RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
ET DE L'INFORMATIQUE

Cours d'analyse complexe

2$^{\text{ème}}$ Année LMD

Mathématiques et Informatique

Réalisé par

Dr **Souhila Sabit**

Expertisé par :

Pr **Benouda Hedia** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Pr **GHEZAL Abderrezak** - Université Kasdi Merbah de Ouargla .

Pr **LAZREG Jamal Eddine** - Université Djillali LIABES Sidi-Bel-Abbès.

2023

Table des matières

Introduction

Les premiers résultats mathématiques qui a été estimées par les humains c'était les chiffres ,et on travaillé dur pour développer l'ensemble des nombres réels, ce dernier qui ne couvre pas lanécessité pour les mathématiciens au cours de recherche des solutions aux problèmes sur les équations du second degré avec son delta négatifs, tels que : $x^2 + 2 = 0$

Les mathématiciens sont obligé de chercher de nouveaux moyens de couvrir l'insuffisance dans l'ensemble des nombres réels, a été le résultat de recherche est l'accès au nouveau numéro appelé plus tard le nombre complexe, où l'idée de cette question a conduit à l'expansion de la gamme des nombres réels d'un groupe peuvent être obtenues dans laquelle les solutions aux équations mentionnées ci-dessus, il a appelé le numéro de groupe complexe (ou composite), ils sontgénéralisés l'analyse et faciliter les intégrations complexes, pour tomber tout cela dans un domaine indépendant, celle de l'analyse complexe, qui est devenu une partie essentielle de la nécessité quotidienne, des ingénieurs, des physiciens ...,
Parmi les questions abordées par l'analyse complexe, l'intégrales réels qui a toujours été un obstacle dans la voie des mathématiciens et physicien.

Mais avant d'entrer dans le coeur de la question dont il est détendu intégration utilisant l'intégration de notre rapport, nous devons d'abord connaître les propriétés des nombres complexes, nous allons examiné dans le premier chapitre, la construction de $\mathbb{C}$, la forme algébrique et la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Ensuite dans le deuxième chapitre, les Fonction de la variable complexe qui contient une définition de la fonction de la variable complexe, les fonctions holomorphes, fonctions analytiques, les condition de Cauchy-Riemann et les fonctions harmoniques. Troisième chapitre est les fonctions élémentaires : fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques et fonctions puissances.

Le Calcul intégral est le quatrième chapitre qui contient intégrale curviligne, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, formule de la moyenne, formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, inégalité de Cauchy et théorème de Liouville-Théorème de Morera.
Ensuit le cinquième chapitre est développement en série Taylor et en série de Laurent :

1. Développement en séries de Taylor.
2. Développement en série de Laurent.
3. Singularité isolées d'une fonction complexe .

Enfin sixième chapitre est théorème des résidus et ses applications qui contient théorème des résidus, calcul des résidus, applications au calcul intégral et á la sommation des séries, principe de l'argument et théorème de Rouché et conclusion de ce cours.

Chapitre 1

Topologie dans le plan complexe

1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1.1. *[1, 5, 6, 8]*

On appellerons corps des nombres complexes, et notons $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies ainsi :

Pour tout $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$(a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b')$$
$$(a,b) \otimes (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$$

Remarque 1.1. *$\mathbb{C}$ est corps commutatif.*

Notation 1.1.

Pour simplifier les écritures, nous écrivons $+$ et $\times$ à la place des lois de composition les internes $\oplus$ et $\otimes$.

Pour tout nombre réel a, nous convenons d'identifier le nombre $(a,0)$ avec le réel a. Nous noterons ailleurs i le nombre complexe $(0,1)$.
Appliquant cette convention et utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$, on peut écrire pour tout nombre complexe (a,b) :

$$(a,b) = a + ib$$

En effet :

$$(a,b) = (a,0) + (0,b)$$

Par ailleurs

$$(0,b) = (b,0) \times (0,1) = ib$$

Donc :

$$(a,b) = a + ib.$$

1.1.1.1 Propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$[6, 9, 10]

Avec les convention d'écritures précédentes, l'addition et la multiplication sont définies sur $\mathbb{R}^2$ deviennent
$\forall z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $z = a + ib$, $\forall z' \in \mathbb{C}, \exists (a', b') \in \mathbb{R}^2$ avec $z' = a' + ib'$,

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$
$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Notation 1.2. *On note :*

(i) La valeur a est le réel de z i.e $a = Re(z)$
(ii) La valeur b est imaginaire de z i.e $b = Im(z)$

Proposition 1.1. *Soient a, a', b et b' des réels on a :*
(i) $a + ib = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$
(ii) $a + ib = a' + ib' \Longleftrightarrow a = a'$ *et* $b = b'$

Proposition 1.2. *(i) z réel si est seulement si $Im(z) = 0$*
(ii) z imaginaire pur si est seulement si $Re(z) = 0$

1.1.2 Conjugés[6, 9, 10]

Définition 1.2.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ou $a \in \mathbb{R}, b \in \Re$, un nombre complexe , on appelle le conjugué de z complexe noté $\overline{z}$, le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib$$

Proposition 1.3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :*

(a) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
b) $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
c) $z.\overline{z} = \mid z \mid^2$
d) $\overline{\overline{z}} = z$
e) un nombre complexe z est réel si est seulement si $\overline{z} = z$ et imaginaire pur si est seulement si $\overline{z} = -z$

1.1.2.1 Proposition : propriétes de la conjugés

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$
i) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
ii) $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
iii) si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

1.1.3 Le plan complexe

En mathématiques, le plan complexe (encore appelé plan de Cauchy) désigne un plan dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe unique.
On associe en général le plan complexe â un repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ orthonormé direct.
Dans un tel repère, tout point M est l'image d'un unique nombre complexe z qui est appelé affixe de cet unique point. On note $M(z)$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z = a + ib$ (où a et b sont des réels), on a la relation $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. On peut ainsi dire que la partie réelle de z est l'abscisse de M et que la partie imaginaire de z en est son ordonnée.
D'après cette égalité, tous les points de l'axe $(O; \overrightarrow{u})$ sont tels que la partie imaginaire de leur affixe est nulle : leur affixe est donc un nombre réel. En conséquence, on appelle l'axe $(O; \overrightarrow{u})$ axe des réels.
De la même façon, tous les points de l'axe $(O; \overrightarrow{v})$ sont tels que le partie réelle de leur affixe est nulle : leur affixe est donc un nombre imaginaire pur. En conséquence, on appelle l'axe $(O; \overrightarrow{v})$ axe des imaginaires.

1.1.4 Module d'un nombre complexe , inégalités triangulaire :

Définition 1.3. *[2, 7, 11]*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \Re$ et M son image dans le plan complexe.
Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est un nombre positif, qu'est la distance OM avec $M\,(a, b)$
alors : $z = a + ib$, donc $|\ z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

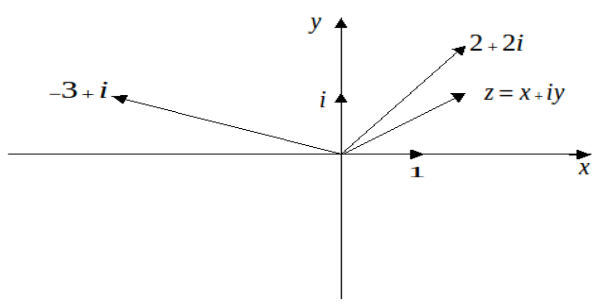

FIGURE 1.1 – Le plan complexe

Proposition 1.4. *soit* $z = a + ib$ *et* $\overline{z} = a - ib \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$|\ z|^2 = |z| \cdot |\overline{z}|$$

Démonstration 1.1. *Soit* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *ou* $a, b \in \mathbb{R}$ *et soit* M *l'image de* M *dans* P *alors on sait que :*

$$|\ z|^2 = \| \overrightarrow{OM} \|^2 = a^2 + b^2$$

Par ailleurs

$$z\overline{z} = (+ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Proposition 1.5. *Pour tout nombre complexe* z

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$
4. $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

Démonstration 1.2. *Soit* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *ou* $a, b \in \mathbb{R}$, *tel que* $|z| = 0$ *alors* $a^2 + b^2 = 0$ *ce que n'est possible que si* $a = b = 0$. *Réciproquement si* $z = a + ib$ *est tel que* $a = b = 0$ *alors nécessairement* $|z\ | = 0$
Il est clair que si $z = a + ib$ *alors*

1. $$Re(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z\ |$$
2. $$Im(z) = b \leq |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z\ |$$

1.1.4.1 Proposition : inégalités triangulaires

Pour tout nombre complexes z et z' on a :

1. $|\ zz'| = |z|\,|z'|$
2. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
3. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$
4. $|z| - |z'| \leq |z - z'|$

Les inégalités (2) et (4) sont appellées inégalités triangulaires

Proposition 1.6. *Soient* $a \in \mathbb{C}$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$, *soit* A *le point du plant d'affixe* a *l'ensemble des point du plan d'affixe* $z \in \mathbb{C}$ *vérifiant*

1. $|z - a| = r$ *est le cercle de centre* A *et de rayon* r.

2. $|z-a| \leq r$ *est le disque fermé de centre* A *et de rayon* r*.*

3. $|z-a| < r$ *est le disque ouvert de centre* A *et de rayon* r*.*

Démonstration 1.3. *Ces trois résultats proviennent de l'équivalence suivante :*

$$\mid z-a \mid = r \Leftrightarrow AM = r$$

1.1.5 Argument d'un nombre complexe

1.1.5.1 Proposition : écriture sous forme trigonométrique des nombre complexes

Si z un nombre complexe non nul alors, il existe un ρ tel que $\rho = |z|$ et au moins un nombre réel θ noté l'argument tel que

$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{\rho}$$

$$\sin\theta = \frac{Im(z)}{\rho}$$

alors

$$z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

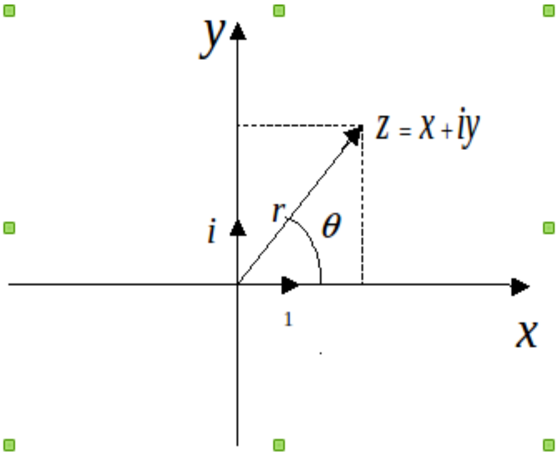

FIGURE 1.2 – Argument d'un nombre complexe

1.1.5.2 Proposition : forme exponentielle[1, 6]

a) Soient $z \neq 0$ avec $\rho = |z|$ et l'argument θ tel que

$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{\rho}$$

$$\sin\theta = \frac{Im(z)}{\rho}$$

Alors la forme exponentielle de z est $z = \rho e^{i\theta}$

L'argument de z, un tel nombre n'est pas unique :

Si θ_0 est un argument de z , l'ensemble de tous les arguments de z est donné par :

$$\{\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\arg(z) = \theta_0\,[2\pi]$$

θ_0 est l'argument principal de z

b) Soit deux nombres complexes $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ ou $\rho, \rho' \in \Re^+$ et $\theta, \theta' \in \Re$

On a :

1. $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$, si $z' \neq 0, z \neq 0$.

Corollaire 1.1. *Soient z et z' deux nombre complexes on a :*

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,([2\pi])$
2. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,([2\pi])$, *si* $z' \neq 0$
3. $\arg(\overline{z}) = \arg(\dfrac{1}{z}) = \arg(z)\,([2\pi])$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*\ \ \arg(z^n) = n\arg(z)$

Démonstration 1.4. *Soient $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$,$z' = \rho' e^{i(\theta'+2k'\pi)}, k, k' \in \mathbb{Z}$ avec $arg(z) = \theta$ et $arg(z') = \theta'$.*

1.

$$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta'+2k''\pi)}, k'' \in \mathbb{Z}$$

Donc $arg(zz') = \theta + \theta' + 2k''\pi$.

2.

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta'+2k''\pi)}, k'' \in \mathbb{Z}$$

Donc $arg(\dfrac{z}{z'}) = \theta - \theta' + 2k''\pi$.

3. On a $z\overline{z} = \rho^2$, donc $\overline{z} = \dfrac{\rho^2}{z}$, alors

$$\overline{z} = \rho e^{i(-\theta-2k\pi)}$$

Donc $arg(\overline{z}) = -\theta + 2k''\pi, k'' \in \mathbb{Z}$.

On a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho} e^{i(-\theta-2k\pi)}$, donc $arg(\dfrac{1}{z}) = -\theta + 2k''\pi = arg(\overline{z}), k'' \in \mathbb{Z}$.

4. *Soient* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $z \in \mathbb{C}^*$.
   On a $z = \rho e^{i\theta}$ *ou* $\theta \in \mathbb{R}$
   On a donc $z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n$
$$= \rho^n \left(e^{i\theta}\right)^n$$
$$= \rho^n e^{in\theta}$$
   Par concéquent $\arg(z^n) = n\theta = n\arg(z)$
   La formule de Moivre :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

1.1.6 Les racines $N^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z = re^{\theta+2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ alors

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Donc il y n racine de z

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, 3, ...n-1$$

1.2 L'infini en analyse complexe.

Le plan achevé $\bar{\mathbb{C}}$ s'obtient du plan complexe $\mathbb{C}$ par adjonction d'un point ∞ â l'infini :

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \infty$$

Par défnition,

$$z_n \to \infty \quad \text{si et seulement si} \quad |z_n| \to +\infty$$

Ainsi

$$z_n \to \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{z_n} \to 0$$

et

$$z_n \to \infty \text{et } w_n \to a \quad \Rightarrow \quad z_n + w_n \to \infty$$

et

$$z_n \to \infty \text{et } w_n \to a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_n w_n \to \infty$$

Chapitre 2

Fonction de la variable complexe

2.1 Les fonctions

Définition 2.1. *Une fonction f de la variable complexe $z = a + iy$ associe à un élément du domaine de définition D une image :*

$$f(z) = Z = u(x, y) + iv(x, y)$$

u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

$$\begin{array}{rcl} f: \ D & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

2.1.1 La continuité

Définition 2.2. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$*

On dit qu'une fonction f est continue en z_0 si $f\,(z_0)$ existe et $f\,(z) \to f\,(z_0)$ lorsque $z \to z_0$(i.e)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

2.1.2 La dérivabilité

Définition 2.3. *On dit que la fonction f est dérivable en z_0, si f est continue et la limite de $\dfrac{f\,(z_0 + h) - f\,(z_0)}{h}$ existe lorsque h tend vers* 0.

On notera la limite par $f'\,(z_0)$.

Corollaire 2.1. *f est dérivable au point z_0 alors*
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$
d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

2.1.3 Fonctions holomorphes

Dans tout ce qui suit D désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 2.4. *[1, 6, 8]*

f est une fonction holomorphe dans $D \Leftrightarrow f$ dérivable en tout point de D.

Proposition 2.1. *[3, 6, 10]*

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, avec $z = x + iy$. Alors f est une fonction holomorphe si et seulement si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont leurs premiéres dérivés partielles continues et satisfaisant les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{2.1}$$

Démonstration 2.1.

Par hypothése f est dérivable on z_0 , donc $f'(z_0)$ existe pour démontrer Cauchy-Riemann, on va considérer deux directions différentes pour la convergence vers z_0 et on va utiliser le fait que la limite de $\dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$ en z_0 est la même suivant toutes les directions.
L'approche suivante l'axe reél $(\Delta y = 0)$

$$\lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

L'approche suivante l'axe imaginaire $(\Delta x = 0)$ donne :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} =$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

puis que notre fonction est dérivable alors

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Théorème 2.1.

$$f=u+iv \text{ holomorphe dons } D \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ dans } D \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Cette condition est appelée les conditions de Cauchy- Riemann .

Exemple 2.1.

$z \longmapsto z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ mais $z \longmapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe dans aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

Proposition 2.2. *[4, 8, 9]*

1. Si f et g sont holomorphe dans l'ouvert D, alors :
   a) $f+g$, $(f+g)'=f'+g'$ et fg sont holomorphe dans D.
   b) $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe dans $D-\{z\in\mathbb{C}\backslash g(z)=0\}$
   c) Les règles classiques de calcul des dérivées sont équivalentes :

$$(f+g)'=f'+g', (fg)'=f'g+fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

2. Si f est holomorphe dans un voisinage de z_0 et si g est holomorphe dans un voisinage de $f\left(z_0\right)$ alors :
   $g\circ f : z\longmapsto g\left[f\left(z\right)\right]$ est holomorphe dans un voisinage de z_0.

2.1.4 Fonction analytique :

Définition 2.5.

Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0\in\mathbb{C}$.
On dit que f est développable en série entière au point z_0, s'il existe une

série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage U de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in U$

$$f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

On dit que la fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique dans U si elle est développable en série entière en tout point de U.

Exemple 2.2.

La fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ est analytique dans le disque $D(0,1)$
$\forall z \in D(0,1),\ f(z) = \sum_{n=0} z^n$(développement aux limites au voisinage de 0)
Alors $\forall z_0 \in D(0,1)$ et $z \in D(z_0, 1 - |z_0|) \subset D(0,1)$
Donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *La somme et le produit de deux fonctions analytiques sur G est analytiques sur G.*

Démonstration 2.2. *Si* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *et* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, *pour tout* $z \in D(z_0, r) \subset G$

Alors

$$\begin{aligned} f(z) + g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

et

$$f(z) \times g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

2.1.5 Équivalence entre les fonctions analytiques et les fonctions holomorphes :

Définition 2.6. *[7, 8, 10]*

Nous avons vu qu'une fonction de la variable réelle développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable. Maintenant que nous avons donné au sens à la notion de dérivation complexe, nous allons montrer que ce résultat est encore valable pour les fonctions d'une variable complexe.

Théorème 2.3.

Une fonction analytique sur un ouvert U tel que $U \neq \emptyset$ de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur U.
Soit $z_0 \in D(z_0, r)$ est le disque ouvert de centre z_0 et rayon r.
Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, pour $z \in D(z_0, r) \subset U$, on a alors :
$f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, pour tout $z \in D(z_0, r)$.

Démonstration 2.3.

Pour $z_0 \in U$, il existe $r > 0$, tel que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$
Pour $z \in D(z_0, r) \subset U$, et pour $z \neq z_0$ dans $D(z_0, r)$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n = g(z)$$

Avec $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = a_1$, puisque la fonction g est continue en z_0, la série entière $\sum a_{n+1} t^n$ qui à même rayon de convergence que $\sum a_n t^n$ est continue sur $D(0, r)$, donc en 0.
La fonction f est donc dérivable en z_0 de dériveé d'une fonction analytique sur U est elle même analytique sur U.
Donc : f est holomorphe.
On a :

$$(z + h - z_0) \leq |z - z_0| + \rho - |z - z_0| < \rho$$

Et :

$$\frac{f(z+h)-f(z_0)}{h}-g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n}{h}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nP_n(z,h)$$

Ou on a posé pour $n\geq 1$

$$P(z,h)=\frac{(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n}{h}-n(z-z_0)^{n-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(z+h-z_0)^{n-1-k}(z-z_0)^k-n(z-z_0)^{n-1}$$

Alors, on a :

$$|P(z,h)|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|z+h-z_0|^{n-1-k}|z-z_0|^k+n|z-z_0|^{n-1}$$
$$\leq\sum_{k=0}^{n-1}\rho^{n-1-k}\rho^k+n\rho^{n-1}=2n\rho^{n-1}$$

La série $\sum na_{n-1}\rho^{n-1}$ étant convergente.
Pour $\varepsilon>0$ donné , on peut donc trouver un entier naturel $n_\varepsilon\geq 1$ tel que :
$\forall n\geq n_\varepsilon,\ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}ka_{k-1}\rho^{k-1}<\varepsilon$
Et un réel $\rho_1\in]0,\rho-|z-z_0|[$ tel que pour : $|h|<\rho_1$ on ait :

$$\left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}a_kP_k(z,h)\right|<\varepsilon$$

On a $\lim_{h\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n\varepsilon}a_kP_k(z,h)=0$, ce qui donne pour $|h|<\rho_1$

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|<3\varepsilon$$

On a donc ainsi montré que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=g(z)$$

Ce qui signifie que f est C-dérivable en z de dériveé $g(z)$.
Alors : f est donc holomorphe sur U de dériveé f est analytique sur U
Donc : f est holomorphe.

2.2 Fonctions harmoniques

Définition 2.7. *[3, 5, 11]*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f = 0$ sur Ω, ou Δf est le Laplacien de f défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Remarque 2.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est harmonique si etseulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.
Car $Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$

Proposition 2.3.

Toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω est harmonique sur Ω

Démonstration 2.4.

Soit f une fonction holomorphe alors $Re(f) = u$ et $Im(f) = v$

$$\begin{cases} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ dans } \Omega \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial y}(-\dfrac{\partial u}{\partial y}) \\ & = & -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{Alors} \quad \Delta u & = & 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial u}{\partial x}) \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ & = & \dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{\partial v}{\partial x}) \\ & = & -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \text{Alors} \quad \Delta v & = & 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Fonction élémentaires

3.1 Fonction Exponentielle[6]

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{zLoga}$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelle.

3.2 Fonction Logarithme[6]

La fonction $f(z) = Logz\,;\, z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle z.

$$w = Log(z) \Leftrightarrow z = e^w$$

Proposition 3.1. *La fonction $Logz, z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par*

$$Logz = \ln|z| + iarg(z) = \ln|z| + i(Argz + 2k\pi); k \in \mathbb{Z} \text{ ou } -\pi < Argz \neq \pi$$

Exemple 3.1.

$$Log(1+i) = \ln|1+i| + i(Arg(1+i) + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.3 Fonctions Circulaires[6]

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou circulaires, $sinz$, $cosz$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$cscz = \frac{1}{sinz} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad secz = \frac{1}{cosz} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$tgz = \frac{sinz}{cosz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad cotgz = \frac{cosz}{sinz} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe.

3.4 Fonctions Hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$shz = \frac{e^z - e^z}{2} \qquad chz = \frac{e^z + e^z}{2}$$

$$sechz = \frac{1}{chz} = \frac{2}{e^z - e^z} \qquad cschz = \frac{1}{shz} = \frac{2}{e^z - e^z}$$

$$thz = \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^z}{e^z + e^z} \qquad shz = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^z}{e^z - e^z}$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$ch^2z - sh^2z = 1; sh(z_1 + z_2) = shz_1chz_2 + chz_1shz_2$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$sin(iz) = ishz \qquad cos(iz) = chz \qquad tg(iz) = ithz$

$sh(iz) = isinz \qquad ch(iz) = cosz \qquad th(iz) = itgz$

3.5 Fonctions Puissances[6]

La fonction z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$ est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha Logz}$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z, on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z)Log(f(z))}$$

Exemple 3.2.

$$(1+i)^{(1+i)} = e^{(1+i)log(1+i)} = e^{(1+i)(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + i2k\pi)}$$

Remarque 1. *On a*

$$(z^{\alpha})^{k} = z^{\alpha k}; \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$$

mais

$$(z^{\alpha})^{\beta} \neq z^{\alpha\beta}$$

dans le cas général si $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$

Exemple 3.3. *On a*

$$((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{ilog(-1)} = e^{i(i(\pi+2k\pi))} = e^{-\pi-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

et

$$(-i)^{2i} = e^{2ilog(-i)} = e^{2i(i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{\pi-4k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$((-i)^2)^i \neq (-i)^{2i}$$

Chapitre 4

Calcul intégral

4.1 ARCS et chemins

4.1.1 Définition : Chemin

On appelle chemin sur $\mathbb{C}$ toute application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Le point initial du chemin est $\gamma(a)$ et le point final est $\gamma(b)$. Ces deux points constituent les extrémités du chemin.

4.1.2 Définition : Homotopie[6, 8, 9]

Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$, γ_1 et γ_2 deux chemins définis sur le même intervalle $[a,b]$. On dit que γ_2 est homotope à γ_1 s'il existe un intervalle $[\alpha,\beta]$ et une application continue $h : [a,b] \times [\alpha,\beta] \to \Omega$ qui, à $(t,s) \in [a,b] \times [\alpha,\beta]$ associe $h\,(t,s) \in \Omega$ tel que :

$$h\,(t,\alpha) = \gamma_1\,(t)$$

Et

$$h\,(t,\beta) = \gamma_2\,(t)$$

Définition 4.1. *[3, 4, 9]*

On appelle un arc toute application continue γ d'un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On le notera souvent $([a,b]\,,\gamma)$.
On dit que $\gamma\,(a)$ est l'origine et que $\gamma\,(b)$ est l'extrémite.

On dit que γ est fermé si $\gamma\,(a) = \gamma\,(b)$.

4.1.3 Définition : (arc simple)[2, 5, 10]

On dit que γ est un arc simple si l'application est injective.
Il est dit réduit a un point : si l'application γ est constante.
Si $([a,b]\,,\gamma)$ est un arc, on note $Im\,(\gamma)$ pour $\gamma\,([a,b])$ et si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que γ est un arc dans U si $Im\gamma \subset U$

4.1.4 Définition : (arc opposé)

L'arc opposé de $([a,b],\gamma)$ est l'arc $([a,b],\delta)$ défini pour $t \in [a,b]$ par

$$\delta(t) = \gamma(a+b-t)$$

Intuitivement, c'est l'arc γ (parcouru dans l'autre sens).

4.1.5 Définition : (γ de classe C^1 par morceaux)

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et γ un application de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Rappelons que γ est dite de classe C^1 par morceaux si elle est continue et s'il existe une subdivision :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b.$$

de $[a,b]$ telle que $\gamma[a_i, a_{i+1}]$, soit continûment dérivable pour chaque $i = 0....n-1$, γ_i est les restriction de γ sur $[a_i, a_{i+1}]$ avec :

$$\gamma_i(a_{i+1}) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$$

On appelle chemin dans un ouvert U tout arc $([a,b],\gamma)$ dans U tel que γ soit de classe C^1 par morceaux.

FIGURE 4.1 – chemin par morceaux

4.1.6 Définition : (arc équivalent)[3, 4, 9]

On dit que deux chemins $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont équivalent s'il existe une application $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ vérifiant les conditions suivantes :

i) φ et φ^{-1} est bijective croissante et de classe C^1 par morceaux.

ii) on a $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Si γ et δ sont équivalente on a :

$$Im\gamma = Im\delta.$$

4.1.7 Exemple importants des chemins :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le chemin fermé $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$t \to z_0 + re^{it}$$

est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r, parcouru dans le sens direct

2. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Le chemin $[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \rightarrow (1-t)\,u + tv$$

est le segment orienté d'origine u et d'extremité v. Le chemin opposé $[u, v]$ est le segment orienté $[v, u]$.

4.2 Intégrale curviligne(Intégration complexe)

Définition 4.2.

Soit $([a,b] \ ,\gamma)$ un chemin de classe C^1 et f une fonction continue sur $Im\,(\gamma)$.
L'intégrale de f sur γ notée par $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ est définie par

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Proposition 4.1.

Si $([a,b], \gamma_1)$ et $([c,d], \gamma_2)$ sont deux chemins équivalentes et si f est un fonction holomorphe sur $Im\gamma$, on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Démonstration 4.1.

On a $\gamma_1 \sim \gamma_2$, il existe une bijective φ croissant avec : $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$
$\gamma_2' = \varphi' \cdot \gamma_1'(\varphi)$
La formule de changement de variable dans les intégrales fournit

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_c^d f[\gamma_2(t)]\,\gamma_2'(t)\,dt$$

$$= \int_c^d f \circ (\gamma_1 \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t)\,\gamma_1'(\varphi(t))\,dt$$

$$= \int_c^d f[\gamma_1(\varphi(t))]\,\gamma_1'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

On fait un changement de variable $z = \varphi(t)$ alors $dz = \varphi'(t)\,dt$ et puisque φ est une bijective croissante donc $a = \varphi(c)$ et $b = \varphi(d)$, alors :

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_a^b f[\gamma_1(z)]\,\gamma_1'(z)dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

Donc $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$

Définition 4.3.

Soient $([a,b], \gamma)$ et $([c,d], \gamma^\circ)$ deux chemin et f une fonction continue sur $Im\gamma \cup Im\gamma^\circ$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^\circ} f(z)\, dz &= \int_a^b (f \circ \gamma^\circ)(t)\, \gamma^{\circ\prime}(t)\, dt \\ &= \\ &= -\int_a^b f \circ \gamma(a+b-t)\, \gamma'(a+b-t)\, dt \\ &= \\ &= \int_b^a (f \circ \gamma)(t')\, \gamma'(t')\, dt' \\ &= \\ &= -\int_\gamma f(z)\, dz \end{aligned}$$

Définition 4.4.

La longueur d'un chemin γ de classe C^1 est la valeur positive suivante :

$$long(\gamma) = \int_a^b \mid \gamma'(t) \mid dt$$

Exemple 4.1. *Soit γ est le chemin fermé* $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$t \to z_0 + re^{it}$$

$$long(\gamma) = \int_0^{2\pi} \mid r \mid dt = 2\pi r$$

Proposition 4.2.

Si f est continue alors :

$$\mid \int_{\gamma} f(z)\, dz \mid \leq Sup\,(\mid f \mid)\, long\,(\gamma)$$

4.3 Formules d'intégrales de Cauchy[5, 8, 9]

Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert U simplement connexe, C une courbe de Jordan contenue dans U et z_0 un point de U dans C alors :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

En particulier

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz$$

Démonstration 4.2.

Soit $\gamma = \{z \cdot \mid z - z_0 \mid = \varepsilon\}$, $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)}$ est holomorphe sur C, donc :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz &= \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz \\ &= \int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} dz + \int_\gamma \frac{f(z_0)}{(z-z_0)} \end{aligned}$$

$$\left| \int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} dz \right| \leqslant \int_\gamma \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} \right| dz$$

f étant holomorphe en z_0.
$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}$ peut être rendue arbitrairement voisinage de $f(z_0)$ pour ε assez petit
$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}$ admet donc un majorant M et

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} dz \leqslant 2\pi M \varepsilon$$

On a donc :

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(z_0)}{(z-z_0)}dz = f(z_0)\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = 2i\pi f(z_0)$$

La relation $f(z_0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$ est valable pour tout point z_0 intérieur à C.
L'expression $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)}$ est continue et dérivable aussi bien par rapport à z que par rapport à z_0(la démonstration ne s'annule pas si z_0 est à l'intérieur de C et z sur C)
On obtient

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{z}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

en dérivant sons le signe somme n fois par rapport à z_0.

4.3.1 Théorème de Cauchy

La valeur $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ dépend a priori du chemin reliant les deux extrémités A et B. La question qui se pose est : Existe-t-il une classe de fonctions pour lesquels la valeur de cette intégrale ne dépend que des valeurs de A et B
Si $z \to f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D.
L'intégrale $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ prend la mème valeur pour tout les chemins C, inclus dans D, ayant les mêmes extirémités.

Remarque 4.1.

Il en résulte que l'on peut noter ce type d'intégrale par

$$\int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz$$

Exemple 4.2.

$f(z) = z^2$.

Corollaire 4.1.

Si $z \to f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D, alors pour tout chemin fermé(courbe finie) situé dans D ;

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

4.4 Formule de la moyenne

Proposition 4.3. *Soit f holomorphe sur U, $z_0 \in U, R > 0, \bar{D}(z_0, R) \subset U$. Alors*

$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})dt = \frac{1}{\pi R^2}\int\int_{\bar{D}(z_0,R)} f(x+iy)dxdy$$

Démonstration 4.3. *On utilise la formule de Cauchy :*

On sait que

$$f\left(z_0\right) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\bar{D}(z_0,R)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

Sur $\partial\bar{D}(z_0, R)$, le variable z s'écrit sous la forme suivante :
$z = z_0 + Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, alors on fait un changement de variable, donc $dz = Rie^{it}dt$, donc :

$$\begin{aligned} f\left(z_0\right) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}}Rie^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})dt. \end{aligned}$$

4.4.1 Primitive

4.4.1.1 Une autre conséquence du théorème de Cauchy[6, 8, 9, 10]

Si $z \to f\left(z\right)$ est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D alors l'intégrale $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f\left(s\right)ds = F\left(z\right).$

Cette fonction est holomorphe dans D et de plus et de plus

$$F'\left(z\right) = \frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f\left(s\right)ds = f\left(z\right)$$

4.5 Inégalité de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r est inclus dans U . Pour tout entier n, on a l'inégalité

$$|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)| \leq r^{-n}sup_{\{t\in[0,2\pi]\}}|f(z_0 + re^{it})|$$

4.6 Théorème de Liouville

Théorème 4.1. *Une fonction entière et bornée est nécessairement une constante.*

Démonstration 4.4. *Soit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{C}$$

On a les inégalités de Cauchy pour les coefficients de la série :

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} sup\{|f(z)|, |z| = r\}.$$

Puisqu'ici $|f(z)| \leq M$ pour tout z, en laissant $r \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$a_k = 0 \text{ si } k \geq 1.$$

4.7 Théorème de Morera

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Supposons que

$$\int_C f(z)dz = 0$$

pour toute chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D. Alors f est holomorphe dans D.

Chapitre 5

Dévelepement en Série Taylor et en Série de Laurent

5.1 Développement en séries de Taylor

Théorème 5.1. *(Séries de Taylor dans $\mathbb{C}$[6, 8, 9])*

Soit f une fonction analytique en tout point du disque ouvert

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \text{ où } z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < R \leq +\infty$$

Alors il existe une suite unique $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D.$$

De plus,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, ...$$

où

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$$

et ρ est un rayon quelconque tel que $0 < \rho < R$.

5.2 Séries de Laurent et Résidus

5.3 Les couronnes

Définition 5.1. *[2, 4, 8]*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, et $0 < R_1 < R_2$.
La couronnes ouverte de centre z_0 et de rayon R_1 et rayon R_2 noté par $ann\,(z_0, R_1, R_2)$ définie par :

$$ann\,(z_0, R_1, R_2) = \{\forall z \in \mathbb{C},\ R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Si on a l'égalité, on dit que la couroune est fermée définie par

$$\overline{ann}\,(z_0, R_1, R_2) = \{\forall z \in \mathbb{C},\ R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$$

Si $R_1 = 0$, $ann\,(z_0, 0, R_2) = \dot{D}\,(z_0, R_2)$ et on l'appelle disque pointé.

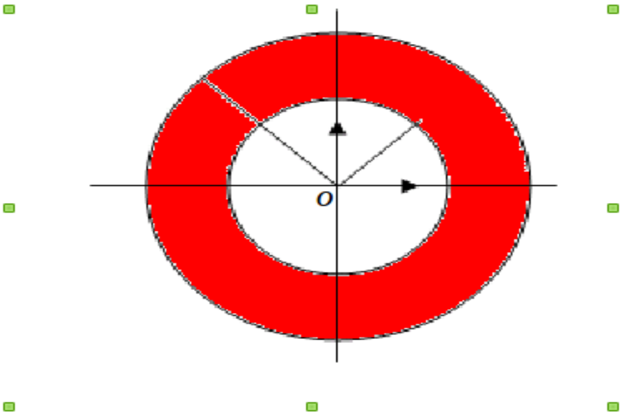

FIGURE 5.1 – La couronne

5.4 Série de Laurent

Proposition 5.1. *[7, 9, 11]*

Soit f une fonction analytique sur $ann\left(z_0, r_1, r_2\right)$, alors pour tout $z \in ann\left(z_0, r_1, r_2\right)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \left(z - z_0\right)^n$$

avec :

$$C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{\left(z' - z_0\right)^{n+1}} dz'$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ $C_{-1} = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma} f(z')\, dz'$ et γ un contour quelconque orienté positivement, inclus dans la couronne et entourant de z_0 Ce développement est appelé développement en série de Lourent et il est unique.

Démonstration 5.1.

γ est homotope à un contour T proche de $\gamma_1 - \gamma_2$ et entourant z_0

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \right]$$

On fait le développement de Taylor de f sur γ_2, ce que donne les C_n pour $n \geq 0$
Pour γ_1 on'a :

$$\left|w - z_0\right| < \left|z - z_0\right|$$

Il faut donc refaire le mème raisonnement que pour Taylor mais en considérant :

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{w - z_0}{z - z_0}}$$

$$= -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

On obtient ainsi les C_n pour $n \leq 0$.

Remarque 5.1.

Si f est analytique sur $D(z_0, r_0)$ alors les coefficients C_n sont nuls pour $n \leq 0$

Exemple 5.1.

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, a \in \mathbb{R}_+^*$$

f posséde une singularité en a. On recherche le développement en série de Laurent de f autour de $z_0 = 0$

$1^{re}cas:$ $|z| < a$, f est analytique sur $D(0, r)$ avec $|z| < r < a$

$$f(z) = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

$$= -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{a})^n$$

$$= -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z}{a^3} - ...$$

$2^{éme}cas:$ $|z| > a$, f est analytique sur $C(0, r_1, r_2)$ avec $a < r_1 < |z| < r_2$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{a}{z})^n$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + ...$$

5.4.1 Les points singuliers

Définition 5.2. *[6, 7, 8, 9]*

Soit z_0 un point au voisinage duquel f n'est pas analytique.
On dit que z_0 est un point singulières de f .
Soit z_0 un point singulier de f. S'il existe un disque ouvert pointé (privé de z_0) de centre z_0 et de rayon $r > 0$ dans lequel f est analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier isolé.

Exemple 5.2.

$f:\ z \to \dfrac{1}{z-2}$, le point $z_0 = 2$ est un point singulier isolé.

$f: z \to \dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, le point $z_0 = 0$ est un point singulier non isolé.

Dans tout ce qui suit, on supposera les points singuliers isolés.
Dans le cadre de cette hypothése, si on prend f admettant un point singulier $z_{0,}$ et que l'on considére sa série de Laurent associée autour de z_0 on note $b_n = C_{-n}$ et $a_n = C_n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

tel que :
$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}$ est une partie singuliére.

Définition 5.3.

Si tous les b_n sont nuls, la fonction est analytique dans $D(0,r)$ et on dit que z_0 est une singularité apparente.

Définition 5.4.

Si les b_n sont tous non nuls, i.e : s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$, pour tout $n > m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et pour tout $z \in D(z_0, r)$.

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ...$$

Si $m = 1$ on dit que a un pôle simple.

Définition 5.5.

S'il existe une infinité de b_n non nuls, la singularité est dite essentielle

Exemple 5.3.

1. $z \to \dfrac{\sin z}{z}$:
   $z_0 = 0$ est une singularité les b_n sont tous nuls et on'a :

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)} & \text{si n est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$z \to \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

   est analytique et z_0 est une singularité apparente.

2. $z \to \dfrac{1}{z-2}$: $\quad z_0 = 2 \quad$ est une singularité c'est un pôle d'ordre 1

3. $z \to e^{\frac{1}{z}}$: $z_0 = 0$ est une singularité

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + ... + \frac{1}{n}\frac{1}{z^n} + ...$$

$a_0 = 1$. $a_n = 0 \ \forall n > 0$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n > 0$ z_0 est un singularité essentielle

Chapitre 6

Théomrème des résidus et ses applications

6.1 Théorèmes des Résidus

Théorème 6.1. *[3, 5, 8]*

Soient Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $\{b_1, ..., b_n\}$ un nombre fini de points de Ω isolés et distincts.
Soit une fonction f analytique dans un $\Omega - \{b_1, ..., b_n\}$
Si on prend γ un contour dans Ω, entourant les b_i, $i \in [1, n]$, sans rencontrer ces point et orienté positivement, alors :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, b_k)$$

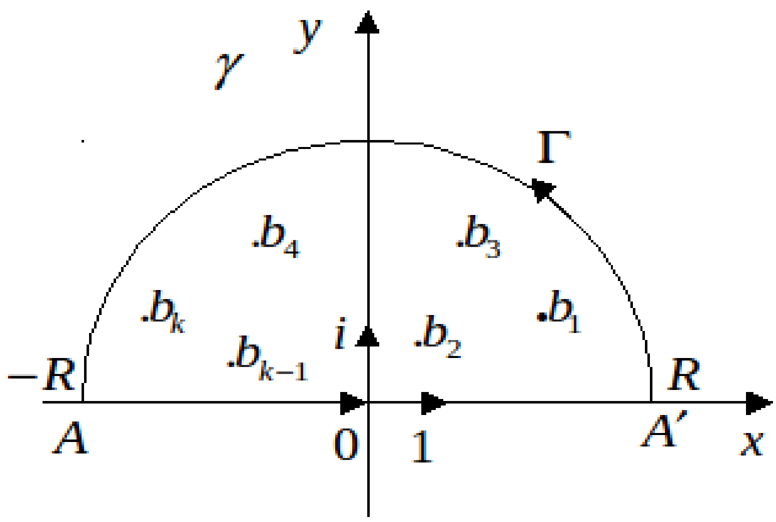

FIGURE 6.1 – Les points singulières

Démonstration 6.1.

$$\int f(z)\,dz = 0 = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

Or :

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = -2i\pi Res\,(f, b_k)$$

D'ou le résultat.

6.2 Résidu en un point singulier isolé

Définition 6.1.

Soit z_0 un point singulier de f , soit $\dot{D}(z_0, r)$ un disque pointé ne contenant pas de point singulier de f, alors :
$\forall z \in \dot{D}(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Le coéfficient b_1 est appelé résidu de f en z_0 et noté $Res\,(f, z_0)$
On a donc :

$$Res\,(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

ou γ est un contour orienté positivement est γ inclus dans $\dot{D}(z_0, r)$ et entourant z_0

Remarque 6.1.

Si z_0 est un point singulier apparent de f alors $Res\,(f, z_0) = 0$

6.2.1 Calcul pratique de résidus

1. Si z_0 est un pôle simple, alors $f(z) = \dfrac{b_1}{z - z_0} + g(z)$
   Ou : $g(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + ...$ est une fonction analytique aux voisinage de z_0 et nulle en z_0, on a donc :
   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1$$
   Alors :
   $$Res\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$
2. Si z_0 est un pôle d'ordre m
   $$Res\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$
   En pratique il vaut mieux calculer directement le déveleppement pour des pôles d'ordres élevés.

Proposition 6.1.

Soit $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ avec g une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$
On a :

$$Res(f, z_0) = g(z_0)$$

Proposition 6.2.

Soit $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ avec h et g deux fonctions analytiques au voisinage de z_0, et tel que $g(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de h. On a alors :

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Démonstration 6.2.

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)}$$

$$= g(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)}$$

$$= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

6.3 Les lemmes de Jordan[3, 8, 9]

6.3.1 Lemme 1

Soit f une fonction holomorphe dans un secteur $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$
(θ désignant l'argument de z), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{|z| \to 0} z f(z) = 0 \right)$$

pour $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, alors l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

(ou γ est un arc de cercle de rayon R contenu dans le secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$)

tend vers zéro quand R tend vers l'infini (resp. vers 0) .

6.3.2 Lemme 2

Soit f une fonction holomorphe dans un secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ du demi-plan supérieur (resp. du demi-plan inférieur), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées.

Si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) \ = 0$, pour $\theta_1 \leq \arg(z) \leq, \theta_2$, alors l'intégrale :

$$\int_\gamma f(z)\, e^{ikz} dz$$

(Pour $k \geq 0$, (resp. $k \leq 0$)) étendu à un cercle γ de rayon R dans le secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, tend vers zéro quand R tend vers l'infini.
Ce lemme est trés souvent utilisé lors du calcul de transformées de Fourier pour la méthode des résidus.

6.3.3 Lemme 3

Si f est une fonction possédant un pôle simple à l'origine on a :

$$\lim_{r\to 0} \int_\gamma f(z)\, dz = i\pi Res\,(f, 0)$$

Ou r est positif et $\gamma :\ t \to re^{i\pi t}$,$t \in [0, 1]$

6.4 Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$:

Définition 6.2. *[7, 10, 11]*

Considérons une fonction $x \in \mathbb{R} \to f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dont la fonction à variable complexe associée, holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de singularités isolées.

On va désigne par $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ les singularités de $f(z)$ qui appartiennent au demi-plan supérieur

$$H = \{z \in \mathbb{C}, Im\,(z) > 0\}$$

La courbe γ est simple fermée borde un domaine du demi-plan supérieure contenant certaines singularités de $f(z)$

Donc si pour tout réel $R > \max(|z_1|, |z_2|, ..., |z_n|)$ on intervalle fonction $f(z)$ sur la courbe γ par courue dans le sens trigonométrique et qui est constituée par l'intervalle $[-R, R]$ et le demi-cercle C_R de centre l'origine et de rayon R.
On applique théoréme des résidus, alors :

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res\,(f(z), z_k) \end{aligned}$$

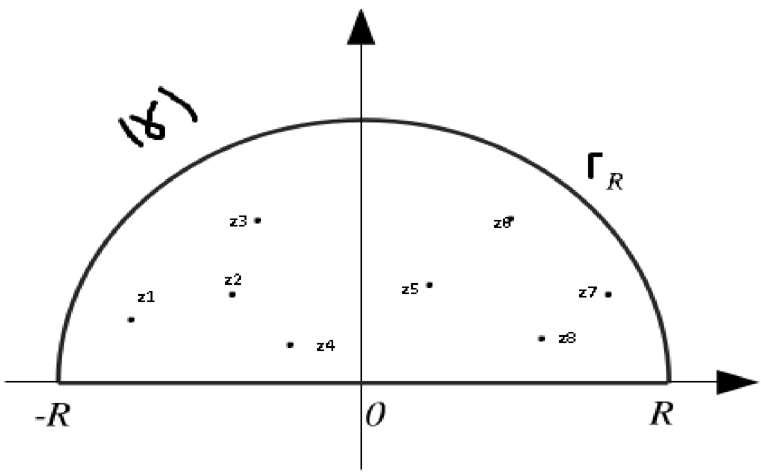

FIGURE 6.2 – Le chemin associé

Le lemme de Jordan permet de calculer la valeur de la limite de l'intégrale curviligne $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz$ lorsque R tend vers l'infini pour certaines fonction $f(z)$.
Par conséquent, si on fait tendre le réel $R>0$ vers l'infini on obtient l'éxpression suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz + 2\pi i\sum_{k=1}^{k=n} Res\left(f(z), z_k\right)$$

Exemple 6.1.

Pour tout $0<a<b$ calculons l'intégrale simple généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx$$

Notons que cette intégrale converge car, à l'infini la fonction

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}$$

est équivalente à la fonction $\dfrac{1}{x^2}$ et on a :
$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$ converge et que la fonction :

$z \longmapsto f(z) = \dfrac{z^2}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}$ est holomorphe sur le demi-plan supérieur sauf aux points ia et ib.
Donc puis que $\lim_{z\to+\infty} zf(z) = 0$; le lemme de Jordan combiné avec le théoréme des résidus impliquent qu'on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx &= 2\pi i\left[Res\left(f(z),ia\right)+Res\left(f(z),ib\right)\right]\\ &= 2\pi i\left[\frac{(ia)^2}{(2ib)(b^2-a^2)}+\frac{(ib)^2}{(-b^2+a^2)(2ib)}\right]\\ &= \frac{\pi}{b+a}\end{aligned}$$

6.5 Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx$:

Définition 6.3.

Considérons une fraction rationnelle $\frac{p(x)}{Q(x)}$ dont le déminateur $Q(x)$ ne posséde pas des racines réelles et son dégré de $Q(x)$ est supérieur ou égale au dégré de $P(x)$ plus un (i.e $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x))+1$).

Le calcul de l'intégrale simple $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx$ sera fait selon le signe du paramètre α.

1. **Le pramètre** $\alpha > 0$: Dans ce cas on choisit un réel $R > 0$ strictement supérieur aux modules des racines$\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ de $Q(z)$ qui appliquant au démi-plan supérieur H et puis on intégre la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ sur la courbe simple fermée Γ_R constituée par l'intevalle $[-R, R]$ et le démi-cercle $C_R \subset H$ centré à l'origine de rayon R. Donc : d'aprés le théoreme des résidus on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz &= \int_{R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dz+\int_{C_R}\frac{p(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{k=n}Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}, z_k\right)\end{aligned}$$

   Notons que puisque $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(z))+1$ il s'ensuit que :
   $\frac{P(z)}{Q(z)}$ tend vers zéro quand z tend l'infini.
   Donc : la fonction

$$M(R) = \sup\left\{\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|; z = Re^{i\theta} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi\right\} \longrightarrow 0$$

Quand $R \longrightarrow +\infty$ Ainsi,puisque le module

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_{C_R} \frac{p(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz\right| & \leq & M(R) \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin(\theta)} d\theta \\ & \leq & 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin(\theta)} d\theta \\ & \leq & 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi} d\theta \\ \text{Car} \qquad & \sin(\theta) \geq 2\theta/\pi & \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ & \leq & \frac{\pi M(R)}{\alpha R}\left[1 - e^{-\alpha R}\right] \end{array}$$

On déduit que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0.$
Par conséquent l'intégrale simple généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k\right).$$

2. **Le paramètre** $\alpha < 0$: On désigne par $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ les racines de $Q(x)$ qui appartiennent au démi-plan inferieur H^-,pour tout le réel R, tel que

$$R \geq \max(|u_1|, |u_2|, ..., |u_n|)$$

on intégre la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ sur la courbe fermée Γ_R constituée par le demi-cercle $C_R = \left\{R\, e^{i\theta}; \in [-\pi, \pi]\right\} \subset H^-$ et l'intervalle $[-R, R]$ parcouru dans le sens opposé Comme ci-dessus en appliquant le théorème des résidus sur Γ_R on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = -\int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dz + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, u_k\right) \end{aligned}$$

Et ainsi le passage à la limite sur R vers l'infini implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha z} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, u_k\right)$$

Exemple 6.2.

Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$ calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2} dx$

D'aprés la méthode décrite ci-dessus en intégrant la fonction $\frac{e^{ibz}}{a^2 + z^2}$ sur la courbe simple fermée Γ_R, constituée par un démi-cercle C_R contenu dans le démi-plan supérieur H centré à l'origine et de rayon $R > 0$ et l'intervalle $[-R, R]$. On obtient lorsque R tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2} dx &= 2\pi i Rés\left(\frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}, ia\right) \\
&= 2\pi i \frac{e^{-ba}}{2ia} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^2+a^2} dx \\
&= \frac{\pi e^{-ba}}{a}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba} \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba}
\end{aligned}$$

On fait le changement $y = -x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(bx)}{(x)^2+a^2} (-dx) &= \int_{+\infty}^{0} \frac{\cos(-by)}{(-y)^2+a^2} (-dy) \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos by}{y^2+a^2} dy \\
\Rightarrow 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba}
\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ba}$

6.6 Calcul des intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$:

Définition 6.4.

Dans ce paragraphe, on va adapter la méthode décrite au paragraphe précédant au cas des fonctions $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \dfrac{e^{i\alpha x}}{x}$ avec $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle tel que le polynome $Q(x)$ ne posséde pas des racines et son $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x))$

Notons que dans ces conditions pour l'itégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$, il suffit qu'on intégre la fonction

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x}$$

sur la courbe fermée $\Gamma_{r,R}$, constituée par le démi-cercle

$$C_R = \left\{R\ e^{i\theta}; \theta \in [0, \pi]\right\}, \text{ si } \alpha > 0.$$

Mais si $\alpha < 0$, on prend $\theta \in [-\pi, 0]$, et l'intervalle

$$I_{-} = [-R, -r]$$

Le démi cercle

$$C_r = \left\{re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]\right\}$$

Enfin l'intervalle

$$I_{+} = [r, R],$$

$$r < \min\left(|z_1|, |z_2|, ... |z_n|\right)$$

et

$$R > \max\left(|z_1|, |z_2|, ..., |z_n|\right)$$

Donc, d'aprés le théorème des résidus on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{r,R}} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx &= \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_r^-} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha x}}{z} dz \\
&+ \int_{r}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{p(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\
&= 2\pi \sum_{k=1}^{n} Rés\left(\frac{P(x)\, e^{i\alpha x}}{Q(x)}, z_k\right)
\end{aligned}$$

Notons aussi que si on procéde comme ci-dessus on veréfie que l'intégrale

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

tend vers zéro quand le rayon R tend vers $+\infty$ pour calculer la limite de l'intégrale

$$\int_{C_r^-} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

lorsque $r \to 0$, on va démontrer le $2^{\text{iéme}}$ lemme de Jordan.

6.7 Calcul des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $-1 < \alpha < 0$

Définition 6.5. *[5, 6, 9, 10, 11]*

Dans ce paragraphe étant donnée une fraction

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

qui a que des pôles non réels tel que le

$$d\acute{e}g\,(Q(x)) \geq d\acute{e}g\,(P(x)) + 1$$

On va décrire une méthode qui permet de calculer les intégrales généralisées de type

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

avec $-1 < \alpha < 0$.
Notons d'abord que si dans l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

on effectue le changement de variable $x = e^t$, on obtient $dx = e^t dt$ que :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+1)t} \frac{P(e^t)}{Q(e^t)} dt$$

Notons aussi que si $u = \log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme complexe telle que $\arg(z) \in]0, 2\pi[$.
On déduit que si $z_0 \neq 0$ est un pôle de la fraction $\frac{P(z)}{Q(z)}$ alors, le nombre complexe $u_0 = \log(z_0)$ est une singularité de la fonction $\frac{P(e^u)}{Q(e^u)}$.
Suite à ces remarques on déduit que pour calculer l'intégrale de type

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Il suffit qu'on applique le théorème des résidus à la fonction

$$e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}$$

sur le rectangle C_R indique sur la figure suivante

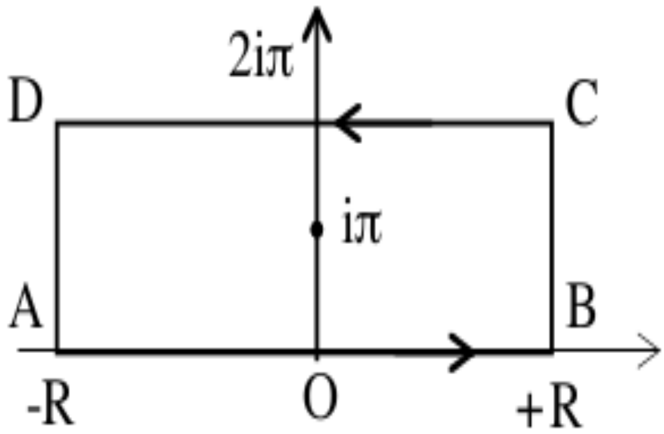

FIGURE 6.3 – Le chemin associe

$$
\begin{aligned}
\int_{ABCD} e^{(\alpha+1)u}\frac{P(e^u)}{Q(e^u)} &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left(e^{(\alpha+1)u}\frac{P(e^u)}{Q(e^u)}, u_k\right) \\
\int_{ABCD} e^{(\alpha+1)}\frac{P(e^u)}{Q(e^u)}du &= \int_{-R}^{R} e^{(\alpha+1)x}\frac{P(e^x)}{Q(e^x)}dx + i\int_{0}^{2\pi} e^{(\alpha+1)(R+iy)}\frac{P\left(e^{R+iy}\right)}{Q\left(e^{R+iy}\right)}dy \\
&+ \int_{R}^{-R} e^{(\alpha+1)(x+2\pi i)}\frac{P(e^x)}{Q(e^x)}dx + i\int_{2\pi}^{0} e^{(\alpha+1)(-R+iy)}\frac{P\left(e^{-R+iy}\right)}{Q\left(e^{-R+iy}\right)}dy \\
&= \left(1 - e^{2\pi(\alpha+1)i}\right)\int_{-R}^{R} e^{(\alpha+1)x}\frac{P(e^x)}{Q(e^x)}dx \\
&+ i\int_{0}^{2\pi} e^{(\alpha+1)(R+iy)}\frac{P\left(e^{R+iy}\right)}{Q\left(e^{R+iy}\right)}dy \\
&- i\int_{0}^{2\pi} e^{(\alpha+1)(-R+iy)}\frac{P\left(e^{-R+iy}\right)}{Q\left(e^{-R+iy}\right)}dy
\end{aligned}
$$

Ainsi, puisque pour tout réel $R > 0$ assez grand on a :

$$
\left|e^{(\alpha+1)(R+iy)}\frac{P\left(e^{R+iy}\right)}{Q\left(e^{R+iy}\right)}\right| \simeq e^{(\alpha+1)R}\frac{C}{e^{nR}}
$$

et

$$
\left|e^{(\alpha+1)(-R+iy)}\frac{P\left(e^{-R+iy}\right)}{Q\left(e^{-R+iy}\right)}\right| \simeq R^{-(\alpha+1)R}C
$$

Ou $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que si R l'infini on obtient les deux expressions suivantes :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\frac{-\pi e^{-\alpha i}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^{n} Res\left(z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha i}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^{n} Res\left(e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}, x_k\right)$$

Exemple 6.3.

Pour tout $0 < \alpha < 1$, calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$

Pour calculer cette intégrale nous considérons le rectangle Γ_R dont les cotes sont $[-R, R], [R; R+2\pi i], [R+2\pi i, -R+2\pi i]$ et $[-R+2\pi i, -R]$ (voir la figure) et nous appliquerons le théoréme des résidus à la fonction ;

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} \text{ Sur } \Gamma_R$$

La courbe Γ_R est simple fermée et borde un rectangle du demi-plan supérieur qui contient le pôle simple πi de $f(z)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz &= 2\pi i Rés(f(z), \pi i) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to\pi i} \frac{(z-\pi i)\, e^{\alpha z}}{1+e^z} \\
&= 2\pi i \frac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\pi i}} \\
&= -2\pi i e^{\alpha\pi i}
\end{aligned}$$

Observons que par définition d'une intégrale curviligne, on peut écrire ;

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \\
&+ \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{(x+2\pi i)}} dx + \int_{2\pi}^{0} \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy \\
&= \left(1-e^{2\pi\alpha i}\right) \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \\
&- \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy
\end{aligned}$$

Ainsi puis que le paramétre $0 < \alpha < 1$ et pour tout réel $y \in [0, 2\pi]$
On a ;

$$\left|\frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \le \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} \simeq e^{(\alpha-1)R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}dy=0$$

et :

$$\left|\frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right|\leq\frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}}\simeq e^{-\alpha R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}dy=0$$

On en déduit que si R tend vers l'infini on obtient :

$$\left(1-e^{2\pi\alpha i}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}dx=-2\pi ie^{\alpha\pi i}$$

Par conséquent , pour tout réel $0<\alpha<1$ l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}dx=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

6.8 L'intégrale sous forme $\int_a^b f(x)\,dx$ avec a , b des point singuliers de f :

Donc on choisit un chemin γ qui contient le morçeau $[a,b]$ comme l'exemple suivant :

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

On prend

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2\left(\sqrt{1-z^2}\right)}$$

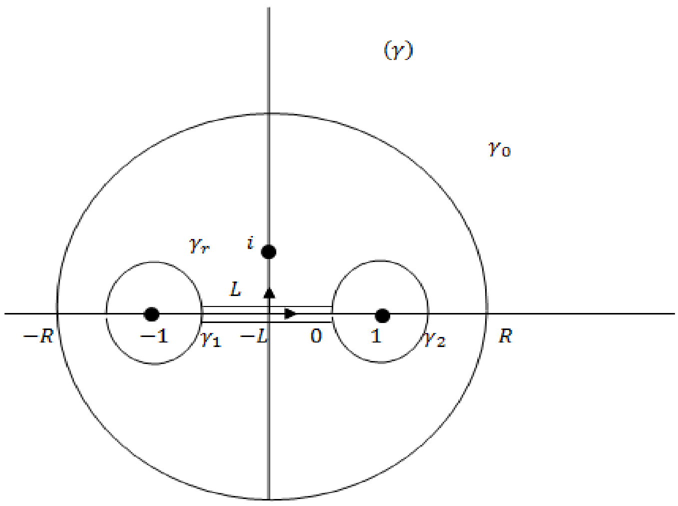

FIGURE 6.4 – le chemin γ associé à l'exemple

Donc $z_0 = 1$, $z_1 = -1$ sont des points singuliers de f et on a aussi $z_2 = i$, $z_3 = -i$ deux pôles d'ordre 2.

$$(z-1) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \text{ alors } 1 - z = r_1 e^{i(\theta_1+\pi)}.$$

$$(z+1) = r_2 e^{i\theta_2}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$$

Alors

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{1-z^2} \\ &= \sqrt{(z+1)(1-z)} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\pi}{2}\right)+k\pi i}, k = 0, 1 \end{aligned}$$

Si on prend $k = 0$ donc

$$\begin{aligned} g(i) &= \sqrt{\sqrt{2} * \sqrt{2}} * e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi\right)} \\ &= \sqrt{2} e^{\pi i} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-i) &= \sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= +\sqrt{2} \end{aligned}$$

On prend γ :

$$\gamma = \Gamma \cup \{-L\} \cup \gamma_0 + DC + \gamma_1 + AB + \gamma_2 + L$$

$\Big($notre fonction $\sqrt{1-z^2}$ est analytique et un seule valeur.$\Big)$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2 \sqrt{1-z^2}}$$

quand $z \in (AB)$

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\pi+\pi}{2}\right)}, \theta_1 + \theta_2 = \pi \\ &= \sqrt{r_1 r_2} \\ &= -\sqrt{(1-x)(1+x)} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$z \in (CD) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 3\pi$, alors

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)} \\
&= \sqrt{r_1 r_2} \\
&= \sqrt{1-u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{-L} f(z)\,dz + \int_L f(z)\,dz + \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \\
&+ \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{DC} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \\
&= \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \\
&+ \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{-1+r}^{1-r} f(z)\,dz + \int_{1-r}^{-1+r} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

$z = Re^{i\theta}$ alors

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{1}{(1+z^2)^2 + \sqrt{1+z^2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{(R^2+1)^{5/2}} \\
\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| &\leq \int_\Gamma |f(z)|\,dz \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{R}{(R^2+1)^{3/2}} dz \\
&= \frac{2\pi R}{(R^2+1)^{3/2}} \\
&\longrightarrow 0 \quad (R \to +\infty)
\end{aligned}$$

$z \in \gamma_2$ alors $z = 1 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{(1-z)(1+z)}} \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{r}} \\
\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &\leq \frac{\pi r}{\sqrt{r}} \to 0\,(r \to 0)
\end{aligned}$$

Sur γ_0 de même principe, on trouve :

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz \to 0$$

$$(r \to 0)\,.$$

Sur γ_1 : $z = -1 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2\pi r}{\sqrt{r}} \to 0 \quad (r \to 0)\,.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)\,dz &= 2\pi i\,(Res\,(f,i) + Res\,(f,-i)) \\
&= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2\,(z+i)^2\sqrt{1-z^2}}\right)\right) \\
&+ 2\pi i\left(\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z+i)^2}{(z-i)^2\,(z+i)^2\left(\sqrt{1-z^2}\right)}\right)\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{-6}{16\sqrt{2}} + \frac{-6}{16\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{-12}{8\sqrt{2}}\pi \\
&= \frac{-3\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Donc quand on passe à la limite $r \to 0$, $R \to +\infty$

$$2\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{-3\pi\sqrt{2}}{8}$$

6.9 Principe de l'argument

Théorème 6.2. *[1, 8, 6] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Ω*

Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous les pôles et zéros de $f(z)$ dans Ω. Alors

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = ind_{fo\gamma}(0)$$

6.10 Théorème de Rouché[1]

Théorème 6.3. *Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe Ω et sur sa frontière γ.*
Supposons qu'en tout point de γ, on ait $|f(z)| > |g(z)|$. Alors $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros dans Ω.

Conclusion

Dans ce cours, nous avons présenté la construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ et nous avons définis les opérateurs sur cet ensemble. Après, on a définit de la fonction de la variable complexe, les fonctions holomorphes, les fonctions analytiques, les condition de Cauchy-Riemann et les fonctions harmoniques. Ensuite on a définit les fonctions exponentielle, logarithme, circulaires, hyperboliques et puissances.
On a présenté le Calcul intégral et l'utilisation d'intégrale curviligne, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, formule de la moyenne, formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, inégalité de Cauchy et théorème de Liouville-Théorème de Morera.
On a présenté aussi le développement en série Taylor et en série de Laurent et singularité isolées d'une fonction complexe.
Enfin une application de théorème des résidus avec des exemples et des exercices résolus.

Bibliographie

[1] Michèle Audin. Analyse complexe. *Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS*, 2011.

[2] B. Belaidi. Analyse complexe cours et exercices corrigés. *Deuxième édition*, page 245, 2009.

[3] C.M. Bethke. Geochemical reaction modeling : Concepts and applications. *Oxford university Press US*, 1996.

[4] John B. Conway. Functions of one complex variable. *Springer-Verlag, New York*, 1978.

[5] P. Eyssidieux. Analyse complexe. *Lyon*, 2013-2014.

[6] André Giroux. Analyse complexe : Cours et exercices corrigés. *Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal*, 2013.

[7] A. Lesfari. Analyse complexe. *SMA 6*, 2014-2018.

[8] B. Chabat M. Lavrentiev. Méthode de la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Edition Mir, Moscou*, 1977.

[9] W. Rudin. Analyse réelle et complexe, cours et exercices. 1987.

[10] V. Smirnov. Cours de mathématiques supérieures. *Tome 3, OPU*, 1985.

[11] G. Dennis Zill and D. Patrick Shanahan. Complex analysiss. *Jones and Bartlett Publishers*, 2003.

Table des figures