blacksquare$

Chapitre 5

Éléments de théorie des opérateur elliptique linéaire

5.1 Le principe du maximum fort

Théorème 5.1. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$, $A \in M$ avec $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\exists \lambda > 0 tq$*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \overline{\Omega}$$

et $\xi \in I\!R^n$.

Un vecteur $b \in (C^0(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$ et une fonction $c \in C^0(\overline{\Omega})$ tq $c(x) \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$ $\forall u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ qui satisfait :

$$\begin{cases} \underbrace{-a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_j(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x)}_{Lu} \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est positive ou null dans $\overline{\Omega}$.

Lemme 11. *Soit $L' = -a_{ij}\partial_{ij}$ .Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ atteint un minimal local en un point $x_0 \in \Omega$,alors $L'u(x_0) \leq 0$.*

Lemme 12. *Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tq $Lu \geq 0$ dans Ω alors :*

i) Si $c = 0$ on a $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$
ii) Si $c \geq 0$, on a $\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u$

Preuve 5.1.

i) Ω est bornée alors $\overline{\Omega}$ est compact (puisque elle est continue sur un bornée alors u atteint ses bornes)

* On suppose dans premier temps que $L(u) \geq \eta > 0$ dans Ω. Si u atteint son minimum sur $\partial\Omega$, il y rien a démontrer.
  Supposons que u atteint son minimum en point x_0 de Ω. En ce point intérieur ,$\Delta u(x_0) = 0$ donc $Lu(x_0) = L'u(x_0) \leq 0 \leq$ d'aprés lem (11) contraduction donc $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

* Supposons maintenant que $Lu \geq 0$ dans Ω .
  $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1}$,les constante ε et γ à choisir

$$L(\varepsilon e^{\gamma x_1}) = (-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma)e^{\gamma x_1}$$

On choisis γ assy grand pour

$$\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{c^0}\gamma > 0$$

$$(\lambda > 0 : a_{11} > \lambda(\text{coercive } \xi = e_1))\|b_{1\|_{c^0}} \geq |b_1|$$

$$-a_{11}\gamma^2 + b_1(x)\gamma \leq -\lambda\gamma^2 + \|b_{1\|_{c^0}}\gamma < 0$$

donc :

$$L(\varepsilon e^{\gamma x_1}) \geq (\lambda\gamma^2 - \|b_1\|\gamma)e^{\gamma x_1}$$

On pose

$$\eta = \lambda\gamma^2 - \|b_{1\|_{c^0}} \times \min_{\overline{\Omega}} e^{\gamma x_1}$$

donc

$$Lu_\varepsilon = Lu - \varepsilon L(e^{\gamma x_1}) \geq \eta > 0 \quad dans\ \Omega$$

donc u_ε atteint son min sur $\partial\Omega$

$$\min_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \min_{\partial\Omega} u_\varepsilon = \min_{\partial\omega}(u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1})$$

Alors

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

.

ii) Si $u \geq 0$ dans Ω alors $u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ par continuité ,donc $\min_{\overline{\Omega}} \geq 0$ et $u = 0$ il n'y a rein a démontrer .
Supposons que u pronne des valeurs strictement négative dans ω et posons :$\Omega x \in \Omega / u(x) < 0$.c'est un ouvert non vide .En plus $Lu = Lu - cu \geq 0$ dans Ω et il n'a pas de terme d'ordre 0.D'aprés le cas(i) ($\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$)
Donc il est clair que $\min_{\overline{\Omega}_-} u = \min_{\Omega} u$ (par définition parceque sur $\overline{\Omega}_-$, $u \geq 0$)
$u \leq 0, \forall x \in \partial\Omega\Omega_-$ donc $u = u_-$ sur $\partial\Omega_-$
De plus $(\partial\Omega_- \cap \Omega) \cup (\partial\Omega_- \cap \partial\Omega) = \partial\Omega_-$

Si $x \in (\partial\Omega_- \cap \Omega)$ alors $u(x) = 0$ (sinon $u(x) < 0(x \in \Omega_-)$),
Comme $\min_{\overline{\Omega}} < 0$ on voit que :

$$\min_{x\in\partial\Omega_-}(u(x)) = \min_{x\in\partial\Omega_-}(-u(x)) = \min_{\partial\Omega_-\cap\partial\Omega}(-u(x)) = \min_{x\in\partial\Omega}(-u(x))$$

ce qui termine la démonstration.

■

Preuve 5.2. *Démonstration de le théorème (5.1) :*
Appliquant lem (12), on a $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$ donc $u_- = 0$ sur $\partial\Omega$ donc $\min_{\overline{\Omega}} \geq 0$ alors $u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$

■

Remarque 5.1. *Le principe de maximum forte entraine l'unicité de la solution du problème de Dirichlet de $C^0 \cap C^2$.En effet $Lu = 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ entrain $u \geq 0$ et $u \leq 0$.*

Définition 5.1. *condition de sphère interieur :*

$$\forall x \in \partial\Omega, \exists B(y,R) \subset \Omega \ tq \ B(y,R) \cap \partial\Omega = \varnothing$$

(i.e :on peut placer une boule sous un graphe de C^2)

Théorème 5.2. *Soit Ω satisfait la condition de sphère interieur et soient L et U $\in C^1(\overline{\Omega}) \cap (C^2(\Omega))$ satisfaisant les memes hypothèse de theoreme (5.1) .*

Si u atteint un minimum local strict en un point $x_0 \in \partial\Omega$ dans le cas $C = 0$ ou bien un minimum local strict négatif dans le cas $c \geq 0$ alors $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}(x_0) = \eta_i(x_0)\partial_i u(x_0) < 0$.

Preuve 5.3. *Soit $B(y_0, R)$ la boule associe au point x_0 par la condition de sphère (On peut toujours choisir R assay petit*

pour que $u(x_0) < u(x), \forall x \in B(y_0, R)$ puisque x_0 est un point de minimum local strict).On pose :

$$v(x) = e^{-\gamma|x-y_0|^2} = e^{-\gamma R^2} = e^{-\gamma R^2}\left(e^{-\gamma|x-y_0|^2-R^2} - 1\right)$$

$v(x) = 0$ sur le sphère $S(y_0, R)$ $[|x - y_0| = R,$ *donc* $v(x) = 0]$ et
$v(x) > 0$ dans la boule $B(y_0, R)$:

$$\left[|x - y_0| < R \Rightarrow |x - y_0|^2 - R^2 \leq 0 \Rightarrow -\gamma|x - y_0|^2 - R^2 \geq 0 \Rightarrow e^{-\gamma|x-y_0|^2-R^2} - 1 \geq 0\right]$$

Par calcule élémentaire :

$$\begin{aligned} Lv(x) &= -a_{ij}\partial_{ij}v(x) + b_i\partial_i v(x) + c(x)v(x) \\ &= \left[-4\gamma a_{ij}(x_{i-y_{ij}})(x_j - y_{ij}) + 2\gamma(a_{ii} - b_i(x_i - y_{0i}))\right] \\ &= xe^{-\gamma|x-y|^2} + c(x)v(x) \end{aligned}$$

par coirsivité de A et du fait que $c(x)e^{-\gamma R^2} \geq 0$
On voit que :

$$Lv(x) \leq -4\gamma^2\lambda|x-y_0|^2 + 2\gamma(a_{ii} + \|b_i\|x_i - y_{0i})e^{-\gamma|x-y_0|^2}$$

En particulier, si $x \in B(y_0, R)\ \overline{B}(y_0, R/2)$

$$Lv(x) \leq (-\gamma^2\lambda R^2 + 2\gamma(\|a\|_{c^0} + \|b\|_{c^0}R) + \|c\|_{c^0})e^{\dfrac{-\gamma R^2 - y}{4}}$$
$$R \geq |x-y_0|R/2$$

Choissisant un γ assay grand pour

$$-\gamma^2\lambda R^2 + 2\gamma(\|a\|_{c^0} + \|b\|_{c^0}R) + \|c\|_{c^0} < 0$$

On voit que sur $\overline{O}$, $Lv(x) < 0$
Considerons maintenant :

$$z(x) = u(x) - u(x_0) - \varepsilon v(x)$$

sur l'ouvert O :

$$Lz(x) = Lu(x) - Lu(x_0) - \varepsilon Lv(x) > 0$$

Soit $c = 0$ ou $c(x) \geq 0$ avec $u(x_0) \leq 0$
Deplus $\partial\theta = S(y_0, R) \cup S(y_0, R/2)$

$$\text{Sur le sphère } S(y_0, R) : z = u - u(x_0) \geq 0$$

$$\text{Sur le sphère } S(y_0, R/2) : z = u - u(x_0) \geq \eta > 0$$
$$\varepsilon \leq \frac{\eta}{e^{-\gamma R^2/2 - \gamma R^2}}$$

$z(x) = u(x) - u(x_0) - \varepsilon v(x) \geq 0$ sur le sphère $S(y_0, R/2)$
On applique théorème (**??**) à la fonction z sur O

$$\forall x \in O : u(x) \geq u(x_0) + \varepsilon v(x)$$

restrent sur le segment $x_0 - t\eta(x_0), R/2 \geq t > 0$

$$\frac{u(x_0 - t\eta(x_0)) - u(x_0)}{t} \geq \varepsilon\frac{v(x_0 - t\eta(x_0))}{t} \longrightarrow 2\varepsilon\gamma R \text{ quand } t^+ \longrightarrow 0^+$$

On déduit que
$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \leq -2\varepsilon\gamma R \longrightarrow_{\varepsilon\longrightarrow 0} 0$$

■

Théorème 5.3. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$, connexe et $u \in C^\circ(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tq $Lu \geq 0$ dans Ω*

On note $m = min_{\overline{\Omega}} u$. Alors

$$\text{Si } c = 0 \text{ ou si } c \geq 0 \text{ et } m \leq 0 \text{ Alors } u \equiv m \text{ sur } \overline{\Omega} \text{ ou } u > m \text{ dans } \Omega$$

Théorème 5.4. *Soit $\eta > 0$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tq*

$$\begin{cases} Lu + \eta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ u = g & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Alors
$$\| u \|_{C^\circ(\overline{\Omega})} \leq max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\}$$

Preuve 5.4. *D'abord comme u satisfait l'équation non seulement dans Ω mais aussi dans $\overline{\Omega}$, on a nécesserment $f \in C^\circ(\overline{\Omega})$*

Posons $v = u - max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\}$
On a $v \leq u - \| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)} \leq 0$ sur $\partial\Omega$ parceque

$$max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \geq \| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}$$

et
$$\begin{aligned} Lv + \eta v &= f - (c + \eta)max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \\ &\leq f - \frac{c}{\eta} \| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})} - \| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})} \\ &\leq -\frac{c}{\eta} \| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc par principe de maximum fort

$$v \leq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}$$

alors

$$u \leq max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \text{ dans } \overline{\Omega}$$

De même manière $v = u + max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\}$
On trouve

$$v \geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}$$

alors

$$u \geq -max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \text{ dans } \overline{\Omega}$$

Alors

$$\| u \|_{C^\circ(\overline{\Omega})} \leq max\{\| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)}; \frac{\| f \|_{C^\circ(\overline{\Omega})}}{\eta}\}$$

■

Théorème 5.5. *Soit $u \in C^\circ(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tq $Lu = f$ dans Ω avec f bornéé dans Ω et $u = g$ sur $\partial\Omega$*

Alors $\exists C($ diamétre de Ω, $\| b \|_{C^\circ}, \lambda$) tq

$$\| u \|_{C^\circ(\overline{\Omega})} \leq \| g \|_{C^\circ(\partial\Omega)} + C \sup_{\Omega} |f|$$

5.2 Le principe de maximum faible

Théorème 5.6. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tq $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\lambda > 0$ tq $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda \| \xi \|^2, \forall \xi \in I\!R^n, x \in \Omega$ et $c \in L^\infty(\Omega).c(x) \geq \eta > 0$*

Toute une fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui satisfait

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + cu & \geq 0 \\ u_- \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est positive ou nulle p.p dans Ω.

Remarque 5.2. *T estune distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive ssi $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \phi(x) \geq 0$ dans Ω alors $< T, \phi > \geq 0$*

Lemme 13. *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ tq $f \geq 0$ au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$, Alors*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), < f, v >_{H^{-1},H_0^1} \geq 0$$

Preuve 5.5. *(preuve de théorème (5.6) I suffit de montrer que $u_- = 0$. Comme on a $u_- \in H_0^1(\Omega)$,*

il suffit de montrer que $\nabla u_- = 0$. Puis on applique l'inégalité de poincarré. Soit donc $f = -div(A\nabla u) + cu \in H^{-1}(\Omega)$

$$0 \leq < f, u_- >_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega A\nabla u \nabla(u)_- + \int_\Omega cuu_-$$

On a $\nabla(u_-) = -1\!\!1_{u\leq 0}\nabla u = -(1\!\!1_{u\leq 0})^2\nabla u$, alors

$$A\nabla u\nabla(u_-) = -A\nabla u[(1\!\!1_{u\leq 0})^2\nabla u]$$

$$= -[A\nabla u 1\!\!1_{u\leq 0}\nabla u][A\nabla u 1\!\!1_{u\leq 0}\nabla u] = -A\nabla(u_-)\nabla(u_-)$$

De même $(u_-) = -1\!\!1_{u\leq 0}u = -(1\!\!1_{u\leq 0})^2 u$ d'ou

$$cuu_- = -c(u_-)^2$$

Alors

$$\int_\Omega A\nabla u_-\nabla(u)_- + \int_\Omega cu_-u_- \leq 0$$

A est coercive, alors

$$\lambda \parallel \nabla u_- \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq 0 \Rightarrow \parallel_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow \nabla u_- = 0$$

■

On a $u_+ = max(u(x), 0)$ et $u_- = -min(u(x), 0)$

Théorème 5.7. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ symétrique.*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0 \text{ p.p }, a_{ij} \in L^\infty(\Omega), c \in L^\infty(\Omega).c(x) \geq \eta > 0$$

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$-div(A\nabla u) + cu = f, \text{ au sens } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{5.1}$$

satisfait :

$$\parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\eta} \parallel f \parallel_{L^\infty(\Omega)}$$

Preuve 5.6. *Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, $k \geq 0$. On a $(u - k)_+ \in H_0^1(\Omega)$, alors*

$$5.1 \Leftrightarrow \int_\Omega A\nabla u\nabla(u-k)_+ + \int_\Omega cu(u-k)_+ = \int_\Omega f(u-k)_+$$

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla(u-k)_+ = \int_\Omega A\nabla(u-k)\nabla(u-k)_+ \text{ parceque } \nabla(-k)=0$$

On a $(u-k) = (u-k)_+ - (u-k)_-$ et $(u-k)_+ \times (u-k)_- = 0$ ou $\nabla(u-k)_+ = \mathbb{1}_{u>k}\nabla(u-k)$ et $\mathbb{1}_{u>k} = (\mathbb{1}_{u>k})^2$

$$= \int_\Omega A\nabla(u-k)_+\nabla(u-k)_+ \geq 0 \text{ parceque } A \text{ est coercive}$$

Alors

$$\int_\Omega cu(u-k)_+ \leq \int_\Omega f(u-k)_+$$

Puisue Ω est borné, on peut soustraire $displaystyle \int_\Omega ck(u-k)_+$ Alors

$$\int_\Omega c(u-k)(u-k)_+ \leq \int_\Omega (f-ck)(u-k)_+$$

$$\eta \parallel (u-k)_+ \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega c(u-k)(u-k)_+ \leq \int_\Omega (f-ck)(u-k)_+$$

Donc

$$\eta \parallel (u-k) \parallel^2_{L^\infty} \leq \int_\Omega (f-ck)(u-k)_+$$

Si $k = \dfrac{\parallel f \parallel_{L^\infty}}{\eta}$ alors $f - ck \leq 0$ p.p. Comme $(u-k)_+ > 0$ p.p

Donc

$$displaystyle \int_\Omega (f-ck)(u-k)_+ \leq 0 \text{ p. p}$$

Donc

$$(u-k)_+ = 0 \text{ i.e } u \leq 0 \text{ p. p}$$

De même manière on peut prendre $v = (u+k)_-$ et $k = \dfrac{\parallel f \parallel_{L^\infty}}{\eta}$, On trouve

$$(u+k)_- = 0 \text{ i.e } u \geq -k \text{ p. p}$$

Donc

$$-\frac{\parallel f \parallel_{L^\infty}}{\eta} \leq u \leq \frac{\parallel f \parallel_{L^\infty}}{\eta}$$

Alors

$$\parallel u \parallel_{L^\infty} \leq \frac{\parallel f \parallel_{L^\infty}}{\eta}$$

$\blacksquare$