Ministère de l'enseignement superieur et de la rechreche scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Département des Mathématiques

présenté par

***Tammar fatiha**

Spécialité : Mathématiques

Option : Annalyse Fonctionnelle et Applications

Sujet du mémoire

Inégalités Intégrales pour l'opérateur de Riemann-Liouville et certaines de ces généralisations

Mémoire de fin D'étude Pour obtenir

Le diplôme de Master

présenté et soutenu publiquement le 18/10/2020

devant le jury composé de

***Dr.L.Abderahmane**	**MCA**	**Président**
***Dr.H.Benali**	**MCB**	**Encadreur**
***Dr.O.Abderahmane**	**MCB**	**Examinateur**

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens á remercier Allah le tout puissant pour son aide et sa bénédiction qui m' a donné la santé et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Mes plus vifs remerciements vont aussi á mon encadreur : **Dr.** Benali Halim, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.

Je remercie également **Dr**.L.Abderahmane de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie également **Dr**.O.Abderahmane membre de jury pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant de juger mon travail.

J'adresse également un grand merci á tous les enseignants de département des Mathématiques ainsi que le personnel de l'administration en général.

*———— *Je dédie ce travail à* ————*

Je dédie ce modeste travail à :

A mon père, le chemin à suivre dans cette vie

A ma mère pour son soutien

A mes soeurs et mes fréres.

En leur témoignant mon amour et ma profonde admiration.

Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.

A tous mes amis sans exception et toute ma promotion de mathématiques.

———— *Tamar fattiha* ————

Table des matières

INTRODUCTION

Il est bien connu que les inégalités,les inégalités intégrales classiques sont un outil trés important dans l'analyse classique.Elles fournissent des bornes explicites pour une fonction inconnue et jouent un rôle fondamental dans les équations différentielles et intégrales. Une application de ces inégalités est la théorie des E.D.P (équations différentielles partielles). La plupart des cours de base en E.D.P contiennent l'inégalité de Bellman – Gronwall et rien de plus. Les cours avancés enseignent certaines classes d'inégalités liées á un sujet des E.D.P tels que les équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Ce memoire comprend une introdction et trois chapitres.

Dans le chapitre 1, nous donnons quelques définitions nécessaires et préliminaires mathématiques sur quelques espaces de fonctions tels que les espaces de Lebesgues ,espace des fonctions continues et l'espace des fonctions absolument continues.Aussi nous collectons soigneusement un certain nombre d'inégalités intégrales, y compris les inégalités intégrales célèbres par exemple celle de Young, de Holder et de Minkovsky .

Un rappel de quelques notions de la théorie du calcul fractionnaire qui sont utilisées dans les chapitres qui suivent tels que les fonctions spéciales ou fonction d'Euler ;la fonction Gamma et la fonction Beta,les intégrales de Riemann-Liouville et $k-$ Riemann-Liouville $(k > 0)$ et quelques une de leurs propriétés .

Dans le chapitre 2, nous avons introduit une ídentité importante dite identité de Montgomery avec et sans poids.Nous avons établi des inégalités dites fractionnaires pour les intégrales de Riemann-Liouville via cette identité avec et sans poids .

Au chapitre 3, nous développons des généralisations des résultats présentés dans le chapitre deux ,en considérant un opérateur intégrale fractionnaire généralisant celui de Riemann-Liouville . Nous présentons l'identité de Montgomery avec et sans poids pour l'intégrale fractionnaire d'une fonction f par rapport á une autre fonction g oú la fonction g est une fonction croissante á dérivée g' continue.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Espaces de fonctions

Dans cette section nous présentons quelques définitions de certains espaces de fonctions tels que

1) L'espace des fonction p-intégrables $(1 \leq p \leq \infty.)$

2) L'espace des fonctions continues.

3) L'espace des fonctions absolument continues.

quelques résultats.

1.1.1 Espaces des fonctions p-intégrables

Les éspaces de Lebesgue sont des espaces de fonctions, normés (quasi-normés) complèts et des espaces hilbertiens (cas $p = 2$). Ils jouent un rôle trés important en analyse mathématique et ont de remarquables propriétés . Dans tout ce qui suit,on utilise les notations suivantes
$(\Omega, \mathcal{T}, \mu) :=$ un espace mesuré et $|A| :=$ mesure de A.

Définition 1.1. *Soit* $\Omega = (a, b)\,(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*Nous notons par* $L_p(a, b)(1 \leq p \leq \infty)$, *l'ensemble des classes de* *fonctions mesurables f sur Ω á valeurs réelles ou complexes telles que*

$$\|f\|_{L_p(a,b)} < \infty$$

oú

$$\|f\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

si $1 \leq p < \infty$,
et

$$\|f\|_{L_\infty(a,b)} = \sup ess|f(x)| < \infty$$

prèsque partout pour tout $x \in [a,b]$.

Lemme 1.1. *Si* $p \in [1,\infty]$ *et* $a, b \geq 0$, *alors*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{1.1}$$

Proposition 1.1. *. L'espace* $L^p(\Omega)(0 < p \leq \infty)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *pour les opérations algebriques*

1) *L'addition vectorielle* $\forall x \in [a,b]$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) *La multiplication par un scalaire* $\forall x \in [a,b] \, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

$$(\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

Démonstration. Pour $1 \leq p < \infty$ on utilise le **Lemme** 1.1.Pour le cas $p = \infty$ on utilise les propriétés du sup esssentiel. □

Inégalités intégrales fondamentales

1) **Inégalité de Hôlder**

L'inégalité de Hôlder et ses corollaires jouent un rôle principale dans la théorie des espaces L_p, sont utilisés dans des preuves d'importantes inégalités liées aux espaces L_p.

Lemme 1.2. ***(Inégalité de Young)*** *Soit* $p, q \geq 1$, *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *alors*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.2}$$

Démonstration. La fonction $\exp : t \to \exp(t)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.) On a donc pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in [0, 1]$.

$$\exp(\alpha t + (1 - \alpha)s) \leq \alpha \exp(t) + (1 - \alpha) \exp(s).$$

Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux ,$a = 0, b = 0$).
On prend $\alpha = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1 - \alpha = \frac{1}{q},)$
Pour $t = p \ln(a)$ et $s = q \ln(b)$. On obtient $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. □

Corollaire 1.1. *Soientt* $p, q, r \geq 1$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *alors*

$$\forall A, B \geq 0, \quad \big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{1.3}$$

Démonstration. Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors,$1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.2) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$\big(AB\big)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q.$$

□

Théorème 1.1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable,*

et $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_q(\Omega)$ *avec* $1/p + 1/q = 1$, *alors*
1 Si $1 \leq p < \infty$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}, \tag{1.4}$$

2 Si $p = \infty$

$$\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 .$$

Démonstration. Si $1 \leq p < \infty$, on applique le **Lemme** 1.2 avec

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}} \quad \text{et} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L_q(\Omega)}},$$

on a

$$\begin{aligned} ab &= \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}} \\ &\leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L_p\Omega)}} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L_q(\Omega)}}, \\ \int \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}} dx &\leq \frac{1}{p} \int \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L_p(\Omega)}} dx + \frac{1}{q} \int \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L_q(\Omega)}} dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (1.4). □

Proposition 1.2. *Soit* $p_i \in]1, \infty[$, $i = 1, 2, ..., k$, *et* $1 < r < \infty$ *tel que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ *(les* p_i *sont dits* r *conjugués),* $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$, *alors*

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \int L_r(\Omega) \quad et \quad \|f\|_{L_r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L_{p_i}(\Omega)} \tag{1.5}$$

Démonstration. Par recurrence sur i. □

2) **Inégalités de Minkowsky**

Théorème 1.2. ***(Inégalité de Minkowsky)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *un ensemble mesurable* , $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_p(\Omega)$. *Alors :*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Démonstration. 1. Si $p = 1$

$$\|f+g\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega |f+g|dx \leq \int_\Omega |f|dx + \int_\Omega |g|dx = \|f\|_{L_1(\Omega)} + \|g\|_{L_1(\Omega)}.$$

2. Si $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p dx &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1}dx \\ &\leq \int_\Omega |f||f+g|^{p-1}dx + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1}dx.\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \||f+g|^{p-1}\|_{L_q(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \||f+g|^{p-1}\|_{L_q(\Omega)}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et donc $q = \frac{p}{p-1}$, alors :

$$\begin{aligned}\||f+g|^{p-1}\|_{L_q(\Omega)} &= \Big(\int_\Omega |f+g|^{p-1\frac{p}{p-1}}dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \Big(\Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} dx\Big)^{p-1} \\ &= \|f+g\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \|f+g\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\Big(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}\Big),$$

on déduit que :

$$\|f+g\|^{p}_{L_p(\Omega)} \leq \|f+g\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}\Big(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}\Big).$$

Et par conséquent

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

□

Remarque 1.1. *Il suit de l'inégalité de Hôlder que :*

1) Si $\mu(\Omega) < \infty$ *les espaces* $L_p(\Omega)$ *sont emboités en fonction de* p *i.e pour* $1 < p < q < \infty$ *on a :*

$$L_\infty(\Omega) \subset L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega) \subset L_1(\Omega).$$

2) Si $\mu(\Omega) = +\infty$ *il n'y a en général pas d'inclusion entre les espaces* $L_p(\Omega)$ *et* $L_q(\Omega)$ *pour* $p \neq q$.

Proposition 1.3. *Pour* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace* $L_p(\Omega)$ *est un espace normé par*

$$\|f\|_{L_{p(\Omega)}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3) <u>**Complétude**</u>

Lemme 1.3. *Pour tout sous ensemble mesurable* Ω *de mesure finie, pour* $1 \leq p < \infty$, *on a*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_{\infty(\Omega)}}.$$

Théorème 1.3. ***Théorème de Riez-Fisher***

(i) *Pour,* $1 \leq p \leq \infty$, $L_p(\Omega)$ *est un espace de Banach i.e espace normé complet.*

(ii) *L'espace* $L_2(\Omega)$, *muni de la norme* $\|.\|_{L_2}$, *est un espace de Hilbert (réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f/g)_2 = \int_\Omega fg d\mu.$$

En outre, on a l'inégalité de Cauchy[1]*-Schwarz*[2] *:*

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2}\|g\|_{L_2}.$$

1.1.2 Espace des fonctions continues :

Soit (E, d) un espace métrique.

1) On note $\mathcal{C}(E, K)$ l'espace des fonctions continues de E á valeurs dans $K, K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Et par $\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}) := \mathcal{C}_b(E)$ l'espace des fonctions continues et bornées de E dans $\mathbb{R}$ et

2) L'espace noté

$$\mathcal{C}^n([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}, / f^{(n)} \in \mathcal{C}([a, b])\}.$$

i.e $f^{(n)}$ existe et est continue sur $[a, b]$.
Si $n = 0$: $\mathcal{C}^0([a, b]) := \mathcal{C}([a, b])$.
Si $n = \infty$: $\mathbf{C}^\infty([a, b]) = \bigcap_{k=0}\mathcal{C}^k([a, b])$.

1. Augustin Louis, baron Cauchy (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux (Hauts-de-Seine)) est un mathématicien francais.
2. Hermann Amandus Schwarz est né le 25 janvier 1843 en Pologne et est mort le 30 novembre 1921 à Berlin. C'est un mathématicien célébre dont les travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.

3) Les espaces $\mathcal{C}^n([a,b])$ sont des espaces vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ normé par

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \sum_{k=0}^{k=n} \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}} := \sum_{k=0}^{n} \max |f^k(x)|, k \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.4. ***Completude***

1) L'espace $\mathcal{C}([a,b])$ est un espace normé complet(espace de Banach) pour la norme .

$$\|f\|_{\mathcal{C}([a,b])} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t).$$

2) L'espace $\mathcal{C}^n([a,b])$ est un espace normé complet(espace de Banach) pour la norme .

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \sum_{k=0}^{k=n} \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}} := \sum_{k=0}^{n} \max |f^k(x)|, k \in \mathbb{N}.$$

1.1.3 Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.2. *une fonction f á valeurs réelles définie sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a,b](A \subset ([a,b]))$ si : pour tout suite $([a_k, b_k])_{k=1...n}$ d'intervalles ouverts*

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k, a_k| < \delta$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} f\,|(b_k) - f(a_k)| < \Upsilon.$$

Caractérisation et exemples

1) L'espace des fonctions absolument continues est l'espace des fonctions primitives des fonctions inté grables, c'est à dire :

$$\mathbb{AC}([a,b]) = \{f / \exists \phi \in L_1([a,b]) : f(t) = c + \int_a^t \phi(t)\,dt\}.$$

2) Pour $n = 1$ une fonction absolument continue est uniformément continue.

3) Une fonction Lipschitzienne est absolument continue.

Théorème 1.5. *(complétude) l'espace des fonctions absolument continues noté* $\mathbb{AC}([a, b])$ *muni de la norme*

$$\|f\|_{AC} = |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\, dt, \tag{1.7}$$

est un espace de Banach.

1.2 Fonction spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonction de base du calcul fractionnaire est la fonction notée $\Gamma(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$

Définition 1.3. *Pour tout nombre complexe z tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$,on définit la fonction Gamma par la représentation intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.8}$$

cette intégrale est convergente pour $\mathcal{R}e(z) > 0$.

Remarque 1.2. *La fonction $\Gamma(z)$ est une fonction monotone strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.*

Proposition 1.4. *Si $z > 0$, alors*

1-

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

2-

$$\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2).$$

3-

$$\Gamma(z+1) = z! \quad si \quad z \in \mathbb{Z}_+^*.$$

4-

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

5- $\Gamma(0_+) = +\infty$

Démonstration. On a

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp^{-t} t^{z-1} dt$$

d'ou

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^{z} dt$$

On utilise une intégralion par parties,

$$\Gamma(z+1) = [\exp^{-t} - t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^{z-1} dt,$$

on obtient

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

par définition

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

on pose $u = \sqrt{t}$ donc

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp^{-u^2}}{u} 2udu$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \exp^{-u^2} du.$$

Sachant que $\int_0^{+\infty} \exp^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (dite l'intégrale de Gauss),il vient que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ □

1.2.2 La fonction k-Gamma

Définition 1.4. *Soit $k > 0, \mathcal{R}e(x) > 0$ On définit la fonction $k-$ Gamma par*

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} exp^{-\frac{t^k}{k}} dt.$$

Proposition 1.5.

1- *$k > 0$ et $x \in \mathbb{C}$ on a*

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}.$$

2- *Pour tout $k > 0$*

$$\Gamma_k(x + k) = x\Gamma_k(x).$$

3- *Pour tout $k > 0$*

$$\Gamma_k(k) = 1.$$

4- *Pour tout $k > 0$, $a \in \mathbb{R}$*

$$\Gamma_k(x) = a^{\frac{x}{k}} \int_0^\infty t^{x-1} exp^{-\frac{t^k}{k}a} dt.$$

5- $\Gamma_k(x)\Gamma_k(k - x) = \frac{\pi}{k \sin(\frac{x\pi}{k})}$

6- $\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma(\frac{x}{k})$.

7- *Si $k > 0, a \in \mathbb{R}$*

$$\Gamma(ak) = k^{a-1}\Gamma(a).$$

8- *Pour tout $k > 0, n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(nk) = k^{n-1}(n - 1)!.$$

1.2.3 La fonction Beta

Définition 1.5. *Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(a), \mathcal{R}e(b) > 0$ la fonction Beta notée $B(a, b)$ est définie par*

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

et

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Proposition 1.6. *Pour tout $a, b \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e(a) > 0$ et $\mathcal{R}e(b) > 0$*

1- *La fonction Beta B est symétrique*

$$B(a,b) = B(b,a).$$

2- *Pour $a, b > 0$*

$$a\,B(a,b+1) = b\,B(a+1,b).$$

3- *Pour $a, b > 0$*

$$B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1).$$

4- *Pour $a, b > 0$*

$$B(a,b+1) = \frac{b}{a}\,B(a+1,b) = \frac{b}{a+b}\,B(a,b).$$

5-

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2a-1}\cos(t)^{2b-1}dt \end{aligned} \tag{1.9}$$

Démonstration. à l'aide du changement de variables $s = 1-t$

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \int_0^1 (1-s)^{a-1}s^{b-1}ds = B(b,a)$$

$$
\begin{aligned}
B(a,b+1) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{b\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \\
&= \frac{ab\Gamma(a)\Gamma(b)}{a\Gamma(a+b+1)} = \frac{b\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{a\Gamma(a+b+1)} \\
&= \frac{b}{a}\, B(a+1,b)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
B(a,b+1) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{\Gamma(a)b\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \\
&= \frac{b\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} = \frac{b}{a+b}\beta(a,b)
\end{aligned}
$$

On montre que
$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2a-1}\cos(t)^{2b-1}dt$
On a $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$, alors par le changement de variable

$$
\begin{cases}
t = \sin^2\theta,\ dt = 2\cos\theta\sin\theta d\theta \\
t = 0 \longmapsto \theta = 0 \\
t = 1 \longmapsto \theta = \frac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
B(a,b) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-2}(1-\sin^2\theta)^{b-1}\cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-2}\cos\theta d\,\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2a-1}\cos(t)^{2b-1}dt
\end{aligned}
$$

$\square$

1.2.4 La fonction k-Beta

Définition 1.6. *Soit $k > 0, x, y > 0$. On définit la fonction $k-$ Beta par*

$$B_k(x, y) = \frac{\Gamma_k(x)\,\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}.$$

Proposition 1.7. *1- $B_k(x, y) = \frac{1}{k}\,B(\frac{x}{k}, \frac{y}{k})$.*

2- $B_k(x, y) \int_0^\infty t^{x-1}(1+t^k)^{-\frac{x+y}{k}}\,dt$.

3- $B_k(x, y) = \frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1}dt$.

1.3 Intégrales de Riemann-Liouville(R-L)

1.3.1 Définition et propriétés

Définition 1.7. *Soient $f \in L^1([a, b]), \alpha > 0$,on appelle intégrale de Riemann-Liouville á gauche (respectivement á droite) de f les intégrale*

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{a_+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \ , x > \tag{1.11}$$

et

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{b_-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \ , x < b. \tag{1.12}$$

Pour $\alpha = 0$ $\mathbb{I}^0 f(x) = f(x)$.

Proposition 1.8. *Soient f une fonction intégrable est bornée et α, β deux nombres réels strictement positifs,alors :*

$$\mathbb{I}^{(\alpha)}_a [\mathbb{I}^{(\beta)}_a f(x)] = \mathbb{I}^{(\alpha+\beta)}_{\alpha} f(x). \tag{1.13}$$

Démonstration. Soient f une fonction intégrale et bornée et α, β deux nombres réels strictement positifs,$\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_a^{(\alpha)}[\mathbb{I}_a^{(\beta)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\mathbb{I}_a^{(\beta)} f\right)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right] dt
\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale on a besoin de la formule dite de Dirichlet,alors

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1}dy = B(\alpha,\beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y)dy. \tag{1.14}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_a^{(\alpha)}[\mathbb{I}_a^{(\beta)} f(x)] &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= \mathbb{I}_a^{(\alpha+\beta)} f(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.9.

1) $\mathbb{I}_a^{(n-\alpha)} f(x) = \mathbb{I}_b^{(n-\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt.$
2) $\mathbb{I}_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^\beta}{\gamma(\beta+1)}$ $(\beta \geq 0)$.
3) $\mathbb{I}_a^n f(x) = \frac{1}{(x-1)!} \int_a^x (x-1)^{n-1} f(t)dt.$
4) $\mathbb{I}_{a+}^\alpha[(t-a)^{\beta-1}](x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.$ *et* $\mathbb{I}_{b-}^\alpha[(b-t)^{\beta-1}](x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}.$

5) $\dfrac{d}{dx}\mathbb{I}^{\alpha+1}f(x) = \mathbb{I}^{\alpha}f(x).$

6) Soit l'opérateur Q *définit par* $(\mathbb{Q}f)(x) = f(a+b-x)$, *alors*

$$\mathbb{Q}\mathbb{I}^{\alpha}_{a+} = \mathbb{I}^{\alpha}_{b-}\mathbb{Q}\mathbb{I}^{\alpha}_{b-} = \mathbb{I}^{\alpha}_{a+}\mathbb{Q}.$$

Lemme 1.4. *Soient* $f \in L_p([a,b],\mathbb{R})$ *et* $g \in L_q([a,b],\mathbb{R})$ *de plus* $(\alpha) > 0$ *et* $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors*

$$\int_a^b f(x)(\mathbb{I}^{\alpha}_{a+}g)(x)dx = \int_a^b g(x)(\mathbb{I}^{\alpha}_{b-}f)(x)dx.$$

1.4 k-intégrales de Riemann-Liouville

1.4.1 Définition et propriétés

Définition 1.8. *Soit* f *une fonctionintégrable avec support dans* $\mathbb{R}^+$ *et soit* α *un nombre réel,*$\alpha > 0, k > 0.$ *On appelle* $k-$ *intégrales Riemann-Liouville de* f *d'ordre* α *les intégrales*

$$({}_k\mathbb{I}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt. \tag{1.15}$$

et

$$({}_k\mathbb{I}^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt. \tag{1.16}$$

Remarque 1.3. *Soit* α *un nombre réel* $0 < \alpha < 1, k > 0$, *le noyau singulier, de k-Riemann-Liouville est donné par :*

$$\mathbb{J}_{a,k}(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}, t > 0.$$

L'opérateur k-Riemann Liouville intégrale peut être exprimée comme la convolution

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{k}f(x\mathbb{J}_{a,k} \star f(x).$$

Proposition 1.10.

1) $\left({}_k\mathbb{I}^{\alpha}_{a+}(t-a)^{i-j}\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-a)^{i-j}dt.$

2) $({}_k\mathbb{I}^{\alpha}_{a+})\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f_n(t)dt$

3) $({}_k\mathbb{I}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} * f(t), t > 0$

4)

$$ {}_k\mathbb{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \mathbb{I}^{\alpha}_{a+k}f(x). $$

5) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, k > 0$

$$ \mathbb{I}^{\alpha}_k \mathbb{I}^{\beta}_k f(t)dt = \mathbb{I}^{\alpha+\beta}_k f(t). $$

Chapitre 2

Inégalités Intégrales pour l'opérateur de R-L

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on prśente quelques résultats concernant l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville .
En utilisant l'identité de Montgomery avec et sans poids.
Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $[a, b]$, avec la premiére dérivée f' intégrable sur $[a, b]$, on a l'identité suivante

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) + \int_a^b p(t,s)f'(s)ds \tag{2.1}$$

oú la fonction $P(t, s)$ est le noyau (dit noyau de Peano) défini par

$$P(t,s) := \begin{cases} \frac{s-a}{b-a} & a \leqslant s < t \\ \frac{s-b}{b-a} & t \leqslant s \leqslant b \end{cases} \tag{2.2}$$

Démonstration. On pose

$$I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds + \int_a^b P(t,s)f'(s)ds$$

On considére le deuxième membre.
On a

$$I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds + \int_a^t \frac{s-a}{b-a}f'(s)ds + \int_t^b \frac{s-b}{b-a}f'(s)ds$$

$$I = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(s)ds + \int_a^t (s-a)f'(s)ds + \int_t^b (s-b)f'(s)ds\right]$$

On intégre par parties

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(s)ds + \int_a^t (s-a)f'(s)ds + \int_t^b (s-b)f'(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(s)ds + \left(\int_a^t (s-a)f'(s)ds\right) + \left(\int_t^b (s-b)f'(s)ds\right)\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(s)ds + \left((t-a)f(t) - \int_a^t f(s)ds\right) + \left(-(t-b)f(t) - \int_t^b f(s)ds\right)\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(s)ds + \left((t-a)f(t) - (t-b)f(t) - \int_a^b f(s)ds\right)\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[f(t)\left((t-a)-(t-b)\right)\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[f(t)(b-a)\right] \\
&= f(t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

□

On rappelle

$$\left(\mathbb{I}^{\alpha}_{a_+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt\ , x > a \tag{2.4}$$

et
$$\left(\mathbb{I}_{b_-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt\ , x < b. \tag{2.5}$$

2.2 Les principaux résultats

Théorème 2.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que : $f' \in L_p[a,b], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$.*
Alors l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} &\left|\Gamma(\alpha+1)\mathbb{J}_a^{\alpha} f(b) - (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b f(s)ds\right| \leq \\ &(b-a)^{\alpha+\frac{1}{q}} \times \left(\frac{1}{(\alpha q+1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}}\right) \|f'\|_p. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Démonstration. On a
$$\Gamma(\alpha)\mathbb{J}_a^{\alpha} f(b) = \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.7}$$

En remplaçant $f(t)$ par (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\mathbb{J}_a^{\alpha} f(b) &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds + \int_a^b p(t,s)f'(s)ds\right] dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left[\int_a^b f(s)ds + \int_a^t (s-a)f'(s)ds + \int_t^b (s-b)f'(s)ds\right] dt. \end{aligned} \tag{2.8}$$

On a :
$$I_1 = \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^b f(s)ds\right) dt = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha} \int_a^b f(s)ds, \tag{2.9}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^t (s-a) f'(s) ds \right) dt \\
&= \frac{(b-a)}{\alpha} \int_a^b (b-s)^{\alpha} f'(s) ds - \frac{1}{\alpha} \int_a^b (b-s)^{\alpha+1} f'(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_t^b (s-b) f'(s) ds \right) dt \\
&= \frac{-(b-a)^{\alpha}}{\alpha} \int_a^b (b-s) f'(s) ds + \frac{1}{\alpha} \int_a^b (b-s)^{\alpha+1} f'(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

On remplace I_1, I_2, I_3 par leurs expressions, on obtient

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1)\mathbb{J}_a^{\alpha} f(b) - (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b f(s) ds &= I_1 + I_2 + I_3 \\
&= \int_a^b (b-s)^{\alpha} f'(s) ds \\
&\quad - (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b (b-s) f'(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

On applique l'inégalité de Hôlder on trouve

$$
\begin{gathered}
\left| \Gamma(\alpha+1)\mathbb{J}_a^{\alpha} f(b) - (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b f(s) ds \right| \leq \\
\left(\int_a^b (b-s)^{\alpha q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \\
(b-a)^{\alpha-1} \left(\int_a^b (b-s)^{q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
(b-a)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(\alpha q+1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} \right) \|f'\|_p.
\end{gathered} \tag{2.13}
$$

□

Théorème 2.2. *Soient* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *différentiable sur* $[a,b]$ *et* $|f'(x)| \leqslant M$, *pour* *chaque $x \in [a,b]$ et $\alpha \geqslant 0$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$|I_a^\alpha f(b) - \frac{(b-a)^\alpha - 1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b f(s)ds| \leqslant \frac{M(\alpha+3)(b-a)^{\alpha+1}}{2\Gamma(\alpha+2)}. \tag{2.14}$$

Démonstration. D'aprés le théorème 2.1, on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{I}_a^\alpha f(b) - \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b f(s)ds\right| &= \\
\left|\int_a^b (b-s)^\alpha f'(s)ds - (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b (b-s) f'(s)ds\right| &\leq \\
\left|\int_a^b (b-s)^\alpha f'(s)ds\right| + \left|(b-a)^{\alpha-1} \int_a^b (b-s) f'(s)ds\right| &\leq \\
\int_a^b (b-s)^\alpha |f'(s)|\, ds + (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b (b-s) |f'(s)|\, ds &\leq \\
\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \int_a^b |f'(s)|\, ds + (b-a)^{\alpha-1} \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(s)|\, ds.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Puisque $|f'(s)| \leqslant M$, il suit que

$$\begin{aligned}
\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \int_a^b M ds + (b-a)^{\alpha-1} \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b M ds &\leq M \left(\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2}\right) \\
&\leq M(b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{2}\right) \\
&\leq M(b-a)^{\alpha+1} \left(\frac{2+\alpha+1}{2(\alpha+1)}\right) \\
&\leq \frac{M(b-a)^{\alpha+1}(\alpha+3)}{2\Gamma(\alpha+2)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

□

2.3 L'identité de Montgomery avec poids

Soit w une fonction mesurable positive dite fonction poids. On définit la fonction W par

$$W(t) = \int_0^x w(t)\,dt.$$

L'identité de Montgomery avec poids est donnée par

$$f(x) = \int_a^b W(s)f(t)dt + \int_a^b P_w(x,t)f'(t)dt. \tag{2.17}$$

avec le noyau avec poids $P_w(t,s)$ défini par

$$P_w(t,s) := \begin{cases} W(s) & a \leqslant s < t \\ W(s) - 1 & t \leqslant s \leqslant b. \end{cases} \tag{2.18}$$

2.4 Les principaux résultats

Théorème 2.3. *Soit $w : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ une fonction mesurable positive telle que : $\int_a^b W(t)dt = 1$ et posons $W(t) = \int_a^t w(s)ds$ pour $a \leqslant t \leqslant b, W(t) = 0$ pour $t < a, W(t) = 1$ pour $t \geqslant b$.*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L_p[a,b]$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, p > 1$ et $\alpha \geqslant 0$, alors on a l'inégalité :

$$\begin{gathered}\left|\Gamma(\alpha+1)\mathbb{I}_a^\alpha f(b) - (b-a)^\alpha \int_a^b W(s)f(s)ds\right| \leq \\ \|f'\|_p (b-a)^\alpha \times \left[\left(\int_a^b |W(s)-1|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{b-a}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{gathered} \tag{2.19}$$

Démonstration. On a

$$f(x) = \int_a^b W(s)f(t)dt + \int_a^b P_w(x,t)f'(t)dt. \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)J_a^\alpha f(b) &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\
&= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \times \left[\int_a^b W(s)f(s)ds + \int_a^b P_w(t,s)f'(s)ds\right] dt \\
&= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^b W(s)f(s)ds\right) dt \\
&+ \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^b P_w(t,s)f'(s)ds\right) dt
\end{aligned} \tag{2.21}$$

et on a

$$P_w(t,s) := \begin{cases} W(s) & a \leqslant s < t \\ W(s) - 1 & t \leqslant s \leqslant b \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)J_a^\alpha f(b) &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^b W(s)f(s)ds\right) dt \\
&+ \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^t (W(s))\, f'(s)ds\right) dt \\
&+ \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_t^b (W(s)-1)\, f'(s)ds\right) dt
\end{aligned}$$

On pose

$$I_1 = \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \int_a^b (W(s)f(s)ds)\, dt = \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \int_a^b W(s)f(s)ds$$

$$I_2 = \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^t f(s)ds\right) dt = \frac{1}{\alpha} \int_a^b (b-s)^\alpha W(s)f'(s)ds$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \left(\int_t^b (W(s)-1)\, f'(s)ds\right) dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[(b-a)^\alpha \int_a^b (W(s)-1)\, f'(s)ds + \int_a^b (b-s)^\alpha f'(s)ds\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)J_a^\alpha f(b)-(b-a)^\alpha\int_a^b W(s)f(s)ds &= (b-a)^\alpha\int_a^b \left(W(s)-1\right)f'(s)ds\\ &\quad+\int_a^b (b-s)^\alpha f'(s)ds.\end{aligned} \tag{2.22}$$

On applique l'inégalité de Hôlder, on trouve

$$\begin{aligned}&\left|\Gamma(\alpha)I_a^\alpha f(b)-(b-a)^\alpha\int_a^b W(s)f(s)ds\right|\\ &\quad\leq\left|(b-a)^\alpha\int_a^b\left(W(s)-1\right)f'(s)ds\right|+\left|\int_a^b (b-s)^\alpha f'(s)ds\right|\\ &\quad\leq\left(\int_a^b\left|f'(s)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left|W(s)-1\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_a^b\left|f'(s)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left|b-s\right|^{\alpha q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\quad\leq(b-a)^\alpha\left(\int_a^b\left|f'(s)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left|W(s)-1\right|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(b-a)^{\alpha q+1}}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\quad\leq\|f'\|_p(b-a)^\alpha\times\left[\left(\int_a^b\left|W(s)-1\right|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{b-a}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.1. *Si on prend :* $w(t)=\frac{1}{b-a}$ *le théorème 2.3 se réduit au théorème 2.1.*

Chapitre 3

Généralisation des résultats

3.1 Opérateur généralizé de R-L

On va étudier les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville généralisées via des fonctions .

Définition 3.1. *Soientt $\alpha > 0$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et g une fonction croissante sur $[a, b]$ ayant une dérivée continue g' sur $[a, b]$. Les intégrales fractionnaires à gauche et adroite d'ordre α d'une fonction f par rapport à une autre fonction g sur $[a, b]$ sont définies par*

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{g,a_+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (g(x) - g(t))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, x > a \tag{3.1}$$

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{g,b_-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (g(t) - g(x))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, x < b \tag{3.2}$$

On va généralizer les résultats cités dans le chapitre précédent(deux).
En considérant un opérateur génŕalizé de R-L
$\mathbb{I}^{\alpha}_{a,g}, \mathbb{I}^{\alpha,k}_{a,g}$ (adroite)
$\mathbb{I}^{\alpha}_{b,g}, \mathbb{I}^{\alpha,k}_{b,g}$ (à gauche)

Définition 3.2. *Soient $\alpha > 0, k > 0, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et g une fonction croissante sur $[a,b]$ ayant une dérivée continue g' sur $[a,b]$. Les k-intégrales fractionnaires à gauche et adroite d'ordre α d'une fonction f par rapport a une autre fonction g sur $[a,b]$ sont définies par*

$$\mathbb{I}_{g,a_+}^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{{}_k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (g(x) - g(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} g'(t) f(t) dt \tag{3.3}$$

$$\mathbb{I}_{g,b_-}^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{{}_k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (g(t) - g(x))^{\frac{\alpha}{k}-1} g'(t) f(t) dt \tag{3.4}$$

3.2 Les principaux résultats

Théorème 3.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que : $f' \in L_p[a,b], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.*
Alors l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} &\left| \Gamma(\alpha+1)_a \mathbb{J}_{b,g}^{\alpha} f(b) - (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b f(s) ds \right| \leq \\ &(b-a)^{\alpha+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(\alpha q+1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} \right) \|f'\|_p. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. *Pour l'opérateur k-Riemann-Liouville,on obtient une inégalité analogue*

$$\begin{aligned} &\left| \Gamma(\alpha+k)_a \mathbb{J}_{b,g}^{\frac{\alpha}{k}} f(b) - (b-a)^{\frac{\alpha}{k}-1} \int_a^b f(s) ds \right| \leq \\ &(b-a)^{\frac{\alpha}{k}+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(\frac{\alpha}{k} q+1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} \right) \|f'\|_p. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Démonstration. On a

$$\Gamma(\alpha)\mathbb{J}^{\alpha}_{a,g}f(b) = \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt. \tag{3.7}$$

En remplaçant $f(t)$ par (1.8), on obtient $\forall t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\mathbb{J}^{\alpha}_{a,g}f(b) &= \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t) \times \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds + \int_a^b p(t,s)f'(s)ds\right] dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t) \\
&\quad \times \left[\int_a^b f(s)ds + \int_a^t (s-a)f'(s)ds + \int_t^b (s-b)f'(s)ds\right] dt \\
&= \frac{(g(b)-g(a))^{\alpha}}{\alpha}\int_a^b f(s)ds,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t)\left(\int_a^t (s-a)f'(s)ds\right) dt \\
&= \frac{(g(b)-g(a))}{\alpha}\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha}f'(s)ds - \frac{1}{\alpha}\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha+1}f'(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t) \times \left(\int_t^b (s-b)f'(s)ds\right) dt \\
&= \frac{-(b-a)^{\alpha}}{\alpha}\int_a^b (g(b)-g(s))f'(s)ds + \frac{1}{\alpha}\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha+1}f'(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

On remplace I_1, I_2, I_3 par leurs expressions,on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1)\mathbb{J}^{\alpha}_{a,g}f(b)-(b-a)^{\alpha-1}\int_a^b f(s)ds &= I_1+I_2+I_3\\ &= \int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha} f'(s)ds\\ &- (g(b)-g(a))^{\alpha-1}\int_a^b (g(b)-g(s))f'(s)ds.\end{aligned} \tag{3.11}$$

On applique l'inégalité de Hölder ,on trouve

$$\begin{gathered}\left|\Gamma(\alpha+1)\mathbb{J}^{\alpha}_{a,g}f(b)-(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\int_a^b f(s)ds\right| \leq\\ \left(\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha q}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f'(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}+\\ (g(b)-g(a))^{\alpha-1}\left(\int_a^b (g(b)-g(s))^{q}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f'(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq\\ (g(b)-g(a))^{\alpha+\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{(\alpha q+1)^{\frac{1}{q}}}+\frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)\|f'\|_p.\end{gathered} \tag{3.12}$$

□

Théorème 3.2. *Soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ différentiable sur $[a,b]$ et $|f'(x)|\leq M$, pour chaque $x\in[a,b]$ et $\alpha\geq 0$, et g une fonction intégrable,croissante sur $[a,b]$ ayant une dérivée continue g' sur $[a,b]$. alors, on a l'inégalité suivante*

$$\left|I^{\alpha}_{a,g}f(b)-\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha}-1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b f(s)ds\right| \leq \frac{M(\alpha+3)(g(b)-g(a))^{\alpha+1}}{2\Gamma(\alpha+2)} \tag{3.13}$$

Démonstration. D'aprés le **théorème** 1.1on (1.12), on a

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{I}^{\alpha}_{a,g}f(b)-\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha-1}}{\gamma(\alpha+1)}\int_a^b f(s)ds\right|\\
&\quad=\left|\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha}f'(s)ds-(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\int_a^b (g(b)-g(s))f'(s)ds\right|\\
&\quad\leq\left|\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha}f'(s)ds\right|+\left|(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\int_a^b (g(b)-g(s))f'(s)ds\right|\\
&\quad\leq\int_a^b (g(b)-g(s))^{\alpha}\left|f'(s)\right|ds+(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\int_a^b (g(b)-g(s))\left|f'(s)\right|ds\\
&\quad\leq\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\int_a^b \left|f'(s)\right|ds+(b-a)^{\alpha-1}\frac{(g(b)-g(a))^{2}}{2}\int_a^b \left|f'(s)\right|ds.
\end{aligned}$$

Puisque $|f'(s)|\leqslant M$, il suit que

$$\begin{aligned}
\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\int_a^b Mds+(b-a)^{\alpha-1}\frac{(g(b)-g(a))^{2}}{2}\int_a^b Mds&\\
\leq\left(\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha+1}}{2}\right)&\\
\leq M(g(b)-g(a))^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)&\qquad(3.14)\\
\leq M(g(b)-g(a))^{\alpha+1}\left(\frac{2+\alpha+1}{2(\alpha+1)}\right)&\\
\leq\frac{M(g(b)-g(a))^{\alpha+1}(\alpha+3)}{2\gamma(\alpha+2)}.&
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.2. *Si on prend $g(x)=x$ le théorème3.1 se rd́uit au théorème 2.1.*

3.3 Inégalités intégrales avec poids

3.3.1 Introduction

Soit w une fonction mesurable positive dite fonction poids on définit la fonction W par

$$W(t)=\int_0^x w(t)\,dt.$$

On rappelle l'identité de Montgomery avec poids donnée par

$$f(x)=\int_a^b W(s)f(t)dt+\int_a^b P_w(x,t)f'(t)dt. \tag{3.15}$$

avec le noyau avec poids $P_w(t,s)$ défini par

$$P_w(t,s):=\begin{cases} W(s) & a\leqslant s<t \\ W(s)-1 & t\leqslant s\leqslant b. \end{cases} \tag{3.16}$$

3.3.2 Les principaux résultats

Théorème 3.3. *Soit $w:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ une fonction mesurable positive telle que $\int_a^b W(t)dt=1$ et posons $W(t)=\int_a^t w(s)ds$ pour $a\leqslant t\leqslant b, W(t)=0$ pour $t<a, W(t)=1$ pour $t\geqslant b$.*
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L_p[a,b]$ avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1, p>1$ et $\alpha\geqslant 0$, et g une fonction croissante sur $[a,b]$ ayant une dérivée continue g' sur $[a,b]$. alors ,on a l'inégalité

$$\begin{aligned}&\left|\Gamma(\alpha+1)\mathbb{I}^{\alpha}_{a,g}f(b)-(g(b)-g(a))^{\alpha}\int_a^b W(s)f(s)ds\right| \\ &\quad\leq \|f'\|_p(g(b)-g(a))^{\alpha}\times\left[\left(\int_a^b |W(s)-1|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{g(b)-g(a)}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned} \tag{3.17}$$

Démonstration. On a

$$f(x) = \int_a^b W(s)f(t)dt + \int_a^b P_w(x,t)f'(t)dt. \tag{3.18}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)J^{\alpha}_{a,g}f(b) &= \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t)f(t)dt \\
&= \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1} \times \left[\int_a^b W(s)f(s)ds + \int_a^b P_w(t,s)f'(s)ds\right] dt \\
&= \int_a^b (g(b)-g(t)^{\alpha-1}g'(t)\left(\int_a^b W(s)f'(s)ds\right) dt \\
&+ \int_a^b (g(b)-g(t))^{\alpha-1}g'(t)\left(\int_a^b P_w(t,s)f'(s)ds\right) dt
\end{aligned} \tag{3.19}$$

et on a

$$P_w(t,s) := \begin{cases} W(s) & a \leqslant s < t \\ W(s)-1 & t \leqslant s \leqslant b \end{cases} \tag{3.20}$$

On applique l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\Gamma(\alpha)I^{\alpha}_{a,g}f(b) - (g(b)-g(a))^{\alpha}g'(t)\int_a^b W(s)f(s)ds\right| \\
&\quad \leq \left|(g(b)-g(a))^{\alpha}\int_a^b (W(s)-1)\,f'(s)ds\right| + \left|\int_a^b (g(b)-g(s)^{\alpha}f'(s)ds\right| \\
&\quad \leq \left(\int_a^b |f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |W(s)-1|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b |f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |b-s|^{\alpha q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leq (g(b)-g(a))^{\alpha}\left(\int_a^b |f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b |W(s)-1|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha q+1}}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leq \|f'\|_p(g(b)-g(a))^{\alpha} \times \left[\left(\int_a^b |W(s)-1|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{g(b)-g(a)}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

□

Remarque 3.3. *Si* $g(x) = x$ *et* $w(t) = \frac{1}{b-a}$ *le théorème 3.3 se réduit au théorème 2.3.*

3.4 Remarques finales

Les résultats établis dans cet chapitre apportent quelques contributions dans le domaine du calcul fractionnaire et des inégalités intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville. On peut établir d'autres inégalités intégrales en utilisant d'autres opérateurs intégraux fractionnaires.

Bibliographie

[1] A.A.Aljinović, Montgomery identity and Ostrowski type inequalities for Riemann-Liouville fractional integral,J.Math,Article ID 503195555(2014)1-6.

[2] Gorenflo.R and Mainardi.F,Essentiels of fractional calculs,28 janvier 2000.

[3] Int.J.Open Problems Complex Analysis,Vol.6.No.2,July 2014 ISSN 2074-2827 ;Copyright,ICSRS Publication.,2014.

[4] P.Gao,Some monotonicity poperties of gamma and k-gamma functions,ISRN Mathematical Analysis 2011(2011),Article ID 375715,15 pages,doi :10.5402/2011/375715.

[5] W.Rudin,Functional analysis.9th ed..Tata MeGraw-Hill,New Delhi 1985.