REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Par :

Sbahi Rekia
Touati Rachida
Zoubida Khaldia

Sur le thème

Quelques inégalités de type Tchebychev pour opérateur intégral fractionnaire k-conformable

---

Soutenu publiquement le 14/ 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. SENOUCI Abdelkader	Pr	Université Tiaret	Président
Mr. SOFRANI Mohammed	MAA	Université Tiaret	Encadreur
Mr. SOUID Mohammed Said	MCA	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciements

Je remercie tout d'abord ♡ ALLAH ♡ pour m'avoir donné la capacité de savoir et réussir afin de réaliser ce travail

A mon encadreur Mr : SOFRANI MOHAMMED

J'ai eu l'honneur d'être parmi vos étudiants de bénéficier de votre riche enseignement. Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modéle. Votre gentillesse, et votre disponibilité permanente ont toujours suscité mon admiration. Veuillez bien Monsieur recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter l'encadrement de cetravail.

Aux membres du jury

Messieurs les membres du jury, vous nous faites un grand honneur en accéptant de juger ce travail. Je dois un remerciement á toute l'équipe d'enseignement pour leurs qualités scientiqúes et pédagogiques. Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches et tous ceux qui, de prés ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

Dédicaces

...Je dédie ce travail :

À

MES CHERS PARENTS pour tous leurs sacrifices, leur amour,
leur tendresse, leur soutien
et leurs prières tout au long de mes ètudes

À

Mes sœurs ♡ Chahra , Ikram , Nour ♡et Mes frères ♡ Nasserddine ,
Abdelhake ♡ pour leur
disponibilité à entendre mes frustrations et les
sources de mes tensions et toujours m'aider avec mes
souhaits de bonheur et de réussite dans
leur vie ♡

À

Tous Les Enseignants
du département de Mathématique qui ont contribué à mon formation ♡

À

Tous Mes Amis et Collègue
surtout ♡ Nadjet ♡ Yahi Torkia ♡

♡♡ Khaldia ♡♡

Table des matières

INTRODUCTION

En mathématiques ,le calcul fractionnaire est un branche de l'analyse qui étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier n à l'ordre non entier (fractionnaire).

La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui , ces origines remontent à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle , l'époque où Newton , Wihelm et Leibniz sont développé les fondements du calcul différentiel et intégral .

En particulier , Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital datée du 30 septembre 1695 , avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$.

Leibniz lui a répondu : "Cella conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour , on pourra tirer des conséquences utiles".

Cette lettre de l'Hôpital , est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire , et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction , a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques .

L'inégalité

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \geq 0 \tag{1}$$

Où f et g sont deux fonctions intégrables synchrones sur $[a,b]$ $(i.e.(f(x) - f(y))(g(x) - g(y) \geq 0$, pour tout $x, y \in [a,b])$.
Nombreux chercheurs sont généralisé les opérateurs classiques et fractionnaire en introduisant un paramèter $k > 0$,il y a une dizaine d'années Mubeen et Habibullah [11] sont utilisé la théoriè spéciale des n-fonctions en calcul fractionnaire pour la première fois dans la littérature sous la forme d'une intégrale K-Riemann-Liouville .

Rècemment des nombreux chercheurs de présentent nouveaux opérateurs différentiels et intégraux fractionnaires et ils ont généralisé par procédure d'itération et en introduisant un nouveau paramètre $k > 0$.

Dans [3] , Belarbi et Dahmani ont présenté des théorémes liés à l'inégalité de Tchebyshev pour les opérateurs intégraux fracrionnaires de Riemann-Liouville ([22],[23],[27]).

Dans le présent travail on etudie quelques intégralités de type Tchebyshev pour opérateur intégral fractionnaire -K- conformable .

Ce mémoire comprend introduction, trois chapitres ,conclusion et bibliographie.

dans le premiére chapitre nous présentons les notions de bases, donnons une rappel l'espaces fonctionelles, puis nous présentons les fonctions spécifiques importantes dans la théorie du calcul fractionnaire.

dans le deuxième chapitre donnons un rappel de l'intégral fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville et quelques propriétés, en utilisant l'intégrale fractionnaire K-Riemann-Liouville, l'intégral fractionnaire conformable et K-conformable .

dans le troisiéme chapitre nous présentons certaines inégalités de type Tchebyshev pour opérateur intégral fractionnaire K-conformable, en utilisant l'intégral fractionnaire de Riemman-Liouville et opérateur intégral fractionnaire conformable.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASES

On rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle .

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales

Soit $\Omega = (a, b)(-\infty \leq a < b \leq \infty)$un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,on note par $L^p[a, b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p-intégrables sur $[a, b]$ à valeurs $\mathbb{C}$:

$$L^p([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{C}; mesurable, et\|f\|_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^p([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

l'espace $L^p([a,b])$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach .

1. Si $p = 2$, alors $L^2([a,b])$ est espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a,b]$.

2. Si $p = \infty$, L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f bornées presque partout(p.p) sur Ω.

Théorème 1.1

Soit $\Omega = (a,b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :
$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :
$$\|f\|_\infty = inf\{M \geq 0 : |f(x) \leq M \qquad p.psur\Omega\}$$

.

1.1.2 Espaces des fonctions continues :

Définition 1.2

Soit $\Omega = [a,b](-\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $n \in \mathbb{N} = 0, 1, ...$
On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées

d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_C := \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} \mid f^{(k)}(x) \mid, \qquad n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0, C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C := \max_{x\in\Omega} \mid f(x) \mid$$

1.1.3 Espaces des fonctions absolument continues :

Définition 1.3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et$([a_k, b_k])_{k\in\mathbb{N}}$ une suite finie de sous intervalles disjoints de $[a, b]$, On dit que f est absolument continue sur $[a, b]$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k - a_k| < \delta(\varepsilon) \qquad \textbf{alors} \qquad \sum_{k=0}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

Définition 1.4

Pour $n \in \mathbb{N} = 0, 2, ...,$ on désigne par $AC^n([a, b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ c'est à dire

$$AC^n([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad et \quad f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}$$

En particulier $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$

Proposition 1.1

Soit $\Omega = [a,b](-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini.
On désigne par$AC([a,b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables , c'est à dire :

$$AC([a,b]) = \left\{ f/\exists\varphi \in L^1([a,b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \right\}$$

et on appelle $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

1.1.4 Espaces des fonctions continues avec poids

Définition 1.5

Soient $\Omega = [a,b]$ un intervalle fini et $\lambda \in \mathbb{C}(0 \leq \Re(\lambda) < 1)$.
On désigne par $C_\lambda([a,b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a,b]$ telles que la fontion $(x-a)^\lambda f(x) \in C([a,b])$c'est à dire

$$C_\lambda([a,b]) = \{f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, (.-a)^\lambda f(.) \in C([a,b])\} \tag{1.1}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\lambda} = \|(x-a)^\lambda f(x)\|_C = \max_{x\in\Omega} \mid (x-a)^\lambda f(x) \mid \tag{1.2}$$

l'espace$C_\lambda([a,b])$ est appelè l'espace des fonctions continues avec poids.
En particulier , $C_0([a,b]) = C([a,b])$

Définition 1.6 *L'espace $L_{p,k}([a,b])$: est l'espace des fonctions f mesurables sur $[a,b]$ c'est-à-dire :*

$$f \in L_{p,k}([a,b]) \Leftrightarrow \int_{[a,b]} |f\ (x)|^p x^k\ dx < \infty, \qquad k \geq 0\ \ , 1 \leq p < \infty$$

1.1.5 Espace X_c^p

Définition 1.7

Soient $a < b$, $c \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$ on désigne par $X_c^p(a,b)$ l'espace de fonctions définie par :

$$X_c^p(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad : \|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

- pour $p = \infty$, $\qquad \|f\|_{X_c^p} = \sup ess_{a \leq t \leq b} \left[t^c |f(t)| \right]$.

1.2 Inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\int_E |fg| dx \leq \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Proposition 1.2 ***(Inégalité de cauchy schwartz*** *) :*
Soient $f, g \in (C[a,b], \mathbb{R}^2)$ alors :

$$\left(\int_E |fg| \right) \leq \left(\int_E |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3 Théorème de Fubini

Soit E un ensemble mesurable $\mathbb{R}^n((a,b) \subset \mathbb{R}^n)$ et $((c,d) \subset \mathbb{R}^n)$ un ensemble mesurable et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $(a,b) \times (c,d)$,alors pour presque tous les $x \in (a,b)$, $f(x,y)$ est intégrable sur (c,d) et :

$$\int_{(a,b)\times(c,d)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

c-à-d : Si $f(x,y)$ est une mesurable sur $(a,b) \times (c,d)$ et est finie l'une des intégrales :

$$\int_{(a,b)} \left(\int_{(c,d)} |f(x,y)|dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|dx \right) dy$$

1.4 Formule de Dirichlet

C'est un cas particulier de théorème de Fubini on a l'égalité suivante avec comme hypothése la convergence absolue au moins de l'une des deux intégrales , alors :

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)dydx = \int_a^b \int_y^b f(x,y)dxdy$$

1.5 Fonctions spécifiques

Dans cette section , nous présentons les fonctions Gamma , Bêta , jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces application .

1.5.1 ***Fonction Gamma***

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes á partie réels positive.).

Définition 1.8 *Pour $z \in \mathbb{C}$, telle que $\Re(z) > 0$ la fonction Gamma $\Gamma(z)$ définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{1.3}$$

Cette intégrable est convergente pour tout $x > 0$

Proposition 1.3 *Pour tout $\Re(z) > 0$ on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\
&= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

En particulier $\Gamma(1) = 1$

Proposition 1.4 *Pour* $z = n + \frac{1}{2}$ *on a*

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

Proposition 1.5 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

<u>Preuve:</u>

D'après la proposition (1.3) on par récurence

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) \\ &= n.(n-1).\Gamma(n-1) \\ &= n.(n-1)...2\Gamma(1) \\ &= n! \end{aligned}$$

Proposition 1.6 *Par le principe de prolongement analytique on peut prolonge la fonction sur* $\mathbb{C}/\mathbb{R}^-$ *soit* $z > 0, z \notin \mathbb{N}$ *on a*

$$(-1)^j \left(z\right) = \frac{\Gamma(-z+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-z)}$$

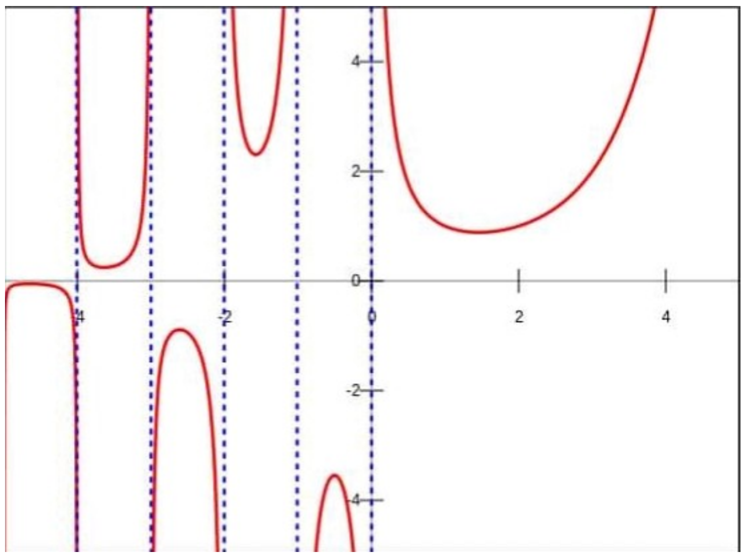
Proposition 1.7 *Pour tout* $\Re(z) > 0$ *on a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}$$

Proposition 1.8 *Pour $z = \frac{1}{2}$ on a*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

• ***Le graphe de la fonction Gamma***



1.5.2 ***Fonction Bêta***

Définition 1.9

Soient $z, \omega \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$ et $\Re(\omega) > 0$, la fonction Bêta est notée $\beta(z, \omega)$ et définie par :

$$\beta(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt \tag{1.4}$$

Proposition 1.9 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante*

$$\beta(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{z-1}e^{-t_1}t_2^{\omega-1}e^{-t_2}dt_1dt_2 \\ &= \int_0^\infty t_1^{z-1}\left(\int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)}t_2^{\omega-1}dt_2\right)dt_1\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t_2' = t_1 + t_2$, on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^\infty t_1^{z-1}\int_{t_1}^\infty (t_2'-t_1)^{\omega-1}e^{-t_2'}dt_2'dt_1 \\ &= \int_{t_1}^\infty e^{-t_2'}\int_0^\infty (t_2'-t_1)^{\omega-1}t_1^{z-1}dt_1dt_2'\end{aligned}$$

Si on pose $t_1' = \frac{t_1}{t_2'}$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^\infty e^{-t_2'}dt_2'\int_0^1 (t_2'-t_1't_2')^{\omega-1}\omega(t_1't_2')^{z-1}t_2'dt'^1 \\ &= \int_0^\infty e^{t_2'}dt_2'\int_0^1 (t_2'(1-t_1'))^{\omega-1}(t_1't_2')^{z-1}t_2'dt_2' \\ &= \int_0^\infty e^{-t_2'}dt_2'\left((t_2')^{\omega-1}(t_2')^{z-1}t_2'\int_0^1 (1-t_1')^{\omega-1}(t_1')^{z-1}dt_1'\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-t_2'}dt_2'\left((t_2')^{z+\omega-1}\beta(z,\omega)\right) \\ &= \int_0^\infty e^{t_2'}(t_2')^{z+\omega-1}dt_2'\beta(z,\omega) \\ &= \Gamma(z+\omega)\beta(z,\omega)\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

Propriétés 1.1

$$\beta(z,\omega)=\beta(\omega,z)$$

<u>Preuve:</u>

$$\beta(z,\omega)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

On utilise le changement de variable
$Y=1-t \Rightarrow t=1-Y; dt=-dY$

$$\begin{aligned}\beta(z,\omega)&=\int_1^0 (1-Y)^{z-1}Y^{\omega-1}(-dY)\\&=\int_0^1 Y^{\omega-1}(1-Y)^{z-1}dY\\&=\beta(\omega,z)\end{aligned}$$

Propriétés 1.2

$$z\beta(z,\omega+1)=\omega\beta(z+1,\omega).$$

Exemple 1.1

Calculons $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)&=\frac{\Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\ (1)}\\&=\pi\end{aligned}$$

1.5.3 *La fonction K-Gamma*

Définition 1.10

Pour $k > 0$, la fonction k-Gamma donnée par :

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}} \qquad x \in \mathbb{C} \setminus kz^-$$

Proposition 1.10 *pour* $x \in \mathbb{C} \setminus kz^-$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *, ona les égalités suivantes :*

1. $(x)_{n,s} = (\frac{s}{k})^n (\frac{kx}{s})_{n,k}$

2. $\Gamma_s(x) = (\frac{s}{k})^{\frac{x}{s}-1} \Gamma_k(\frac{kx}{s})$

Proposition 1.11 *pour* $x \in \mathbb{C}$, $\Re(x) > 0$ *, on a :*

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt$$

Proposition 1.12 *la fonction k-Gamma* $\Gamma_k(x)$ *satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$
2. $(x)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}$
3. $\Gamma_k(k) = 1$

Chapitre 2

La dérivation et intégration fractionnaire

2.1 *L'intégrale fractionnaire sur un intervalle* $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur intervalle $[a; b]$.On considère intégrale :

$$\begin{aligned} J^{(1)}f(x) &= \int_a^x f(t)dt. \\ J^{(2)}f(x) &= \int_a^x J^{(1)}f(u)du. \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt \right) du. \\ &= \int_a^x (\int_t^x du) f(t)dt. \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt. \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Plus généralement la n-ième de l'opèrateur$J$ peut s'ècrire :

$$J^{(n)}f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \int_a^{x_n-1} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt \qquad (2.2)$$

pour tout entier n .
Cette formule est appelèe formule de Cauchy,et depuis la gènèralisation du factoriel par la fonction Gamma :$\Gamma(n) = (n-1)!$,Riemann rendu compte que le second membre de(2.2) paurait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière , il a dèfinit l'ntègrale fractinnaire de la manière suivante :

Définition 2.1 *[28][29] Soit $f \in L^1([a,b])$ l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ notée $J_a^\alpha f$ est définie par :*

$$J_{a^+}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt \qquad \textit{telleque} \qquad x > a \qquad (2.3)$$

ast appelèe intègrale fractinnaire(à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α ,et l'intè-grale :

$$J_{b_-}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt \qquad \textit{telleque} \qquad x < b \qquad (2.4)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donné par (1.3).

Remarque 2.1 *pour $\alpha = 0$* ***On a :*** $J_a^0 f = f(x)$

Remarque 2.2 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Théorème 2.1 *[28][29] Si $f \in L^1([a,b])$, alors $J_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $J_a^\alpha f \in L^1([a,b])$*

Démonstration

En introduisant la définition (2.1) puis an utilisant le théorème de Fubini ,on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |(J_a^\alpha f)(x)| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^\alpha dt \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt
\end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a,b])$,la dernière quantité est fini ce qui établit le résultat désiré.

Exemple 2.1 *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$, alors :*

$$(J_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \tag{2.5}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y \qquad (0 \leq y \leq 1)$$

alors (2.5) devient

$$\begin{aligned}
(J_a^\alpha f) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta (x-a)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1}y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{a+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{(\beta+1)-1} dy
\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.4) puis de la relation (1.9) on arrive à :

$$\begin{aligned}
(J_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$(J_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{2.6}$$

Exemple 2.2 *Soit*$f(x) = x^\beta$ *avec* $\beta > -1$ ***On a*** *:*

$$(J_0^\alpha f)(x) := J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{a-1} dt \tag{2.7}$$

En posant : $t = xu$ *, (2.4) devient*

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{a-1} x du$$

En utilisant la fonction bêta (1.4) puis de relation (1.9) on arrive à :

$$\begin{aligned} J^\alpha &= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Proposition 2.1 *[28][29]*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ telles que $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$J_a^\alpha (J_a^\beta f) = J_a^{\alpha+\beta} f = J_a^\beta (J_a^\alpha f)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. Si de plus $f \in \mathbb{C}([a, b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a, b]$

Démonstration :

Supposons d'abord que $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$\begin{aligned} (x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (J_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \end{aligned}$$

En vertu du théorème (2.1) les intégrale figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a, b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[J_a^\alpha(J_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}]dsdt$$

En effectuant le changement de variable

$$s = t + (x-t)y \qquad (0 \leq y \leq 1)$$

on obtient

$$[J_a^\alpha(J_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dydt$$

Enfin,en tenant de la définition (1.4)puis de la relation (1.9) on obtient :

$$[J_a^\alpha(J_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt = (J_a^{\alpha+\beta} f)(x)$$

Supposons maintenant que $f \in \mathbb{C}([a, b])$, alors(d'après les théorème sur les intégrales dépendant de paramètres)$J_a^\beta f \in \mathbb{C}([a, b])$, et par suite

$$J_a^{\alpha+\beta} f, J_a^\alpha J_a^\beta f \in \mathbb{C}([a, b])$$

Ainsi ,d'après ce qui précède ,les deux fonctions continues $J_\alpha^{\alpha+\beta} f, J_a^\alpha J_a^\beta f$ coïncident presque partout sur [a , b] ,elle doivent donc coïncider partout sur [a , b] .
Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire .

Théorème 2.2 *Soit α réel strictement positif, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f continue sur $[a, b]$,* ***alors*** *on a*

$$(J_a^\alpha(\lim f_n))(x) = \lim(J_a^\alpha f_n)(x)$$

Démonstration :

Puisque$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f **on a** :

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

Donc

$$\begin{aligned}|(J^\alpha_{a+}f_n)(x) - (J^\alpha_{a+}f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x |f_n(x) - f(x)|(x-t)^{\alpha-1}dt \\ &\leq \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\ &\leq \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x-a)^\alpha.\end{aligned}$$

D'où

$$\|J^\alpha_{a+}f_n - J^\alpha_{a+}f\|_\infty \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_n - f\|_\infty \to 0, \qquad quand\ n \to +\infty.$$

Donc $(J^\alpha_{a+}f_n)_n$ converge uniformément vers $J^\alpha_{a+}f$.

2.2 *Dérivées fractionnaires*

Dans la litération il existe plusieurs approches pour la dèrivation fractionnaire , nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.2.1 *La dérivie fractionnaire au sens de Riemann-Liouville*

Soit f une fonction intégrable sur $[a;t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n-1<\alpha<n$)au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$^{R}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau=\frac{d^n}{dt^n}(J^{n-\alpha}f(t)) \quad (2.8)$$

Exemple 2.3

1. la dérivée non entiére d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante , mais ona :

$$^{R}D^{p}C=\frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}$$

2. la dèrivée de $f(t)=(t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville :
Soit α non entier et $0\leq n-1<p<n$ et $\alpha>-1$, alors on a :

$$^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha}d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\beta(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

A titre d'exemple :

$${}^{R}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

Proposition 2.2 *Composition avec l'intégrale fractionnaire :*

1. *l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :*

$${}^{R}D^{p}(J^{p}f(t)) = f(t)$$

2. *ona*

$${}^{R}D^{p}(J^{q}f(t)) =^{R} D^{p-q}f(t)$$

3. *La dérivation et l'intération fractionnaire ne commutent pas.*

$${}^{R}D^{-p}({}_{a}^{R}D_{t}^{q}f(t))^{R}D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{R}D^{q-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)} \tag{2.9}$$

$$\textit{avec} \qquad m-1 < q < m$$

2.2.2 *Dérivées fractionnaire au sens de Caputo :*

On va introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 2.2 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a;b]$*
La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$$ {}^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = J^{n-\alpha}(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) \quad (2.10) $$

Proposition 2.3

1. *Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :*
   Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n, (n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}_a^C D_t^p f(t)$ et ${}_a^R D_t^q f(t)$ existent alors :

   $$ {}^{C}D^{p} f(t) = {}^{R} D^{p} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \right) \quad (2.11) $$

   On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura ${}^{C}D^{p} f(t)$

2. *Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :*
   Si f est une fonction continue ona :

   $$ {}^{C}D^{p} J_a^p f = f et J_a^p({}^{C}D^{p}) f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!} \quad (2.12) $$

   donc l'opérateue de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'inté-grattion fractionnaire mais il n'est pas un inverse a droite.

Exemple 2.4

1. *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :*
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$^{C}D^{p}C = 0 \tag{2.13}$$

2. *La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo :*
   Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$,alors ona :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$

d'ou

$$^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

• *Intégrale fractionnaire de k-Riemann-Liouville*

Définition 2.3 *[1] L'intégrale fractionnaire de k-Riemann-Liouville définie par :*

$$J^{\alpha}_{k,a^+}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt, \qquad x > 0, \qquad \Re(\alpha) > 0$$

et

$$J^{\alpha}_{k,b^-}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)ft, \qquad x < b, \qquad \Re(\alpha) > 0$$

Où Γ_k fonction k-Gamma .

• *Intégrale fractionnaire conformable*

Définition 2.4 *([20],[21]) En remplaçant l'entier n par un nombre $\beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\beta) > 0$, on définie l'opérateur intégrale fractionnaire(à gauche) conformable par :*

$${}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} \quad (2.14)$$

l'intégrale fractionnaire (2.14)est coïncide avec l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville définie dans (2.3) quand $a = 0$ et $\alpha = 1$.

Définition 2.5 *l'intégrale fractionnaire (à droite) conformable d'ordre $\beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\beta) > 0$ est définie par :*

$${}^{\beta}J^{\alpha}_{b}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b \left(\frac{(b-x)^{\alpha} - (b-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(t)\frac{dt}{(b-t)^{1-\alpha}} \quad (2.15)$$

l'intégrale fractionnaire (2.15) est coïncide avec l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville définie dans (2.4) quand $b = 0$ et $\alpha = 1$.

• *Intégrale fractionnaire k-conformable*

Définition 2.6 *[7]*

L'intégrale fractionnaire k-conformable définie par :

$$ {}^{\beta}_{k}J^{\alpha}_{a^+}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^\alpha - (t-a)^\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{k}-1} f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} \tag{2.16} $$

et

$$ {}^{\beta}_{k}J^{\alpha}_{b}f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\beta)} \int_x^b \left(\frac{(b-x)^\alpha - (b-t)^\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{k}-1} f(t) \frac{dt}{(b-t)^{1-\alpha}} \tag{2.17} $$

$$ \text{Où} \qquad \Re(\beta) > 0 $$

Chapitre 3

Quelques Inégalités de type Tchebyshev pour opérateur intégral fractionnaire -K-conformable

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

3.1 *Inégalité de Tchebyshev pour les fonctions synchrones(a synchrones)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$
Si f , g sont synchrones (a synchrones)telles que :

$$(f(u) - f(v))\,(g(u) - g(v)) \geq (\leq) 0 \qquad \textit{pourtout} \qquad x, y \in [a, b]$$

Alors l'inégalité :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \geq (\leq) 0$$

est appelé l'négalité de Tchebyshev notée par : $T(f,g)$:

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$

— — — — — — — — — — — — — —

•*Inégalité de type Tchebyshev pour les fonctions synchrones au sens Riemann-Liouville :*

Théorème 3.1 *[3] Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0,\infty)$, alors pour tout $t>0$,$\alpha>0$:*

$$J^{\alpha}(fg) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}} J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t). \tag{3.1}$$

Théorème 3.2 *[3] Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0,\infty)$, alors pour tout $t>0$,α et $\beta>0$:*

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\beta}(fg)(t) + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} J^{\alpha}(fg)(t) \geq J^{\alpha}f(t)J^{\beta}g(t) + J^{\beta}f(t)J^{\alpha}g(t). \tag{3.2}$$

Théorème 3.3 *[3] Soient f_i $1\leq i\leq n$ des fonctions croissantes sur $[0,\infty)$, alors pour $t>0$, $\alpha>0$*

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{1-n}\prod_{i=1}^{n} J^{\alpha}f_i(t). \tag{3.3}$$

Théorème 3.4 *[3] Soient f et $g$deux fonctions définies sur $[0,\infty)$, f est croissante , g est différentiable et $m = \inf_{t\in[0,\infty[} g'(t)$, alors l'inégalité est vérifié pour tout $t > 0, \alpha > 0$*

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{-1} J^{\alpha}f(t) J^{\alpha}g(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^{\alpha}f(t) + mJ^{\alpha}(f(t)) \quad (3.4)$$

– – – – – – – – – – – – – – – –

Nouvelles inégalités de type Tchebyshev définies par :

1. ***L'intégral conformable fractionnaire :***

   Théorème 3.5 *([20] [21]) Soient f et g deux fonctions intégrables synchrones sur $[0,\infty)$ alors :*

   $$\left({}^{\beta}J^{\alpha}fg\right)(x) \geq \frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\alpha\beta}} \left({}^{\beta}J^{\alpha}f\right)(x) \left({}^{\beta}J^{\alpha}g\right)(x) \quad (3.5)$$

   pour tout $\alpha, \beta > 0$, Γ La fonction Gamma d'Euler.

   Preuve:
   Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0,\infty)$ On a :

   $$(f(u) - f(v))(g(u) - g(v)) \geq 0.$$

   $$\Longleftrightarrow f(u)g(u) + f(v)g(v) \geq f(u)g(v) + f(v)g(u) \quad (3.6)$$

   On multiple (3.6) par :

   $$\frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}} \left(\frac{x^{\alpha} - u^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} (x \in \mathbb{R}^{+}, 0 < u < x)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(u)g(u)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(v)g(v)\\
&\geq \frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(u)g(v)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(v)g(u)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

On intègre (3.7) par rapport à u sur $[0, x]$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{f(u)g(u)}{u^{1-\alpha}}du\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{f(v)g(v)}{u^{1-\alpha}}du\\
&\geq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{f(u)d(v)}{u^{1-\alpha}}du\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{f(v)g(u)}{u^{1-\alpha}}du
\end{aligned}$$

$$({}^\beta J^\alpha fg)(x)+f(v)g(v)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} u^{\alpha-1}du \geq g(v)({}^\beta J^\alpha f)(x)+f(v)({}^\beta J^\alpha g)(x)$$

$$({}^\beta J^\alpha fg)(x)+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\alpha^{\beta-1}}\int_0^x (x^\alpha-u^\alpha)^{\beta-1}u^{\alpha-1}f(v)g(v)du \geq g(v)({}^\beta J^\alpha f)(x)+f(v)({}^\beta J^\alpha g)(x)$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1}}\int_0^x \left(1-\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha}\right)^{\beta-1} u^{\alpha-1}du$$
$$\geq g(v)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x) + f(v)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)$$

On utilise le changement de variable $t \in [0,1]$:

$$t = \frac{u^{\alpha}}{x^{\alpha}} \Longrightarrow u^{\alpha} = x^{\alpha}t \Longrightarrow u^{\alpha-1}du = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}dt$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+f(v)g(v)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1}}\int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt \geq g(v)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)+f(v)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+f(v)g(v)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1}}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\int_0^1 (1-t)^{\beta-1}dt \geq g(v)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)+f(v)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\left[-\frac{(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]_0^1 f(v)g(v) \geq g(v)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)+f(v)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}f(v)g(v) \geq g(v)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)+f(v)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x). \tag{3.8}$$

On multiple (3.8) par

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}({}^\beta J^\alpha fg)(x)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}f(v)g(v)\\
&\geq\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}g(v)({}^\beta J^\alpha f)(x)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}f(v)({}^\beta J^\alpha g)(x).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

On intègre (3.9) par rapport à v sur $(0,x)$:

$$\begin{aligned}
&({}^\beta J^\alpha fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{dv}{v^{1-\alpha}}\\
&+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(v)g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&\geq({}^\beta J^\alpha f)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&+({}^\beta J^\alpha g)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(v)}{v^{1-\alpha}}dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&({}^\beta J^\alpha fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}v^{\alpha-1}dv+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}({}^\beta J^\alpha fg)(x)\\
&\geq({}^\beta J^\alpha f)(x)({}^\beta J^\alpha g)(x)+({}^\beta J^\alpha g)(x)({}^\beta J^\alpha f)(x).
\end{aligned}$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\alpha^{\beta-1}}\int_0^x ((x^{\alpha}-v^{\alpha}))^{\beta-1}v^{\alpha-1}dv+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1}}\int_0^x \left(1-\left(\frac{v}{x}\right)^{\alpha}\right)^{\beta-1}v^{\alpha-1}dv+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

On utilise le changement de variable $t \in [0,1]$:

$$t=\frac{v^{\alpha}}{x^{\alpha}}\Longrightarrow v^{\alpha}=x^{\alpha}t\Longrightarrow v^{\alpha-1}dv=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}dt$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1}}\int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha(\beta-1)}}{\alpha^{\beta-1}}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\int_0^1 (1-t)^{\beta-1}dt+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}\int_0^1 (1-t)^{\beta-1}dt+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}\left[-\frac{(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]_0^1+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{x^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}\frac{1}{\beta}+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$

$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)$$

$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\geq\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x). \tag{3.10}$$

Corollaire 3.1

Si on prend $\alpha=1$ dans l'inégalité (3.5) on obtient l'inégalité (3.1).

Théorème 3.6 *([20] [21]) Soient f et g deux fonctions intégrables synchrones sur $[0,x)$ alors :*

$$\begin{aligned}&\frac{x^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)\\&\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).\end{aligned}\tag{3.11}$$

pour $\alpha,\beta,\tau>0$, Γ fonction Gamma d'Euler.

Preuve:

On multiple (3.8) par :

$$\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}$$

On a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)\\&+\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{\alpha-1}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}f(v)g(v)\\&\geq\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}g(v)({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)\\&+\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}f(v)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x).\end{aligned}\tag{3.12}$$

On intègre (3.12)par rapport à v sur $(0.x)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{dv}{v^{1-\alpha}}\\
&+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}\frac{1}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{f(v)g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&\geq\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&+\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)}{(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{f(v)}{v^{1-\alpha}}dv.
\end{aligned}$$

Donc , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\frac{1}{\alpha^{\tau-1}}\int_0^x\left(x^{\alpha}-v^{\alpha}\right)^{\tau-1}v^{\alpha-1}dv+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)&\\
\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).&\\
\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\frac{x^{\alpha(\tau-1)}}{\alpha^{\tau-1}}\int_0^x\left(1-\frac{v^{\alpha}}{x^{\alpha}}\right)^{\tau-1}v^{\alpha-1}dv+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)&\\
\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).&
\end{aligned}$$

On utilise le changement de variable $t\in[0,1]$

$$t=\frac{v^{\alpha}}{x^{\alpha}}\Longrightarrow v^{\alpha}=x^{\alpha}t\Longrightarrow v^{\alpha-1}dv=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}dt$$

$$\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\frac{x^{\alpha(\tau-1)}}{\alpha^{\tau-1}}\int_0^1\frac{x^{\alpha}}{\alpha}(1-t)^{\tau-1}dt+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).$$
$$\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\frac{x^{\alpha(\tau-1)}}{\alpha^{\tau-1}}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\int_0^1(1-t)^{\tau-1}dt+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).$$
$$\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\frac{x^{\alpha\tau}}{\alpha^{\tau}}\left[-\frac{(1-t)^{\tau}}{\tau}\right]_0^1+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).$$
$$\frac{({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\frac{x^{\alpha\tau}}{\alpha^{\tau}}\frac{1}{\tau}+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).$$
$$\frac{x^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\tau}J^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J^{\alpha}f)(x).$$

Corollaire 3.2

Dans théorème 3.6 , Si on pose $\alpha = 1$, l'inégalité (3.11) on obtient l'inégalité (3.2) intégrales fractionnaire Riemann-Liouville .

Corollaire 3.3

Si $\tau = \beta$, nous obtenons l'inégalité (3.5) .

Théorème 3.7 *t([20] [21]) Soient* $(f_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ *fonction positive et croissante sur* $[a,b]$ *, pour* $\alpha,\beta>0$ *On a :*

$$\left({}^{\beta}J^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(x)\geq\left[\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}\right]^{n-1}\prod_{i=1}^{n}({}^{\beta}J^{\alpha}f_i)(x). \tag{3.13}$$

Preuve:

Nous prouvons ce théorème par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, le cas $n=1$ de(3.13) est valable .

pour $n=2$, soient f_1 et f_2 croissantes , On a :

$$[f_1(x)-f_1(y)]\,[f_2(x)-f_2(y)]\geq 0.$$

la preuve a gauche de (3.13) pour $n=2$ est le méme que celle du théorème 3.5. Supposons que l'inégalité (3.13) est vraie pour certains $n\geq 3$. Nous observons que , puis que f_i est croissantes , $f=\prod_{i=1}^{n}f_i$ est croissantes . soit $g=f_{n+1}$ alors appliquer le cas $n=2$ aux fonctions $f$et g donne :

$$\begin{aligned}\left({}^{\beta}J^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_if_{n+1}\right)(x)&\geq\left[\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}\right]\left({}^{\beta}J^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_i\right)({}^{\beta}J^{\alpha}f_{n+1})(x).\\&\geq\left[\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}\right]^{n}\left({}^{\beta}J^{\alpha}\prod_{i=1}^{n+1}f_i\right)(x).\\&\geq\left[\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}\right]^{n-1}\left({}^{\beta}J^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(x).\end{aligned}$$

Où l'hypothése récurrence pour l'instant est utilisé dans la déduction de la seconde inègalité , la preuve du théorème3.7 est complète .

Corollaire 3.4

Si nous prenons $\alpha = 1$ dans le théorème 3.7 , alors l'inégalité (3.13) se réduit à l'inégalité (3.3) .

Théorème 3.8 *([20] [21]) Soient f et g deux fonctions sur $[0,\infty[$ dans $\mathbb{R}_0^+$ tel que f croissante , g différentiable et g' admet un point inférieure $m = \inf_{x\in[0,\infty[} g'(x)$*

$$\alpha, \beta \geq 0$$

On a :

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) \geq {} & \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) \\ & - \frac{mx\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+\beta+1)}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x) + m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x).\end{aligned} \tag{3.14}$$

avec : i est une fonction d'identité .

Preuve:

Soit

$$h(x) = g(x) - mx.$$

et
$$p(x) = mx.$$

On a g différentiable et

$$\begin{aligned} m = {} & \inf_{x\in[0,\infty[} g'(x) \\ & \Rightarrow g'(x) \geq m \\ & \Rightarrow g'(x) - m \geq 0 \\ & \Rightarrow h'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Donc : $h(x)$ est croissante .
On a : f et h synchrones . **alors :**

$$({}^{\beta}J^{\alpha}fh)(x) \geq \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}h)(x).$$

$$({}^{\beta}J^{\alpha}f(g-p))(x) \geq \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}(J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}(g-p))(x).$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}p)(x).$$

D'aprés les hypothèses suivante :

$$({}^{\beta}J^{\alpha}f(g-p))(x) = ({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) - m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x). \tag{3.15}$$

et

$$({}^{\beta}J^{\alpha}p)(x) = \frac{mx^{\alpha\beta+1}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+\beta+1)\alpha^{\beta}}.$$

On a :

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) - m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x) \geq &\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) \\ &- \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}p)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) \geq &\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) \\ &- \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}p)(x) + m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) \geq &\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) \\ &- \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}\frac{mx^{\alpha\beta+1}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+\beta+1)\alpha^{\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x) + m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) \geq & \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) \\
& - \frac{mx\Gamma(\beta+1)\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+\beta+1)} + m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x).
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
({}^{\beta}J^{\alpha}fg)(x) \geq & \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}{x^{\alpha\beta}}({}^{\beta}J^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J^{\alpha}g)(x) \\
& - \frac{mx\Gamma(\beta+1)\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+\beta+1)} + m({}^{\beta}J^{\alpha}if)(x).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.5

Si nous prenons $\alpha = 1$ dans le théorème 3.8 , alors l'inégalité (3.14) se réduit à l'inégalité (3.4) .

$- - - - - - - - - - - - - -$

2. ***L'intégral K-conformable fractionnaire :***

Théorème 3.9 *[7] Soient f et g deux fonctions intégrables synchrones sur $[0, \infty)$ alors*

$$
\left({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg\right)(x) \geq \frac{\Gamma(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}\left({}^{\beta}J_k^{\alpha}f\right)(x)\left({}^{\beta}J_k^{\alpha}g\right)(x) \tag{3.16}
$$

Preuve:

Soient f et g synchrones sur $[0, \infty)$ pour tout $u, v \in [0, \infty)$

$$
(f(u) - f(v))(g(u) - g(v)) \geq 0 \tag{3.17}
$$

$$
f(u)g(u) - f(u)g(v) - f(v)g(u) + f(v)g(v) \geq 0
$$

$$
\Leftrightarrow f(u)g(u) + f(v)g(v) \geq f(u)g(v) + f(v)g(u) \tag{3.18}
$$

on multiple (3.18) par :

$$\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}, x\in\mathbb{R}, 0<u<x$$

On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}f(u)g(u)\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}f(v)g(v)\\
&\geq\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}f(u)g(v)\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)u^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}f(v)g(u)
\end{aligned}\tag{3.19}$$

On intègre (3.19) par rapport à u sur (0 , x) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(u)g(u)}{u^{1-\alpha}}du\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(v)g(v)}{u^{1-\alpha}}du\\
&\geq\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(u)g(v)}{u^{1-\alpha}}du\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(v)g(u)}{u^{1-\alpha}}du
\end{aligned}$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^{\alpha}-u^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1} u^{\alpha-1}du$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\int_0^x (x^{\alpha}-u^{\alpha})^{\frac{\beta}{k}-1} u^{\alpha-1}du$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\alpha(\frac{\beta}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\int_0^x \left(1-\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha}\right) u^{\alpha-1}du$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v$$

On utilise le changement de variable $t \in [0,1]$:

$$t = \frac{u^{\alpha}}{x^{\alpha}} \Longrightarrow u^{\alpha} = x^{\alpha}t \Longrightarrow u^{\alpha-1}du = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}dt$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\alpha(\frac{\beta}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\alpha}(1-t)^{\frac{\beta}{k}-1}dt$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + \frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\alpha(\frac{\beta}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\beta}{k}-1}dt$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\left[-\frac{(1-t)^{\frac{\beta}{k}}}{\frac{\beta}{k}}\right]_0^1$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\frac{1}{\frac{\beta}{k}} \geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + f(v)g(v)\frac{1}{k\Gamma^k(\beta)}\frac{kx^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\beta\alpha^{\frac{\beta}{k}}} \geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + \frac{x^{\frac{\alpha-\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}f(v)g(v) \geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)g(v) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)f(v) \tag{3.20}$$

On multiple (3.20) par :

$$\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\\
&+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}f(v)g(v)\\
&\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}g(v)\\
&+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}f(v)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

On intègre (3.21) par rapport à v sur $(0, x)$

$$
\begin{aligned}
&({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{dv}{v^{1-\alpha}}\\
&+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(v)g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(v)}{v^{1-\alpha}}dv
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{x^{\alpha(\frac{\beta}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\int_0^x\left(1-\left(\frac{v}{x}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}v^{\alpha-1}dv\\
&\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)
\end{aligned}
$$

On utilise le changement de variable $t\in[0,1]$:

$$
t=\frac{v^{\alpha}}{x^{\alpha}}\Longrightarrow v^{\alpha}=x^{\alpha}t\Longrightarrow v^{\alpha-1}dv=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}dt
$$

$$
({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\alpha(\frac{\beta}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\int_0^1\frac{x^{\alpha}}{\alpha}(1-t)^{\frac{\beta}{k}-1}dt+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)
$$

$$
\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)
$$

$$
({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\alpha(\frac{\beta}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}-1}}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\left[-\frac{(1-t)^{\frac{\beta}{k}}}{\frac{\beta}{k}}\right]_0^1+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)
$$

$$
\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)
$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\frac{k}{\beta}+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)$$

$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)$$

$$\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\right]\geq 2\left[({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)$$

Donc :

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x) \tag{3.22}$$

Corollaire 3.6

Soient f et g deux fonctions intégrables synchrones sur $[0,\infty)$ alors pour $\alpha,\beta>0$

$$\left({}^{\beta}J_kfg\right)(x)\geq \frac{\Gamma(\beta+k)}{x^{\frac{\beta}{k}}}\left({}^{\beta}J_kf\right)(x)\left({}^{\beta}J_kg\right)(x)$$

Si on prend $\alpha=1$ on obtient le théorème 3.5

Corollaire 3.7

(a) Si $k = 1$,nous obtenons l'inégalité (3.5).

(b) Si $k = 1$ et $\beta = 1$, nous obtenons l'inégalité (3.1) .

Théorème 3.10 *[7] Soient f et g deux fonctions intégrables synchrones sur $[0, \infty)$ alors :*

$$\frac{x^{\frac{\alpha\tau}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\tau}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) + \frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq ({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x) + ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)$$

avec

$$\alpha, \beta, \tau > o$$

Preuve:

On multiple (3.20)par :

$$\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1} ; \alpha, \tau > 0$$

On a :

$$\begin{aligned}
&({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1} \\
&+ \frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1} f(v)g(v) \\
&\geq \left({}^{\beta}J_k^{\alpha}f\right)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1} g(v) \\
&+ ({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1} f(v)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

On intègre (3.23) par rapport à v sur $(0, x)$;

$$
\begin{aligned}
&({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1}\frac{dv}{v^{1-\alpha}}\\
&+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1}\frac{f(v)g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1}\frac{g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\int_0^x\left(\frac{v^{\alpha}-v^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1}\frac{f(v)}{v^{\alpha-1}}dv
\end{aligned}
$$

$$
({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\frac{1}{\alpha^{\frac{\tau}{k}-1}}\int_0^x(x^{\alpha}-v^{\alpha})^{\frac{\tau}{k}-1}v^{1-\alpha}dv+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)
$$

$$
\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)
$$

$$
({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\frac{x^{\alpha(\frac{\tau}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\tau}{k}-1}}\int_0^x\left(1-\left(\frac{v}{x}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{\tau}{k}-1}v^{\alpha-1}dv+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)
$$

$$
\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)
$$

On utilise le changement de variable $t\in[0,1]$;

$$
t=\frac{v^{\alpha}}{x^{\alpha}}\Longleftrightarrow v^{\alpha}=x^{\alpha}t\Longleftrightarrow v^{\alpha-1}dv=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}dt
$$

On a :

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\frac{x^{\alpha(\frac{\tau}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\tau}{k}-1}}\int_0^1\frac{x^{\alpha}}{\alpha}(1-t)^{\frac{\tau}{k}-1}\,dt+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{t}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\frac{x^{\alpha(\frac{\tau}{k}-1)}}{\alpha^{\frac{\tau}{k}-1}}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\int_0^1(1-t)^{\frac{\tau}{k}-1}\,dt+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\frac{x^{\frac{\alpha\tau}{k}}}{\alpha^{\frac{\tau}{k}}}\left[-\frac{(1-t)^{\frac{\tau}{k}}}{\frac{\tau}{k}}\right]_0^1+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)$$

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{k\Gamma_k(\tau)}\frac{x^{\frac{\alpha\tau}{k}}}{\alpha^{\frac{\tau}{k}}}\frac{k}{\tau}+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)$$

$$\frac{x^{\frac{\alpha\tau}{k}}}{\Gamma_k(\tau+k)\alpha^{\frac{\tau}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x)$$

alors :

$$\frac{x^{\frac{\alpha\tau}{k}}}{\Gamma_k(\tau+k)\alpha^{\frac{\tau}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}J_k^{\alpha}fg)(x)$$
$$\geq({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)({}^{\tau}J_k^{\alpha}f)(x) \tag{3.24}$$

Corollaire 3.8

Soient f et g deux fonctions intégrables synchrones sur $[0, \infty)$ alors pour $\alpha > 0$ et $\beta, \tau > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{x^{\frac{\tau}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}({}^{\beta}J_k fg)(x) + \frac{x^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}({}^{\tau}J_k fg)(x) \\ &\geq ({}^{\beta}J_k f)(x)({}^{\tau}J_k g)(x) + ({}^{\beta}J_k g)(x)({}^{\tau}J_k f)(x) \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = 1$

Corollaire 3.9

Si $\tau = \beta$ et $k = 1$, nous obtenons l'inégalité (3.8) .

Corollaire 3.10

(a) Si $k = 1$, nous obtenons l'inégalité (3.11).

(b) $k = 1$ et $\beta = 1$, nous obtenons l'inégalité (3.2).

Théorème 3.11 *[7] Soit f_i $(1 \leq i \leq n)$ des fonctions positives et croissantes sur $[0, \infty)$, alors pour $\alpha, \beta > 0$:*

$$\left({}^{\beta}J_k^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) \geq \left[\frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n}({}^{\beta}J_k^{\alpha} f_i)(x). \quad (3.25)$$

Preuve:

Nous prouvons ce théorème par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, le cas $n = 1$ de (3.25)est valable .
pour $n = 2$, soient f_1 et f_2 croissantes , On a :

$$[f_1(x) - f_1(y)]\,[f_2(x) - f_2(y)] \geq 0.$$

la preuve a gauche de (3.25) pour $n = 2$ est le méme que celle du théorème 3.9. Supposons que l'inégalité (3.25) est vraie pour certains $n \geq 3$. Nous observons que , puis que f_i est croissantes

, $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$ est croissantes . soit $g = f_{n+1}$ alors appliquer le cas $n = 2$ aux fonctions $f$et g donne :

$$\begin{aligned}
\left({}^{\beta}J_k^{\alpha}\prod_{i=1}^{n} f_i f_{n+1}\right)(x) &\geq \left[\frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}\right]\left({}^{\beta}J_k^{\alpha}\prod_{i=1}^{n} f_i\right)({}^{\beta}J_k^{\alpha}f_{n+1})(x).\\
&\geq \left(\frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n+1}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f_i)(x).\\
&\geq \left(\frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}\right)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f_i)(x).
\end{aligned}$$

Où l'hypothése récurrence pour l'instant est utilisé dans la déduction de la seconde inègalité , la preuve du théorème 3.11 est complète .

Corollaire 3.11

Soit f_i , $(1 \leq i \leq n)$,des fonctions positives et croissantes sur $[0, \infty)$, alors pour $\alpha, \beta > 0$:

$$\left({}^{\beta}J_k\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) \geq \left[\frac{\Gamma_k(\beta\beta+k)}{x^{\frac{\beta}{k}}}\right]^{n-1}\prod_{i=1}^{n}({}^{\beta}J_k f_i)(x).$$

Si on prend $\alpha = 1$ dans le théorème 3.11.

Corollaire 3.12

(a) On prend $\beta = 1$ et $k = 1$ dans l'inégalité , nous obtenons l'inégalité (3.3).

(b) si $k = 1$, nous obtenons l'inégalité (3.13).

Théorème 3.12 *[7] Soient f et g deux fonctions sur $[0,\infty[$ dans $\mathbb{R}_0^+$ tel que f croissante , g différentiable et g' admet un point inférieurem $= \inf_{x\in[0,\infty[} g'(x)$, alors pour $\alpha, \beta > 0$*

On a :

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) \geq & \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x) \\ & -\frac{kmx}{(\beta+k)}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x) + m({}^{\beta}J_k^{\alpha}if)(x).\end{aligned} \tag{3.26}$$

avec *: i est une fonction d'identité .*

Preuve:

Soit $\quad p(x) = mx.$
Soit $\quad h = g(x) - mx.$
On a : g différentiable et

$$\begin{aligned} m = & \inf_{x\in[0,\infty[} g'(x) \\ & \Rightarrow g'(x) \geq m \\ & \Rightarrow g'(x) - m \geq 0 \\ & \Rightarrow h'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Donc : h est croissante .
On a : f et g synchrones . **alors :**

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}fh)(x) \geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)x^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}h)(x).$$

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f(g-p))(x) &\geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{\alpha^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}(g-p))(x).\\ &= \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\\ &- \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}p)(x).\end{aligned}$$

D'aprés les hypothèses suivante :

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}(g-p))(x) = ({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) - m({}^{\beta}J_k^{\alpha}if)(x). \tag{3.27}$$

et

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}p)(x) = \frac{mx^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}\Gamma_k(2k)}{\Gamma_k(\beta+2k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}.$$

On a :

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) - m({}^{\beta}J_k^{\alpha}if)(x) &\geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\\ &-\frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}p)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) &\geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\\ &- \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}p)(x) + m({}^{\beta}J_k^{\alpha}if)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) &\geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\\ &- \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\alpha}{k}}}\frac{mx^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}\Gamma_k(2k)}{\Gamma_k(\beta+2k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x) + m({}^{\beta}J_k^{\alpha}if)(x).\end{aligned}$$

puisque $\Gamma_k(k) = 1$, voir [[5]], alors $\Gamma_k(2k) = k$. par conséquent nous dérivons

$$({}^{\beta}J_k^{\alpha}p)(x) = \frac{kmx^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{\Gamma_k(\beta+2k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}. \tag{3.28}$$

Donc :

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k^{\alpha}fg)(x) \geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}J_k^{\alpha}g)(x)\\ -\frac{kmx}{(\beta+k)}({}^{\beta}J_k^{\alpha}f)(x) + m({}^{\beta}J_k^{\alpha}if)(x).\end{aligned}$$

Corollaire 3.13

Soient f et g deux fonctions sur $[0,\infty[$ dans $\mathbb{R}_{\cancel{+}}^{+}$ tel que f croissante , g différentiable et g' admet un point inférieure $m = \inf_{x\in[0,\infty[} g'(x)$

$$\alpha, \beta \geq 0$$

On a :

$$\begin{aligned}({}^{\beta}J_k fg)(x) \geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)}{x^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\beta}J_k f)(x)({}^{\beta}J_k g)(x)\\ -\frac{kmx}{(\beta+k)}({}^{\beta}J_k f)(x) + m({}^{\beta}J_k if)(x).\end{aligned}$$

avec $i(x)$ est une fonction d'identité .
Si on prend $\alpha = 1$ dans le théorème3.12.

Corollaire 3.14

Si prend $\beta = 1$ et $k = 1$ dans l'inégalité (3.26) on obtient l'inégalité (3.4).

Corollaire 3.15

Si on prend $k = 1$ dans l'inégalité (3.26) , nous obtenons l'inégalité (3.14).

Conclusion

L'objectif de ce travail est etudie plusieurs inégalités de type Tchebyshev pour K-opérateurs intégraux fractionnaires, en utilisant l'intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville ,l'intégrale fractionnaire conformable et l'intégrale k-conformable .

Bibliographie

[1] P.Agarwal , J.Tariboon , and S.K.Ntouyas , Some generalized Riemann-Liouville k-fractional integral inequalities , J.of Ineq .Appl .2016 , Paper No .122,13 pp . A

[2] G. A. Anastassiou , Fractional Differentiation Inequalities , Springer , Dordrecht , 2009 .

[3] S.Belarbi and Z.Dahmani , On some new fractional integral inequalities , J.Inequal . Pure Appl . Math .10(2009) , no .3 , Article 86, 5 pp .

[4] P.L .Čebyšev , Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les mêmes limites , Proc .Math . Soc . Kharkov 2 (1882) , 93-98 .(Russian) Translated in Oeuvres , 2 (1907), 716-719.

[5] R.Diaz and E.Pariguan , On hypergeometric function and Pochhammer k-symbol , Divulg .Mat .15 (2007) , no .2 , 179-192 .

[6] R.Goreno and F.Mainardi , Fractional calcule :integral and differential equations of fractional order , Fractals and Fractional Calculus in Continum Mechanices (Udine , 1996) , 223-276 , CISM Coures and Lect , 378 , Springer , Vienna , 1997 .

[7] S.Habib ,S.Mubeen , M.N.Naeema , and F.Qi , Generalized k-fractional conformable integrals and related ineqalities , Hal archives (2018).

[8] F.Jarad , E.Uğurlu,T.Abdeljawad,and D.Băleanu ,On a new class of fractional operators ,Adv. Difference Equ .2017,Paper No .247,16 pp.

[9] A.A.Kilbas,Hadamard-type fractional calculus,J.korean Math.Soc.38(2001),no .6,1191-1204 .

[10] D.S.Mitrinovié , J.E.Pečarié , and A.M.Fink , Classical and new Inequalities in Analyse , Kluwer Academie Publishers , Dordrecht /Boston/London , 1993.

[11] S.Mubeen and G.M.Habibullah , k-fractional integrals and application , Int . J.Contemp . Math .Sci .7(2012),no.1-4 , 89-94.

[12] S.Mubeen and S.Iqbal,Grüss type integral inequalities for generalized Riemann-Liouville k-fractional integrals, J.Inequal Appl.2016,paper No .109,13 pp.

[13] K.S Nisar,F.Qi,G.Rahman,S.Mubeen,and M.Arshad,Somme inequalities involving the extended gamma function and the Kummer confluent hypergeometric k-function,J.Inequal.Appl.(2018),2018 :135,12 pages.

[14] M.E.Özdemir,E.Set,A.O.Akdemir,and M.Z.Sarikaya,somme new chebychev type inequalities for functions whose derivatives belongs to L_p spaces ,Afr.Mat.26(2015),no.7-8,1609-1619.

[15] F.Qi,Akkurt,and H.Yildirim,Catalan numbers,k-gamma and k-beta functions,and parametric integrals,J.Comput.Anal.Appl.25(2018),no.6,1036-1042.

[16] F.Qi,L.-H.Cui,and S.-L.Xu,Some inqualities constructed by Tchebycheff's integral inquality,Math.Inequal.Appl.2(1999),no.4,517-528.

[17] F.Qi and B.-N.Guo,Integral representations and complete monotoncity of remainders of the Binet and Strinling formulas for the function,Rev.R.Acad.Cienc.Exactas Fís.Nat.Ser.A Math.RACSAM 111(2017),no.2,425-434.

[18] S.G.Samko,A.A.kilbas,and O.I.Marichev , Fractional Integrals and Derivatives :Theory and Applications , Edited and with a foreword by S.M.Nikol'skiĭ.Translated from the 1987 Russian original.Revised by the authors. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon,1993.

[19] E.Set,Z.Dahmani,and I.Mumcu,New extensions of Chebyshev type inequalities using generalized katugampola integrals via pólya-Szegö inequality , Int.J.Optim .Control.Theor .Appl .IJOCTA 8(2018),no.2,137-144.

[20] E.Set , I.Mumcu , and S.Demirbaş , Chebyshev type inequalities involving new confrmable fractional integral operators , ResearchGate Preprint (2018).

[21] E.set,I.Mumcu ,and M.E.Özdemir ,Grüss type inequalities involving new conformable fractional integraln operators ,ResearchGate Preprint (2018).

[22] D.-P.shi,B.-y.Xi, and .Qi, Hermite-Hadamard type inequalities for (m,h_1,h_2)-convex functions via Riemann-Liouville fractionlin integrals ,Turkish J.Anal.Number Theory 2(2014),no .4,22-27.

[23] D-P.Shi,B.-Y.Xi,and F.Qi,Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of (α , m)-convex functions , Fract .Diff.Calculus 4(2014),no.2,33-43 .

[24] H.M.Srivastava and J.Choi,Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integral,Elsevier,Inc, Amsterdam,2012.

[25] E.Set,M.Tomar ,and M.Z.Sarikaya,On generalized Grüss type inequalities for k-fractional integrals ,Appl.Math Comput.269(2015),29-34.

[26] J.Tariboon , S.K.Ntouyas , and M. Tomar , Some new integral inequalities for k-fractional integrals , Malaya J.Mat .4 (2016) , no .1,100-110 .

[27] S.-H.Wang and F.Qi,Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals,J.Comput.Anal.Appl.22(2017),no.6,1124-1134.

[28] A.A.A Kilbas , H.M. Srivastava and J.J.Trujillo Theary and applications of fractional differential Equations , North-Holland Mathematical studies 204 , Ed van Mill , Amsterdam , (2006).

[29] Samko S.G , Klbas A.A. and Marichev O.I.(1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications , Goedon and Breach , New york .

[30] Erdelyi A, Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F , Higher Transeen-dental , Vol.III , Krieger Pub , Melbourne , Florida , (1981).