REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : [Analyse fonctionnelle et applications]

Par :

[BENFADEL Imene, BETTARCHA Nacira, BOUCEIRI Khaldia]

Sur le thème

La dichotomie exponentielle et applications

Soutenu publiquement le 18 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENIA Kheireddine	MAA	Université Tiaret	Président
Mr HEDIA Benaouda	Pr	Université Tiaret	Encadreur
Mr OUARDANI Abderahmane	MCB	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

✓ *Tout d'abord nous remercions Allah le tout miséricordieux qui nous a donné la force et le courage pour réaliser ce travail.*

✓ *Nous tenons à adresser notre remerciements les plus chaleureux et notre profonde gratitude à notre encadreur* ***Pr.HEDIA.Benaouda*** *pour ses conseils, son aide et qui mis à disposition tout les nécessaires pour réaliser ce travail.*

✓ *Nous remercions vivement* ***Dr.HALIM.Benali*** *de l'honneur qu'il nous fait en présidant ce jury .*

✓ *Nous remercions également* ***Dr.OUARDANI.Abderahmane*** *pour l'honneur qu'il fait d'avoir accepeter l'examen de ce travail.*

✓ *Nous remercions aussi l'équipe pédagogique de l'université* ***IBN KHALDOUN*** *spécialement département de mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.*

✓ *Enfin nous oublions pas de remercier toutes les personnes qui ont conseillé lors de rédaction de ce mémoire : nos famille, nos amies, nos professeurs et nos collègues de promotion.*

Merci.

★ ★ ★

*———————— *Je dédie ce travail à* ————————*

★ *A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie ,maman que j'adore.*

★ *A mon âme, mon fière, la source de mes réussites, mon bonheur et mon héros, papa que j'adore.*

★ *Au personne que j'ai aimé leur présence dans ce jour, à mes belles sœures, mes frères et leur famille.*

★ *A toute la famille* ***BOUCEIRI,ZOUBIR****.*

★ *A mes amies qui m'encouragent à touts moments.*

★ *Et enfin à tout personne qui est dans ma vie voulait voir mon succès, je vous dis un grand merci.*

*———————— *Khaldia* ————————*

*——— *Je dédie ce travail à* ———*

★ *A l'âme pure de mon chère père, que Dieu le bénisse de sa miséricode .*

★ *A ma chère maman.*

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit . Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence á mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles, que Dieu ta préserve et ta protège .

★ *A mes chères frères :**Abed et Noureddine, et mes belles Soeurs :Samia, Fatima, Saliha, Amel** .*

Pour ses soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études .

*Surtout **Mohamed, Haloma et Ilham** .*

★ *A tout mes amies qui m'on toujour encoragé :* ***Amira, imane, khaldia,et Soumia .***

★ *A toute ma famille .*

*——— *Nacira* ———*

*______________ *Je dédie ce travail à* ______________*

★ *A mon père précieus .*

★ *A ma mère ma vie et la plus merveilleuse de touts les femmes au monde .*

★ *A mes chère frères* ***youcef et mohamed*** *.*

★ *A mes chère soeures :* ***Fatima, Baya, Hanane, hadjer, nada et nessma*** *.*

★ A mes amis : **Hadjer, sihem, khaldia, fatima, khadidja, nacira, et asma**.

★ A tous ceux qui m'aiment.

*______________________ *Imane* ______________________*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)[X(t)] + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

avec $A(t) \in \mathscr{M}n(\mathbb{R}^n)$, $B(t) \in (\mathbb{R}^n)$ *;*
on distingue 2 cas :
1^{ere} *cas : si* $t \in [a,b]$ *(compact) nous avons rappelé le cour d'EDO du* 3^{eme} *année telle que la solution donnée par :*

$$X(t) = R(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds$$

avec $R(t,t_0)$ *est la résolvante.*
2^{eme}*cas : si* $t \in \mathbb{R}$ *(non compact), on se propose une nouvelle méthode est la dichotomie exponentielle, cette dernière donnée la solution sous la forme :*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)ds + \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)ds.$$

Les mots clés : Équation différentielle, point fixe, semi-groupe, la résolvante, dichotomie exponentielle.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Notations générales.

$\mathbb{N}$ *:l'ensemble de tous les nombres entiers positifs.*

$\mathbb{N}^*$:$\{1, 2, 3, ...\}$.

$\mathbb{R}$ *: l'ensemble de tous les nombres réels.*

$\mathbb{R}^+$ *: l'ensemble de tous les nombres réels positifs.*

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}.\}$

$\mathbb{C}$ *:l'ensemble de tous les nombres complexes.*

p.p : presque partout.

$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C};\text{la matrice}(\lambda I - A)\ \ \textit{ne soit pas inversible}\}$.

$\lambda(]a, b[)$=*b-a (la mesure de Lebesgue).*

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in E} \|f(x)\|_F$.

ssi : si et seulement si.

d(x,y) :la distance entre x et y.

$\mathscr{L}$*(E,E) : l'ensemble des applications linéaires.*

C(E,F) :l'espace des fonctions continus de E dans F.

$(e_i) := (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ *avec 1 le* i^{eme} *composante.*

$$I_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ker f :*le noyau de la fonction f.*

$\oplus$: *Signe de la somme directe.*

C_b :*espace des fonctions bornées.*

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'existence des solutions pour une classe d'équation différentielle :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)[X(t)] + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1}$$

avec $A(t) \in \mathscr{M}n(\mathbb{R}^n)$, $B(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$
La dichotomie exponentielle est l'une des propriétés asymptotiques fondamentales des solutions du l'équation différentielle (1). *Il a ses origines dans l'œvre d'O.Perron dans son ouvrage classique[10] et a été étudié avec beaucoup d'emphases au cours des soixante dernière années par de nombreux auteurs, [8][9][11][12][13][14], au cours des dernières années, plusieurs auteurs ont attiré beaucoup d'attention sur l'étude de l'existence de solutions périodiques, presque périodiques à l'équation* (1), *en utilisant la dichotomie exponentielle.*
Ce mémoire est composé de cinq chapitres.
Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les notions classiques en analyse fonctionnelle et quelques théorèmes du point fixe avec des propriétés du semi-groupes servant comme outils pour aborder ce manuscrit (voir [1][2][3][4][5][6][7]).
Dans le deuxième chapitre , nous avons défini la notion du résolvante qui représente en quelque sort la notion de semi-groupes dans un espace de dimension fini et ses propriétés, en suite nous avons défini la notion de dichotomie exponentielle et ses propriétés.
Dans le troisième chapitre, on étudié une propriété primordiale de la dichotomie

exponentielle, à savoir la perturbation de l'équation différentielle correspondante on s'avère que si l'équation est perturbée par une perturbation linéaire bornée $B(t)$ c'est-à-dire $\sup |B(t)|_{t\in\mathbb{R}^*}$ *existe, donc on démontre que la dichotomie correspondante à l'équation perturbée est proche de l'ancienne.*
Dans le chapitre quatre on détermine la relation entre la fonction de Lyapunov qu'est exactement un outil standard dans la théorie de la stabilité et la dichotomie exponentielle.
Dans le chapitre cinq on définit une application sur la dichotomie exponentielle dans l'espace C_b et L .

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espace de Banach

1.1.1 La norme sur un espace vectoriel

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel, une norme est une application définie sur E à valeur dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|\cdot\|_E$ et telle que les trois propriétés suivantes soient satisfaites :*
01) $\forall x \in E, \|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
02) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E.$
03) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E.$
- *On dit que $(E, \|.\|_E)$ est un espace vectoriel normé.*

1.1.2 Suite de Cauchy

Définition 1.2. *Soit $(Un)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, on dit que $(Un)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 0, n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n : \|Up - Uq\|_E \leq \varepsilon.$$

1.1.3 Espace Complet

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente, un tel espace est aussi appelé espace de Banach .

1.1.4 Espace L^P

Définition 1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme :*

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|dx.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^P(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f\ mesurable\ et \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Sa norme est :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f\ mesurable\ \exists\ c\ > 0,\ tel\ que\ |f(x)| < c\ p.p\ sur\ \Omega \}.$$

Il sera muni de la norme du sup-essentielle :

$$\|u\|_{L^\infty} = ess\ sup_{x \in \Omega} |u(x)| = inf\ \{c\ ; |u(x)| \leq c,\ \ p.p\ sur\ \Omega\}.$$

1.2 La compacité

Soient E et F deux espaces de Banach.

1.2.1 Partie relativement compacte

Une partie A d'un espace métrique X est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de X.

1.2.2 Application compacte ; Complètement continue

Soit A une partie bornée de E, une application continue $T : A \subseteq E \to F$ est dite compacte si $T(\bar{A})$ est relativement compacte, elle dite complètement continue si l'image de toute sous ensemble bornée de A est relativement compacte dans F.

1.2.3 Partie équicontinue de C(E,F)

Soit A une partie de $C(E,F)$, soit x un point de E.
On dit que A est une famille équicontinue en x si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, \|x-y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F < \varepsilon \ , \forall f \in A.$$

On dit que A est équicontinue sur E si A est équicontinue en tout $x \in E$.

1.2.4 Théorème d'Ascoli-Arzela

Théorème 1.1. *Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte ssi :*
01) l'ensemble A est bornée :

$$\exists K > 0, \quad \forall f \in A, \quad \|f\|_\infty < K.$$

02) A est équicontinue.
03) $\forall x \in E$, l'ensemble $A(x)=\{f(x); f \in A\}$ est relativement compacte.

1.2.5 La compacité dans L^1

Théorème 1.2. *(de kolmogorov) Soit A une partie de $L^1(\mathbb{R})$ telle que :*
01) La partie A est bornée dans $L^1(\mathbb{R})$.
02) La partie A est uniformément intégrable :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall f \in A, \int_{|x|\geq R} |f(x)|dx \leq \varepsilon.$$

03) On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f \in A, \forall |h| \leq \delta, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|dx \leq \varepsilon.$$

Alors A est une partie relativement compacte de $L^1(\mathbb{R})$.

1.3 Théorème de point fixe

1.3.1 L'application contractante

Soit (E,d) un espace métrique complet et l'application $T : E \to E$.
On dit que T *est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geq 0$ *telle que l'on ait pour toute couple d'élément* $x, y \in E$, *l'inégalité* $d(T(x), T(y)) \leq K(d(x,y))$:
Si $K \geq 1$ T *est non expansive.*
Si $K < 1$ T *est appelée contraction.*

1.3.2 Théorème du point fixe du Banach

Soit (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ *une application contractante avec la constante de contraction K, alors* T *a un unique point fixe* $x \in E$.

1.3.3 Théorème de point fixe de Shauder

Soit E *un espace de Banach,* K *un convexe fermé borné de* E *et*
$T : K \to K$ *un opérateur continu et compact, alors* T *admet au moins un point fixe dans* K.

1.3.4 Théorème de point fixe de Scheafer

Soit E *un espace de Banach et* $T : E \to E$ *un opérateur complètement continu si l'ensemble* $X = \{u \in E, u = \lambda T u, \lambda \in [0,1]\}$, *est borné alors* T *possède au moins un point fixe.*

1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

1.4.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus

Soit X *un espace de Banach de norme* $\|.\|$ *et notons par* $\mathscr{L}_B(X)$ *l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés de* X *dans* X *de norme d'opérateurs qu'on notera aussi par :* $\|.\|$.

Définition 1.4. *Une famille à un paramètre* $(T(t))_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés de X dans X, est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :*
1) T(0)=I, (où I est l'opérateur identité de X).
2) T(t+s)=T(t)T(s), $\forall t, s \geq 0$.

- un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur X est dit uniformément continu sur X, si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

- L'opérateur linéaire est défini par :

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt_{|t=0}}, \quad \forall x \in D(A)$$

et

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe \right\}$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ *et D(A) est appelé le domaine de A.*
Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus.

Remarque 1.1. *Il est facile de voir que si* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu sur X, alors :*

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Théorème 1.3. *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur X ssi A est un opérateur linéaire borné sur X.*

Remarque 1.2. *De la définition (1), on voit bien qu'un semi-groupe* $(T(t)_{t\geq 0})$ *admet un unique générateur. Si* $(T(t)_{t\geq 0})$ *est uniformément continu, alors son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire borné est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.Ce semi-groupe est-il unique ? la réponse est affirmative à cette question est donnée par le théorème suivant.*

Théorème 1.4. *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *et* $(S(t))_{t\geq 0}$ *deux semi-groupes uniformément continus, Si* $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)-I}{t} = A = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)-I}{t}$.
Alors : $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.

1.4.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés fortement continus

Définition 1.5. *Un semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires bornés sur* X *est dit un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, fortement continu sur X, si :* $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X$.

Un semi-groupe fortement continu sur X appelé aussi semi-groupe de classe C_0 *sur X, où tout simplement : un* C_0*- semi-groupe sur X. On établit le théorème suivant :*

Théorème 1.5. *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur X. Alors il existe deux constantes* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 0$ *telles que :* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$.

Corollaire 1.1. *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur X. Alors : pour tout* $x \in X$, *la fonction* $t \mapsto T(t)x$ *est continue de* $\mathbb{R}_+$ *sur X.*

Corollaire 1.2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *, alors :*
1) Le domaine de A est dense dans X, (c'est-à-dire $\overline{D(A)} = X$*).*
2)A est un opérateur linéaire fermé,autrement dit A est un opérateur linéaire dont le graphe G(A)est un fermé de $X \times X$.

Théorème 1.6. *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *et* $(S(t))_{t\geq 0}$ *deux* C_0*-semi-groupes sur X, de générateur infinitésimaux respectivement A et B.*
Si A=B, alors T(t)=S(t), $\forall t \geq 0$.

1.5 Lemme de Gronwall

Soient φ *et* ψ *et y trois fonctions continues sur un segment [a,b], à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds.$$

1.6 Fonction de Lyapunov

On appelle fonction de Lyapunov une fonction V *de classe* C^1 *définit au voisinage du point d'équilibre* x^* *et à valeurs réelles possèdent les deux propriétés avec* $\dot{x} = f(x)$ *:*
1) $V(x) \geq 0$*, la fonction étant nulle uniquement en* $x = x^*$.
2) $< \Delta V(x), f(x) > \leq 0$ *ou* ΔV *est le gradiant de* V.

CHAPITRE 2

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DE LA DICHOTOMIE EXPONENTIELLE

Ce chapitre est consacré à quelque rappel sur la résolvante et la définition de la dichotomie exponentielle et leur propriété.

2.1 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Définition 2.1. *: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et*
$\begin{cases} A : I \longmapsto \mathscr{L}(E,E) \\ B : I \longmapsto E \end{cases}$ *deux applications continues.*
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 l'égalité :

$$x'(t) = A(t)[x(t)] + B(t) \tag{2.1}$$

Si E=$\mathbb{R}^n, \forall t \in I, A(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et
$x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$.

$B(t) = (b_1(t), ..., b_n(t))$.

(2.1) *devient :* $\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + b_1(t). \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_n(t) + ... + a_{nn}(t) + b_n(t). \end{cases}$

Définition 2.2. .
- *On dit que l'équation* (2.1) *est autonome si A et B sont des constantes (indépendantes de t).*
- *On dit que l'équation* (2.1) *est homogène si B(t)=0,* $\forall t \in I$.

Théorème d'existence et d'unicité

Soient $I \subset \mathbb{R}$, *E un espace de Banach.*
$\begin{cases} A : I \longmapsto \mathscr{L}(E, E) \\ B : I \longmapsto E \end{cases}$ *deux applications continues.*
Alors $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, *il existe une unique solution* φ *de* (2.1) *définie sur I telle que* $\varphi(t_0) = x_0$.

Equation différentielle linéaire homogène :

$$x'(t) = A(t)[x(t)]. \tag{2.2}$$

Proposition :

Soit $\varphi : I \longmapsto E$ *une solution de* (2.2) *telle que* $\varphi(t_0) = 0_E$.
Alors $\varphi(t) = 0_E$, $\forall t \in I$.

Démonstration :

Soit $\begin{cases} \psi : I \longmapsto E \\ t \longmapsto \psi(t) = 0_E \end{cases}$ ψ *est une solution de* (2.2, $\psi(t_0) = 0_E$.

Et $\begin{cases} \varphi : I \longmapsto E \\ t \longmapsto \varphi(t) \end{cases}$ *est une solution de l'équation* (2.2), $\varphi(t_0) = 0_E$.

D'après le théorème d'existence et d'unicité : $\varphi(t) = \psi(t) = 0_E$, $\forall t \in I$.

Proposition :

On suppose que E est de dimension finie n, alors l'ensemble des solutions de (2.2) *est un espace vectoriel de dimension n.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{S}$ *l'ensemble des solutions de* (2.2)*, et* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Montrons que $\mathscr{S}$ *est un sous espace vectoriel.*
A voir : $(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)'(t) = A(t)[\lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t)]$

$$\begin{cases} \varphi_1 \in \mathscr{S} \\ \varphi_2 \in \mathscr{S} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_1'(t) = A(t)[\varphi_1(t)] \\ \varphi_2'(t) = A(t)[\varphi_2(t)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)'(t) &= (\lambda\varphi_1'(t) + \mu\varphi_2'(t)) \\ &= \lambda A(t)[\varphi_1(t)] + \mu A(t)[\varphi_2(t)] \\ &= A(t)[\lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t)] \textit{(car } A(t) \textit{ est linéaire).} \end{aligned}$$

Soit $t_0 \in I$

$$\begin{cases} f : \mathscr{S} \longmapsto E \\ \varphi \longmapsto f(\varphi) = \varphi(t_0). \end{cases}$$

A voir : *f isomorphisme c'est à dire :*
-f linéaire (évident).
-f bijective (injective, surjective).
1) Montrons que f est injective :

$$\begin{aligned} ker f &= \{\varphi \in \mathscr{S} \quad \backslash f(\varphi) = 0\} \\ &= \{\varphi \in \mathscr{S} \quad \backslash \varphi(t_0) = 0\} \\ &= \{0_{\mathscr{S}}\}. \end{aligned}$$

Donc f est injective.
2) Montrons que f est surjective :
$\forall x_0 \in E$, $\exists$ $\varphi \in \mathscr{S}$ *telle que* $f(\varphi) = \varphi(t_0) = x_0$, *c'est vérifiée d'après le théorème d'existence et d'unicité.*
D'où f est bijective $\Longrightarrow$ f isomorphisme.
Par conséquent $\mathscr{S} \simeq E$ *et* $dim\mathscr{S} = dimE = n$.

Preuve de théorème d'existence et d'unicité :

(Méthode d'approximation successive de Picard)
On cherche $x : I \longrightarrow E$ telle que :

$$x(t_0) = x_0$$

et

$$x'(t) = A(t)[x(t)] + B(t).$$

On a :

$$\int_{t_0}^{t} x'(u)du = \int_{t_0}^{t} [A(u)[x(u)] + B(u)]du$$

donc

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)[x(u)] + B(u)]du \tag{2.3}$$

Une application $x : I \longrightarrow E$ est une solution telle que $x(t_0) = x_0$ de l'équation différentielle (2.1) *ssi x vérifiée* (2.3).
On définit la suite récurrente (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0. \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(u)[x_n(u)] + B(u)]du. \end{cases}$$

1^{er} ***étape :*** *on démontre que la suite de fonctions converge uniformément sur I.*
On suppose que l'intervalle I est un compact c'est à dire fermé borné (I=[a,b])
Majoration préliminaire :
$\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longrightarrow \|A(t)\| \end{cases}$ *est continue sur I car A l'est aussi.*
Comme I est fermé borné, alors $\exists \alpha > 0 \quad \|A(t)\| \leq \alpha, \forall t \in I$.
On a :

$$x_{n+1} - x_n = \int_{t_0}^{t} (A(u)[x_n(u) - x_{n-1}(u)])du.$$

donc :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t}\|A(u)[x_n(u)-x_{n-1}(u)]\|du\\ &\leq \int_{t_0}^{t}\|A(u)\|\|[x_n(u)-x_{n-1}(u)]\|du\\ &\leq \alpha\int_{t_0}^{t}\|[x_n(u)-x_{n-1}(u)]\|du\end{aligned}$$

$\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longrightarrow \|B(t)\| \end{cases}$ *est continue sur I.*
Alors $\exists\beta>0$, *telle que* $\|B(t)\|\leq\beta$, $\forall t\in I$.

$$\begin{aligned}\|A(u)[x_0]+B(u)\| &\leq \|A(u)[x_0]\|+\|B(u)\|\\ &\leq \alpha\|x_0\|+\beta,\quad \forall u\in I.\end{aligned}$$

Si n=0, alors :

$$x_1(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}(A(u)[x_0]+B(u)du$$

et

$$\|x_1(t)-x_0\|\leq(t-t_0)(\alpha\|x_0\|+\beta).$$

Si n=1, alors :

$$\|x_2(t)-x_1\|\leq\alpha(\alpha\|x_0\|+\beta)\frac{(t-t_0)^2}{2}.$$

Par récurrence, on obtient :

$$\|x_{n+1}(t)-x_n(t)\|\leq\alpha^n(\alpha\|x_0\|+\beta)\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}\tag{2.4}$$

On démontre (2.4) *par récurrence sur n :*
pour n=0 :

$$\|x_1(t)-x_0\|\leq(\alpha\|x_0\|+\beta)(t-t_0).$$

Donc (2.4) *est vérifié pour n=0.*
Supposons que (2.4) *est vraie à l'ordre n et on démontre que la formule est vraie*

à l'ordre n+1 :

$$\begin{aligned}
\|x_{n+2}(t)-x_{n+1}(t)\| &\leq \alpha\int_{t_0}^{t}\|x_{n+1}(u)-x_n(u)\|du\\
&\leq \alpha\int_{t_0}^{t}\alpha^n(\alpha\|x_0\|+\beta)\frac{(u-t_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}du\\
&\leq \alpha^{n+1}(\alpha\|x_0\|+\beta)\int_{t_0}^{t}\frac{(u-t_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}\\
&\leq \alpha^{n+1}(\alpha\|x_0\|+\beta)\frac{(t-t_0)^{n+2}}{(n+2)\,!}
\end{aligned}$$

Comme I est fermée borné, on note par h la longueur de l'intervalle I
$t-t_0<h$*, d'où*

$$\|x_{n+1}(t)-x_n\|\leq\alpha^n(\alpha\|x_0\|+\beta)\frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

Soit la série numérique : $U_n=\sum_{n=0}^{\alpha}\dfrac{\alpha^n h^{n+1}}{(n+1)\,!}$.
$\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\left|\dfrac{\alpha^{n+1}h^{n+2}}{(n+2)\,!}\times\dfrac{(n+1)\,!}{\alpha^n h^{n+1}}\right|=\left|\dfrac{\alpha h}{n+2}\right|\longrightarrow 0$ *quand* $n\longrightarrow\infty$.
Donc elle est convergente.
Soit la série de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}(t)-x_n(t)$$

est normalement convergente donc elle est uniformément convergente sur I.
On obtient :

$$S_n(t)=\sum_{p=0}^{n}(x_{p+1}(t)-x_p(t))=x_{n+1}(t)-x_0.$$

Donc la suite $x_{n+1}(t)-x_0$ *converge uniformément sur I d'où la suite de fonction* x_n *converge uniformément sur I vers une fonction* $x:I\longrightarrow E$ *continue.*
A voir : *la limite* $x:I\longrightarrow E$ *vérifiée* (2.1) *:*

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}(A(u)[x(u)]+B(u))du.$$

Or

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)[x_n(u)] + B(u))du.$$

Par passage à la limite on obtient (2.1).
2^{eme} ***étape :*** *unicité de la solution :*
soient $\begin{cases} x_1 : I \longrightarrow E \\ x_2 : I \longrightarrow E \end{cases}$ *deux solutions de l'équation différentielle* (2.1).
A voir : $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I$
soit $\begin{cases} y : I \longrightarrow E \\ t \longmapsto y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$
On a :

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)[x_1(u)] + B(u))du.$$

et

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)[x_2(u)] + B(u))du.$$

Donc :

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)[y(u)]du$$

y est continue sur I, donc $\exists M > 0$, $\|y(t)\| \leq M$, $\forall t \in I$.
$\forall t \in I$,

$$\|y(t)\| \leq M \frac{\alpha^n (t - t_0)^n}{n!} \tag{2.5}$$

On démontre (2.5) *par récurrence sur n.*
Pour n=0 : $\|y(t)\| \leq M$
supposons que l'égalité est vraie à l'ordre n, et on démontre qu'elle est vraie pour n+1 :

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|A(u)[y(u)]\|du \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|A(u)\|\|y(u)\|du \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \alpha M \frac{\alpha^n (u-t_0)^n}{n\,!} du \\
&\leq \alpha^{n+1} M \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}.
\end{aligned}$$

La suite $M\alpha^n \dfrac{(t-t_0)^n}{n\,!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y(t)\| \leq 0 \Rightarrow \|y(t)\| = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$

Définition 2.3. *On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène* (2.2)*, une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation.*
Soient $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_p$ *solutions de l'équation* (2.2)*, on dit qu'elles sont linéairement indépendantes ssi :*
$\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p \in \mathbb{R} \setminus \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_p\varphi_p = 0_E,\ \forall t \in I$
alors $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0.$

Cas ou $E = \mathbb{R}^n$: soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.4. *: On appelle matrice fondamentale de l'équation* $x'(t) = A(t)[x(t)]$ *relativement à la base* (e_i) *la matrice dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes.*

Soient $\begin{cases} \varphi_1 : I \longmapsto \mathbb{R}^n \\ \vdots \\ \varphi_n : I \longmapsto \mathbb{R}^n \end{cases}$ *des solutions de l'équation homogène* (2.2) .

Donc on définit la matrice fondamentale par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)) \\
&= \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Définition 2.5. *La matrice fondamentale $\Phi(t_0) = I_{\mathbb{R}^n}$ est appelée résolvante de l'équation* (2.2)*, et on la note $\Phi(t) = R(t, t_0)$.*

Proposition :

Toute matrice fondamentale est une solution de l'équation matricielle (2.2) .

Démonstration :

$$\text{Soient } \begin{cases} A : I \longmapsto \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ X : I \longmapsto \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \quad t \longmapsto X(t) \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \Phi : I \longmapsto \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \quad t \longmapsto \Phi(t) \end{cases}$$

On doit vérifiée que :

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t).$$

On a :

$$\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t), ..., \Phi_n(t)).$$

Donc :

$$\Phi'(t) = (\Phi'_1(t), ..., \Phi'_n(t)).$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \Phi'_1(t) = A(t)\Phi_1(t). \\ \vdots \\ \Phi'_n = A(t)\Phi_n(t). \end{cases}$$

Car $\forall i = 1, ..., n$, Φ_i *est une solution de l'équation* (2.2).
Alors :

$$\Phi'(t) = (A(t)\Phi_1(t), A(t)\Phi_2(t), ...A(t)\Phi_n(t)) = A(t)X(t).$$

Par conséquent :

$$R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0).$$

Proposition

La solution φ de l'équation (2.2) *, telle que $\varphi(t_0) = x_0$ est égale à $R(t, t_0)x_0$.*

Démonstration

Soient $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : I \longmapsto \mathbb{R}^n$ *une solution de l'équation* (2.2), *telle que* $\varphi(t_0) = x_0$.

A voir $\varphi(t) = R(t, t_0)x_0$

soit $\begin{cases} \psi : I \longmapsto \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto \psi(t) = R(t, t_0)x_0. \end{cases}$

Montrons que ψ *est une solution de* (2.2) *Par la définition de* ψ*, on obtient :*

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (R(t, t_0)x_0)' \\ &= R'(t, t_0)x_0 \\ &= A(t)R(t, t_0)x_0 \\ &= A(t)\psi(t). \end{aligned}$$

Et de plus

$$\psi(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 = I_{\mathbb{R}^n}x_0 = x_0.$$

Donc ψ *est une solution de* (2.2) *et d'après le théorème d'unicité on déduit que* $\psi(t) = \varphi(t) = R(t, t_0)x_0$.

Proposition :

Soient t,t_0*et* t_1*, trois points de* I *alors :*

1) R(t,t_0) $= R(t, t_1)R(t_1, t_0)$.
2) (R(t,t_0))$^{-1} = R(t_0, t)$.

Démonstration :

soit $\begin{cases} B : I \longmapsto \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \quad t \longmapsto B(t) = R(t, t_1)R(t_1, t_0) \end{cases}$

A voir $B'(t) = A(t)B(t)$.

On a :

$$\begin{aligned} B'(t) &= [R(t, t_1)R(t_1, t_0)]' \\ &= R'(t, t_1)R(t_1, t_0) \\ &= A(t)R(t, t_1)R(t_1, t_0). \end{aligned}$$

Et $B(t_1) = R(t_1, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_1, t_0)$.
Donc B(t) est une solution de l'équation matricielle (2.2) *telle que* $B(t_1) = R(t_1, t_0)$.
Donc

$$B(t) = R(t, t_1)R(t_1, t_0) = R(t, t_0).$$

2) Montrons que $[R(t, t_0)]^{-1} = R(t_0, t)$
d'après 1) on a :

$$R(t, t_0) = R(t, t_1)R(t_1, t_0).$$

Si $t = t_0$ *alors :*

$$R(t_0, t_0) = R(t_0, t_1)R(t_1, t_0) = I_{\mathbb{R}^n}.$$

Par conséquent :

$$[R(t, t_0)]^{-1} = R(t_0, t).$$

Proposition

Soit $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$, *une équation différentielle linéaire. La solution de cette équation telle que* $\varphi(t_0) = x_0$ *est :*

$$\varphi(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds$$

telle que :
$R(t, t_0)x_0$ *la solution de l'équation homogène* (2.2)
et

$$\int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds.$$

la solution particulière de l'équation.

Démonstration

La solution générale de l'équation homogène (2.2) *est de la forme* $R(t,t_0)C$ *ou* C *est un vecteur constant de* $\mathbb{R}^n$.
Soit $\varphi(t) = R(t,t_0)C(t)$, *pour que* φ *soit une solution de l'équation* $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$. *il faut que :*

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t)$$

On a :

$$\varphi'(t) = R'(t,t_0)C(t) + R(t,t_0)C'(t).$$

telle que :

$$R'(t,t_0) = A(t)R(t,t_0).$$

Donc :

$$\varphi'(t) = A(t)R(t,t_0)C(t) + R(t,t_0)C'(t).$$

D'autre part :

$$R(t,t_0)C'(t) = B(t).$$

Et d'après la proposition précédente, comme :

$$R(t_0,t)R(t,t_0)C'(t) = R(t_0,t)B(t).$$

Alors

$$C'(t) = R(t_0,t)B(t).$$

Par intégration on trouve :

$$C(t) - C(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)ds.$$

Donc :

$$C(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)ds.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= R(t,t_0)x_0 + R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)ds \\
&= R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,s)B(s)ds \\
&= R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds.
\end{aligned}$$

2.2 Définitions et quelques exemples de la dichotomie exponentielle

Définition 2.6. *soit A(t) une fonction à valeurs matricielles, continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, soit X(t) la matrice fondamentale du système :*

$$x'(t) = A(t)x. \tag{2.6}$$

On dit que l'équation (2.6) *a une dichotomie exponentielle sur J s'il existe une projection P et des constantes positives K et α telle que :*

$$\begin{cases} |X(t)PX^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & t \geq s \quad dans \quad J \\ |X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & s \geq t \quad dans \quad J \end{cases} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1. *Une matrice P est un projecteur si P^2=P.*

Exemple

L'équation autonome x'(t)=A_0x, (EA) a une dichotomie exponentielle ssi aucune valeur propre de la matrice constante A_0, n'est à partie réelle nulle.
En effet : on a la matrice fondamentale de (EA) est $X(t) = e^{A_0t}$ et (EA) a une dichotomie exponentielle, alors il existe une projection P et des constantes positives K et α telle que :$|X(t)P| \leq Ke^{-\alpha t}$, t$\geq 0$, donc

$$|e^{A_0t}| \leq |X(t)P||P^{-1}| \leq K|P^{-1}|e^{-\alpha t} = Ke^{-\alpha t}.$$

$\sigma(A_0) \subseteq \{\lambda \in C : Re\lambda < 0\}$, (où $\sigma(A_0)$ *est le spectre de la matrice A_0).*

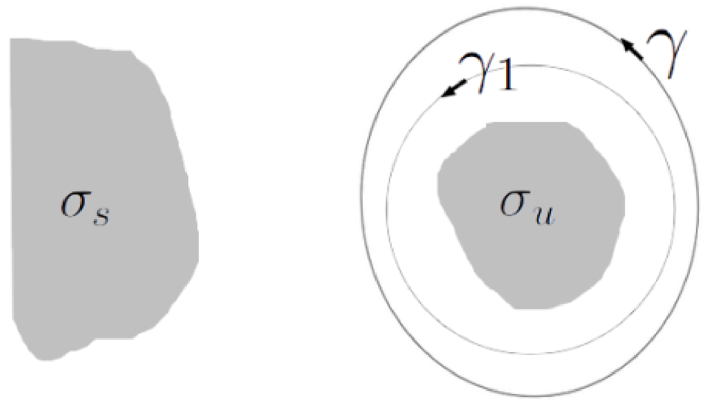

FIGURE 2.1 –

Réciproquement, on définit

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(zI - A_0)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R(z, A_0)dz,$$

la courbe γ est orientée positivement, simple fermée dans le demi plan gauche, qui entoure les valeurs propres de A_0 à partie réelle négative (voir figure 2.1).

Le spectre de A_0 se décompose en deux parties disjointes non vide σ_s et σ_u. Soit γ_1 une courbe simple fermée contenue dans l'intérieur de γ, alors

$$P^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1} R(y, A_0)\int_{\gamma} R(z, A_0)dzdy.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
P^2 &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma} R(y,A_0)R(z,A_0)dydz \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma} \frac{1}{z-y}(R(y,A_0)-R(z,A_0))dydz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} R(y,A_0)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{z-y}dz\right)dy - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R(z,A_0)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-y}dy\right)dz \\
&= P.
\end{aligned}$$

car

$$\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-y}dy = 0, \quad (z\in\gamma) \ et \ \int_{\gamma}\frac{1}{z-y}dz = 2\pi i \ , \ (y\in\gamma_1).$$

Ce qui prouve que P est un projecteur.

Remarque 2.2. .
- *La stabilité asymptotique uniforme est un cas particulier de dichotomie exponentielle, elle correspond au cas où P=I.*
- 0 *est uniformément asymptotique stable* $\Leftrightarrow \exists K,\alpha>0$:
$|X(t)X^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ *pour* $0\leq s\leq t\leq +\infty$.
- *0 est uniformément stable* $\Leftrightarrow \exists K>0$, $|X(t)X^{-1}(s)|\leq K$ *pour*
$0\leq s\leq t\leq +\infty$.

Définition 2.7. *(cas générale) Pour voir la signification de la dichotomie exponentielle dans le cas général réécrivons les conditions* (2.7) *sous une forme équivalente :*

$$\begin{cases} |X(t)P\xi| \leq Le^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi| \quad t\geq s \quad dans \quad J \\ |X(t)(I-P)\xi| \leq L'e^{-\alpha(s-t)}|X(s)(I-P)\xi| \qquad s\geq t \quad dans \quad J \\ |X(t)PX^{-1}(t)| \leq M \quad \forall t\in J \end{cases} \tag{2.8}$$

avec L,L', α et M sont des constantes positives, ξ est un vecteur arbitraire constant.

Remarque 2.3. *Notons k le rang de P.*
- *La première condition de* (2.8), *montre qu'il existe un sous espace de dimension finie k, de solutions qui tendent vers 0, uniformément exponentiellement quand t*

tend vers ∞.

• *La seconde montre qu'il existe un sous espace supplémentaire, de dimension n-k, de solutions qui tendent vers l'infini uniformément et exponentiellement quand t tend vers ∞.*

Définition 2.8. *On dit que (2.6) est à croissance bornée sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, s'il existe des constantes c et μ telles que :*

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq ce^{\mu(t-s)}, \text{ pour } t \geq s,\ t,s \in J. \tag{2.9}$$

Proposition

Supposons que (2.6) est à croissance bornée sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une projection P telle que :

$$(2.8) \begin{cases} |X(t)P\xi| \leq Le^{-\alpha(t-s)}|X(s)P\xi| & t \geq s \quad \text{dans} \quad J \\ |X(t)(I-P)\xi| \leq Le^{-\alpha(s-t)}|X(s)(I-P)\xi| & s \geq t \quad \text{dans} \quad J \end{cases}$$

alors (2.6) admet une dichotomie exponentielle sur J.

Démonstration

Il suffit de montrer que $\exists M \geq 0$, $|X(t)PX^{-1}(t)| \leq M \quad \forall t \in J$. Pour tout $h > 0$ on a :

$$\begin{aligned} |X(t+h)PX^{-1}(t)| &\leq |X(t+h)PX^{-1}(t)||X(t)PX^{-1}(t)| \\ &\leq Le^{-\alpha h}|X(t)PX^{-1}(t)|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |X(t)(I-P)X^{-1}(t)| &\leq |X(t)(I-P)X^{-1}(t)||X(t)(I-P)X^{-1}(t)| \\ &\leq Le^{-\alpha h}|X(t+h)(I-P)X^{-1}(t)|. \end{aligned}$$

Donc $|X(t+h)(I-P)X^{-1}(t)| \geq L^{-1}e^{\alpha h}|X(t)(I-P)X^{-1}(t)|$.
En posons $\rho = |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|$, $\sigma = |X(t)PX^{-1}(t)|$,

$A = |X(t+h)PX^{-1}(t)|$ *et* $B = |X(t+h)(I-P)X^{-1}(t)|$,
alors on a :

$$|\sigma^{-1}A| \leq Le^{-\alpha h} \quad et \quad |\rho^{-1}B| \geq L^{-1}e^{\alpha h}.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= |\rho^{-1}B + \sigma^{-1}A| \\ &\geq |\rho^{-1}B| - |\sigma^{-1}A| \\ &\geq L^{-1}e^{\alpha h} - Le^{-\alpha h} \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

Or d'après (2.9) *:*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq |X(t+h)X^{-1}(t)||\rho^{-1}X(t)(I-P)X^{-1}(t) + \sigma^{-1}X(t)PX^{-1}(t)| \\ &\leq ce^{-\mu h}|\rho^{-1}X(t)(I-P)X^{-1}(t) + \sigma^{-1}X(t)PX^{-1}(t)|. \end{aligned}$$

Alors :

$$D = |\rho^{-1}X^{-1}(t)(I-P)X^{-1} + \sigma^{-1}X(t)PX^{-1}(t)| \geq c^{-1}e^{-\mu h}\varphi(t) \geq c^{-1}e^{-\mu h}\gamma.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} D &= |\sigma^{-1}I + (\rho^{-1} - \sigma^{-1})X(t)(I-P)X^{-1}(t)| \\ &\leq \sigma^{-1} + |\rho^{-1} - \sigma^{-1}|\rho \\ &= \sigma^{-1} + \sigma^{-1}\rho^{-1}|\sigma - \rho|\rho \\ &\leq \sigma^{-1}(1 + |\sigma - \rho|) \\ &\leq 2\sigma^{-1}(car \quad |\sigma - \rho| < 1). \end{aligned}$$

D'où $c^{-1}e^{-\mu h}\gamma \leq D \leq 2\sigma^{-1}$ *donc* $\sigma \leq 2\gamma^{-1}ce^{\mu h}$.
On choisit h *suffisamment grand de sorte que* $\gamma > 0$, *en fixant*
$h = \dfrac{log(L)}{\alpha} + \dfrac{1}{\mu}$, *alors* $\gamma = \gamma(h) = e^{\frac{\alpha}{\mu}} - e^{-\frac{\alpha}{\mu}} > 0$.
Finalement, on a $\sigma \leq M$ *avec* $M = 2cL^{\frac{\mu}{\alpha}}e(e^{\frac{\alpha}{\mu}} - e^{-\frac{\alpha}{\mu}})^{-1}$.

Remarque 2.4. *Il existe des cas où la proposition est vérifiée sans avoir la croissance bornée, ce qui n'est pas vrai en général, comme nous le verrons dans l'exemple suivant :*

Exemple

Nous allons voir à travers cet exemple que la troisième condition de (2.8) *est nécessaire si* (2.6) *n'est pas à croissance bornée.*
Le système du second ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + e^{2t}y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

dont la matrice fondamentale est :

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix},$$

est telle que les deux premières conditions de (2.8) *sont satisfaites avec*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3.$$

En effet, pour tout $t \geq s$ *on a :*

$$X(t)PX^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{s-t} & \frac{e^{-3s-t}-e^{s-t}}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{array}{rcl} |X(t)P\xi| & = & |X(t)PX^{-1}(s)||X(s)P\xi| \\ & \leq & e^{-(t-s)}|X(s)P\xi| \qquad \textit{pour} \quad t \geq s, \end{array}$$

de la même manière, on a :

$$|X(t)(I-P)\xi| \leq e^{-3(s-t)}|X(s)(I-P)\xi| \qquad \textit{pour} \quad s \geq t.$$

Mais la troisième n'est pas satisfaite et on a pas de dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
|X(t)PX^{-1}(t)| &= \left|\begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{-4t}-1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&\leq \frac{e^{-4t}-1}{4} \quad \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}$$

2.3 Les propriétés de la dichotomie exponentielle

Nous rappelons dans cette section les propriétés les plus connues de la dichotomie exponentielle.

Lemme 2.1. *Soit t_0, τ des constantes réelles, $\tau < t_0$ (resp $\tau > t_0$), si l'équation (2.6) a une dichotomie exponentielle (2.7) sur $[t_0, +\infty)$ (resp $(-\infty, t_0]$), alors elle en a une sur $[\tau, +\infty)$ (resp $(-\infty, \tau]$), avec le même exposant α et la même projection P.*

Preuve

Soit x est une solution de l'équation 2.6, donc $x(t) = x(s) + \int_s^t A(u)x(u)du$ pour $t \geq s$, d'après l'inégalité de Gronwall, on a $|x(t)| \leq |x(s)|e^{\int_s^t |A(u)|du}$ $t \geq s$, par conséquent

$$|x(t)x^{-1}(s)| \leq N \qquad pour \qquad \tau \leq s \leq t \leq t_0,$$

avec N=$e^{\int_\tau^{t_0} |A(u)du|}$. Pour montrer la première inégalité de (2.7) il faut distinguer deux situations possibles :

•*Si $\tau \leq s \leq t_0 \leq t$:*

$$\begin{aligned}
|X(t)PX^{-1}(s)| &\leq |X(t)PX^{-1}(t_0)||X(t_0)X^{-1}(s)| \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}.N \\
&= NKe^{-\alpha(t-s)}e^{\alpha(t_0-s)} \\
&\leq NKe^{-\alpha(t-s)}e^{\alpha(t_0-\tau)} \\
&= K'e^{-\alpha(t-s)} \qquad avec \quad K' = Nke^{\alpha(t_0-\tau)}
\end{aligned}$$

•Si $\tau \leq s \leq t \leq t_0$

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq |X(t)X^{-1}(t_0)||X(t_0)PX^{-1}(t_0)||X(t_0)X^{-1}(s)| \\ &\leq N.K.N \\ &\leq N^2Ke^{\alpha(t_0-\tau)}e^{-\alpha(t-s)} \qquad (car \quad e^{\alpha((t_0-t)+(s-\tau))}) \geq 1 \\ &= K''e^{-\alpha(t-s)} \qquad avec \quad K'' = N^2Ke^{\alpha(t_0-\tau)}, \end{aligned}$$

donc la première inégalité de (2.7) *est satisfaite avec la constante* $L = \max(K', K'')$, *de la même manière en remplaçant P par I-P on obtient la deuxième inégalité de* (2.7).

Lemme 2.2. *Si l'équation* (2.6) *a des dichotomies exponentielles sur les demi-droites* $\mathbb{R}^+$ *et* $\mathbb{R}^-$, *avec la même projection P, alors elle en a une sur* $\mathbb{R}$, *avec la même projection.*

Preuve

Soit X(t) la matrice fondamentale de 2.6, notons K^+, α^+ *(resp* K^-, α^-*) les constantes associées aux dichotomies exponentielles sur* $\mathbb{R}^+$ *(resp* $\mathbb{R}^-$*), posons* $\alpha = \min(\alpha^+, \alpha^-)$ *et* $K = \max(K^+, K^-)$, *pour montrer la première inégalité de* (2.7) *il faut distinguer trois situations possibles :*

•*Si* $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq K^+e^{-\alpha^+(t-s)} \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

•*Si* $t \geq 0 \geq s$

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &= |X(t)P^2X^{-1}(s)| \\ &\leq |X(t)P||PX^{-1}(s)| \\ &\leq K^+e^{-\alpha^+t}K^-e^{-\alpha^-t} \\ &\leq K^2e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

•*Si* $0 \geq t \geq s$

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq K^-e^{-\alpha^-(t-s)} \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \end{aligned}$$

donc la première inégalité de (2.7) *est satisfaite avec la constante* $L = \max(K, K^2)$, *de la même manière on obtient la deuxième inégalité.*

Proposition

Si le système (2.6) *a une dichotomie exponentielle* (2.7) *sur un intervalle J et si X(t) est une matrice fondamentale* (2.6), *alors le système adjoint* $\dot{x} = -A^*(t)x$, *a une dichotomie exponentielle sur J, de projection S=I-P^*.*

Démonstration

On a la matrice fondamentale de $\dot{x} = -A^*(t)x$ *est* $Y(t) = X^{-1*}(t)$, *alors pour* $t \geq s$ *dans J on a*

$$\begin{aligned}
|Y(t)SY^{-1}(s)| &= |X^{-1*}(t)(I - P^*)X^*(s)| \\
&= |X(s)(I - P)X^{-1}(t)^*| \\
&= |X(s)(I - P)X^{-1}(t)| \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-s)}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on a $|Y(t)(I - S)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}$ *pour* $s \geq t$ *dans J.*

2.4 La dichotomie exponentielle dans le cas des coefficients discontinus

Définition 2.9. *Soit X(t) la matrice fondamentale de* (2.6) *avec X(0)=I, supposons que l'équation* (2.6) *admet une dichotomie exponentielle avec la projection P. On dit que* $\mathcal{P}(t)$ *est une matrice projection si on a*
$\mathcal{P}(t) = X(t)PX^{-1}(t)$ *pour tout t.*

Remarque 2.5. *Soit* $\mathcal{P}(t)$ *la matrice projection alors pour tout t,s* $\in J$ *on a*
•$X(t)PX^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s)\mathcal{P}(s) = \mathcal{P}(t)X(t)PX^{-1}(s)$.
•$X(t)(I - P)X^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s)(I - \mathcal{P}(s)) = (I - \mathcal{P}(t)X(t)(I - P)X^{-1}(s)$.
•$\mathcal{P}(t)$ *est une solution de système matricielle*

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X - XA(t).$$

Lemme 2.3. *Pour tout entier k, soit* A_k *une matrice carrée continue et normée tel que le système :*

$$\frac{dx}{dt} = A_k(t)x. \tag{2.10}$$

admet une dichotomie exponentielle sur un intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ *avec des constantes* $K \geq 1, \alpha > 0$ *et une matrice projection* $\mathcal{P}_k(t)$ *.*
Si pour tout k *:*
i) $t_k - t_{k-1} \geq 2\alpha^{-1}\log(K)$*.*
ii) $\mathcal{P}_k(t_{k-1}) = \mathcal{P}_k(t_k)$*.*
Alors le système :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

avec $A(t) = A_k(t)$ *pour* $t_{k-1} \leq t \leq t_k$*, admet une dichotomie exponentielle sur* $\mathbb{R}$ *de constantes* $K^2, \frac{\alpha}{2}$*.*

Démonstration

Supposons $0 \leq s \leq t$*, il existe alors des entiers positifs* $k \leq l$ *tels que*

$$t_{k-1} \leq s \leq t_k \quad et \quad t_{l-1} \leq t \leq t_l.$$

Alors

$$\begin{aligned}
|X(t)PX^{-1}(s)| &\leq |X(t)PX^{-1}(t_{l-1})||X(t_{l-1})PX^{-1}(t_{l-2})|...|X(t_{k+1})PX^{-1}(t_k)||X(t_k)PX^{-1}(s)| \\
&= |X(t)X^{-1}(t_{l-1})\mathcal{P}_l(t_{l-1})||X(t_{l-1})X^{-1}(t_{l-2})\mathcal{P}_{l-1}(t_{l-2})|... \\
&.. \ |X(t_{k+1})X^{-1}(t_k)\mathcal{P}_{k+1}(t_k)||X(t_k)X^{-1}(s)\mathcal{P}_k(s)| \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-t_{l-1})}Ke^{-\alpha(t_{l-1}-t_{l-2})}...Ke^{-\alpha(t_k-s)} \\
&= K^{l-k+1}e^{-\alpha(t-s)} \\
&= e^{(l-k+1)\log(K)}e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)} \\
&\leq e^{(l-k+1)\log(K)}e^{-(l-k-1)\log(K)}e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)} \\
&= K^2e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}.
\end{aligned}$$

Puisque $t - s \geq t_{l-1} - t_k \geq (l-k-1)\frac{2}{\alpha}\log(K)$*.*
De la même manière on montrera que pour : $s \geq t \geq 0$

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \leq K^2e^{-\frac{\alpha}{2}(s-t)}$$

Lemme 2.4. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent sauf que* $|A_k(t)| \leq N$ *pour tout* t *et* k *et i) et ii) sont remplacées par :*

i) $t_k - t_{k-1} \geq 2\alpha^{-1}\log(3K)$.
ii) $\mathcal{P}_k(t_{k-1}) - \mathcal{P}_k(t_k) \leq \delta$.
Alors si

$$\delta \leq \min\left\{\frac{1}{4K}, \frac{\alpha}{2592K}\left[2N + \frac{\alpha}{2\log(3K)}\right]\right\}.$$

Le système défini comme dans le lemme précédent admet une dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}$ *de constantes dépendent seulement de* K *et de* α.

Preuve

On pose $P_k = \mathcal{P}_k(t_{k-1})$ *et* $Q_k = \mathcal{P}_{k-1}(t_{k-1})$ *et considérons*

$$J_k = P_kQ_k + (I - P_k)(I - Q_k).$$

En utilisant le fait que $P_k^2 = P_k$,

$$\begin{array}{rcl}|J_k - I| & = & |P_kQ_k + (I - P_k)(I - Q_k) - I| \\ & = & |P_k(Q_k - P_k) + (I - P_k)(P_k - Q_k)| \\ & \leq & |Q_k - P_k|(|P_k| + |I - P_k|) \\ & \leq & \delta(K + K) = 2K\delta \leq 2K\dfrac{1}{4K} \\ & < & \dfrac{1}{2}\end{array}$$

donc J_k *est inversible et*

$$|J_k^{-1}| = |\,[I - (I - J_k)]^{-1}\,| \leq \sum_{l=0}^{+\infty}|I - J_k|^l \leq (1 - 2K\delta)^{-1}.$$

Et on a

$$P_kJ_k = P_kQ_k + (P_K - P_k)(I - Q_k) = P_kQ_k = J_kQ_k,$$

ainsi $P_k = J_kQ_kJ_k^{-1}$. *Maintenant, écrivons*

$$S_k(t) = I + (t_k - t_{k-1})^{-1}(t - t_{k-1})(J_{k+1} - I) \quad pour \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k.$$

Alors

$$|S_k(t) - I| \leq |J_{k+1} - I| \leq 2K\delta < \frac{1}{2}.$$

Par suite S_k^{-1} *existe et*

$$|S_k^{-1}(t)| \leq (1 - 2K\delta)^{-1} < 2.$$

Donc

$$|S_k'(t)| = |(t_k - t_{k-1})^{-1}(J_{k+1} - I)| \leq 2(2\log(3K))^{-1}\alpha K\delta.$$

Pour tout entier k *soit* $X_k(t)$ *la matrice fondamentale du système* (2.10) *satisfaisant* $X_k(t_{k-1}) = I$ *; alors*

$$\mathcal{P}_k(t) = X_k(t)P_kX_k^{-1}(t).$$

Alors $Y_k(t) = S_k(t)X_k(t)$ *est une matrice fondamentale du système*

$$y'(t) = B_k(t)y. \tag{2.11}$$

avec $B_k(t) = Y_k'Y_k^{-1}(t) = S_k(t)A_k(t)S_k^{-1}(t) + S_k'(t)S_k^{-1}(t)$.
Donc si $t_{k-1} \leq t \leq t_k$,

$$\begin{aligned} |B_k(t) - A_k(t)| &\leq |S_k(t) - I||A_k(t)||S_k^{-1}(t)| + |A_k(t)||S_k^{-1}(t) - I| + |S_k'(t)||S_k^{-1}(t)| \\ &\leq 4K\delta N + 4K\delta N + 4K\frac{\alpha}{2\log(3K)}\delta \\ &\leq 4K\left[2N + \frac{\alpha}{2\log(3K)}\right]\delta. \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Maintenant, notons que le système (2.11), *admet une dichotomie exponentielle sur* $[t_{k-1}, t_k]$, *puisque si* $t_{k-1} \leq t \leq s \leq t_k$,

$$\begin{aligned} |Y_k(t)P_kY_k^{-1}(s)| &\leq |S_k(t)||X_k(t)P_kX_k^{-1}(s)||S_k^{-1}(t)| \\ &\leq \frac{3}{2}Ke^{-\alpha(t-s)} \times 2 \\ &= 3Ke^{-\alpha(t-s)}. \end{aligned}$$

De la même façon, on montrera que si $t_{k-1} \leq s \leq t \leq t_k$,
$|Y_k(t)(I - P_k)Y_k^{-1}(s)| \leq 3ke^{-\alpha(t-s)}$.
La matrice de projection correspondante est :

$$D_k(t) = Y_k(t)P_kY_k^{-1}(t).$$

On a pour tout entier k,

$$\begin{aligned} D_{k-1}(t_{k-1}) &= Y_{k-1}(t_{k-1})P_{k-1}Y_{k-1}^{-1}(t_{k-1}) \\ &= S_{k-1}(t_{k-1})X_{k-1}(t_{k-1})P_{k-1}X_{k-1}^{-1}(t_{k-1})S_{k-1}^{-1}(t_{k-1}) \\ &= S_{k-1}(t_{k-1})\mathcal{P}_{k-1}(t_{k-1})S_{k-1}^{-1}(t_{k-1}) \\ &= J_{k-1}\mathcal{P}_{k-1}(t_{k-1})J_{k-1}^{-1} \\ &= J_{k-1}Q_k J_{k-1}^{-1} \\ &= P_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_k(t_{k-1}) &= Y_k(t_{k-1})P_k Y_k^{-1}(t_{k-1}) \\ &= S_k(t_{k-1})X_k(t_{k-1})P_k X_k^{-1}(t_{k-1})S_k^{-1}(t_{k-1}) \\ &= P_k \quad car \quad S_k(t_{k-1}) = I \quad et \quad X_k^{-1}(t_{k-1}) = I. \end{aligned}$$

Si on définit B(t) sur $\mathbb{R}$ *tel que* $B(t) = B_k(t)$ *pour* $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ *, il s'en suit d'après le lemme précédent que le système* $y'(t) = B(t)y$ *, admet une dichotomie exponentielle sur* $\mathbb{R}$ *de constantes* $9K^2$ *et* $\dfrac{\alpha}{2}$ *.*
D'après (1.6) et l'hypothèse sur δ*, on a*

$$\sup_t |A(t) - B(t)| < \frac{\alpha}{648K^2}.$$

Et par suite le système $x'(t) = A(t)x$*, admet une dichotomie exponentielle sur* $\mathbb{R}$ *de constantes dépendent seulement de* K *et de* α*.*

CHAPITRE 3

CONSERVATION DE LA DICHOTOMIE EXPONENTIELLE PAR PERTURBATION

Le théorème suivant est une propriété très importante, la préservation par petites perturbations linéaires.

Théorème 3.1. *Supposons que l'équation différentielle* (2.6) *a une dichotomie exponentielle* (2.7) *sur* $\mathbb{R}^+$*(resp* $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$*). Soit* B *une fonction à valeurs matricielles continue et bornée sur* $\mathbb{R}^+$*(resp* $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$*) telle que*

$$\delta = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |B(t)| < \frac{\alpha}{4K^2} (\text{ resp } \mathbb{R}^-, \mathbb{R}).$$

Alors l'équation perturbée

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]\, x. \tag{3.1}$$

a une dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}^+$*(resp* $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$*), de constantes*
$K_1 = \frac{5}{2}K^2$ *et d'exposant* $(\alpha - 2K\delta)$ *et de projection* Q *de même noyau (resp image) que celui de* P*.*
De plus, si Y(t) est la matrice fondamentale de (3.1) *vérifiant* $Y(0) = I$*, alors*

$$|Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t)| \leq 4\alpha^{-1}k^3\delta, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration

On a besoin les deux lemmes suivantes :

Lemme 3.1. *Soit $\phi(t)$ une fonction continue, bornée à valeurs réelles telle que*

$$\phi(t) \leq ke^{-\alpha t} + \theta\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|}\phi(u)du \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Avec k,α,θ sont des constantes positives. Si $\theta < \frac{1}{2}$ alors

$$\phi(t) \leq \rho k e^{-\beta t},$$

où $\beta = \alpha(1-2\theta)^{\frac{1}{2}}$, $\rho = \theta^{-1}\left[1-(1-2\theta)^{\frac{1}{2}}\right]$.

Preuve

On considère l'équation

$$\psi(t) = ke^{-\alpha t} + \theta\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|}\psi(u)du. \tag{3.2}$$

D'après le théorème de dérivation sous le singe intégral, on a pour chaque solution $\psi(t)$ continue et bornée de (3.2) est différentiable et

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \left(ke^{-\alpha t} + \theta\alpha \int_0^{t} e^{-\alpha|t-u|}\psi(u)du + \theta\alpha \int_t^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|}\psi(u)du\right)' \\ &= -\alpha k e^{-\alpha t} - \theta\alpha^2 \int_0^{t} e^{-\alpha(t-u)}\phi(u)du + \theta\alpha^2 \int_t^{+\infty} e^{-\alpha(u-t)}\phi(u)du.\end{aligned}$$

D'où $\psi'(t)$ est différentiable et

$$\psi''(t) = -\alpha^2 k e^{-\alpha t} - 2\theta\alpha^2\psi(t) + \theta\alpha^3 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|}\phi(u)du.$$

Par suite $\psi(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$\psi'' = \alpha^2(1-2\theta)\psi.$$

Or $\psi(t)$ est bornée, ce qu'implique si $\theta < \frac{1}{2}$, alors

$$\psi(t) = ce^{-\beta t}$$

où c est une constante.
On remplace $\psi(t)$ par $ce^{-\beta t}$ dans (3.2) *on obtient $c = \rho k$. D'où l'équation* (3.2) *admet une unique solution bornée, continue $\psi(t) = \rho k e^{-\beta t}$.*
Pour toute constante $L \geq \theta^{-1}k$, on a

$$L \geq ke^{-\alpha t} + \theta\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|} L du \quad pour \quad t \geq 0.$$

En effet, on pose

$$h(t) = ke^{-\alpha t} + \theta\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|} L du - L.$$

Donc $h(t) = ke^{-\alpha t} + 2L\theta - L\theta e^{-\alpha t} - L$ et $h'(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$, or

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = L(2\theta - 1) < 0,$$

alors $h(t) \leq 0$ pour $t \geq 0$. D'où le résultat.
Si on choisit $L \geq \sup \psi(t)$, alors d'après la méthode d'approximations successives l'équation (3.2) *admet une solution $\psi(t)$ telle que $\phi(t) \leq \psi(t) \leq L$ pour $t \geq 0$.*

Lemme 3.2. *Soit $\phi(t)$ une fonction continue à valeurs réelles telle que*

$$\phi(t) \leq ke^{-\alpha(s-t)} + \theta\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|} \phi(u) du \text{ pour tout } t \geq 0,$$

avec k, α, θ sont des constantes positives. Si $\theta < \frac{1}{2}$ alors :

$$\phi(t) \leq \rho k e^{-\beta(s-t)},$$

où $\beta = \alpha(1 - 2\theta)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = \theta^{-1}\left[1 - (1 - 2\theta)^{\frac{1}{2}}\right].$

Preuve

Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $\phi(s - t)$.
Maintenant, nous sommes en mesure de montrer le théorème précédent, en effet

Soit $Y(t)$ *une fonction à valeurs matricielles, continue, bornée, on pose* $\|Y\| = \sup_{t\geq 0} |Y(t)|$ *et*

$$TY(t) = X(t)P + \int_0^t X(t)PX^{-1}(u)B(u)Y(u)du - \int_t^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(u)B(u)Y(u)du.$$

Alors

$$\begin{aligned} |TY(t)| &\leq Ke^{-\alpha t} + K\|Y\| \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} B(u)du - \int_t^{+\infty} e^{-\alpha(u-t)} B(u)du \right) \\ &\leq Ke^{-\alpha t} + K\|Y\|\delta \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} du - \int_t^{+\infty} e^{-\alpha(u-t)} du \right) \\ &\leq Ke^{-\alpha t} + K\delta\alpha^{-1}(-e^{-\alpha t} - e^{\alpha} t)\|Y\|. \end{aligned}$$

Donc $\|TY\| \leq K + 2K\delta\alpha^{-1}\|Y\|$. *De la même manière on obtient* $\|TY - T\tilde{Y}\| \leq 2K\delta\alpha^{-1}\|Y - \tilde{Y}\|$.
D'après le principe de contraction, si $\theta = \alpha^{-1}k\delta < \frac{1}{2}$, *alors* T *admet un unique point fixe* $Y_1(t)$ *avec*

$$Y_1(t) = X(t)P + \int_0^t X(t)PX^{-1}(u)B(u)Y_1(u)du - \int_t^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(u)B(u)Y_1(u)du. \quad (3.3)$$

Ce qui implique que $Y_1(t)$ *est différentiable et une solution de l'équation* (3.1). *Or* $Y_1(t)P$ *est aussi point fixe de* T *donc* $Y_1(t)P = Y_1(t)$. *En particulier, si* $Q = Y_1(0)$ *alors* $QP = Q$.
À partir de (3.3), *on remplace* t *par* s, *on obtient*

$$X(t)PX^{-1}(s)Y_1(s) = X(t)P + \int_0^s X(t)PX^{-1}(u)B(u)Y_1(u)du. \quad (3.4)$$

En comparent (3.3) *et* (3.4) *on a*

$Y_1(t) = X(t)PX^{-1}(s)Y_1(s) + \int_s^t X(t)PX^{-1}(u)B(u)Y_1(u)du -$
$\int_t^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(u)B(u)Y_1(u)du. \quad (3')$
D'autre part, on choisit $t = s = 0$ *dans* (3.3) *on obtient* $PQ = P$. *Donc* $Y_1(t)Q$ *est aussi un point fixe de* T *et d'où* $Y_1(t)Q = Y_1(t)$. *pour* $t = 0$ *on a* $Q^2 = Q$ *alors* Q *est une projection.*

Si $Y(t)$ *la matrice fondamentale de l'équation* (3.1) *telle que* $Y(0) = I$ *alors* $Y_1(t) = Y(t)Q$.
On pose $Y_2(t) = Y(t)(I-Q)$ *de sorte que* $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$. *D'après la formule de la variation de la constante,*

$$Y_2(t) = X(t)(I-Q) + \int_0^t X(t)X^{-1}(u)B(u)Y_2(u)du. \tag{3.5}$$

On remplace t *par* s *et on utilisons* $(I-P)(I-Q) = I-Q$ *on obtient*

$$X(t)(I-P)X^{-1}(s)Y_2(s) = X(t)(I-Q) + \int_0^s X(t)(I-P)X^{-1}(u)B(u)Y_2(u)du.$$

En comparent avec (3.5),*on a*

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= X(t)(I-P)X^{-1}(s)Y_2(s) - \int_s^t X(t)(I-P)X^{-1}(u)B(u)Y_2(u)du + \\ &\int_0^t X(t)PX^{-1}(u)B(u)Y_2(u)du. \quad (3'') \end{aligned}$$

D'après $(3')$ *et* $(3'')$ *,on a pour tout vecteur* ξ*,*

$$|Y_1(t)\xi| \leq ke^{-\alpha(t-s)}|Y_1(s)\xi| + \theta\alpha \int_s^{+\infty} e^{-\alpha|t-u|}|Y_1(u)\xi|du \text{ pour } t \geq s \geq 0,$$

$$|Y_2(t)\xi| \leq ke^{-\alpha(t-s)}|Y_2(s)\xi| + \theta\alpha \int_0^s e^{-\alpha|t-u|}|Y_2(u)\xi|du \text{ pour } s \geq t \geq 0.$$

On applique les lemmes 1 et 2, on a

$$\begin{cases} |Y_1(t)\xi| \leq \rho k e^{-\beta(t-s)}|Y_1(s)\xi| \text{ pour } t \geq s \geq 0, \\ |Y_2(t)\xi| \leq \rho k e^{-\beta(s-t)}|Y_2(s)\xi| \text{ pour } s \geq t \geq 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$\beta = \alpha(1-2\theta)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = \theta^{-1}\left[1-(1-2\theta)^{\frac{1}{2}}\right].$$

D'après (3.3) *et* (3.5) *on a*

$$\begin{cases} X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y_1(t) = -\int_t^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(u)B(u)Y_1(u)du, \\ X(t)PX^{-1}(t)Y_2(t) = \int_0^t X(t)PX^{-1}(u)B(u)Y_2(u)du. \end{cases}$$

D'après (3.6) *on a*

$$\begin{cases} |Y_1(u)\xi| \leq \rho k e^{-\beta(u-t)}|Y_1(t)\xi| \ pour \ u \geq t \geq 0, \\ |Y_2(u)\xi| \leq \rho k e^{-\beta(t-u)}|Y_2(t)\xi| \ pour \ t \geq u \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} |X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y_1(t)\xi| \leq \theta\alpha\rho k \int_t^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)(t-u)}du = \eta|Y_1(t)\xi|, \\ |X(t)PX^{-1}(t)Y_2(t)\xi| \leq \theta\alpha\rho k \int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(u-t)}du = \eta|Y_2(t)\xi|, \end{cases} \tag{3.7}$$

avec $\eta = (\rho-1)k$. *Et on a aussi*

$$Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t) = X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t)Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t).$$

Alors d'après (3.7) *on a*

$$\begin{aligned} |Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t)| &\leq |X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t)| + \\ &| \quad X(t)PX^{-1}(t)Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| \\ &= |X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y_1(t)\xi||Y_1^{-1}(t)\xi^{-1}||Y(t)QY^{-1}(t)| + \\ &| \quad X(t)PX^{-1}(t)Y_2(t)\xi||Y_2^{-1}(t)\xi^{-1}||Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| \\ &\leq \eta|Y_1(t)\xi||Y_1^{-1}(t)\xi^{-1}||Y(t)QY^{-1}(t)| + \\ &\eta \quad |Y_2(t)\xi||Y_2^{-1}(t)\xi^{-1}||Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| \\ &= \eta|Y(t)QY^{-1}(t)| + \eta|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| \\ &= \eta(\gamma_1+\gamma_2), \end{aligned}$$

où $\gamma_1 = |Y(t)QY^{-1}(t)|$; $\gamma_2 = |Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)|$. *D'où*

$$\gamma_1 \leq |Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t)| + |X(t)PX^{-1}(t)| \leq \eta(\gamma_1+\gamma_2) + K.$$

Or $Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t) = X(t)(I-P)X^{-1}(t) - Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)$. *Alors*

$$\gamma_2 \leq \eta(\gamma_1+\gamma_2) + K.$$

On fait la somme, on obtient $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2(1-2\eta)^{-1}K$ *,si* $\eta < \frac{1}{2}$, *alors*

$$\gamma_1, \gamma_2 \leq (1-2\eta)^{-1}K.$$

Si on remplace ξ par $Y^{-1}(s)\xi$ dans (3.6), on obtient pour $t \geq s \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} |Y(t)QY^{-1}(s)| & = & |Y(t)QY^{-1}(t)||Y(t)QY^{-1}(s)\xi||\xi^{-1}| \\ & = & \gamma_1|Y_1(t)Y^{-1}(s)\xi||\xi^{-1}| \\ & \leq & (1-2\eta)^{-1}\rho K^2|Y_1(s)Y^{-1}(s)| \\ & \leq & (1-2\eta)^{-1}\rho K^2 e^{-\beta(t-s)} \\ & \leq & Le^{-\beta(t-s)}, \end{array}$$

où $L = (1-2\eta)^{-1}\rho K^2$. De la même manière on a pour $s \geq t \geq 0$

$$|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(s)| \leq Le^{-\beta(s-t)}.$$

•*Pour le cas $t \geq 0$. On a $\delta = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |B(t)| < \frac{\alpha}{4K^2}$, donc la condition $\eta < \frac{1}{2}$ est satisfaite si $\theta < \frac{1}{4K}$ donc nécessairement $K \geq 1$, pour δ très petit on a*

$$(1-2\theta)^{\frac{1}{2}} \simeq 1-\theta.$$

Donc

$$\beta \simeq \alpha - K\delta, \quad L \simeq K^2, \quad \eta \simeq 0 \quad et \quad \rho \simeq 1.$$

D'où pour tout $t \geq s \geq 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} |y(t)Qy^{-1}(s)| & \leq & Le^{-\beta(t-s)} \\ & \leq & K^2e^{-(1-K\delta)(t-s)} \\ & \leq & K^2e^{-(1-2K\delta)(t-s)} \\ & \leq & \dfrac{5}{2}K^2e^{-(1-2K\delta)(t-s)}. \end{array}$$

De la même manière, on a pour $s \geq t \geq 0$

$$|y(t)(I-Q)y^{-1}(s)| \leq \frac{5}{2}K^2e^{-(1-2K\delta)(s-t)}.$$

•*Pour le cas $t \leq 0$, il est similaire au cas précédent.*
•*Pour le cas $t \in \mathbb{R}$.*
Supposons que (2.6) admet une dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}$, alors l'équation perturbée (3.1) admet une dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$ avec des projections respectivement Q' et Q''. De plus $ker(Q') = ker(P)$ et $ker(I-Q'') = ker(I-$

P), et $|Q' - P| \leq \theta(1-2\theta)^{-1}K$, $|Q'' - P| \leq \theta(1-2\theta)^{-1}K$ *avec* $\theta = \alpha^{-1}K\delta < \frac{1}{4K}$. *Ainsi* $Q'P = P$, $PQ' = P$, $Q''P = P$, $PQ'' = Q''$ *et* $|Q' - Q''| < 1$. *On pose*

$$S = I + Q' - Q'', \quad Q = SPS^{-1}.$$

Alors Q *est une projection et*

$$SP = Q', \quad S(I-P) = I - Q''.$$

Par conséquent $ker(Q) = ker(Q'')$, *et* $Im(Q) = Im(Q')$. *Donc l'équation perturbée* (3.1) *admet a une dichotomie exponentielle sur* $\mathbb{R}^-$ *et* $\mathbb{R}^+$ *avec une projection commune* Q.

CHAPITRE 4

DICHOTOMIE EXPONENTIELLE ET FONCTION DE LYAPUNOV

Les fonctions de Lyapunov sont un outil standard dans la théorie de la stabilité. Dans ce chapitre, on se propose de voir leur relation avec la dichotomie exponentielle.

Définition 4.1. *Soit $A(t)$ une fonction à valeurs matricielles, définie et continue pour $t \geq 0$. La forme hermitienne $x^*G(t)x$, où $G(t)$ est une fonction à valeurs matricielles, bornée, continument différentiable et hermitienne, est dite fonction de Lyapunov pour l'équation différentielle* (2.6)*, si sa dérivée par rapport au temps le long des solutions de* (2.6) *est définie négative.*

Remarque 4.1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^*G(t)x|_{(11)} &= \dot{x}^*G(t)x + x^*\dot{G}(t)x + x^*G(t)\dot{x} \\ &= x^*A^*(t)G(t)x + x^*\dot{G}(t)x + x^*G(t)A^*(t)x. \end{aligned}$$

Par définition,$x^*G(t)x$ est une fonction de Lyapunov s'il existe une constante $\eta > 0$, telle que $\frac{d}{dt}x^*G(t)x|_{(11)} \leq -\eta|x^2|$.

Théorème 4.1. *Si l'équation* (2.6) *a une dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}$) alors il existe une fonction à valeurs matricielles H bornée, continument* *différentiable et hermitienne vérifiant*

$$\dot{H}(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \leq -I \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{4.1}$$

(resp $t \leq 0$, $t \in \mathbb{R}$)

Démonstration

Pour simplifier on pose

$$X_1(t,s) = X(t)PX^{-1}(s),$$

$$X_2(t,s) = X(t)(I-P)X^{-1}(s).$$

•*Soit H(t) la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\frac{1}{2}H(t) = \int_t^{+\infty} X_1^*(t,s)X_1(t,s)ds - \int_{-\infty}^t X_2^*(t,s)X_2(t,s)ds.$$

On a

$$|\frac{1}{2}H(t)| \leq K^2 \left(\int_t^{+\infty} e^{-2\alpha(s-t)}ds + \int_{-\infty}^t e^{-2\alpha(t-s)}ds \right) = \frac{K^2}{\alpha}.$$

H(t) est hermitienne, bornée et continument différentiable de plus

$$\frac{d}{2dt}H(t) = -\frac{1}{2}A^*(t)H(t) - \frac{1}{2}H(t)A(t) - X_1^*(t,t)X_1(t,t) - X_2^*(t,t)X_2(t,t)$$

car

$$\frac{d}{dt}X_1(s,t) = -X_1(s,t)A(t),$$

$$\frac{d}{dt}X_1^*(s,t) = -A^*(t)X_1^*(s,t).$$

En considérant les projections $\mathfrak{B}(t) = X_1(t,t), \mathfrak{Q}(t) = X_2(t,t) = I - \mathfrak{B}(t)$ *on a*

$$\dot{H}(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) = -2\mathfrak{B}^*(t)\mathfrak{B}(t) - 2\mathfrak{Q}^*(t)\mathfrak{Q}(t).$$

Posons pour simplifier, $\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{B}^*(t)\mathfrak{B}(t) + \mathfrak{Q}^*(t)\mathfrak{Q}(t)$.
Soit ξ *un élément quelconque de l'espace des états,* $\xi = \xi_1 + \xi_2$, *avec*

$$\xi_1 \in Im\mathfrak{B}(t), \quad \xi_2 \in Im\mathfrak{Q}(t) = ker\mathfrak{B}(t).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\xi^*\mathfrak{R}(t)\xi &= \xi_1^*\mathfrak{R}(t)\xi_1 + \xi_1^*\mathfrak{R}(t)\xi_2 + \xi_2^*\mathfrak{R}(t)\xi_1 + \xi_2^*\mathfrak{R}(t)\xi_2 \\
&= \xi_1^*\xi_1 + 0 + 0 + \xi_2^*\xi_2 \\
&= \xi_1^*\xi_1 + \xi_2^*\xi_2 \\
&\geq \frac{1}{2}\xi^*\xi.
\end{aligned}$$

•*Pour le cas* $\mathbb{R}^-$*, on définit H(t) par :*

$$\frac{1}{2}H(t) = \int_t^0 X_1^*(t,s)X_1(t,s)ds - X_1^*(0,t)X_1(0,t) - \int_{-\infty}^t X_2^*(t,s)X_2(t,s)ds.$$

•*Pour le cas* $\mathbb{R}^+$*, on définit H(t) par :*

$$\frac{1}{2}H(t) = \int_t^{+\infty} X_1^*(t,s)X_1(t,s)ds - X_2^*(0,t)X_2(0,t) - \int_0^t X_2^*(t,s)X_2(t,s)ds.$$

Le théorème suivant est la réciproque au théorème précédent.

Théorème 4.2. *Supposons que* (2.6) *est à croissance bornée sur* $\mathbb{R}$*, s'il existe une fonction H(t) bornée, hermitienne, de classe* C^1*, vérifiant* (4.1)*, alors l'équation* (2.6)*, admet une dichotomie exponentielle sur* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration

On a (2.6) *est à croissance bornée sur un intervalle J, donc pour h fixé strictement positif, il existe une constante* $C \geq 1$*, telle que toute solution x(t) de* (2.6)*, vérifiée*

$$|x(t)| \leq C|x(s)| \quad s,t \in J, \quad s \leq t \leq s+h. \tag{4.2}$$

Par hypothèse il existe deux constantes $\rho > 0$ *et* $C \geq 1$ *telles que*
$H(t) \leq \rho$ *;* $t \in \mathbb{R}$ *et pour toute solution x(t) de* (2.6)*,*

$$|x(t)| \leq C|x(s)|, \quad 0 \leq s \leq t \leq s+e.$$

Notons X(t) la matrice fondamentale de (2.6) *telle que,* $X(0) = I$*,* $x(t,\xi)$ *la solution de* (2.6)*, vérifiant* $x(0,\xi) = \xi$ *(i.e :* $x(t,\xi) = X(t)\xi$*),*

$$V(t,\xi) = x^*(t,\xi)H(t)x(t,\xi),$$

$$V_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : x(t,\xi) \text{ bornée sur } \mathbb{R}^*\},$$

V_2 un sous espace complémentaire quelconque,

$$S_2 = \{\xi \in V_2 : |\xi| = 1\},$$

on notera parfois pour simplifier

$$V(t) = V(t,\xi), \quad x(t) = x(t,\xi).$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, on a

$$\dot{V}(t) = x^*(t)\left[\dot{H}(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)\right]x(t) \leq -|x(t)^2|. \tag{4.3}$$

V(t) est une fonction strictement décroissante. On se place ici dans l'hypothèse où $V(t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^t |x(u)|^2 du &\leq -\int_0^t \dot{V}(t) \\ &= V(0) - V(t) \\ &\leq V(0) \\ &\leq \rho|x(0)|^2 \\ &\leq \rho\end{aligned}$$

c'est à dire $\int_0^t |x(u)|^2 du < \rho$ et

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0, \text{ lorsque } |x(0)| = 1.$$

Soit $m > 0$, t_m la plus petite valeur réelle positive vérifiant $|x(t_m)| = e^{-\frac{m}{2}}$.
Si $u < t_m$ alors $|x(u)| \geq |x(t_m)|$, sinon il existe $\nu < t_m$ tel que $|x(\nu)| < e^{-\frac{m}{2}} < |x(0)| = 1$. Du théorème des valeurs intermédiaires on déduit l'existence d'un $\nu_m \in (0,t_m)$, vérifiant $|x(\nu_m)| = e^{-\frac{m}{2}}$, ce qui est impossible. Par suite (t_m) est une suite croissante. De l'inégalité

$$-\rho|x(t_m)|^2 \leq -V(t_m) \leq V(t_{m+1}) - V(t_m) = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \dot{V}tudu$$

et de (4.3) il vient

$$\begin{aligned}\rho|x(t_m)|^2 &\leq -\int_{t_m}^{t_{m+1}} |x(u)|^2 du \\ &\leq -(t_{m+1}-t_m)|x(t_{m+1})|^2.\end{aligned}$$

Or $|x(t_m)|^2 = e|x(t_{m+1})|^2$, *donc* $t_m \leq t_{m+1} \leq t_m + \rho e$ *. Maintenant, considérons deux réels s,t* $0 \leq s \leq t < +\infty$ *et m,n deux entiers tels que* $t_m \leq s \leq t_{m+1}$ *,*$t_n \leq t \leq t_{n+1}$ *.d'où en posant* $\alpha = \frac{1}{2\rho e}$*, on obtient*

$$t - s \leq t_{n+1} - t_m = (t_{n+1} - t_n) + (t_n - t_{n-1}) + ... + (t_{m+1} - t_m) \leq (n+1-m)\rho e$$

et $\frac{n+1-m}{2} \geq \alpha(t-s)$. *Ce qui par utilisation de (4.2), conduit à*

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq C|x(t_n)| \\ &= Ce^{-n\frac{n}{2}} \\ &= Ce^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{n+1-m}{2}}e^{-\frac{m}{2}} \\ &= Cee^{-\frac{n+1-m}{2}}|x(t_{m+1})| \\ &< eC^2e^{-\frac{n+1-m}{2}}|x(s)| \\ &\leq eC^2e^{-\alpha(t-s)}|x(s)|.\end{aligned}$$

CHAPITRE 5

APPLICATION DE LA DICHOTOMIE EXPONENTIELLE

5.1 Admissibilité de (C_b, C_b) :

Proposition

(C_b, C_b) est admissible si et seulement s'il existe une projection P telle que l'application :

$$t \to \int_{-\infty}^{t} \|X(t)PX^{-1}(s)\|ds + \int_{t}^{+\infty} \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\|ds.$$

existe et bornée.

Preuve

Condition suffisante :
soit $f \in C_b$, posons :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds.$$

il est clair que x répond à la question. Condition nécessaire :
Étape 1 *:Posons*

$$X_1 = \{c \in \mathbb{R}^n, t \to X(t)c \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+\}$$

$$X_2 = \{c \in \mathbb{R}^n, t \to X(t)c \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^-\}$$

On a alors $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$ *en effet :* $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ *résulte de l'unicité de la solution bornée de* (2.6)*. Soit* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, montrons que* $x_0 \in X_1 + X_2$*. Soit f à support compact inclus dans [-1,1], l'équation :*

$$\dot{x} = A(t)x(t) + f(t) \tag{5.1}$$

admet une unique solution x dans C_b*. Posons* $x(t) = X(t)\alpha(t)$ *et* $f(t) = X(t)\beta(t)$ *l'équation* (5.1) *devient :*

$$\dot{\alpha} = \beta.$$

Pour $t \geq 1$, $\dot{\alpha} = 0$*, donc* $\forall t \geq 1$, $x(t) = X(t)\alpha_1$ *où* $\alpha_1 \in X_1$*, de même* $\forall t \leq -1$, $x(t) = X(t)\alpha_2$ *où* $\alpha_2 \in X_2$*, d'autre part* $\alpha_1 - \alpha_2 = \int_{-1}^{1} \beta$*, donc pour avoir* $x_0 \in X_1 + X_2$*, il suffit de choisir* β *de sorte que* $x_0 = \int_{-1}^{1} \beta$*, ce choix est possible par exemple* $\beta(t) = x_0(1 - |t|)$ *si* $t \in [-1, 1]$ *et* $\beta(t) = 0$ *sinon. Ainsi*

$$\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2.$$

Soit P une projection sur X_1 *parallèlement à* X_2*.*
Étape 2 *:Pour* $f \in C_b$ *soit* x_f *l'unique solution bornée de l 'équation* (5.1)*, alors l'application linéaire*
$T : f \to x_f$ *est continue en effet : soit* (x_n, f_n) *une suite convergente d'éléments du graphe de T, avec (x,f) sa limite, montrons que x=Tf on a :*
$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t (A(s)x_n(s) + f_n(s))ds$*, en faisant tendre n vers* $+\infty$ *on obtient :*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (A(s)x(s) + f(s))ds.$$

Il en résulte que x=Tf, le théorème du graphe fermé permet de conclure.
Si f est à support compact, l'unique solution bornée de (5.1) *est :*

$$x_f(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^{+\infty} X(t)(I - P)X^{-1}(s)f(s)ds$$

en effet, les intégrales convergent car f est à support compact, x est solution de (5.1) *car*

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds$$

avec

$$x_0 = \int_{-\infty}^0 PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_0^{+\infty} (I-P)X^{-1}(s)f(s)ds$$

de plus x est bornée en effet si $suppf \subset [-R, R]$ on a pour $t \geq R$:

$$x(t) = X(t)c_1, \quad c_1 = P\int_{-R}^{R} X^{-1}(s)f(s)ds \in X_1$$

et pour $t \leq -R$:

$$x(t) = X(t)c_2, \quad c_2 = -(I-P)\int_{-R}^{R} X^{-1}(s)f(s)ds \in X_2.$$

Étape 3 *: Soit t un réel fixé, $a \leq t, c, v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|c\|, \|v\| \leq 1$.*

$f(s)=\begin{cases} signe((X(t)PX^{-1}(s)|v|))c \text{ si } t \in [a,t] \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$ *alors*

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &= \left\| \int_a^t X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds \right\| \\ &\leq L\|f\|_\infty \\ &\leq L. \end{aligned}$$

Et par suite

$$|(x_f(t)|v|)| \leq L$$

c'est à dire

$$\int_a^t \left|(X(t)PX^{-1}(s)c|v|)\right| ds \leq L$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^t \left\|X(t)PX^{-1}(s)\right\|_1 ds &\leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_a^t \left|(X(t)PX^{-1}(s)e_j|e_i|)\right| ds \\ &\leq n^2 L \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\int_{-\infty}^{t} \left\|X(t)PX^{-1}(s)\right\|_1 ds \leq n^2 L.$$

Soit t un réel fixé, $a \geq t, c, v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|c\|, \|v\| \leq 1$.

$f(s)= \begin{cases} signe((X(t)QX^{-1}(s)|v|))c \text{ si } t \in [t,a] \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$ *on a*

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &= \left\| -\int_t^a X(t)QX^{-1}(s)f(s)ds \right\| \\ &\leq L \end{aligned}$$

donc

$$\|(x_f(t)|v|)\| \leq L.$$

C'est à dire

$$\int_t^a \left|(X(t)QX^{-1}(s)c|v|)\right| ds \leq L$$

d'où

$$\int_t^a \left\|X(t)QX^{-1}(s)\right\|_1 ds \leq Ln^2$$

ainsi

$$\int_t^{+\infty} \left\|X(t)QX^{-1}(s)\right\|_1 ds \leq Ln^2.$$

Remarque 5.1. *Dans le cas où X(t) est à croissance bornée, on sait que l'admissibilité de (C_b, C_b) est équivalente à la dichotomie exponentielle, mais on peut avoir l'admissibilité de (C_b, C_b) sans dichotomie exponentielle comme le montre la proposition suivante :*

Proposition

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable positive et $a(t) = e^{\varphi(t)} - \dot{\varphi}(t)$, alors (C_b, C_b) est admissible pour l'équation $\dot{x} = a(t)x + f$, Si de plus on choisit

$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{k}{2}(1+\cos(\pi e^k(t-k))) \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}^*, |t-k| \leq e^{-k} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$

alors $\dot{x} = a(t)x$ n'admet pas de dichotomie exponentielle.

Preuve

on a

$$\begin{aligned} X(t)^{-1} &= exp(-\int_0^t a(s)ds) \\ &= exp(-\int_0^t e^{\varphi(s)}ds)exp(\varphi(t)-\varphi(0)) \\ &= -exp(-\varphi(0))\frac{d}{dt}exp(-\int_0^t e^{\varphi(s)}ds) \end{aligned}$$

donc

$$\int_t^\infty X(s)^{-1}ds = -exp(-\varphi(0))\left[exp(-\int_0^s e^{\varphi(u)}du)\right]_t^\infty$$

or φ positive donne :

$$exp(-\int_0^s e^{\varphi(u)}du) \leq e^{-s}.$$

donc

$$\int_t^\infty X(s)^{-1}ds = exp(-\varphi(0))exp(-\int_0^t e^{\varphi(u)}du). \quad (2)$$

Montrons par l'absurde que X(t) n'est pas majoré, alors il existe $m > 0$ tel que :

$$m \leq -exp(-\varphi(0))\frac{d}{dt}exp(-\int_0^t e^{\varphi(s)}ds)$$

par intégration sur [0,t], on a pour tout $t \geq 0$:

$$mt \leq exp(-\varphi(0))\left(1 - exp(-\int_0^t e^{\varphi(s)}ds)\right)$$

ce qui est absurde. Il en résulte que l'équation 1 admet au plus une solution dans C_b. Existence de la solution dans C_b : D'après 2 on peut définir :

$$x(t) = -\int_t^\infty X(t)X(s)^{-1}f(s)ds.$$

Il est clair que x est une solution de l'équation 1, montrons que x est bornée :

$$|x(t)| \leq \|f\|_\infty \int_t^\infty X(t)X(s)^{-1}ds$$

et d'après 2 on aura :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \|f\|_\infty X(t)exp(-\varphi(0))exp(-\int_0^t e^{\varphi(u)}du) \\ &\leq \|f\|_\infty exp(-\varphi(t)) \\ &\leq \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Finalement pour tout f dans C_b, l'équation 1 admet une unique solution bornée. Supposons qu'on a la dichotomie exponentielle, on a vu que X(t) n'est pas majoré donc P=0, donc

$$\exists M > 0, \exists \alpha > 0,\ \textit{pour } t \leq s, X(t)X^{-1}(s) \leq Me^{-\alpha(s-t)}$$

par suite

$$-\int_t^s a(u)du \leq lnM - \alpha(s-t).$$

En particulier, il existe $\beta > 0$ tel que pour $s \geq t$:

$$-\int_t^s a(u)du \leq \beta$$

d'où

$$\varphi(s) - \varphi(t) \leq \beta + \int_t^s e^{\varphi(u)}du$$

en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(n) - \varphi(n - e^{-n}) \leq \beta + \int_{n-e^n}^n e^n du$$

ce qui donne la contradiction :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; n \leq \beta + 1.$$

5.2 Admissibilité de (L,L)

On note L l'ensemble suivante :

$$L = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \forall \alpha > 0, t \to e^{-\alpha|t|}f(t) \ \textit{intégrable sur } \mathbb{R} \right\}.$$

On a alors

Proposition

Si l'équation :

$$\dot{x} = A(t)x \quad (3)$$

admet une dichotomie exponentielle, alors (L,L) est admissible.

Preuve

il existe $\alpha > 0, M > 0$ *et une projection* P *tels que pour* $c \in \mathbb{R}^n$

$$\forall t \geq s, |X(t)Pc| \leq Me^{-\alpha(t-s)}|X(s)c|$$

$$\forall t \leq s, |X(t)(I-P)c| \leq Me^{-\alpha(s-t)}|X(s)c|.$$

Unicité de la solution dans L : montrons que si $t \to X(t)c$ *est dans L alors c=0.*
On a pour $0 \leq s, |(I-P)c| \leq Me^{-\alpha s}|X(s)c|$ *donc*
$s \to |(I-P)c|$ *intégrable sur* $[0, +\infty[$ *par suite Pc=c, donc pour* $0 \geq s$,
$|c| = |Pc| \leq Me^{\alpha s}|X(s)c|$ *donc* $s \to c$ *est intégrable sur* $]-\infty, 0]$ *par suite c=0.*
Existence de la solution dans L : soit $f \in L$, *posons*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds.$$

On a alors x est une solution de l'équation 1 et

$$\|x(t)\| \leq M \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|t-s|}|f(s)|ds.$$

Soit $\beta > 0$ *et* $\gamma = min(\alpha, \beta)$ *alors*

$$e^{-\beta|t|}\|x(t)\| \leq M \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(|t-s|+|t|)}|f(s)|ds$$

et

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(|t-s|+|t|)}|f(s)|dsdt = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(|t-s|+|t|)}dt)|f(s)|ds.$$

D'autre part $s \to \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(|t-s|+|t|)}dt$ *est paire et pour* $s \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(|t-s|+|t|)}dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\gamma(s-2t)}dt + \int_{0}^{s} e^{-\gamma s}dt + \int_{s}^{+\infty} e^{-\gamma(2t-s)}dt \\ &= \frac{1}{2\gamma}e^{-\gamma s} + se^{-\gamma s} + \frac{1}{2\gamma}e^{-\gamma s}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall s \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(|t-s|+|t|)} dt = \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma|s|} + |s| e^{-\gamma|s|}$$

il en résulte que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta|t|} \|x(t)\| dt \leq M \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma|s|} + |s| e^{-\gamma|s|}) |f(s)| ds.$$

Comme

$$|s| e^{-\gamma|s|} = o(e^{-\frac{\gamma}{2}|s|}) (\text{ quand } |s| \to +\infty).$$

On déduit que $x \in L$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.Brézise, Analyse fonctionnelle. Dunod 1999.

[2] M.Gradinaru, Espace vectoriel normé, licence de Math 3 éme année, 2007, 2008.

[3] A.Kolmogorove. Elément de la théorie de fonction et de l'analyse fonctionnelle 2 éme édition, édition MTR.préface a l'édition française 1973.

[4] Smart D.R, Fixed point theoremes, cambridge, Univesity press, cambridge 1980.

[5] Kumlin P., A Note on fixed point theory, TMA 401\MAN 670 functionalAnalysis 2003\2004, Mathematics, chalmers and G.U.

[6] A.Pazy, Semigroups of lineare operators and applications to diffirential equation, springer-verlag, New York 1983.

[7] R.Nagel one-parameter semigroups of positive operators, lecture notes in mathematics, springer-verlag, Berlin 1986.

[8] O.A Adesina and J.A. Ayanjinmi, *On the exponential dichotomy and existence of almost periodic solution to nonlinear differential equations*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 44, No. 5 (2008), 645-650.

[9] E. Ait Dads and O. Arino, *Exponential dichotomy and existence of pseudo almost periodic solution of some differential equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 27, No. 4 (1996), 369-386.

[10] O.Perron,Die stabilittats frage bei diffrentialgeighungen,Math.Z.32(1930),703-728.

[11] W.A. Coppel, *Dichotomies in Stability Theory*. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 629. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[12] W.A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath and Co., Boston, Mass. 1965

[13] Y. Latushkin, T. Randolph and R. Schnaubelt, *Exponential dichotomy and mild solutions of nonautonomous equations in Banach spaces*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 10, No. 3 (1998), 489-510.

[14] A.D. Maîzel, *On stability of solutions of systems of differential equations*, Ural. Politehn. Inst. Trudy 51 (1954), 20-50.