REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Les Inégalités de Hardy pour les fonctions monotones et quasimonotones

Présenté par

✓**Abdellaoui Ahlem**

✓**Argab Samira**

✓**Bessam Samira**

✓**Nafa Zineb**

soutenue devant le Jury composé de

***Mr.Sofrani Mohamed**	**Président**
***Mr.Halim Benali**	**Examinateur**
***Mr.Senouci Abdelkader**	**Encadreur**

Promotion : 2019 \ 2020

Dédicaces

je dédie ce modeste travail à :

***Mes** chères parents*

***Mes** chères soeures et frères*

Toute la famille Abdellaoui et toute les amis.

A.AHLEM.

je dédie ce modeste travail à :

***Mon** père **ALLAH** yarhmo*

***Ma** chère mère*

***Mon** frère EDDINE.*

***Ma** chére tante KHAIRA.*

et toute les amis.

A.SAMIRA

je dédie ce modeste travail à :

***Mes** chères parents*

***Mes** chères soeures et frères*

*Toute les amis **Ma** familles .*

B.SAMIRA

je dédie ce modeste travail à :

***Mon** père **ALLAH** yarhmo*

***Ma** chère Mère (Aicha) q'ui m'ait permis de réussir dans mes études.*

***Mes** chères soeures et frères*

Les fils de mon frère (SAIFOU,LOUAY)

Les fils de mes soeures (MOUAD,YASSINE)

Toute la famille Nafa et toute les amis.

N.ZINEB.

Remerciements

Nous remercions d'abord ***Dieu****,*
qui nous a donné la force et la patience pour terminer ce travail.
Nous tenons à exprimer notre gratitude à
notre directeur de la mémoire
Mr. Senouci Abdelkader*,*
et nous le remercions de nous avoir supervisés, dirigés, aidés et conseillés.
Nous tenons à remercier les jurys :
Mr.Sofrani Mohamed et Mr.Halim Benali*.*
Nous remercions sincèrement tous les professeurs,
conférenciers et toutes les personnes
qui nous ont fait part de leurs conseils et critiques lors de nos recherches.

Table des matières

Introduction

En 1920 Hardy a établi et prouvé la célèbre inégalité portant son nom, cette inégalité intégrale a connu beaucoup de développements, d'où l'apparition de plusieurs versions de l'inégalité de Hardy où inégalités de type de Hardy. Ces inégalités sont appliquées dans plusieurs domaines de mathématiques et en particulier dans ceux des équations différentielles (ordinaires et partielles), dans les espaces fonctionnels et autres.

Dans 1^{er} chapitre on expose certaines inégalités intégrales comme celle de Hölder, de Minkowski et puis on donne quelques notions sur les distributions et les réarrangements qui sont nécessaires dans les chapitres qui suivent.

Au $2^{éme}$ chapitre, on présente quelques inégalités classiques de Hardy avec un paramètre d'intégrabilité puis pour deux paramètres d'intégrabilité .Sont aussi établies des inégalités intégrales pondérées de Hardy.

Le dernier chapitre comprend l'étude de deux travaux scientifiques (publications).Le premier travail concerne les inégalités intégrales ou type de Hardy appliquées aux fonctions monotones et le deuxième est lié à l'établissement de certaines inégalités intégrales de Hardy et leurs inverses pour les fonctions dites fonctions quasimonotones

Chapitre 1

Concepts Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et résultats dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants.
On commence à présenter quelques théorèmes et inégalités fondamentaux .On donne la définition des espaces de Lebesgue et les espaces de Lebesgue pondérés . Les espaces pondérés de Lebesgue sont très importants car ils seront utilisés en permanence. Les espaces de Lebesgue apparaissent au chapitre 2. Ensuite, on présente quelques principes de dualité qui seront utiles au chapitre 3 et l'inégalité intégrale de Minkowski. Enfin, on définit les concepts de fonction de distribution et de réarrangement décroissant. On donne quelques notions de base et on définit à la fois les espaces de Lorentz , qui seront utilisés dans le chapitre 3.

1.1 Rappels

On cite certaines inégalités et théorèmes nécessaires qui sont utilisées dans ce travail.On considère $X \subset \mathbb{R}^n$, (X, T, μ) *est un espace mesuré.*

***Théorème* 1.1.1.** *(La convergence monotone (Beppo-Levi))*

Soit $f_n : X \longrightarrow [0, \infty)$ est une suite de fonctions croissantes mesurables positives, et soit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ la limite ponctuelle de f_n. Alors f est mesurable et

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Preuve . *voir ([9],p16)*

***Théorème* 1.1.2.** *(Fatou)*

Soient $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k non- négatives et mesurables sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et presque par tout sur Ω existe la limite finie ou infinie $\lim\limits_{k\mapsto\infty} f_k(x)$. Alors $f(x) = \lim\limits_{k\mapsto\infty} f_k(x)$ est mesurable et de plus

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx$$

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Preuve . *voir ([9],p)*

***Théorème* 1.1.3.** *(La convergence dominée)*

Soit (X, T, μ) un espace mesuré, et $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est une suite de fonctions mesurables. On suppose que

1. *$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in X.$*
2. *il existe $g : X \longrightarrow [0, \infty)$ intégrable telle que $\left|f_n(x)\right| \leq g(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in X.$*

Alors : $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, et on a :

a. $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \left|f_n - f\right| d\mu = 0.$

Preuve . *voir ([9],p24)*

***Théorème* 1.1.4.** *(Fubini)*

Soit Ω, G *des ensembles mesurables dans* $\mathbb{R}^n$ *et une fonction* f *intégrable sur* $\Omega \times G$. *alors pour presque tout* $x \in \Omega$. *Les fonctions* $f(x)$ *sont intégrables sur* G *pour presque tout* $y \in G$ *les fonctions* $f(x,y)$ *sont intégrables sur* Ω , *et on a*

$$\int_{\Omega\times G} f(x,y)dxdy = \int_G \left(\int_\Omega f(x,y)dx\right)dy = \int_\Omega \left(\int_G f(x,y)dy\right)dx.$$

***Preuve* .** *voir ([9],p60)*

Quelques inégalités fondamentales :

L'inégalité de Young :

Soient $a,b \geq 0$ *et* $p,p' > 1$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *(*p *,* p' *deux nombres sont des conjugués), alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} .$$

***Preuve* .** *voir ([9],p)*

L'inégalité de Hölder :

Soit $f \in L_p(X), g \in L_{p'}(X)$ *et* $p,p' \geq 1$ *sont des conjugués* $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ *, alors*
Le cas $0 \leq p \leq \infty$

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^{p'} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}} .$$

On note aussi

$$||fg||_{L_1(X)} \leq ||f||_{L_p(X)}||g||_{L_{p'}(X)}.$$

Le cas $0 < p < 1$ *et avec* $|X| > 0$, *et* $\forall x \in X, g(x) \neq 0$

$$\left\|fg\right\|_{L_1} \geq \left\|f\right\|_{L_p(X)} ||g||_{L_{p'}(X)}.$$

***Preuve* .** *voir ([9],p80)*

1.2 Les espaces de Lebesgue

On commence par donner la définition de l'espace de Lebesgue où $X \subset \mathbb{R}^n$ et (X, T, μ) est un espace mesuré .

Définition 1.2.1. *(L'espace de Lebesgue $L_p(X)$)*

Soient (X,T,μ) un espace mesuré et $0 < p \leq \infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L_p(X)$ comme un ensemble des fonctions mesurables sur X telles que

$$\boxed{\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,}$$

où $0 < p < \infty$,

$$\boxed{\|f\|_\infty := ess \sup_X f = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) > a\}) = 0\} < \infty.}$$

Définition 1.2.2. *(Fonction de poids)*

Soit w est une fonction de poids mesurable et non-négative ,

Définition 1.2.3. *(L'espace de Lebesgue pondéré)*

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, X ensemble mesurable, w une fonction de poids, on dit que $f \in L_{p,w}(X)$ si

$$\|f\|_{L_{p,w}(X)} = \left(\int_X |f|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

pour $0 < p < \infty$,

$$\|f\|_{L_{\infty,w}(X)} = ess \sup_X |f(x)w(x)| < \infty,$$

pour $p = \infty$.

Remarque .

On travaille généralement avec l'intervalle $(0, \infty)$, avec l'espace de Lebesgue pondéré qui est noté $L_{p,w}(X)$. On définit enfin les espace de Lebesgue de type faible .

1.3 *Principes de dualité et l'inégalité intégrale de Minkowski*

On présente ce principe de dualité pour les espaces $L_p(X)$.

Proposition 1.3.1.

Soient f et g appartenant respectivement à $L_p(X)$ et $L_{p'}(X)$. La fonction v est mesurable et positive sur $(0,\infty)$, telle que $f\neq 0$. Alors

$$\sup_{f\neq 0}\frac{\left|\int_0^\infty f(x)g(x)dx\right|}{\left(\int_0^\infty \left|f(x)\right|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}=\left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'}v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Preuve . *D'après l'inégalité de Hölder, on a :*

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty f(x)g(x)dx\right| &\leq \int_0^\infty \left|f(x)\right| v(x)^{\frac{1}{p}}|g(x)|v(x)^{-\frac{1}{p}}dx\\ &\leq \left(\int_0^\infty \left|f(x)\right|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'}v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (1.3.1)\end{aligned}$$

En multipliant (1.3.1) fois $\frac{1}{\left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ *, on obtient*

$$\frac{\left|\int_0^\infty f(x)g(x)dx\right|}{\left(\int_0^\infty \left|f(x)\right|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}\leq\left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'}v(x)^{1-p'}dx\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Alors

$$\sup_{f\neq 0}\frac{\left|\int_0^\infty f(x)g(x)dx\right|}{\left(\int_0^\infty \left|f(x)\right|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}=\left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'}v(x)^{1-p'}dx\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

□

Un autre principe de dualité , qui peut être prouvé.

Proposition 1.3.2.

Soient $f\in L_p$, $1<p<\infty$, alors

$$\|f\|_p=\sup_{g\in L_{p'},g\neq 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)g(x)\right|dx}{\|g\|_{p'}}.$$

***Théorème* 1.3.1.** *(Inégalité inverse de Hölder)*

soient $0 < p \leq \infty, E \subset \mathbb{R}^n$, E un ensemble mesurable et une fonction f mesurable sur E.

(i) Si $1 \leq p \leq \infty$ et pour une certaine constante $M \geq 0, \forall g \in L'_p(E)$, $f \cdot g$ intégrable sur E avec

$$\left|\int_E fg dx\right| \leq M \left\|g\right\|_{L'_p} \tag{1.3.2}$$

alors

$$\left\|f\right\|_p \leq M. \tag{1.3.3}$$

(ii) Si $0 < p < 1, \mu(E) > 0$ et pour un certaine constante $M > 0$, $\forall g \in L'_p(E)$, $g \neq 0$ sur E, avec

$$\left|\int_E fg dx\right| \geq M \left\|g\right\|_{L'_p} \tag{1.3.4}$$

alors

$$\left\|f\right\|_p \geq M. \tag{1.3.5}$$

Conséquence 1 :

$(M = 0)$ Si la fonction f et mesurable sur E et $\forall g \in L_\infty(E)$ $\int_E fg dx = 0$, alors $f \sim 0$ sur E.

***Proposition* 1.3.3.** *[9]*

Conséquence 2 :

Si $1 \leq p \leq \infty$, et f est une fonction mesurable sur E alors

$$\left\|f\right\|_{p'} = \sup_{\left\|g\right\|_{p'}=1} \left|\int_E fg\, dx\right|.$$

Preuve . *On désigne par* $M = \sup_{\left\|g\right\|_{p'}=1} \left|\int_E fg\, dx\right|$ *, on considère deux cas*

<u>1^er^ Cas</u> $\left\|f\right\|_p < \infty$*, on a* $\left\|g\right\|_{p'} = 1$,

d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_E fg\, dx \leq \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_{p'} = \left\|f\right\|_p$$

alors

$$M \leq \left\|f\right\|_p .$$

Soit

$$M < \left\|f\right\|_p .$$

Dons ce cas on utilise (1.3.2) (Théorème 1.3.1)

Si $\left\|g\right\|_{p'} \neq 0$,*on pose* $G = \frac{g}{\|g\|_{p'}}$, *d'après (1.3.2) (Théorème 1.3.1) on aura*

$$\int_E fg\, dx = \left\|g\right\|_{p'} \left|\int_E fG\, dx\right| \leq M \left\|G\right\|_{p'} \left\|g\right\|_{p'}$$

comme $\|G\|_{p'} = 1$, *d'où*

$$\left|\int_E fg\, dx\right| \leq M \left\|g\right\|_{p'},$$

et d'après(1.3.2) (Théorème 1.3.1), on conclut que $\left\|f\right\|_p \leq M$ *ce qui est impossible car on a supposé que* $M < \left\|f\right\|_p$, *d'où*

$$\left\|f\right\|_p = M.$$

<u>*2*^{éme} *Cas*</u> $\left\|f\right\|_p = \infty$

(a). Si $M = \infty$ *égalité évidente*

(b). Si $M < \infty$, *ou raisonne d'une manière analogue au* 1^{er} *cas.*

□

Comme conséquence de ce dernier principe de dualité (1.3.2) ,on peut en déduire l'inégalité intégrale de Minkowski .

Théorème 1.3.2. *(L'inégalité intégrale de Minkowski)*

pour $1 \leq p \leq \infty$,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} F(\cdot, y)\, dy\right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|F(\cdot, y)\|_p\, dy.$$

Preuve . *Le cas* $p = 1$: *on applique le Théorème de Fubini , on a*

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dy\right\|_1 = \int_X \left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dy\right| dx &\leq \int_X \int_{\mathbb{R}^n} \left|F(x,y)\right| dydx, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_X \left|F(x,y)\right| dxdy, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\|F(x,y)\right\|_1 dy.
\end{aligned}$$

Le cas $p = \infty$ *,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *, on a*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| F(x,y) \right| dy.$$

$$\begin{aligned} ess \sup_{x\in\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) dy \right| &\leq ess \sup_{x\in\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \left| F(x,y) \right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} ess \sup_{x\in\Omega} \left| F(x,y) \right| dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) dy \right\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\| F(x,y) \right\|_\infty dy.$$

Si $1 < p < \infty$ *, on applique la proposition* (1.3.2) *et le Théorème de Fubini, d'où*

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} F(\cdot,y)\, dy \right\|_p &= \sup_{g\in L_{p'}, g\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) dy\ g(x) \right| dx}{\|g\|_{p'}}. \\ &\leq \sup_{g\in L_{p'}, g\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| F(x,y) g(x) \right| dx dy}{\|g\|_{p'}}. \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{g\in L_{p'}, g\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left| F(x,y) g(x) \right| dx}{\|g\|_{p'}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \|F(\cdot,y)\|_p\, dy. \end{aligned}$$

□

1.4 *Fonction de distribution , réarrangement décroissante et espace de Lorentz.*

On présente la notion de la fonction de distribution . Dans cette section , on considère un espace mesuré (X, T, μ) *.*

Définition 1.4.1.

Soit f *une fonction mesurable ,on définit la fonction de distribution comme suit*

$$\boxed{\lambda_f(t) = \mu \left\{ x \in X : \left| f(x) \right| > t \right\}}$$

pour tout $t \geq 0$ *,* μ *désigne la mesure de Lebesgue .*

Quelques propriété des fonctions de distribution .

***Proposition* 1.4.1.**

Les propriétés suivantes sont vérifiés :

(i) λ_f est décroissante et continue à droite.

(ii) Si $|g| \leq |f|$ pp, alors $\lambda_g \leq \lambda_f$.

(iii) $\forall t_1, t_2 \geq 0, \;\; \lambda_{f+g}(t_1 + t_2) \leq \lambda_f(t_1) + \lambda_g(t_2)$.

(iv) $\forall t_1, t_2 \geq 0, \;\; \lambda_{f \cdot g}(t_1 \cdot t_2) \leq \lambda_f(t_1) + \lambda_g(t_2)$.

(v) Si $|f| \leq \liminf\limits_{n \to \infty} |f_n|$, alors $\lambda_f \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \lambda_{f_n}$.

(vi) Si $|f_n| \longrightarrow |f|$, alors $\lambda_{f_n} \longrightarrow \lambda_f$.

Preuve . (i) *Soit* $0 \leq t_1 < t_2$, *on a :* $|f(x)| > t_2 > t_1$, *alors* $|f(x)| > t_1, \forall x \in X$, *d'ou*

$$\left\{x \in X : |f(x)| > t_2\right\} \subset \left\{x \in X : |f(x)| > t_1\right\},$$

d'après la monotonie de la mesure, on déduit

$$\mu\left\{x \in X : |f(x)| > t_2\right\} \leq \mu\left\{x \in X : |f(x)| > t_1\right\},$$

donc

$$\lambda_f(t_2) \leq \lambda_f(t_1),$$

pour prouve λ_f *et continue à la droit, on pose*

$$E_t = \left\{x \in X : |f(x)| > t\right\},$$

et fixe $t_0 \geq 0$ *,Les ensembles* E_t *augmentent à mesure que t diminue, et*

$$E_{t_0} = \bigcup_{t > t_0} E_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{t_0 + \frac{1}{n}}.$$

Par conséquent, par la continuité de la mesure,

$$\lambda_f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E_{t_0 + \frac{1}{n}}\right) \longrightarrow \mu\left(E_{t_0}\right) = \lambda_f(t_0),$$

comme $(n \longrightarrow \infty)$, *donc* λ_f *est continue à la droite.*
(ii) *Soit* $E_1 = \{x \in X : |f(x)| > t\}$ *et* $E_2 = \{x \in X : |g(x)| > t\}$,

$\lambda_f(t) = \mu(E_1)$ *et* $\lambda_g(t) = \mu(E_2)$ *, on a :* $|g(x)| \leq |f(x)|$ *d'où* $|g(x)| > t \Rightarrow |f(x)| > t$*,*

donc, si $x \in E_2 \Rightarrow x \in E_1$ *alors* $E_2 \subset E_1 \Rightarrow \mu\{E_2\} \leq \mu\{E_1\}$*, d'où* $\lambda_g \leq \lambda_f$*.*

(*iii*) $\forall t_1, t_2 \geq 0,\ t = t_1 + t_2$ *, on a*

$$\begin{aligned}
\lambda_{f+g}(t) &= \mu\{x \in X : |f(x) + g(x)| > t\} \\
&= \mu\{x \in X : |f(x) + g(x)| > t_1 + t_2\} \\
&\leq \mu\{x \in X : |f(x)| + |g(x)| > t_1 + t_2\} \\
&= \mu\{\{x \in X : |f(x)| > t_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| > t_2\}\} \\
&\leq \mu\{x \in X : |f(x)| > t_1\} + \mu\{x \in X : |g(x)| > t_2\},
\end{aligned}$$

donc

$$\lambda_{f+g}(t) \leq \lambda_f(t_1) + \lambda_g(t_2).$$

(*iv*) *Puisque*

$$\begin{aligned}
\mu\{x \in X : |f(x)g(x)| > t_1 + t_2\} &= \mu\{x \in X : |f(x)||g(x)| > t_1 + t_2\} \\
&= \mu\{\{x \in X : |f(x)| > t_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| > t_2\}\},
\end{aligned}$$

alors

$$\mu\{x \in X : |f(x)g(x)| > t_1 + t_2\} \leq \mu\{x \in X : |f(x)| > t_1\} + \mu\{x \in X : |g(x)| > t_2\},$$

où est

$$\lambda_{fg}(t) \leq \lambda_f(t_1) + \lambda_g(t_2).$$

(*v*) *On fixes* $t > 0$ *et on définit les ensembles*

$$E := \left\{x \in X : \left|f(x)\right| > t\right\} \qquad et \qquad E_n := \left\{x \in X : \left|f_n(x)\right| > t\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

On note $\mu(E) = \lambda_f(t)$ *et* $\mu(E_n) = \lambda_{f_n}(t)$*. Maintenant, par hypothèse*

$$\left|f\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \left|f_n\right| = \sup_m \inf_{n>m} \mu(E_n),$$

on déduit qu'il ya un $m \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n > m$*, on a* $\left|f(x)\right| \leq \left|f_n(x)\right|$ *et* $\forall x \in X$ *,* $|f(x)| > t \Rightarrow |f_n(x)| > t$ *, par conséquent*

$$E \subseteq \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n>m} E_n,$$

on remarque aussi que

$$\mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n>m} \mu(E_n) =: \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n), \tag{1.4.1}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.*Enfin , Lorsque* $\bigcap_{n>m} E_n$ *augmente avec* m *,on conclue par le théorème de la convergence monotone et* (1.4.1) *que*

$$\begin{aligned} \mu(E) &\leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n>m} E_n\right) = \int_{\left\{\overset{\infty}{\underset{m=1}{\cup}}\,\underset{n>m}{\cap} E_n\right\}} dx \\ &= \int_X \chi_{\cup_{m=1}^{\infty}\cap_{n>m}E_n}(x)\,dx = \int_X \lim_{m\to\infty} \chi_{\cap_{n>m}E_n}(x)\,dx \\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_X \chi_{\cap_{n>m}E_n}(x)\,dx = \lim_{m\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

(*vi*)*Si* $|f_n| \longrightarrow |f|$ *, alors* $E_1 \subset E_2 \subset E_3 ...,$ *et*

$$E = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n,$$

on a

$$\lambda_f(t) = \mu(E) = \mu(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_{f_n}(t).$$

□

***Exemple* 1.** *Soit* f *une fonction simple positive telle que*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

oú $a_1 > ... > a_n > 0$ *et les ensembles* E_j *sont disjoints deux à deux non vides , et de mesure finie.*

Alors , on a

$$\lambda_f(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(x),$$

oú

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_j).$$

***Exemple* 2.** *Soit* $X = [0, \infty)$ *et* $f(x) = \frac{x}{1-x}\chi_{[0,1)}(x)$ *une fonction mesurable telle que*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

après un certain calcul, on obtient

$$\begin{aligned} \mu\left\{x \in [0,1[: \left|f(x)\right| > t\right\} &= \mu\left\{x \in [0,1[: \frac{x}{1-x} > t\right\} \\ &= \mu\left\{x \in [0,1[: -1 + \frac{1}{1-x} > t\right\} \\ &= \mu\left\{x \in [0,1[: x > 1 - \frac{1}{t+1}\right\} \\ &= \frac{1}{t+1} \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_f(t) = \frac{1}{t+1} \quad \forall t \geq 0.$$

La fonction f est continue sur le $[0,1)$, et la fonction $\lambda_f(t)$ est continue et décroissante sur $[0, \infty)$, voir la figure suivante :

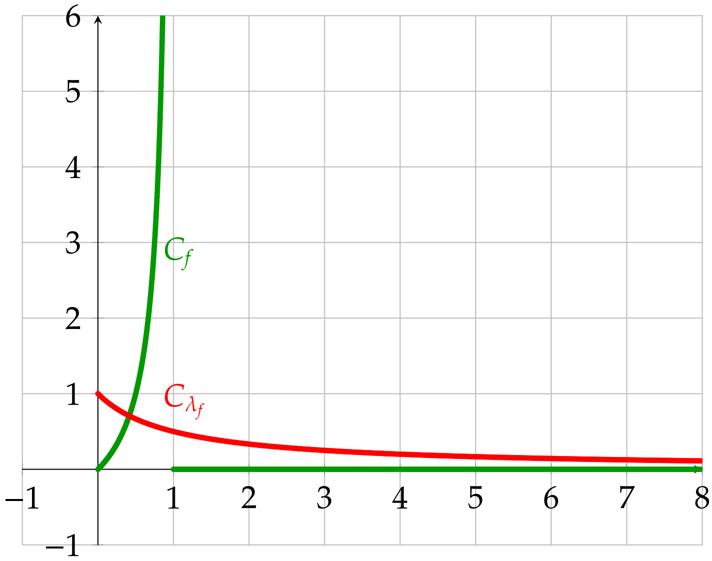

Figure 1.1 – Graphe de f et λ_f

Un concept lié à la fonction de distribution est la fonction de réarrangement décroissant.

Définition 1.4.2.

Soit f une fonction mesurable ,on définit sa fonction de réarrangement décroissante par

$$\boxed{f^{*}(t) = \inf\left\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\right\}}$$

Avec $t \geq 0$.

***Exemple* 3.** *Pour la fonction définie dans l'exemple (1) on a*

$$f^{*}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t)$$

où $m_0 = 0$.

***Exemple* 4.** *Pour la fonction définie dans l'exemple (2) on a*

$$f^{*}(t) = \frac{1-t}{t} \quad \forall t > 0$$

la fonctions de réarrangement de f est fonction continue et décroissante pour tout $t > 0$, voir la figure suivant :

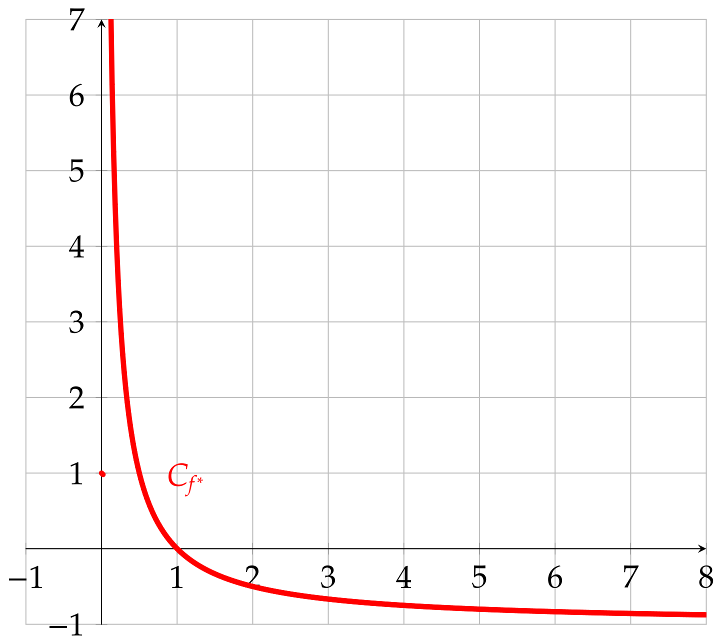

FIGURE 1.2 – Graphe de f^{*} sur $(0, \infty)$.

Quelques propriétés des fonctions de distribution et celles des réarrangements décroissantes .

***Proposition* 1.4.2.**

Soient f, f_n et g des fonctions mesurables , Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) f^* *est décroissante .*

(ii) *Si* $\left|f\right| \geq \left|g\right|$ *alors* $f^* \geq g^*$ *.*

(iii) $\lambda_f\left(f^*(t)\right) \leq t$ *quand* $f^*(t) < \infty$.

(iv) $(\alpha f)^*(t) = |\alpha| f^*(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(v) *Si* $\left|f\right| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \left|f_n\right|$ *alors* $f^* \leq \liminf\limits_{n\to\infty} f_n^*$ *.*

(vi) *Si* $\left|f_n\right| \longrightarrow \left|f\right|$ *alors* $f_n^* \longrightarrow f^*$ *.*

(vii) *pour* $0 < p < \infty$ $\left(\left|f\right|^p\right)^*(t) = \left(f^*(t)\right)^p$.

Preuve . (i) *On montre que* f^* *est décroissante. Soit* $0 < t_1 < t_2 < \infty$ *, alors*

$$\lambda_f(s) < t_1 \Rightarrow \lambda_f(s) < t_2.$$

On a

$$\left\{s > 0, \lambda_f(s) \leq t_1\right\} \subset \left\{s > 0, \lambda_f(s) \leq t_2\right\},$$

donc

$$\inf\left\{s > 0, \lambda_f(s) \leq t_2\right\} \leq \inf\left\{s > 0, \lambda_f(s) \leq t_1\right\},$$

d'où

$$f^*(t_2) \leq f^*(t_1).$$

(ii) On remarque que , Par (ii) (la proposition 1.4.1) $|g| \leq |f| \Rightarrow \lambda_g \leq \lambda_f$ *d'où* $\lambda_f \leq t \Rightarrow \lambda_g \leq t$*, donc*

$$\left\{s > 0, \lambda_f(s) \leq t\right\} \subseteq \left\{s > 0, \lambda_g(s) \leq t\right\},$$

alors

$$\inf\left\{s > 0, \lambda_g(s) \leq t\right\} \leq \inf\left\{s > 0, \lambda_f(s) \leq t\right\},$$

d'où

$$g^* \leq f^*.$$

(iii) On a : $f^*(t) < \infty$ *, donc* $\forall t > 0, \exists s_0 \in [0, \infty)$ *tel que* $\forall s \geq s_0$ *:*

$$\lambda_f(s_0) \leq t$$

et par défets

$$f^*(t) = \inf\left\{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) \leq t\right\} = s_0,$$

par définition , on a

$$\lambda_f(f^*(t)) = \mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right| > f^*(t) = s_0\right\} = \lambda_f(s_0) \leq t.$$

Alors

$$\lambda_f(f^*(t)) \leq t.$$

(iv) le cas $\alpha = 0$ *l'inégalité et vrai.*
$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ *on a*

$$\begin{aligned} (\alpha f)^*(t) &= \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_{\alpha f}(s) \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_f\left(\frac{s}{|\alpha|}\right) \leq t\right\}, \end{aligned}$$

d'après le changement de variable $y = \frac{s}{|\alpha|}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_f\left(\frac{s}{|\alpha|}\right) \leq t\right\} &= \inf\left\{|\alpha| y \geq 0 : \lambda_f(y) \leq t\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{y \geq 0 : \lambda_f(y) \leq t\right\} \\ &= |\alpha| f^*(t). \end{aligned}$$

(v) D'après (v)(la proposition 1.4.1) , il existe un $m \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > m$, on a $\lambda_f(t) \leq \lambda_{f_n}(t), \forall t > 0$, d'après (ii) (la proposition 1.4.1) on a

$$\left\{s > 0 : \lambda_{f_n}(s) \leq t\right\} \subseteq \left\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\right\},$$

d'oú

$$\inf\left\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\right\} \leq \inf\left\{s > 0 : \lambda_{f_n}(s) \leq t\right\},$$

donc

$$f^*(t) \leq f_n^*(t),$$

par conséquent

$$\inf f^*(t) \leq \inf f_n^*(t)$$

$$\liminf_{n\to\infty} f^*(t) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*(t),$$

d'ou

$$f^*(t) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*(t).$$

Pour tout $n > m$, dont la propriété peut être déduite.

(vi) D'après (ii) (la Proposition 1.4.2) on déduit que $f_n^* \leq f^*$ alors

$$\sup f_n^* \leq \sup f^*$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^* \leq \limsup_{n\to\infty} f^*,$$

d'ou

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^* \leq f^*,$$

donc

$$\liminf_{n\to\infty} f_n^* \leq \limsup_{n\to\infty} f_n^* \leq f^*. \tag{1.4.2}$$

De plus , comme $\left|f\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\left|f_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|f_n\right| = \left|f\right|$. On déduit que

$$f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*, \tag{1.4.3}$$

en combinant (1.4.2) *et* (1.4.3) *, on obtient* (*vi*)

(*vii*) *soit* $0 \leq p < \infty$*, on a*

$$\begin{aligned}\left(\left|f\right|^{p}\right)^{*}(t) &= \inf\left\{s \geq 0 : \mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right|^{p} > s\right\} \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{s \geq 0 : \mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right| > s^{\frac{1}{p}}\right\} \leq t\right\},\end{aligned}$$

on pose $v = s^{\frac{1}{p}}$*, on déduit*

$$\inf\left\{s \geq 0 : \mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right| > s^{\frac{1}{p}}\right\} \leq t\right\} = \inf\left\{v^{p} \geq 0 : \mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right| > v\right\} \leq t\right\} = \left(f^{*}(t)\right)^{p},$$

donc

$$\left(\left|f\right|^{p}\right)^{*}(t) = \left(f^{*}(t)\right)^{p}.$$

□

Théorème 1.4.1.

Soient (X, T, μ) *un espace mesure et* f, g *des fonctions mesurables on a*

$$(f+g)^{*}(t_1+t_2) \leq f^{*}(t_1) + g^{*}(t_2),$$

et

$$(fg)^{*}(t_1+t_2) \leq f^{*}(t_1)\, g^{*}(t_2),$$

pour tout $t_1, t_2 > 0$*.*

Preuve . *On commence par la première inégalité, soit* $f^{*}(t_1) + g^{*}(t_2) < \infty$ *et* $a_1 = f^{*}(t_1)$ *et* $a_2 = g^{*}(t_2)$*, d'après* (*iii*) *(la proposition* 1.4.2*) , on a* $\lambda_f(a_1) \leq t_1$ *et* $\lambda_g(a_2) \leq t_2$ *, et d'après* (*iii*) *(la proposition* 1.4.1*), on obtient que*

$$\lambda_{f+g}(a_1+a_2) \leq \lambda_f(a_1) + \lambda_g(a_2) \leq t_1 + t_2.$$

En utilisant la définition du réarrangement décroissant et comme λ_{f+g} *décroissant , d'ou*

$$\begin{aligned}(f+g)^{*}(t_1+t_2) \leq (f+g)^{*}(\lambda_{f+g}(a_1+a_2)) &= \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_{f+g}(s) \leq \lambda_{f+g}(a_1+a_2)\right\} \\ &= \inf\left\{s \geq 0 : s \geq f^{*}(\lambda_{f+g}(a_1+a_2))\right\} \\ &= f^{*}(\lambda_{f+g}(a_1+a_2)) \\ &\leq (a_1+a_2) = f^{*}(t_1) + g^{*}(t_2),\end{aligned}$$

donc

$$(f+g)^{*}(t_1+t_2) \leq f^{*}(t_1) + g^{*}(t_2).$$

La preuve de la seconde inégalité est similaire. Pose que $f^*(t_1)g^*(t_2) < \infty$ et utiliser (iv) (la proposition 1.4.1) pour obtenir

$$\lambda_{fg}(a_1 + a_2) \leq \lambda_f(a_1) + \lambda_g(a_2) \leq t_1 + t_2.$$

En utilisant la définition du réarrangement décroissant, donc

$$(fg)^*(a_1 + a_2) \leq (f + g)^*(\lambda_{fg}(a_1 + a_2)) \leq a_1 a_2 = f^*(a_1)g^*(a_2).$$

□

Proposition 1.4.3.

Soit f une fonction mesurable,$\forall t, \lambda \geq 0$, les propriétés suivantes sont valides :

(i) $f^*(t) > \lambda$ *si et seulement si* $\lambda_f(\lambda) > t$.

(ii) f *et* f^* *sont equimesurables, c'est-à-dire*

$$\mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right| > \lambda\right\} = \mu\left\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\right\},$$

μ est une mesure de Lebesgue .

Preuve . *(i) On suppose $\lambda_f(\lambda) > t$, puisque λ_f est une fonction décroissante, on a $f^*(\lambda_f(\lambda)) < f^*(t)$, donc*

$$f^*(t) > \lambda.$$

On pose maintenant $f^*(t) > \lambda$, alors $\lambda_f(f^*(t)) < \lambda_f(\lambda)$ et comme f^* est une fonction décroissante, donc

$$\lambda_f(\lambda) > t.$$

(ii) Soit μ la mesure de Lebesgue . D'après (i), on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_{f^*}(\lambda) &= \mu\left\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\right\} \\
&= \mu\left\{t \geq 0 : \lambda_f(\lambda) > t\right\} \\
&= \mu\left\{0, \lambda_f(\lambda)\right\} \\
&= \lambda_f(\lambda).
\end{aligned}$$

□

***Théorème* 1.4.2.**

Soit f une fonction mesurable et $0 < p < \infty$, Alors :

$$\left(\int_X \left|f(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}\left|f(x)\right| = f^*(0).$$

Preuve . *Le cas $0 < p < \infty$, (la première égalité). On utilise le Théorème de Fubini , on a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_X \left|f(x)\right|^p d\mu &= \int_X\left(\int_0^{|f(x)|}\frac{t^p}{t}dt\right)d\mu\\
&= \int_0^\infty \frac{t^p}{t}\left(\int_X \chi_{\{x:|f(x)|>t\}}d\mu\right)dt\\
&= \int_0^\infty \frac{t^p}{t}\left(\int_{\{x:|f(x)|>t\}} d\mu\right)dt\\
&= \int_0^\infty \frac{t^p}{t}\lambda_f(t)dt\\
&= \int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt,
\end{aligned}$$

d'ou

$$\int_X \left|f(x)\right|^p d\mu = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt,$$

donc

$$\left\|f\right\|_p = \left(\int_X \left|f(x)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4.4}$$

La seconde égalité. Soit f et f^* sont equimesurables, d'après (ii)(la proposition 1.4.3), alors $\lambda_f(t) = \lambda_{f^*}(t)$, on obtient

$$p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_{f^*}(t)dt = \left\|f^*\right\|_p^p, \tag{1.4.5}$$

d'après (1.4.4) et (1.4.5), on déduit que

$$\left\|f\right\|_p = \left\|f^*\right\|_p$$

Le cas $p = \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}\left|f(x)\right| &= \left\{s \geq 0 : \mu\left\{x \in X : \left|f(x)\right| > t\right\} = 0\right\}\\
&= \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_f(s) = 0\right\}\\
&= \inf\left\{s \geq 0 : \lambda_f(s) \leq 0\right\}\\
&= f^*(0).
\end{aligned}$$

$\square$

G.H.Hardy et J.E.Littlewood ont prouvé l'inégalité suivante ([3],Théorème2.2.2) , qui est lié en la norme $\|\cdot\|_1$ du produit $f \cdot g$ de deux fonctions par la norme $\|\cdot\|_1$ du produit $f^* \cdot g^*$ de leur fonction de réarrangement décroissante .

Proposition 1.4.4.

Si f et g sont des fonctions mesurables , alors

$$\int_X \left|f(x)g(x)\right| d\mu(x) \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds.$$

On définit la fonction f^{**}, la moyenne de la fonction de réarrangement décroissante et on donne quelques propriétés.

Définition 1.4.3.

Soit f une fonction mesurable , on définit f^{**} par

$$\boxed{f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int f^*(s)ds,}$$

avec $t > 0$.

Proposition 1.4.5.

On a les propriétés suivantes

1. *f^{**} est décroissante.*
2. *$f^*(t) \leq f^{**}(t)$ pour tout $t > 0$.*

L'opérateur $f \mapsto f^{**}$ est sous additif ([3],Théorème2.3.4) .

Proposition 1.4.6.

Soient f,g deux fonctions mesurables , alors

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t),$$

pour tout $t > 0$.

On présente l'espace classique de Lorentz .

Définition 1.4.4.

Soit w fonction de poids dans $\mathbb{R}^+$ et $0 < p < \infty$, on définit l'espace de Lorentz $\Lambda_p(w)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables telle que

$$\boxed{\left\|f\right\|_{\Lambda_p} := \|f^*\|_{p,w} := \left(\int_X (f^*(x))^p \, w(t) d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.}$$

Chapitre 2

Quelques inégalités intégrales de Hardy

Dans ce chapitre on commence par énoncer et prouver l'inégalité classique de Hardy. Ensuite on passe à celle où les fonctions de poids sont des fonctions de puissance. On considère aussi le cas où les fonctions de poids sont arbitraires mais ces dernières sont soumises à certains conditions afin que l'inégalité intégrale pondérée de Hardy ait lieu. A la fin sont présentées des inégalités intégrales pondérées de Hardy avec des fonctions de poids arbitraires avec deux paramètres d'intégrabilité.

2.1 Les inégalités intégrales de Hardy

Le théorème suivant est connu comme l'inégalité intégrale de Hardy.

Théorème 2.1.1.

Si $f(x) \geqslant 0, p > 1$ et $\int_0^\infty f(x)^p dx$ est convergente, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx. \tag{2.1.1}$$

La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale (la plus petite possible).

Preuve . *Par le changement de variable $t = xs$ $(dt = x\,ds)$, on déduit*

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski et un nouveau changement de variable $u = xs$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(xs)dx\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(u)^p \frac{du}{s}\right)^{\frac{1}{p}} ds \\
&= \int_0^1 s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty f^p(u)du\right)^{\frac{1}{p}} ds \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^\infty f^p(u)du\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ dans le théorème (2.1.1) est optimale, on va prouver que la norme de $\mathcal{H}$ est exactement $\frac{p}{p-1}$, on montre que $\|\mathcal{H}\|_{L_p(0,\infty)\longrightarrow L_p(0,\infty)} \geq \frac{p}{p-1}$. Soit l'opérateur $\mathcal{H}$ borne sur $L_p(0,\infty)$ et $\|\mathcal{H}\|_{L_p(0,\infty)\longrightarrow L_p(0,\infty)} \leq \frac{p}{p-1}$, on prend les fonctions définies comme suit : $f_\epsilon(t) = t^{-\frac{1}{p}+\epsilon}\chi_{(0,a)}(t)$ avec $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{p}$ et $a > 0$, alors

$$\|f_\epsilon\|_p = \left(\int_0^a x^{-1+p\epsilon}dx\right) = \left(\left[\frac{x^{p\epsilon}}{p\epsilon}\right]_0^a\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{a^\epsilon}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}},$$

et le changement de variable $\left(s = \frac{t}{x}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{H} f_\epsilon\|_p &= \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1}{p}+\epsilon}\chi_{(0,a)}(t)\,dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 (sx)^{-\frac{1}{p}+\epsilon}\chi_{(0,\frac{a}{x})}(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 (sx)^{-\frac{1}{p}+\epsilon}\,ds\right)^p dx + \int_a^\infty \left(\int_0^{\frac{a}{x}} (sx)^{-\frac{1}{p}+\epsilon} ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^a \left(\frac{1}{x}\frac{x^{1-\frac{1}{p}+\epsilon}}{1-\frac{1}{p}+\epsilon}\right)^p dx + \int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\frac{x^{1-\frac{1}{p}+\epsilon}}{1-\frac{1}{p}+\epsilon}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}+\epsilon\right)^p}\left[\frac{x^{\epsilon p}}{\epsilon p}\right]_{x=0}^a + \frac{\left(a^{1-\frac{1}{p}+\epsilon}\right)^p}{\left(1-\frac{1}{p}+\epsilon\right)^p}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_{x=a}^\infty\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{a^\epsilon}{1-\frac{1}{p}+\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon p}+\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\|\mathcal{H}\|_{Lp(0,\infty)\longrightarrow Lp(0,\infty)} \geq \frac{\|\mathcal{H} f_\epsilon\|_p}{\|f_\epsilon\|_p} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}+\epsilon}\left(1+\epsilon\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{p}{p-1},
$$

et alors

$$
\|\mathcal{H}\|_{Lp(0,\infty)\longrightarrow Lp(0,\infty)} = \frac{p}{p-1},
$$

donc La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ *est optimale.*

□

L'opérateur de Hardy sur $L_p(0,\infty)$ *:*

Définition 2.1.1.

Soit $\mathcal{H} : L_p(0,\infty) \longrightarrow L_p(0,\infty)$ *un opérateur et* $f \in L_p(0,\infty)$, *on définit l'opérateur de Hardy classique comme suit :*

$$
\boxed{\mathcal{H} f(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad , x \in (0,\infty)}.
$$

Remarque .

Pour $p = 1$ dans le théorème (2.1.1) , l'opérateur classique de Hardy $\mathcal{H}$ n'est pas borné sur $(0, \infty)$. En fait , si $f(x) > 0$ sur $(0, \infty)$ et $0 < \int_0^\infty f(x)dx < \infty$ pour certain $0 < a \leq x$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)dx &\geq \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)dx \\ &\geq \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^a f(t)dt\right)dx \\ &= \int_0^a f(t)dt \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty. \end{aligned}$$

$\square$

2.2 L'inégalité intégrale de Hardy avec les poids de puissance

Hardy [11] en 1928 a donné une forme généralisée d'inégalité (2.1.1) , pour tout $r \neq 1$, $p > 1$, on pose $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ et pour toute fonction intégrable $f(x) \geq 0$ sur $(0, \infty)$ telle que

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(x)\,dx \;\; si\; r > 1 \\ \int_x^\infty f(x)\,dx \;\; si\; r < 1 \end{cases},$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-m}F^p(x)\,dx \leq \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-m}\left(xf(x)\right)^p dx,$$

sauf si $f \equiv 0$, où la constante est également la meilleure possible, et on obtient davantage de généralisations de l'inégalité intégrale de Hardy classique , présentée dons le théorème suivant.

***Théorème* 2.2.1.**

Si $p > 1, r > 1$ et $f(x) \geq 0$ fonction mesurable localement intégrable, telle que

$$1 + \frac{p}{r-1} \geq \frac{1}{\lambda} > 0,$$

presque par tout $\lambda > 0, \forall a \in (0, \infty)$ alors pour $b \geq a$, on a

$$\int_a^b x^{-r}F^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}f(x)^p dx. \tag{2.2.1}$$

Preuve . *En intégrant le côté gauche de l'inégalité (2.2.1) par parties, on a*

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{-r}F^p(x)\,dx &= \left[\frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,F^p(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,F^p(x)\,F'(x)\,F^{p-1}(x)\,dx \\
&= \left[\frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,F^p(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,F^{p-1}(x)\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_a^x f(t)\,dt\right)dx \\
&= \left[\frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,F^p(x)\right]_a^b \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,F^{p-1}(x)\frac{f(x)}{x}dx + \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,F^{p-1}(x)\frac{1}{x^2}\int_a^x f(t)\,dt \\
&= \frac{b^{-r+1}}{-r+1}\,F^p(b) - \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,f(x)\,F^{p-1}(x)\,dx + \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,F^p(x)\,dx,
\end{aligned}$$

pour $r > 0$ et $f(b) \geq 0$, en utilisant l'inégalité de Höldre, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{-r}\,f^p(x)\left(1 - \frac{1}{-r+1}\,p\right)dx &= \frac{b^{-r+1}}{-r+1}\,F^p(b) + \int_a^b \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,f(x)\,F^{p-1}(x)\,dx \\
&\leq \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\,p\,f(x)F^{p-1}(x)\,dx \\
&= \frac{p}{r-1}\int_a^b \left((x^r)^{1-p}\,x^{-r}\,f(x)\right)\left((x^r)^{-(1-p)}\,F^{p-1}(x)\right)dx \\
&\leq \frac{p}{r-1}\left(\int_a^b x^{-r}\,f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x x^{-r}\,F^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

on pose $\lambda > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{-r}\,F^p(x)\frac{1}{\lambda}\,dx &\leq \int_a^b x^{-r}\,F^p(x)\left(1 + \frac{p}{r-1}\right)dx \\
&\leq \frac{p}{r-1}\left(\int_a^b x^{-r}\,f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b x^{-r}\,F^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

d'après le simplification, d'ou

$$\left(\int_a^b x^{-r}\,F^p(x)\,dx\right)^{1-\frac{1}{p'}} \leq \frac{\lambda\,p}{r-1}\left(\int_a^b x^{-r}\,f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

il en résulte que

$$\int_a^b x^{-r}\,F^p(x)\,dx \leq \left(\frac{\lambda\,p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}\,f(x)^p\,dx.$$

□

L'inégalité intégrale de Hardy avec les poids de puissance : *donne par*

G.Hardy 1927 (voir [13])

Théorème 2.2.2.

Si f une fonction positive, $p \geq 1$ et $\alpha < p-1$, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p x^\alpha\,dx,$$

la constante $\left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p$ est optimale.

Preuve . *par le changement de variable $t = xs$ $(dt = x\,ds)$, on a*

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)\,ds\right)^p x^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)\,x^{\frac{\alpha}{p}}\,ds\right)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski et un nouveau changement de variable $(y = xs)$, on déduit

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)\,x^{\frac{\alpha}{p}}\,ds\right)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(xs)\,x^{\alpha}\,dx\right)^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(y)^p \left(\frac{y}{s}\right)^\alpha \frac{dy}{s}\right)^{\frac{1}{p}} ds$$

$$= \left(\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}(\alpha+1)}\,ds\right)\left(\int_0^\infty f(y)^p\,y^\alpha\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^\infty f(y)^p\,y^\alpha\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La constante $\frac{p}{p-\alpha-1}$ dans Théorème (2.2.2) est optimale .
Soit $f_\epsilon(t) = t^{-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\chi_{(0,a)}(t)$, avec $a > 0$, alors

$$\|f_\epsilon\|_{p,x^\alpha} = \left(\int_0^a x^{-1-\alpha+p\,\epsilon}\,x^\alpha\,dx\right) = \left(\left[\frac{x^{p\,\epsilon}}{p\,\epsilon}\right]_0^a\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{a^\epsilon}{(p\,\epsilon)^{\frac{1}{p}}}.$$

Et d'après le changement de variable $\left(s = \frac{t}{x}\right)$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}f_\epsilon\|_{p,x^\alpha} &= \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\chi_{(0,a)}(t)\ dt\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 (sx)^{-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\chi_{(0,\frac{a}{x})}(s)\,ds\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^a \left(\int_0^1 (sx)^{-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon} ds\right)^p x^\alpha dx + \int_a^\infty \left(\int_0^{\frac{a}{x}} (sx)^{-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon} ds\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^a \left(\frac{1}{x}\frac{x^{1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}}{1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\right)^p x^\alpha dx + \int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\frac{x^{1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}}{1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon\right)^p}\left[\frac{x^{\epsilon p}}{\epsilon p}\right]_{x=0}^a + \frac{a^{p-1-\alpha+\epsilon p}}{\left(1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon\right)^p}\left[\frac{x^{\alpha-p+1}}{\alpha-p+1}\right]_{x=a}^\infty\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{a^\epsilon}{1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon p}+\frac{1}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

enfin

$$\left\|\mathcal{H}\right\|_{Lp(0,\infty;x^\alpha)\longrightarrow Lp(0,\infty;x^\alpha)} \geq \frac{\left\|\mathcal{H}f_\epsilon\right\|_{p,x^\alpha}}{\left\|f_\epsilon\right\|_{p,x^\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{p}+\epsilon}\left(1+\epsilon\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{p}{p-\alpha-1},$$

et donc la constante du théorème (2.2.2) *est optimale.*

□

Remarque .

Pour le cas $0 < p < 1$, *le théorème* (2.2.2) *n'est pas valable , en effet, si l'on considère les fonctions* $f_a(x) = \chi_{(a,a+1)}(x)$ *avec* $a > 0$, *si* $0 < p < 1$ *et* $\alpha < p-1$, *alors*

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\alpha dx}{\int_0^\infty f(x)^p x^\alpha dx} &\geq \frac{\int_{a+1}^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^{a+1} dt\right)^p x^\alpha dx}{\int_a^{a+1} x^\alpha dx} = \frac{\int_{a+1}^\infty x^{\alpha-p}}{\left((a+1)^\alpha - \frac{a}{a+1}\right)} \\
&\geq \frac{\int_{a+1}^\infty x^{\alpha-p}}{(a+1)^\alpha} = -\frac{1}{\alpha-p+1}\frac{(a+1)^{\alpha-p+1}}{(a+1)^\alpha} \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \infty,
\end{aligned}$$

donc le théorème (2.2.2) *n'est pas valable, pour toute* $f \geq 0$ *mesurable.*

2.3 Nouvelle inégalité intégrale de type de Hardy

L'inégalité intégrale de Hardy peut être généralisée en considérant des poids différents (au lieu de seulement des poids puissances) des deux côtés de l'inégalité.
L'inégalité intégrale de Hardy pondérée

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p u(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)\,v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3.1}$$

est satisfaite pour toutes les fonctions $f \geq 0$ mesurables et deux poids u et v avec $p \geq 1$, $C > 0$ un constante finie. Le cas $v(x) = 1$ et $p = 2$, apparu en 1958 Le premier résultat caractérisant complètement l'inégalité (2.3.1), donnée par Kac-Kerin (cf.[16] , Théorème 3).

Théorème 2.3.1.

L'inégalité

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 u(x)\,dx \leq C\int_0^\infty f^2(x)\,v(x)\,dx \tag{2.3.2}$$

valable pour tout $f \in L_2(0,\infty)$ si et seulement si

$$A := \sup_{r>0} r\int_r^\infty u(x)dx < \infty. \tag{2.3.3}$$

Preuve . *Premièrement, on suppose que l'inégalité (2.3.2) soit valable pour chaque $f \in L_2(0,\infty)$. On considère, pour $r, h > 0$, les fonctions*

$$f_h(x) := r^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,r]}(x) - r^{-\frac{1}{2}}h^{-1}\chi_{(r+h,r+2h]}(x),$$

alors

$$\int_0^\infty f_h^2(x)\,dx = \int_0^r r^{-1}dx + \int_{r+h}^{r+2h} rh^{-2}\,dx = 1 + \frac{r}{h},$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^x f_h(t)\,dt &= \int_0^x r^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,r]}(t)\,dt - \int_0^x r^{-\frac{1}{2}}h^{-1}\chi_{(r+h,r+2h]}(t)\,dt \\
&= xr^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,r]}(x) + xr^{\frac{1}{2}}\chi_{(r,\infty)}(x) - r^{-\frac{1}{2}}h^{-1}(x-r-h)\chi_{(r+h,r+2h]}(x) - r^{-\frac{1}{2}}h^{-1}\chi_{(r+h,r+2h)}(x) \\
&= xr^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,r]}(x) + xr^{\frac{1}{2}}\chi_{(r,r+h)}(x) + \left(r^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}}h^{-1}(x-r-h)\right)\chi_{(r+h,r+2h)}(x),
\end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|\int_0^x f_h(t)dt\right|^2 dx = \int_0^r r^{-1}x^2u(x)dx \\
+ \int_r^{r+h} ru(x)dx \int_{r+h}^{r+2h} \left|\left(r^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}}h^{-1}(x-r-h)\right)\chi_{(r+h,r+2h)}(x)\right|^2 u(x)dx
\end{aligned}$$

$$\geq \int_r^{r+h} ru(x)dx,$$

on déduit que

$$r\int_r^{r+h} u(x)dx \leq C\int_0^{\infty} f_h^2(x)\,dx = C\Big(1+\frac{r}{h}\Big),$$

et pour $h \longrightarrow \infty$, on déduit

$$r\int_r^{r+h} u(x)dx \leq C,$$

pour tout $r > 0$, donc

$$A := \sup_{r>0} r\int_r^{\infty} u(x)dx < \infty.$$

On suppose maintenant que $A < \infty$, si $v = -\int_x^{\infty} u(t)\,dt$ alors $dv = u(x)$, et on intègre par parties l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 u(x)\,dx,$$

avec $dv = u(x)$ pp x. Alors on a

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 u(x)\,dx = -\left[\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2\left(\int_x^{\infty} u(t)\,dt\right)\right]_0^{\infty}$$

$$+2\int_0^{\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)f(x)\left(\int_x^{\infty} u(t)\,dt\right)dx$$

$$= 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)f(x)\left(x\int_x^{\infty} u(t)\,dt\right)dx.$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité de Hölder et le Théorème (2.1.1), on a

$$2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)f(x)\left(x\int_x^{\infty} u(t)\,dt\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty} f^2(x)\left(x\int_x^{\infty} u(t)\,dt\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2A\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 4A\left(\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 4A\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

Remarque .

Le cas $p = 2$ et $U(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ donne l'inégalité (2.3.1), on obtient l'inégalité (2.3.2) .

G. Tomaselli, G. Talenti ont travaillé dans le cas pondéré, donnant des résultats importants(voir [26] , [27]) et Muckenhoupt a été le premier à donner la caractérisation complète de l'inégalité (2.3.1) (cf. [18], Théorème 1).

***Théorème* 2.3.2.**

Soit $1 \leq p \leq \infty$, pour toute $f \geq 0$ et deux poids u et v , on peut trouver une constante finie $C > 0$, telle que

$$\left(\int_0^\infty \left|U(x)\int_0^x f(t)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^\infty \left|V(x)f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3.4}$$

si et seulement si

$$B = \sup_{r>0}\left(\int_r^\infty U^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^r V(x)^{-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.De plus, si C est la constante optimale de (2.3.4), alors

$$B \leq C \leq p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B,$$

si $1 < p < \infty$, et $B = C$ si $p = 1$ ou $p = \infty$.

Chapitre 3

Les inégalités de Hardy pour les fonctions monotones et quasimonotones

A) Première partir : Les inégalités de Hardy pour les fonctions monotones

3.1 Les inégalités intégrales de type de Hardy sur le cône des fonctions monotones

Introduction : *Soit* $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, v *et* w *sont des fonctions non-négatives , telle que les fonctions* v, w, v^{1-q} *soient localement intégrables sur* $\mathbb{R}_+$. *Pour une fonction de poids* v *et* $1 \leq p < \infty$ *, on définit l'espace de Lebesgue Pondéré* $L_{p,v}(\mathbb{R}_+)$ *comme l'ensemble de toutes les fonctions mesurables sur* $\mathbb{R}_+$ *, telles que*

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty.$$

On considère l'opérateur intégrale défini comme suit :

$$\mathcal{K} f(x) = \int_0^x K(x, s) f(s) ds, x > 0, \tag{3.1.1}$$

où $K(x,s)$ est un noyau mesurable non-négatif et son opérateur conjugué :

$$\mathcal{K}^* g(s) = \int_s^\infty K(x,s)g(x)dx, s > 0, \tag{3.1.2}$$

avec le même noyau. L'un des problèmes importants de l'analyse fonctionnelle est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour la validité de l'inégalité :

$$\left(\int_0^\infty \left|\mathcal{K}f(x)\right|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \geq C\left(\int_0^\infty \left|f(x)\right|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1.3}$$

pour toutes les fonctions $f \in L_{p,v}$, et p, q sont des paramètres fixes . Ce type des problèmes est étudie dans ce que sont aujourd'hui appelées inégalités de type de Hardy ([15],[16],[17] et [5]), dans ce type de recherche est apparue la nécessite d'étudier les inégalités définies par (3.1.3) restreintes aux cônes des fonctions monotones . Ce problème trouve quelques applications dans la théorie des opérateurs dans les espaces de Lorentz ; une autre raison d'étudier de telles inégalités est que la fonction maximale , définie par la formule

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|f(s)\right| ds,$$

et liée à l'opérateur de Hardy relatif au cône des fonctions décroissantes de la manière précise suivante :

$$(\mathcal{M}f^*) \approx \frac{1}{x}\int_0^\infty f^*(s)ds, \tag{3.1.4}$$

où f^* est le réarrangement décroissant de $\left|f\right|$; pour une motivation plus extensive et une description des inégalités de type de Hardy sur les cônes des fonctions monotones (voire[16] persson et les références données [1],[14],[19],[22]-[25]) , en plus, une nouvelle approche de ce problème a été envisagée dans[12], concernant les faits historiques et les développements ultérieurs de la formule (3.1.4) on réfère à l'article [2]. on déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour la bornitude des opérateurs $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$ définis par (3.1.1) et (3.1.2) , respectivement, avec des noyaux satisfaisant la condition d'Oinarov généralisée (voir [20]), sur le cône des fonctions monotones. Ces résultats sont nouveaux dans cette généralité (voir les ouvrages [15] [16] [17] et les références qui y sont données). on utilise les notations et conventions suivantes : Les produits de type $0 \cdot \infty$ sont considérés comme égaux à zéro. On écrit $A \ll B$, si $A \leq cB$ avec une constante positive C, qui ne dépend que de certains paramètres non essentiels. La notation $A \approx B$ signifie que $A \ll B \ll A$. Le symbole $\chi_E(\cdot)$ représente la fonction caractéristique d'un ensemble $E \subset R_+$. On utilise également les notations $p' = \frac{p}{p-1}, q' \frac{q}{q-1}$ et $V(x) = \int_0^x v(t)dt$. Ce travail est organisé comme suit : dans la section 2, on pressente quelques préliminaires pour les paragraphes ultérieurs. Les principaux résultats ce trouvent dans la section 3 et les preuves de *ces résultats sont données dans la section 4. Enfin, dans la section 5, on présente les résultats correspondants pour le cas des fonctions non décroissantes .*

3.2 Préliminaire

Dans un premier temps, on définit les classes O_n^+ et $O_n^-, n \geq 0$ des noyaux équipés des opérateurs $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$ définis par (3.1.1) et (3.1.2), qui ont été introduits dans [20]. On écrira $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n^+(\cdot,\cdot)$, si $K(\cdot,\cdot) \in O_n^+$ et $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n^-(\cdot,\cdot)$, si $K(\cdot,\cdot) \in O_n^-$ Pour $n \geq 0$, on définit la classe de la manière suivante : Soit la fonction $K_n^+(x,s)$ une fonction non-négative et mesurable, qui est définie pour tout $x \geq s > 0$. De plus, la fonction $K_n^+(x,s)$ n'est pas décroissante dans le premier argument. On définit la classe O_o^+ de comme un ensemble de toutes les fonctions de type $K_0^+(x,s) \equiv V(s)$, où la fonction $V(s)$ est une fonction non négative et mesurable sur l'ensemble $\{(x,s) : x \geq s \geq 0\}$. Ensuite, on suppose que les classes $O_i^+, i = 0,1,...,n-1$, sont définies et on introduit cette O_n^+ la classe de comme un ensemble de toutes les fonctions $K_n^+(x,s)$, pour lesquelles il existe des fonctions $K_i^+(x,s) \in O_i^+$, $i = 0,1,...,n-1$, et un nombre h_n tel que

$$K_n^+(x,s) \leq h_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} K_{n,i}(x,t) K_i^+(x,s) + K_n^+(t,s) \right),$$

pour $x \geq t \geq s > 0$, où

$$K_{n,i}(x,t) = \inf_{0<s<t} \frac{K_n^+(x,s)}{K_i^+(t,s)}, i = 0,1,...,n-1.$$

Il découle de la définition de la fonction $K_{n,i}$ (voir par exemple [20]) pour tout $n \geq 0$ que l'on peut caractériser la classe O_n^+ par la formule

$$K_n^+(x,s) \approx \sum_{i=0}^{n} K_{n,i}^+(x,t) K_i^+(t,s), x \geq t \geq s > 0. \tag{3.2.1}$$

On pose $K_{n,n}^+(x,t) \equiv 1$.

De même, on introduit les classes O_n^- pour $n \geq 0$. Soit la fonction $K^-(x,s)$ est mesurable non-négative, qui est définie pour tout $x \geq s \geq 0$ et non croissante pour le deuxième argument. Soit la classe O_n^- l'ensemble de toutes les fonctions $K_0^-(x,s) \equiv U(x)$, où la fonction $U(x)$ est non-négative et mesurable sur l'ensemble $\{(x,s) : x \geq s \geq 0\}$. Soit $n \geq 1$. Supposons que les classes O_i^-, soient définies pour $i = 0,1,...,n-1$. On dit que la fonction $K_n^-(x,s)$ appartient à la classe O_n^- s'il existe des fonctions $K_i^-(x,s) \in O_i^- i = 0,1,...,n-1$, et le nombre h_n telle que l'inégalité :

$$K_n^-(x,s) \leq h_n \left(K_n^-(x,t) + \sum_{i=0}^{n-1} K_i^-(x,t) K_{i_0,n}^-(t,s) \right),$$

pour $x \geq t \geq s > 0$, où

$$K^-_{i,n}(t,s) = \inf_{t \leq x \leq \infty} \frac{K^-_n(x,s)}{K^-_i(t,s)}, i = 0, 1, ..., n-1.$$

De façon similaire à (3.2.1), chaque classe $O^-_n, n \geq 0$ peut être caractérisée par l'équivalence

$$K^-_n(x,s) \approx \sum_{i=0}^{n} K^-_i(x,t) K^-_{n,i}(t,s), x \geq t \geq s > 0, \tag{3.2.2}$$

où $K^+_{n,n}(x,t) \equiv 1$.

Remarque .

Il est montré en [20] que $K^+_{n,i}(x,s)$ et $K^+_{i,n}(x,s)$ peuvent être des fonctions non négatives arbitraires et mesurables sur l'ensemble $\{(x,s) : 0 < s \leq x < \infty\}$ et satisfaisant aux conditions (3.2.1) et (3.2.2), respectivement. On utilise la propriété suivante de la classe O^+_n .

Lemme 3.2.1.

Soit $n \geq 0$ et $K(t,s) \in O^+_n$. Alors la fonction $\tilde{K}(x,s) = \int_s^x K(t,s)dt$ appartient à la classe O^+_{n+1}.

Preuve . *Soit $y \in [s,x]$. Puisque $K(t,s) \in O^+_n$, on peut appliquer (3.2.2) pour $y, s \leq y \leq t$, et obtenir*

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(x,s) &= \int_s^x K(t,s)dt \\
&= \int_s^y K(t,s)dt + \int_y^x K(t,s)dt \\
&\approx \int_s^y K(t,s)dt + \sum_{i=0}^{n} K^+_i(y,s) \int_y^s K^+_{n,i}(t,y)dt \\
&= \tilde{K}(y,s) + \sum_{i=0}^{n} K^+_i(y,s) \int_y^s K^+_{n,i}(t,y)dt \\
&= \tilde{K}(y,s) + \sum_{i=0}^{n} K^+_i(y,s) + \tilde{K}^+_{n,i}(x,y),
\end{aligned}$$

où $\tilde{K}^+_{n,i}(x,y) = \int_y^x K^+_{n,i}(t,y)$. Par conséquent, la fonction $\tilde{K}(x,s)$ appartient à O^+_{n+1} par définition.

□

Pour prouver les principaux résultats de ce travail, on utilise le principe de dualité de Sawyer (voir(3.2.4)) et le critère de bornétude de l'opérateur $\mathcal{K}$ défini par (3.1.1), avec un noyau de la classe $O_n^+ \cup O_n^+$, $n \geq 0$. Le critère a été obtenu en [20] et on le reécrit sous une forme plus pratique dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.1.

Soient $1 < p \leq q < \infty$ et le noyau $K(\cdot,\cdot)$ de l'opérateur $\mathcal{K}$ défini par (3.1.1) appartiennent à la classe $O_n^+ \cup O_n^-, n \geq 0$. Alors l'inégalité :

$$\left\|\mathcal{K}f\right\|_{q,w} \leq C\left\|f\right\|_{p,v}, \forall f \in L_{p,v}, \tag{3.2.3}$$

est valable si et seulement si l'une des conditions suivantes est remplie :

$$A^+ = \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty\left(\int_0^x K^{p'}(x,s)v^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3.2.4}$$

$$A^- = \sup_{x>0}\left(\int_0^x\left(\int_x^\infty K^{q}(x,s)w(x)dx\right)^{\frac{p'}{q}} v^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.2.5}$$

Si C est la meilleure constante de l'inégalité (3.2.3), alors $C \approx A^+ \approx A^-$.

Un autre résultat important qu'on mentionne est le principe de dualité de Sawyer. En 1990, E. Sawyer [24] a développé une méthode qui permet de réduire l'inégalité (3.1.3) pour toutes les fonctions non-croissantes à une inégalité de même forme, mais pour les fonctions arbitraires. Pour cela, il a prouvé une inégalité inverse de Hölder sous la forme suivante (aujourd'hui appelée principe de la dualité Sawyer) :

$$\sup_{0\leq g\downarrow}\frac{\int_0^\infty gf}{\left(\int_0^\infty g^p v\right)^{\frac{1}{p}}} \approx \left(\int_0^\infty\left(\int_0^x f\right)^{p'} V^{-p'}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\int_0^\infty f}{\left(\int_0^\infty v\right)^{\frac{1}{p}}}, \; f \geq 0, \tag{3.2.6}$$

où la notation $0 \leq g \downarrow$ signifie que g est une fonction non-négative et non-croissante. Soit T un opérateur défini par la règle $Tg(x) = \int_0^\infty K(x,s)g(s)ds$, où $K(x,s) \geq 0$. En utilisant (3.2.4) dans le cas $1 < p, q < \infty$, on obtient (voir, par exemple, [17], [25] que l'inégalité :)

$$\left(\int_0^\infty (Tg)^q v\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty g^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \; \forall 0 \leq g \downarrow,$$

est valable si et seulement si les deux inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x T^* f\right)^{p'} v^{-p'}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\int_0^\infty f^{q'} w^{1-q}\right)^{\frac{1}{q'}}, \forall f \geq 0 \tag{3.2.7}$$

$$\int_0^\infty T^* f\left(\int_0^\infty v\right)^{-\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^\infty f^{q'} w^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \forall f \geq 0, \tag{3.2.8}$$

où $T^* f(s) = \int_0^\infty K(x,s) f(x) dx.$

Il est généralement plus pratique d'utiliser la double forme de l'inégalité :

$$\left(\int_0^\infty \left(T\left(\int_s^\infty h\right)\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty h^p(x) V^p v^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.2.9}$$

et il résulte du principe de dualité dans les espaces de Lebesgue que (3.2.7) est équivalente à

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(x,s)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.10}$$

3.3 Les principaux résultats

Notre résultat principal pour l'opérateur $\mathcal{K}$ *défini par (3.1.1) sur le cône des fonctions non-croissantes est comme suit.*

Théorème 3.3.1.

Soit $1 \leq p \leq q < \infty$, $\int_0^\infty v < \infty$ *et le noyau* $K(\cdot,\cdot)$ *de l'opérateur* $\mathcal{K}$ *défini par (3.1.1) appartiennent à la classe* $O_n^-, n \geq 0$. *Alors l'inégalité :*

$$\left\|\mathcal{K} g\right\|_{q,\infty} \leq C \left\|g\right\|_{p,v}, \forall 0 \leq g \downarrow. \tag{3.3.1}$$

est valable si et seulement si $A_1 + A_2 + A_3 < \infty$ ou $A_1 + A_2 + A_4 < \infty$, où :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty V^{-p'(t)}v(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^x\left(\int_0^x K(x,s)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.\\
A_2 &= \left(\int_0^\infty w(x)\left(\int_0^x K(x,s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty v(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}.\\
A_3 &= \sup_{x>0}\left[\int_x^\infty\left(\int_0^x\left(\int_0^t K(x,s)ds\right)^{p'}V^{-p'}(t)v(t)dt\right)^{\frac{q}{p'}}w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}.\\
A_4 &= \sup_{x>0}\left[\int_0^x\left(\int_x^\infty\left(\int_0^t K(x,s)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{p'}{q}}V^{-p'}(t)v(t)dt\right]^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Le résultat correspondant pour l'opérateur $\mathcal{K}^*$ défini par (3.1.2).

Preuve . *On réduit d'abord (3.3.1) aux inégalités sur les fonctions non négatives. La condition $A_2 < \infty$ découle de (3.2.10) avec T remplacé par l'opérateur $\mathcal{K}$. Par conséquent, On doit déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour l'inégalité :*

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x K(x,s)\left(\int_s^\infty h(t)dt\right)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_1\left(\int_0^\infty h^p(x)V^p(x)v^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.3.2)$$

pour tout $h \ge 0$.

Considérons le côté gauche de (3.3.2). En divisant l'expression en deux parties par $x, s \le x < \infty$, puis en changeant l'ordre d'intégration, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x K(x,s)\left(\int_s^\infty h(t)dt\right)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} &\approx \left(\int_0^\infty (h(t)dt)^q\left(\int_0^x K(x,s)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+ \left(\int_0^\infty\left(\int_0^x h(t)\int_0^t K(x,s)dsdt\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

On peut donc diviser (3.3.2) en deux inégalités :

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x h(t)\int_0^t K(x,s)ds\,dt\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_3\left(\int_0^\infty h^p(x)V^p(x)v^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.3.3)$$

et

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty h(t)dt\right)^q \left(\int_0^x K(x,s)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_4 \left(\int_0^\infty h^p(x)V^p(x)v^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.3.4)$$

La dernière inégalité est une inégalité de type Hardy qui est valable (voir, par exemple [16] , [1]) si et seulement si :

$$A_1 = \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty V^{-p'}(t)v(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x \left(\int_0^x K(x,s)ds\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

est finie.

Ensuite, on considère (3.3.3). En utilisant le fait que le noyau $K(x,s)$ appartient à la classe $O_n^-, n \geq 0$, on obtient que l'inégalité (3.3.3) est équivalente aux $(n+1)$ inégalités suivantes :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x h(t)K_i(x,t) \int_0^t K(t,s)ds\, dt\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^\infty h^p(x)V^p(x)v^{1-p}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.3.5)$$

avec $i = 0,1,...,n.$

Il est facile de voir que (3.3.5) est équivalente à :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)K_i(x,t)dt\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^\infty f^p(x)v_i(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, i = 0,1,...,n. \quad (3.3.6)$$

où $v_i = \left(\int_0^x K_i^-(x,s)ds\right)^{-p} V^p(x)v^{1-p}(x), i = 0,1,...,n.$ *Par conséquent, on applique le théorème (3.9.1) et obtient une condition nécessaire et suffisante pour la validité de (3.3.3) est l'une des conditions suivantes :*

$$A_{3,i} = \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty \left(\int_0^x \left(K_i^-(x,t)\right)^{p'} v_i^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, i = 0,...,n. \quad (3.3.7)$$

$$A_{4,i} = \sup_{x>0}\left(\int_0^x \left(\int_x^\infty \left(K_i^-(x,t)\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{p'}{q}} v_i^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, i = 0,...,n. \quad (3.3.8)$$

En sommant $A_{3,i}$ par rapport à i et en substituant l'expression à v_i,pour obtenant que :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} A_{3,i} &= \sum_{i=0}^{n} \sup_{x>0}\left(\int_x^{\infty}\left(\int_0^x\left(K_i^-(x,t)\int_0^1 K_{i,n}^-(t,s)ds\right)^{p'} V^{-p'}(t)v(t)dt\right)^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \sup_{x>0}\left(\int_x^{\infty}\left(\int_0^x\left(\int_0^t \sum_{i=0}^{n} K_i^-(x,t)K_{i,n}^-(t,s)ds\right)^{p'} V^{-p'}(t)v(t)dt\right)^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \sup_{x>0}\left(\int_x^{\infty}\left(\int_0^x\left(\int_0^t K(x,s)ds\right)^{p'} V^{-p'}(t)v(t)dt\right)^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} = A_3.\end{aligned}$$

De même, on a $\sum_{i=0}^{n} A_{4,i} \approx A_4$. *Il s'ensuit que l'inégalité* (3.3.3) *est valable si et seulement si* A_3 *ou* A_4 *est fini.*

□

Théorème 3.3.2.

Soit $1 \le p \le q < \infty$ *le noyau* $K(\cdot,\cdot)$ *de l'opérateur* $\mathcal{K}^*$ *défini par* (3.1.2) *appartiennent à la classe* $O_n^+, n \ge 0$. *Alors l'inégalité*

$$\left\|\mathcal{K}^* g\right\|_{q,w} \le C \left\|g\right\|_{p,v} \forall 0 \le g \downarrow . \tag{3.3.9}$$

(3.3.9) *est valable si et seulement si* $B_1 + B_3 < \infty$ *ou* $B_2 + B_3 < \infty$ *ou*

$$\begin{aligned} B_1 &= \sup_{x>0}\left(\int_0^x\left(\int_x^{\infty}\left(\int_s^x K(t,s)dt\right)^{p} V^{-p'}(x)v(x)dx\right)^{\frac{q}{p'}} w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}. \\ B_2 &= \sup_{x>0}\left(\int_0^x\left(\int_x^{\infty}\left(\int_s^x K(t,s)dt\right)^{q} w(s)ds\right)^{\frac{p'}{q}} V^{-p'}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \\ B_3 &= \left(\int_0^{\infty} w(s)\left(\int_s^{\infty} K(x,s)dx\right)^{q} ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\infty} v(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dans le cas $\int_0^{\infty} v(t)dt = \infty$ *les théorèmes* (3.3.1) *et* (3.3.2) *prennent respectivement les formes suivantes :*

Preuve . *De façon similaire à la démonstration du théorème* (3.3.1), *on doit étudier l'inégalité suivante :*

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^x \mathcal{K}f(t)dt\right)^{p'}\left(\int_0^x v(s)ds\right)^{-p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \le C_1\left(\int_0^{\infty} g^{q'}(x)w^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{3.3.10}$$

En utilisant le théorème de Fubini, l'inégalité peut être réécrite comme suit :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(s)\int_s^x K(t,s)dt\,ds\right)^{p'}\left(\int_0^x v(s)ds\right)^{-p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_1\left(\int_0^\infty g^{q'}(x)w^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

En raison du Lemme (3.9.2) , la fonction $\widetilde{K}(x,s) = \int_s^x K(t,s)dt$ *appartient à la classe* O^+_{n+1} *et il résulte du théorème (3.9.1) que l'inégalité (3.3.10) est valable si et seulement si l'une des quantités*

$$B_1 = \sup_{x>0}\left(\int_0^x \left(\int_x^\infty \left(\int_s^x K(t,s)dt\right)^{p'}\left(\int_0^x v^{p'}(y)dy\right)^{p'} v(x)dx\right)^{\frac{q}{p'}} w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$B_2 = \sup_{x>0}\left(\int_0^x \left(\int_x^\infty \left(\int_s^x K(t,s)dt\right)^{q} w(s)ds\right)^{\frac{p'}{q}}\left(\int_0^x v(y)dy\right)^{-p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

est finie. La condition $B_3 < \infty$ *découle de (3.2.10).*

□

Théorème 3.3.3.

Soit $1 \leq p \leq q < 0$, $\int_0^\infty v(t)dt = \infty$ *et le ou les noyaux de l'opérateur* $\mathcal{K}$ *défini par (3.1.1) appartiennent à la classe* $O^-_n, n \geq 0$. *Alors l'inégalité (3.3.1) est valable si et seulement si* $A_5 + A_3 < \infty$ *ou* $A_3 + A_4 < \infty$. *où*

$$A_5 = \sup_{x>0} V^{-\frac{1}{p}}(x)\left(\int_0^x \left(\int_0^x K(x,s)ds\right)^{p} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.3.11}$$

et A_3 *et* A_4 *sont définies dans le théorème (3.3.1).*

Théorème 3.3.4.

Soit $1 \leq p \leq q < 0$, $\int_0^\infty v(t)dt = \infty$ *et le noyaux* $K(\cdot,\cdot)$ *de l'opérateur* $\mathcal{K}^*$ *défini par (3.1.2) appartiennent à la classe* $O^+_n, n \geq 0$. *Alors l'inégalité (3.3.9) est valable si et seulement si* $B_1 < \infty$ *ou* $B_2 < \infty$. *Ici* B_1 *et* B_2 *sont définies dans le théorème (3.3.2).*

Preuve du théorème : . (3.3.3) *et du théorème (3.3.4). Les preuves sont similaires aux preuves du théorème (3.3.1) et du théorème (3.3.2) Par conséquent, on omet les détails .* □

Remarque .

La méthode que nous avons utilisé pour prouver les théorèmes (3.3.2) et (3.3.3) ne fonctionne pas dans l'autre cas lorsque le noyau de l'opérateur K défini par (3.1.1) appartient aux classes O_n^+ , $n \geq 0$. Par conséquent , on laisse cette question ouverte. De même, on laisse ouverte la question de savoir si l'inégalité (3.3.9) est également valable lorsque le noyau de l'opérateur $\mathcal{K}^*$ défini par (3.1.2) appartient aux classes O_n^-, $n \geq 0$.

3.4 CAS NON-DÉCROISSANT

Soit la notation $0 \leq g \uparrow$ signifie que g est une fonction non-négative et non-décroissante. Le principe de dualité pour les fonctions non-décroissantes est comme suit (voir [14],[25]) ;

$$\sup_{0\leq g\downarrow} \frac{\int_0^\infty gf}{\left(\int_0^\infty g^p v\right)^{\frac{1}{p}}} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f\right)^{p'} \left(\int_x^\infty v\right)^{-p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\int_0^\infty f}{\left(\int_0^\infty v\right)^{\frac{1}{p}}}, \tag{3.4.1}$$

où f est une fonction non-négative. En utilisant (3.4.1) et des arguments similaires à ceux de notre section précédente, on peut dériver les résultats suivants pour les fonctions non-décroissantes.

***Théorème* 3.4.1.**

Soit $1 \leq p \leq q < 0$, $\int_0^\infty v(t)dt = \infty$ et le noyau $K(\cdot,\cdot)$ de l'opérateur $\mathcal{K}$ défini par (3.1.1) appartiennent à la classe $O_n^- n \geq 0$. Alors l'inégalité

$$\left\|\mathcal{K}f\right\|_{q,w} \leq C\left\|f\right\|_{p,v}, \forall 0 \leq g\uparrow, \tag{3.4.2}$$

est valable si et seulement si l'une des conditions $\tilde{A}_1+\tilde{A}_3 < \infty$, $\tilde{A}_2+\tilde{A}_3 < \infty$ est satisfaite, ici

$$\tilde{A}_1 = \sup_{x>0}\left(\int_z^\infty \left(\int_0^z \left(\int_s^x K(x,t)dt\right)^{p'} \left(\int_s^\infty v(y)dy\right)^{p'} v(s)ds\right)^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.4.3}$$

$$\tilde{A}_2 = \sup_{x>0}\left(\int_0^z \left(\int_z^\infty \left(\int_s^z K(x,t)dt\right)^{q} w(x)dx\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\int_s^\infty v(t)dt\right)^{-p'} v(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{3.4.4}$$

$$\tilde{A}_3 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^z K(x,s)ds\right)^{q} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty v(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{3.4.5}$$

Théorème 3.4.2.

Soit $1 \leq p \leq q < 0$, $\int_0^\infty v(t)dt = \infty$ et le noyau $K(\cdot,\cdot)$ de l'opérateur $\mathcal{K}$ défini par (3.1.1) appartient à la classe $O_n^-, n \geq 0$. Alors l'inégalité (3.4.2) est valable si et seulement si $\widetilde{A}_1 < \infty$ ou $\widetilde{A}_2$ et $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, sont définies dans le théorème .

Théorème 3.4.3.

Soit $1 < p \leq q < 0$, $\int_0^\infty v(t)dt = \infty$ et le noyau $K(\cdot,\cdot)$ de l'opérateur $\mathcal{K}$ défini par (3.1.2) appartient à la classe $O_n^+, n \geq 0$. Alors l'inégalité :

$$\left\|\mathcal{K}^* g\right\|_{q,w} \leq C \left\|g\right\|_{p,v}, \forall 0 \leq g \uparrow \tag{3.4.6}$$

est valable si et seulement si l'une des conditions $\widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2 + \widetilde{B}_3 < \infty, \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2 + \widetilde{B}_4 < \infty$ est satisfaite, où

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_1 &= \sup_{x>0} \left(\int_0^z \left(\int_x^\infty v(s)ds\right)^{-p'} v(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty \left(\int_t^\infty K(x,t)dx\right)^q w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}. \\
\widetilde{B}_2 &= \left(\int_z^\infty \left(\int_s^\infty K(x,s)dx\right)^q w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty v(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}. \\
\widetilde{B}_3 &= \sup_{x>0} \left(\int_0^z \left(\int_z^\infty \left(\int_t^\infty K(x,s)dx\right)^{p'} \left(\int_t^\infty v(s)ds\right)^{-p'} v(t)dt\right)^{\frac{q}{p'}} w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}. \\
\widetilde{B}_4 &= \sup_{x>0} \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z \left(\int_t^\infty K(x,s)ds\right)^q w(s)ds\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\int_t^\infty v(s)ds\right)^{-p'} v(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.4.4.

Soit $1 < p \leq q < 0$, $\int_0^\infty v(t)dt = \infty$ et le noyau $K(\cdot,\cdot)$ de l'opérateur $\mathcal{K}$ défini par (3.1.2) appartient à la classe $O_n^+, n \geq 0$. Alors l'inégalité (3.4.6) est valable et une seule des conditions $\widetilde{B}_5 + \widetilde{B}_3 < \infty$, $\widetilde{B}_5 + \widetilde{B}_4 < \infty$ est satisfaite, où

$$\widetilde{B}_5 = \sup_{x>0} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty K(x,s)dx\right)^q w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^\infty v(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{3.4.7}$$

où $\widetilde{B}_3$,$\widetilde{B}_4$ sont définis dans le théorème (3.4.3).

Preuve . *Pour prouver les théorèmes (3.4.1 – 3.4.4), on applique la méthode qu'on a utilisée dans le cas non- croissant. En particulier, l'inégalité :*

$$\left(\int_0^\infty (\mathcal{K}g)^q w\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty g^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \forall 0 \leq g \uparrow, \tag{3.4.8}$$

est équivalente aux deux inégalités suivantes :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mathcal{K}^* f\right)^{p'} \left(\int_x^\infty v\right)^{p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\int_0^\infty f^{p'} w^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \forall f \geq 0.$$

$$\int_0^\infty \mathcal{K}^* f \left(\int_0^\infty v\right)^{-\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^\infty f^{p'} w^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \forall f \geq 0.$$

De plus, tous les autres arguments et formules des preuves des théorèmes (3.3.1 – 3.3.4) peut être modifiés de la même manière, donc on omet les détails.

□

B) deuxième partie : Fonctions quasimonotones.

Si on considère la classe des fonctions quasimonotones, alors les inégalités classiques de Hardy sont également valables dans le sens inverse pour certaines constantes. Dans ce travail, on présente plusieurs preuves de ces inégalités inversées de Hardy, qui en particulier, donnent les meilleures constantes possibles dans tous les cas. Les résultats obtenus peuvent être considérés comme une unification et une généralisation de certains résultats récemment obtenus dans [4], [6] et [21] .

3.5 Introduction aux fonctions quasimonotones

Soit f une fonction mesurable non négative sur $(0, \infty)$ et on considère l'opérateur de Hardy $(\mathcal{H}_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$, et son conjugué (par rapport au produit scalaire $(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)xdx$) $(\mathcal{H}_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$. Les inégalités suivantes ont été prouvées par Hardy [11] (*Voir aussi* [10] et [8])

Théorème 3.5.1.

Soient $p > 0$ et $p' = \frac{p}{(p-1)}$, alors les inégalités suivantes sont bien connues :

$$\begin{aligned}
\|x^\alpha \mathcal{H}_1 f\|_{L_p} &\geq K_1 \|x^\alpha f\|_{L_p} && si \quad 0 < p < 1, \alpha < \tfrac{1}{p'}\,; \\
\|x^\alpha \mathcal{H}_1 f\|_{L_p} &\leq K_1 \|x^\alpha f\|_{L_p} && si \quad 1 \leq p \leq \infty, \alpha < \tfrac{1}{p'}\,; \\
\|x^\alpha \mathcal{H}_2 f\|_{L_p} &\geq K_2 \|x^\alpha f\|_{L_p} && si \quad 0 < p < 1, \alpha < \tfrac{1}{p'}\,; \\
\|x^\alpha \mathcal{H}_2 f\|_{L_p} &\leq K_2 \|x^\alpha f\|_{L_p} && si \quad 1 \leq p \leq \infty, \alpha < \tfrac{1}{p'}\,,
\end{aligned}$$

où $k_1 = (\frac{1}{p'-\alpha})^{-1}$ *et* $k_2 = (\frac{\alpha-1}{p'})^{-1}$ *. Les constantes* k_1 *et* k_2 *sont les meilleures possibles dans tous les cas.*

Dans la suite le travail est organisé de la manière suivante : dans la Section 2, on présente quelques notations et autres préliminaires. Dans la Section 3 on présente les résultats principaux et présente quelques exemples. Les principaux résultats sont prouvés dans la Section 4. Dans la Section 5 on généralise lemme 3.6.1 et prouve quelques inégalités intégrales pour les fonctions quasimonotones. On souligne également que ces inégalités peuvent être utilisées pour donner des preuves alternatives des inégalités dans les principaux résultats (compris tous les cas d'égalité). En particulier, il est souligné que preuves des principaux résultats peuvent être basées sur des lemmes numériques indépendants, puis, sont données certaines applications.

3.6 Préliminaires

Dans cet travail, on va considérer les fonctions quasimonotones f *sur* $]0,\infty[$*, cela signifie que, pour un nombre réel* α, $f(x)x^{\alpha}$ *est une fonction décroissante ou croissante de* x*. Plus précisément, on dit que* $f \in Q_{\beta}$ *si et seulement si,* $f(x)x^{-\beta}$ *est non-croissante. En outre, pour* $0 < p \leq \infty, p'$ *est défini par* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $(p' = \infty$ *pour* $p = 1$ *et* $p' = 1$ *pour* $p = \infty)$*. Par* $\Gamma(u)$ *et* $B(u,v)$ *avec* $u, v > 0$ *on dénote par Gamma et Bêta fonctions habituelles, respectivement. on rappelle les relations suivantes bien connues :*

$$\begin{aligned} \Gamma(u) &= \int_0^{\infty} \exp^{-t} t^{u-1} du, \Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \\ B(u,v) &= \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+1)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt. \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

On va utilisé le lemme suivant.

Lemme 3.6.1.

(a) Soit $-\infty < a < b \leq \infty$ *et supposons que* f *est non-négative et non-croissante sur* (a,b)*. Si* $0 < p \leq 1$*, alors*

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p \int_a^b (y-a)^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.6.2}$$

L'inégalité valable dans le sens inverse si $1 \leq p < \infty$*.*

(b) Soit $-\infty \leq a < b < \infty$ *et supposons que* f *est non-négative et non-décroissante sur* (a,b)*. Si* $0 < p \leq 1$*, alors*

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p \int_a^b (b-y)^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.6.3}$$

L'inégalité valable dans le sens inverse si $1 \leq p < \infty$.

(c) *Le facteur* p *est le meilleur possible dans ces inégalités. Pour* $0 < p < \infty, p \neq 1$, *l'égalité dans* (2.2) *est vraie si et seulement si, pour certains* $c \in (a,b)$ *si* $(b = \infty)$, *alors* $c < \infty$ *et pour certains* $A \geq 0$,

$$f(y) = A\chi_{(a,c)}(y), y \in (a,b) \text{ et } 0 \leq f(c) \leq A(si c < b).$$

Par conséquence, pour $0 < p < \infty, p \neq 1$, *l'égalité dans* (2.3) *est valable si et seulement si, pour certains* $c \in (a,b)$ *(si* $a = -\infty$, *alors* $c > -\infty$*) et pour certains* $A \geq 0$,

$$f(y) = A\chi_{(c,b)}(y),\ y \in (a,b), \text{et } 0 \leq f(c) \leq A\ ,(c > a).$$

Preuve . *Supposons que* $-\infty < a < b < \infty$. *Tout d'abord on note que le cas de l'inégalité* (3.6.3) *est réduit au cas de l'inégalité* (3.6.2) *si on pose* $g(y) = f(a+b) - y$ *et, ainsi, il suffit de prouver les affirmations concernant l'inégalité* (3.6.2). *Cette transformation on amène alors au cas où* $a = 0$ *et* $b = 1$, *c'est-à-dire à l'intervalle* $[0,1]$. *Par conséquent, on considère une fonction non-négative, non-croissante et lisse* f *avec* $f(y) > 0$ *si*$0 \leq y < 1$ *et* $f(1) = 0$.*On définit maintenant*
$g(t) = \left(\int_0^t f(y)dy\right)^p - p\int_0^t y^{p-1}f^p(y)dy$ *pour* $t \in [0,1]$. *La fonction* g *est continue sur* $[0,1]$, *dérivable sur* $[0,1] \setminus \Delta$, *où* $\Delta = 0$ *ou* Δ *est un ensemble fini ou dénombrable,*
$g(0) = 0$ *et* $g'(t) = p\left(\int_0^t f(y)dy\right)^{p-1} f(t) - pt^{p-1}(t)$ *pour* $t \in [0,1] \setminus \Delta$. *En autre, comme* $tf(t) \leq \int_0^t f(y)dy\ (0 \leq t \leq 1)$, *il en résulte que, si* $0 < p \leq 1$, *alors* $g'(t) \leq 0$ *et si*$1 \leq p < \infty$, *alors* $g'(t) \geq 0$. *Ces faits prouvent l'inégalité* (3.6.2). *Si* $a = -\infty$ *ou* $b = +\infty$, *on obtient les inégalités* (3.6.2) *et* (3.6.3) *par en passant à la limite.*

3.7 Les principaux résultats.

Tout d'abord on explique les conditions sur les paramètres qui sont nécessaires pour la validité des inégalités que on obtenue dans nos principaux résultats pour les opérateurs $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$ *(voir Théorèmes* (3.7.1) *et 3.2 ci-dessous).*

(a). *Pour* $\mathcal{H}_1$, *on doit déduit* $\alpha < \frac{1}{p'}$ *parce que si* $\alpha \geq \frac{1}{p'}$, *alors, pour chaque fonction non trivial* $f, \|x^\alpha(\mathcal{H}_1)(x)\|_{L_p} = \infty$ *Pour* $\mathcal{H}_2$, *on doit déduit* $\alpha > \frac{1}{p'}$ *pour la même raison.*

(b). *Pour* $f \in Q_\beta$ *on doit déduit* $\alpha > -\beta - \frac{1}{p}$ *parce que si* $\alpha \leq -\beta - \frac{1}{p}$, *alors, pour chaque fonction non triviale* $f, \|x^\alpha f(x)\|_{L_p} = \infty$ *Pour* $f \in Q^\beta$ *on doit déduit* $\alpha < -\beta - \frac{1}{p}$ *pour la même raison.*

(c). *Pour l'opérateur $\mathcal{H}_1$ on applique à $f \in Q^\beta$ on doit déduit $\beta > -1$ car si $\beta \leq -1$, alors, pour chaque fonction non triviale $f, (H_1 f)(x) = \infty, 0 < x < \infty$. . En conséquence, pour l'opérateur $\mathcal{H}_2$ appliqué à $f \in Q^\beta$ on a $\beta < -1$. Nos principaux résultats pour l'opérateur $\mathcal{H}_1$ sont :*

Théorème 3.7.1.

Soit $0 < p < 1$.

(i). Si $f \in Q_\beta$ avec $\beta > -1$ et $-\beta - 1 < \alpha < \frac{1}{p'}$, alors

$$\left\|x^\alpha(\mathcal{H}_1 f)(x)\right\|_{L_p} \leq (\beta+1)^{-\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-\frac{1}{p}} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.7.1}$$

(ii). Si $f \in Q^\beta$ avec $\beta < -1$ et $\alpha < \frac{1}{p'}$, alors

$$\left\|x^\alpha(\mathcal{H}_1 f)(x)\right\|_{L_p} \leq |\beta+1|^{-1} \left(pB\left(p, p|\beta+1|^{-1}\left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.7.2}$$

(iii). Si $f \in Q^\beta$ avec $\beta = -1$ et $\alpha < \frac{1}{p'}$, alors

$$\left\|x^\alpha(H_1 f)(x)\right\|_{L_p} \leq p^{-\frac{1}{p'}} (\Gamma(p))^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.7.3}$$

(iv). Si $f \in Q^\beta$ avec $\beta > -1$, et$\alpha < -\frac{1}{p} - \beta$, alors

$$\left\|x^\alpha(H_1 f)(x)\right\|_{L_p} \leq (\beta+1)^{-1} \left(pB\left(p, p(\beta+1)^{-1}\left|\alpha + \frac{\beta}{p'}\right|\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.7.4}$$

(v). Si $1 \leq p \leq \infty$, alors les inégalités (3.7.1) − (3.7.4) sont valables dans le sens inverse (pour $p = \infty$ les constantes correspondantes sont obtenues en passant à la limite lorsque $p \longrightarrow +\infty$).

***Exemple* 5.** *Soit $\alpha < -\frac{1}{p}$ et soit f une fonction non-négative et non-croissant. Si $0 < p < 1$, alors*

$$\|x^\alpha(\mathcal{H}_1 f)(x)\|_{L_p} \leq (p\beta(p, -\alpha p))^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.5}$$

L'inégalité est vérifiée dans le sens inverse si $1 \leq p \leq \infty$. La constante dans l'inégalité (3.7.5) est la meilleure possible.

***Exemple* 6.** *Soit $-\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$ et soit f non négative et non-croissante fonction. Si $0 < p < 1$, alors*

$$\|x^\alpha(\mathcal{H}_1 f)(x)\|_{L_p} \leq (\frac{1}{p'} - \alpha)^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.6}$$

L'inégalité est valable dans le sens inverse si $1 \leq p \leq \infty$. La constante dans l'inégalité (6) est la meilleure possible.

Théorème 3.7.2.

Soit $0 < p < 1$.

(I) *Si $f \in Q_\beta$ avec $\beta < -1$ et $\alpha > -\beta - \frac{1}{p}$, alors*

$$\|x^\alpha (\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq |\beta + 1|^{-1} (pB(p, p|\beta + 1|^{-1}(\alpha + \frac{\beta}{p'})))^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.7}$$

(II) *Si $f \in Q_\beta$ avec $\beta = -1$ et $\alpha > \frac{1}{p'}$, alors*

$$\|x^\alpha (\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq p^{-\frac{1}{p'}} (\Gamma(p))^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.8}$$

(III) *Si $f \in Q_\beta$ avec $\beta > -1$ et $\alpha > \frac{1}{p'}$, alors*

$$\|x^\alpha (\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq (\beta + 1)^{-1} (pB(p, p(\beta + 1)^{-1}(\alpha - \frac{1}{p'})))^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.9}$$

(IV) *Si $f \in Q^\beta$ avec $\beta < -1$ et $\frac{1}{p'} < \alpha < -\beta - \frac{1}{p}$, alors*

$$\|x^\alpha (\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq |\beta + 1|^{-\frac{1}{p'}} \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.10}$$

(V) *Si $1 \leq p \leq \infty$, alors les inégalités (3.7.7)-(3.7.10) sont valable dans le sens inverse (pour $p = \infty$ Les constantes correspondantes sont obtenues en passant à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$).*

(VI) *Toutes les constantes des inégalités en (I) -(V) sont les meilleures possibles. Pour $0 < p < 1$. En particulier, le Théorème (3.7.2) contient les estimations suivantes pour l'opérateur $\mathcal{H}_2$.*

Exemple 7. *Soit $\alpha > \frac{1}{p'}$ et soit f une fonction non-négative et non-décroissante. Si $0 < p < 1$, alors*

$$\|x^\alpha (\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq (pB(p, p(\alpha - \frac{1}{p'})))^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.11}$$

L'inégalité est valable dans le sens inverse si $1 \leq p \leq \infty$. La constante dans (3.7.11) est la meilleure possible.

Remarque .

Le cas $0 < p < 1$ différentes preuves de cette proposition ont récemment été présentées dans [6] et [4],[21]. De plus, en utilisant la relation bien connue $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ dans le Théorème (3.7.2) on obtient l'estimation suivante

Exemple 8. *Soit $f \in Q_\beta$ avec $\beta > -1$. Si $0 < p < 1$, alors*

$$\|x^{\frac{-\beta}{p'}}(\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq (\beta+1)^{-1}\left(\frac{p\pi}{\sin \pi p}\right)^{\frac{1}{p}} \|x^{\frac{-\beta}{p'}} f(x)\|_{L_p}. \tag{3.7.12}$$

L'inégalité est vérifiée dans le sens inverse si $1 \leq p \leq \infty$. La constante dans (3.7.12) est la meilleure possible.

Remarque .

Pour le cas $\beta = 0$ (f est non-croissante) et $0 < p < 1$ l'inégalité (3.7.12) a été obtenu indépendamment dans [4] et [6]. En résumé, selon le Théorème (3.5.1) et les exemples (5), (6) et (7), nous avons les estimations inférieures et supérieures suivantes pour les normes L_{p,x^α} des opérateurs $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ dans les classes des fonctions monotones (ils fournissent le correspondant valeurs exactes des normes des opérateurs $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et de leurs opérateurs inverses dans les espaces appropriés).

Corollaire 1.

1. *Soit $\alpha > \frac{1}{p'}$ et soit f une fonction non-négative et non-croissante . Si $0 < p < 1$, alors*
$$\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p} \leq \|x^\alpha (\mathcal{H}_2 f)(x)\|_{L_p} \leq pB\left(p, p\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}.$$
. Si $1 \leq p \leq \infty$, alors les inégalités sont valables dans la direction inverse.
2. *Soit $-\frac{1}{p'} < \alpha < \frac{1}{p'}$ et soit f une fonction non-négative et non-croissant . Si $0 < p < 1$, alors*
$$\left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p} \leq \|x^\alpha (\mathcal{H}_1 f)(x)\|_{L_p} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}.$$
Si $1 \leq p \leq \infty$, alors les inégalités se maintiennent dans la direction inverse.
3. *Soit $\alpha < \frac{1}{p}$ et soit f une fonction non-négative et non-décroissante. Si $0 < p < 1$, alors*
$$\|x^\alpha f(x)\|_{L_p} \leq \|x^\alpha (\mathcal{H}_1 f)(x)\|_{L_p} \leq (pB(p, \alpha p))^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p}.$$
Si $1 \leq p \leq \infty$, alors les inégalités sont valables dans le cas inverse.
4. *Les constantes de ci- dessus inégalités sont les meilleures possibles.*

Les inégalités de gauche dans le corollaire (1)(1) et (2) ne sont que celles de Hardy.

3.8 Preuve des résultats essentiels.

Preuve du théorème : . (3.7.1) *et* (3.7.2) *. Pour les cas* $\beta = 0$.

1. *Soit* $f \in Q^0$ *et* $\alpha < -\frac{1}{p}$*. alors, d'après le lemme* 3.6.1 (*b*) *et en utilise le changement de variable* $t = \frac{y}{x}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
\left(\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p &= \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x f(y)dy\right)^p dx \\
&\leq p\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x (x-y)^{p-1} f^p(y)dy\right)dx \\
&= p\int_0^{\infty} f^p(y)\left(\int_0^x (x-y)^{p-1} f^p(y)dx\right)dy \qquad (3.8.1)\\
&= pB(p,-\alpha p)\left(\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_p}\right). \qquad (3.8.2)
\end{aligned}$$

De plus, si, pour certains $c > 0$ *et certains* $A \geq 0$, $f(x) = A\chi_{(c,\infty)}(x)\ x \neq c$*, alors*

$$\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_p} = Ac^{\alpha+\frac{1}{p}}\left|\alpha p+1\right|^{-\frac{1}{p}},$$

et

$$\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}f\right)(x)\right\|_{L_p} = \left(\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x f(y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = A\left(\int_c^{\infty} x^{(\alpha-1)p}(x-c)^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

on faire le changement de variable $t = \frac{c}{x}$*, on obtint*

$$\begin{aligned}
Ac^{\alpha+\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^{-\alpha p-2}(t-1)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &= Ac^{\alpha+\frac{1}{p}}\left(B(p+1,-\alpha p-1)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= Ac^{\alpha+\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(-\alpha p-1)}{\Gamma(p-\alpha p)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= Ac^{\alpha+\frac{1}{p}}p^{\frac{1}{p}}\left|\alpha p+1\right|^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(-\alpha p)}{\Gamma(p-\alpha p)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= Ac^{\alpha+\frac{1}{p}}\left|\alpha p+1\right|^{-\frac{1}{p}}\left(pB(p,-\alpha p)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(pB(p,-\alpha p)\right)^{\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_p}. \qquad (3.8.3)
\end{aligned}$$

.

2. *Soit* $f \in Q_0$ *et* $-\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$. *Ensuite, en utilisant le lemme* 3.6.1 (*a*), *on a*

$$\begin{aligned}
\left(\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p &= \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x f(y)dy\right)^p dx \\
&\leq p\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\int_0^x y^{p-1}f^p(y)dy \\
&= p\int_0^{\infty} y^{p-1}f^p(y)\left(\int_y^{\infty} x^{(\alpha-1)p}dx\right)dy \\
&= \frac{p}{p-\alpha p-1}\int_0^{\infty} f^p(y)y^{\alpha P}dy \\
&= \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1}\left(\left\|f(x)x^{\alpha}\right\|_{L_p}\right)^P. \qquad (3.8.4)
\end{aligned}$$

3. *Soit* $f \in Q_0$ *et* $\alpha > \frac{1}{p'}$. *En utilisant lemme* 3.6.1 (*a*) *et le changement de variable* $t = \frac{x}{y}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\left(\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}_2f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p &= \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_x^{\infty} f(y)dy\right)^p dx \\
&\leq p\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_x^{\infty}(y-x)^{p-1}f^p(y)dy\right)dx \\
&= p\int_0^{\infty} f^p(y)\left(\int_0^y x^{(\alpha-1)p}(y-x)^{p-1}dx\right)dy \\
&= p\int_0^{\infty}(1-t)^{p-1}\,dt\int_0^{\infty} f^p(y)dy \\
&= aB\left(p,p\left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)\right)\left(\left\|f(x)x^{\alpha}\right\|\right)^p. \qquad (3.8.5)
\end{aligned}$$

.

4. *Si* $1 \leq p \leq \infty$, *alors on trouve de la même manière que les inégalités dans* (3.8.1) – (3.8.5) *sont valables dans le sens inverse et que les fonctions extrêmes sont de même.*

□

Remarque .

La preuve ci-dessus (cf. [7]) peut être considérée comme une preuve indépendante des propositions dans nos exemples (5) , (6) et (7) *et, par conséquent, du corollaire* (1).

Preuve . *Le cas* $\beta \neq 0$.

Pour $f \in Q_\beta$ *ou* $f \in Q^\beta$,*on définie* $h(x) = x^{-\beta}f(x)$,*et on note que* $h \in Q_\beta$ *et* $h \in Q^0$ *respectivement. On pose* $\alpha^* = (\beta+1)^{-1}\left(\alpha+\frac{\beta}{p'}\right)$ *et* $f^*(x) = h\left(x^{\frac{1}{\beta+1}}\right)$ *et on remarque que si*

$f \in Q_\beta \,(f \in Q^\beta)$, $\beta > -1$,alors $f^* \in Q_0 \,(f^* \in Q^0)$. Premièrement on preuve que : si $f \in Q^\beta$ ou $f \in Q_\beta$,avec $\beta > -1$, alors

$$\left\| x^\alpha \left(\mathcal{H} f\right)(x)\right\|_{L_p} = (\beta+1)^{-1-\frac{1}{p}} \left\| a^\alpha \left(\mathcal{H} f^*\right)(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.8.6}$$

Et

$$\begin{aligned} \left(\left\| x^\alpha \left(\mathcal{H}_[1] f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p &= \left(\left\| x^\alpha \left(\mathcal{H}_1\left(y^\beta h(y)\right)(x)\right)\right\|_{L_p}\right)^p \\ &= \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x y^\beta h(y)dy\right)^p dx, \end{aligned}$$

on faire le changement de variable $u = y^{\beta+1}$, on obtient

$$\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x y^\beta h(y)dy\right)^p dx = (\beta+1)^{-p}\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^{x^{\beta+1}} h(u^{\frac{1}{\beta+1}})du\right)^p dx,$$

on faire noueux le changement de variable $t = x^{\beta+1}$, d'ou

$$\begin{aligned} (\beta+1)^{-p-1}\int_0^\infty t^{((\alpha-1)p-\beta)/(\beta+1)}\left(\int_0^t h\left(u^{\frac{1}{\beta+1}}\right)du\right)^p dt &= (\beta+1)^{-p-1}\left\| t^{\frac{\alpha+\beta/p'}{\beta+1}}\left(\mathcal{H}_1 h\left(u^{\frac{1}{\beta+1}}\right)\right)(t)\right\|_{L_p} \\ &= (\beta+1)^{-p-1}\left\| t^{\alpha^*}\left(\mathcal{H}_1 f^*\right)(t)\right\|_{L_p}. \end{aligned}$$

De plus , on a

$$\left(\left\| x^\alpha \left(\mathcal{H} f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p = \left|\beta+1\right|^{\frac{1}{p}} \left\| x^{\alpha^*} \left(\mathcal{H}_2 f^*\right)(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.8.7}$$

En utilisant le changement de variable $u = y^{\beta+1}$, on obtient

$$\left(\left\| x^\alpha \left(\mathcal{H}_1 f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p = \left|\beta+1\right|^{-1}\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_{x^{\alpha-1}}^\infty h\left(u^{\frac{1}{\beta+1}}\right)du\right)^p dx.$$

On faire nouveaux le changement de variable $t = x^{\beta+1}$, d'ou

$$\begin{aligned} \left|\beta+1\right|^{-1}\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_{x^{\alpha-1}}^\infty h\left(u^{\frac{1}{\beta+1}}\right)du\right)^p dx &= \left|\beta+1\right|^{-p-1}\int_0^\infty t^{\frac{(\alpha-1)p-\beta}{\beta+1}}\left(\int_t^\infty h\left(u^{\frac{1}{\beta+1}}\right)du\right)^p dt \\ &= \left|\beta+1\right|^{-p-1}\left(\left\| t^{\alpha^*}\left(\mathcal{H}_2 f^*\right)(t)\right\|_{L_p}\right)^p. \end{aligned}$$

Les preuves de (i) , (ii),(iii), (iv) et (v) découlent des égalités (3.8.6),(3.8.7) et les déclarations que nous avons déjà prouvées pour le cas $\beta = 0$. On considère les cas suivants séparément :

(i)Soit $f \in Q_\beta$ avec $\beta > -1$. Alors $f \in Q_0$ et l'inégalité $-\beta - \frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$ équivalant à l'inégalité $-\frac{1}{p'} < \alpha^* < \frac{1}{p'}$. Par conséquent, d'après (3.8.4) et (3.8.6), on a

$$\begin{aligned} \left\| x^\alpha \left(\mathcal{H}_1 f\right)(x)\right\|_{L_p} &= (\beta+1)^{-1-\frac{1}{p}}\left\| x^* \left(\mathcal{H}_1 f^*\right)(x)\right\|_{L_p} \\ &\leq (\beta+1)^{-1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha^*\right)^{\frac{1}{p}}\left\| x^* f^*(x)\right\|_{L_p} \\ &= (\beta+1)^{-1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-\frac{1}{p}}\left\| x^{\frac{\alpha+\beta/p'}{(\beta+1)}} h\left(x^{\frac{1}{\beta+1}}\right)\right\|_{L_p}, \end{aligned}$$

on faire le changement de variable ($t = x^{\frac{1}{\beta+1}}$), on obtient

$$\begin{aligned}
(\beta+1)^{-1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-\frac{1}{p}}\left\|x^{\frac{\alpha+\beta/p'}{(\beta+1)}}h\left(x^{\frac{1}{\beta+1}}\right)\right\|_{L_p} &= (\beta+1)^{-\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha^*\right)^{-\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha+\beta}h(x)\right\|_{L_p}\\
&= (\beta+1)^{-\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha}f(x)\right\|_{L_p},
\end{aligned}$$

donc

$$\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}_1 f\right)(x)\right\|_{L_p} = (\beta+1)^{-\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha}f(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.8.8}$$

(*ii*) *Soit $f \in Q^{\beta}$ avec $\beta < -1$, et $\alpha < \frac{1}{p}$.Alors $f \in Q_0$et l'inégalité $\alpha < \frac{1}{p'}$ est équivalant à l'inégalité $\alpha^* > \frac{1}{p'}$, d'après* (3.8.5) *et* (3.8.7).

$$\begin{aligned}
\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}_1 f\right)(x)\right\|_{L_p} &= \left|\beta+1\right|^{-1-\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha^*}\left(\mathcal{H}_2 f^*\right)(x)\right\|_{L_p}\\
&\leq \left|\beta+1\right|^{-1-\frac{1}{p}}\left(pB\left(p,p\left(\alpha^*-\frac{1}{p'}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha^*}f^*(x)\right\|_{L_p}\\
&= \left|\beta+1\right|^{-1-\frac{1}{p}}\left(pB\left(p,p\left|\beta+1\right|^{-1}\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha}f(x)\right\|_{L_p}.
\end{aligned}$$

(*iv*) *Soit $f \in Q^{\beta}$ avec $\beta > -1$ et $\alpha < -\beta-\frac{1}{p}$. Alors $f^* \in Q^{\beta}$ et l'inégalité $\alpha < \beta-\frac{1}{p}$ équivalant à l'inégalité $\alpha^* < -\frac{1}{p}$. En utilisant* (3.8.3) *et* (3.8.6), *on obtient que*

$$\begin{aligned}
\left\|x^{\alpha}\left(\mathcal{H}_1 f\right)(x)\right\|_{L_p} &= (\beta+1)^{-1-\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha^*}\left(\mathcal{H}_1 f^*\right)(x)\right\|_{L_p}\\
&\leq (\beta+1)^{-1\frac{1}{p}}\left(pB\left(p,-\alpha^* p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha^*}f^*(x)\right\|_{L_p}\\
&= (\beta+1)^{-1}\left(pB\left(p,(\beta+1)^{-1}\left|\alpha+\frac{\beta}{p'}\right|\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left\|x^{\alpha}f(x)\right\|_{L_p}.
\end{aligned}$$

(*v*) *Si $1 \leq p \leq \infty$, alors on trouve de façon similaire que les inégalités en* (3.8.3) - (3.8.5) *se maintiennent dans le sens inverse et que les fonctions extrêmes sont les même.* (*iii*) *Maintenant, on considère le cas restant lorsque $f \in Q^{-1}$ et $\alpha < \frac{1}{p'}$. Pour chaque nombre naturel k on définie $f_k(x) = x^{-\frac{1}{k}}f(x)$ et note que $f_k \in Q^{-1-\frac{1}{k}}$ et, ainsi, que l'inégalité* (5) *valable avec $\beta = -1-\frac{1}{k}$. Maintenant, l'inégalité* (6) *peut être obtenu en passant à la limite lorsque $k \longrightarrow \infty$ depuis, par* (3.6.1) *et la formule de Stirling,*

$$\begin{aligned}
k\left(pB\left(p,pk\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} &\cong k\left(p\Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{pk\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)-1}{e}\right)^{k\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)-\frac{1}{p}}\left(\frac{e}{pk\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)+p-1}\right)^{k\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)-\frac{1}{p}+1}\\
&= \left(p\Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}}\frac{ke}{pk\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)+p-1}\left(1+\frac{1}{k\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)-\frac{1}{p}}\right)^{-\left(k\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)-\frac{1}{p}\right)}\\
&\cong p^{-\frac{1}{p'}}\left(\Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

où le signe $\cong$ signifie "asymptotiquement égal à". Enfin, le cas $1 \leq P \leq \infty$ est prouvé de la même manière et la preuve est complète.

$\square$

***Preuve du théorème :** . (3.7.2) On considère $f^*(x) = x^{-2}f(x^{-1}), \alpha^* = -\alpha + \frac{2}{p'}$,et $\beta^* = -\beta - 2$. En faisant un changement de variables ($z = \frac{1}{p'}$), on trouve facilement que*

$$(\mathcal{H}_2(f(y)))(x) = x^{-2}(\mathcal{H}_1(f^*(y)))(x^{-1}),$$

$$\left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L_p} = \left\|x^{\alpha^*} f^*(x)\right\|_{L_p},$$

et

$$\left\|x^\alpha(\mathcal{H}_2 f)(x)\right\|_{L_p} = \left\|x^{\alpha^*}(\mathcal{H}_1 f^*)(x)\right\|_{L_p}.$$

De plus, les conditions $f \in Q^\beta$ et $f \in Q_\beta$ sont équivalentes aux conditions $f \in Q^{\beta^*}, f \in Q_{\beta^*}$, respectivement. Ces quatre observations réduisent les énoncés du Théorème (3.7.2) aux énoncés correspondants du Théorème (3.7.1) . Par exemple, la proposition dans (I) est obtenue de la manière suivante : soit $f \in Q_\beta$. avec $\beta > -1, 0 < p < 1$ et $\alpha > -\beta - \frac{1}{p}$. Ces conditions sont équivalentes aux conditions $0 < p < 1, f^* \in Q^\beta, \beta^* > -1 et \alpha^* < -\beta^* - \frac{1}{p}$. Par conséquent, selon (3.7.4) ,

$$\begin{aligned}
\left\|x^\alpha(\mathcal{H}_2 f)(x)\right\|_{L_p} &= \left\|x^{\alpha^*}(\mathcal{H}_1 f^*)(x)\right\|_{L_p} \\
&\leq (\beta^* + 1)^{-1}\left(pB\left(p, \frac{p}{\beta^* + 1}\left|\alpha^* + \frac{\beta^*}{p'}\right|\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left\|x^{\alpha^*} f^*\right\|_{L_p} \\
&= \left|\beta + 1\right|^{-1}\left(pB\left(p, \frac{p}{\left|\beta + 1\right|}\left(\alpha + \frac{\beta}{p'}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left\|x^\alpha f(x)\right\|_{L_p}.
\end{aligned}$$

Les preuves des autres cas découlent du Théorème (3.7.1) de manière similaire.

$\square$

3.9 Quelques estimations intégrales optimales pour les fonctions quasimonotones

Dans cette section nous prouvons une généralisation du Lemme (3.6.1) et considérons une "alternative" afin de prouver nos principaux résultats.

***Proposition* 3.9.1.**

(a) *Soit $-\infty < \beta < \infty$, $f \in Q_\beta$ et $0 \leq a < b \leq \infty$ pour $\beta > -1$ et $0 < a < b \leq \infty$ pour $\beta \leq -1$.Si $0 < p \leq 1$ et $\beta \neq -1$,alors*

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p\left|\beta+1\right|^{1-p} \int_a^b \left(\frac{\left|y^{\beta+1}-a^{\beta+1}\right|}{y^\beta}\right)^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.9.1}$$

Si $0 < p \leq 1$ et $\beta = -1$,alors

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p\int_a^b \left(y\ln\frac{y}{a}\right)^{p-1} f^p(y)dyf^p(y)dy. \tag{3.9.2}$$

Les inégalités sont valables dans le sens inverse si $1 \leq p < \infty$.

(b) *Soit $-\infty < \beta < \infty$, $f \in Q^\beta$ et $0 \leq a < b \leq \infty$ pour $\beta < -1$ et $0 \leq a < b < \infty$ pour $\beta \geq -1$. Si $0 < p \leq 1$ et $\beta \neq -1$, alors*

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p\left|\beta+1\right|^{1-p} \int_a^b \left(\frac{\left|y^{\beta+1}-b^{\beta+1}\right|}{y^\beta}\right)^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.9.3}$$

Si $0 < p \leq 1$ et $\beta = -1$,alors

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p\int_a^b \left(y\ln\frac{b}{y}\right)^{p-1} f^p(y)dyf^p(y)dy. \tag{3.9.4}$$

Les inégalités sont valables dans le sens inverse si $1 \leq p < \infty$.

(c) *Les constantes de ces inégalités sont les meilleures possibles dans tous les cas.*

Les cas particuliers suivants de la Proposition (3.9.1) revêtent une importance particulière et devrait être comparés au Lemme (3.6.1) :

***Exemple* 9.** *Si $\beta > -1$, $f \in Q_\beta$ et $0 < b \leq \infty$,alors*

$$\left(\int_0^b f(y)dy\right)^p \leq p\left(\beta+1\right)^{1-p} \int_0^b y^{p-1} f^p(y)dy.$$

***Exemple* 10.** *Si $\beta < -1$, $f \in Q^\beta$ et $0 \leq a < \infty$,alors*

$$\left(\int_a^\infty f(y)dy\right)^p \leq p\left|\beta+1\right|^{1-p} \int_a^\infty y^{p-1} f^p(y)dy.$$

***Preuve* .** *Soit $0 < p \leq 1$; $f \in Q_\beta$ et $h(y) = y^{-\beta} f(y)$. Si $\beta > -1$ et $0 \leq a < b \leq \infty$, puis*

$h\left(y^{\frac{1}{\beta+1}}\right) \in Q_0$ *, selon* (3.6.2) *, et on utilise le changement de variable* $x = y^{\beta+1}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p &= \left(\int_a^b y^\beta h(y)dy\right)^p \\ &= (\beta+1)^{-p}\left(\int_{a^{\beta+1}}^{b^{\beta+1}} h(x^{\frac{1}{\beta+1}})dx\right)^p \\ &\leq p\,(\beta+1)^{1-\beta}\int_a^b \left(y^{\beta+1}-a^{\beta+1}\right)^{\beta-1} \\ &= p\,(\beta+1)^{1-\beta}\int_a^b \left(\frac{y^{\beta+1}-a^{\beta+1}}{y^\beta}\right)^{p-1} f^p(y)dy.\end{aligned}$$

Si $\beta < -1$ *et* $0 < a \leq \infty$*, alors* $h\left(y^{\frac{1}{\beta+1}}\right) \in Q^0$ *, compte tenu de* (3.6.3) *,*

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p &= \left|\beta+1\right|^{-p}\left(\int_{b^{\beta+1}} a^{\beta+1} h\left(x^{\frac{1}{\beta+1}}\right)dx\right)^p \\ &= p\left|\beta+1\right|^{-p}\int_{b^{\beta+1}} a^{\beta+1}\left(a^{\beta+1}-x\right)^{\beta-1} h^p\left(x^{\frac{1}{\beta+1}}\right)dx \\ &= p\left|\beta+1\right|^{-p}\int_a^b \left(\frac{a^{\beta+1}-y^{\beta+1}}{y^\beta}\right)^{p-1} f^p(y)dy.\end{aligned}$$

Si $\beta = -1$ *et* $0 < a < b \leq \infty$ *, alors* $h(x^e) \in Q_0$ *et, par* (3.6.2) *, et le changement de variable* $x = \ln y$*, on a :*

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p &= \left(\int_a^b h(y)\frac{dy}{y}\right)^p \left(\int_{\ln a}^{lnb} h(e^x)dx\right)^p \\ &\leq p\int_{\ln a}^{\ln b} (x-\ln a)^{p-1} h^p\left(e^x\right)dx \\ &= p\int_{\ln a}^{\ln b} (\ln y-\ln a)^{p-1} h^p\left(y\right)dy \\ &= p\int_a^b \left(y\ln\frac{y}{a}\right)^{p-1} f^p(y)dy.\end{aligned}$$

En utilisant la proposition (3.9.1) *, nous pouvons donner une autre preuve du Théorème* (3.7.1) *(et celle du Théorème* (3.7.2) *).*

□

Preuve de: . *Soit* $0 < p < 1, \alpha < \frac{1}{p'}$ *et* $f \in Q^{-1}$*, d'après la proposition* (3.9.1)*, donc*

$$\begin{aligned}\left(\left\|x^\alpha\left(\mathcal{H}f\right)(x)\right\|_{L_p}\right)^p &= \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x f(y)dy\right)^p dx \\ &\leq p\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x \left(y\ln\frac{x}{y}\right)^{p-1} f^p(y)dy\right)dx\,,\end{aligned}$$

on faire le changement de variable $t = \frac{y}{x}$, *on obtient*

$$p\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)p}\left(\int_0^x \left(y\ln\frac{x}{y}\right)^{p-1} f^p(y)dy\right)dx = p\int_0^1 t^{-(\alpha-1)p-2}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{p-1} dt\left(\left\|y^{\alpha}f(y)\right\|_{L_p}\right)^p,$$

en utiles nouveaux changement de variable $u = \ln\left(\frac{1}{t}\right)$, *d'ou*

$$p\int_0^1 t^{-(\alpha-1)p-2}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{p-1} dt\left(\left\|y^{\alpha}f(y)\right\|_{L_p}\right)^p = p\int_0^{\infty} e^{-u\left((1-\alpha)p-1\right)}u^{p-1}du\left(\left\|y^{\alpha}f(y)\right\|_{L_p}\right)^p,$$

par autre changement de variable $\xi = ((1-\alpha)p-1)\,u$

$$\begin{aligned} p\int_0^{\infty} e^{-u\left((1-\alpha)p-1\right)}u^{p-1}du\left(\left\|y^{\alpha}f(y)\right\|_{L_p}\right)^p &= p\left((1-\alpha)\,p-1\right)^{-p}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\xi^{p-1}d\xi\left(\left\|y^{\alpha}f(y)\right\|_{L_p}\right)^p \\ &= p^{-p+1}\Gamma(p)\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-p}\left(\left\|y^{\alpha}f(y)\right\|_{L_p}\right)^p. \end{aligned}$$

□

3.10 Conclusions

1. Un complément au Lemme (3.6.1) **.** *En analysant la preuve du Lemme* (3.6.1) *nous voyons que l'inégalité dans* (a) *est également valable si* f *est non-croissante où* $p > 1$. *L'inégalité inverse est vérifiée si* f *est non-décroissante et* $0 < p < 1$. *L'inégalité dans* (b) *est également valable si* f *est non-croissante avec* $p > 1$ *et l'inégalité inverse est valable si* f *est non-croissante où* $0 < p < 1$.

2. Une autre preuve du Lemme (3.6.1) **.** *La preuve de notre Lemme* (3.6.1) *découle aussi du lemme* (3.6.1) *suivant :*

***Lemme* 3.10.1.**

[8],[6]. *Soit* $a_k \geq 0$ *et* $a_k \geq a_{k+1}$, $k = 1, 2, ...$ *Puis*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\left(k^p - (k-1)^p\right)$$

pour $0 < p < 1$ *et l'inégalité est vérifiée dans le sens inverse si* $1 < p < \infty$.

Une preuve de ce lemme est obtenue en utilisant la récurrence et l' inégalité élémentaire suivante (utilisée successivement avec $\lambda = 1, 2, ...$*) : Si* $0 < p < 1$, *alors*

$$\frac{(b_1+b_2)^p - b_1^p}{b_2^p} \leq (\lambda+1)^p - \lambda^p,\ b_1 \geq \lambda b_2,\ \lambda > 0,$$

et l'inégalité inverse est valable si $p > 1$. Pour le cas $0 < p < 1$ voir [8],[6], [7]. *En fait, le lemme est équivalent au Lemme* 3.6.1. *Pour voir cela, on pose $fN(y) = a_k$, pour $k-1 \leq Ny < k$ $(1 \leq k \leq N)$. dans le lemme* 3.6.1 *et soit N tend vers l'infini.*

3. Une autre preuve du résultat principal. *Les preuves du Théorème* 3.7.1 *(et, ainsi du Théorème* 3.7.2*) sont basées sur le Lemme* 1.3.2 *ou, de manière équivalente sur le lemme numérique ci-dessus* (*comparer avec* [23]). *Une autre preuve peut être obtenue en utilisant en fait directement le lemme numérique correspondant* (voir [4] ; *comparer aussi avec* [21]).

4. Une application aux espaces de Lorentz. *Soit f^* indique le réarrangement non-croissant d'une fonction mesurable sur l'espace (Ω, μ). Les espaces de Lorentz $\Lambda_{p,q}$ $(0 < p, q < \infty)$ sont généralement définis en utilisant la quasi-norme*

$$\|f\|^{(1)}_{\Lambda_{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il est bien connu que si $p \neq 1$, alors cette quasi-norme est équivalente à celle qui suit

$$\|f\|^{(2)}_{\Lambda_{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(\mathcal{H}_1(f^*)\, t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(u)du\right)^q t^{-\frac{q}{p'}-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

pour $p > 1$ et à la quasi-norme

$$\|f\|^{(2)}_{\Lambda_{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(\mathcal{H}_2(f^*)\, t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f^*(u)du\right)^q t^{-\frac{q}{p'}-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

pour $0 < p < 1$. (Pour le cas $p > 1, q \geq 1$ c'est même une norme). À l'aide de notre corollaire (1) *avec $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, on obtient l'énoncé plus précis suivant :*

***Proposition* 3.10.1.**

(a) *Soit $p > 1$. Puis*

$$p' \|f\|^{(1)}_{\Lambda_{p,q}} \leq \|f\|^{(2)}_{\Lambda_{p,q}} \leq (p')^{\frac{1}{q}} \|f\|^{(1)}_{\Lambda_{p,q}},$$

si $0 < q \leq 1$ et les inégalités inverses sont valables si $q \geq 1$.

(b) Soit $0 < p < 1$

$$-p' \|f\|^{(1)}_{\Lambda_{p,q}} \leq \|f\|^{(2)}_{\Lambda_{p,q}} \leq \left(qB\left(q, -\frac{q}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^{(1)}_{\Lambda_{p,q}},$$

si $0 < q \leq 1$ et les inégalités inverses sont vérifiées si $q \geq 1$. De plus, toutes les constantes dans ces inégalités sont les meilleures possibles.

5. Applications. *Dans plusieurs cas les inégalités de Hardy sont utilisées dans les situations où les fonctions considérées sont monotones ou au moins quasimonotones. Les résultats obtenus dans ce travail montrent que dans tous ces cas nous pouvons également obtenir des inégalités similaires inverses .*

Conclusion

Le thème des inégalités intégrales de Hardy ou inégalités intégrales du type de Hardy est un sujet d'actualité et connait constamment des développements et des applications.

Au $2^{éme}$ chapitre dans la première partie, il est question de l'opérateur intégral de Hardy-Voltera qui est appliqué aux fonctions monotones. En tant que perspective cet opérateur peut-être appliqué à d'autres classes de fonctions plus générales, par exemple celle des fonctions quasimonotones.

Bibliographie

[1] Miguel A Ariño and Benjamin Muckenhoupt. Maximal functions on classical lorentz spaces and hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 320(2) :727–735, 1990.

[2] Irina U Asekritova, Natan Kruglyak, Lech Maligranda, and Lars-Erik Persson. Distribution and rearrangement estimates of the maximal function and interpolation. *Studia Mathematica*, 124(2) :107–132, 1997.

[3] C. Bennett and R. Sharpley. *Interpolation of Operators*. Academic Press, 1988.

[4] J. BERGH. Hardy's inequalities – a complement. *Math. Z*, 1989.

[5] B.Opic and A.Kefner. Hardy type inequalities. *Pitman Research Notes in mathematics*, 219, 1990.

[6] V. I. BURENKOV. Function spaces : Main integral inequalities connected with the spaces lpfunction spaces : Main integral inequalities connected with the spaces lp. *Moskow publishing house of the University of Friendship of Nations, Moskow*, 1989.

[7] Viktor Ivanovich Burenkov. On the best constant in hardy's inequality with 0<p<1 for monotone functions. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 194 :58–62, 1992.

[8] J. E. LITTLEWOOD G. H. HARDY and G. POLYA. Inequalities, second edition. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1988(1952).

[9] THIERRY GALLAY. *THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRATION*. UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER, 2009.

[10] G.H.Hardy. Note on a theorem of hilbert. *Mathematische Zeitschrift*, 6(3) :314–317, 1920.

[11] G.H.Hardy. Notes on some points in the integral calculus. *Messenger Math*, 57 :12–16, 1928.

[12] Amiran Gogatishvili, Maria Johansson, CA Okpoti, and L-E Persson. Characterisation of embeddings in lorentz spaces. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 76(1) :69–92, 2007.

[13] et B. Opic Gurka, P. Sharp embeddings of besov spaces with logarithmic smoothness. *Revista Matematica Complutense*, 18(1) :81–110, 2005.

[14] HP Heinig and VD Stepanov. Weighted hardy inequalities for increasing functions. *Canadian Journal of Mathematics*, 45(1) :104–116, 1993.

[15] Vakhtang Kokilashvili, Lars-Erik Persson, and Alexander Meskhi. *Weighted norm inequalities for integral transforms with product kernels*. Nova Science Publishers, Inc., 2010.

[16] Alois Kufner, Lech Maligranda, and Lars-Erik Persson. *The Hardy inequality : About its history and some related results*. Vydavatelskỳ servis, 2007.

[17] Alois Kufner and Lars-Erik Persson. *Weighted inequalities of Hardy type*. World Scientific Publishing Company, 2003.

[18] B. Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math*, 44 :31–38, 1972.

[19] CJ Neugebauer. Weights for the hardy operator on non-decreasing functions. *Int. J. Pure Appl. Math*, 60(1) :71–82, 2010.

[20] R Oinarov. Boundedness and compactness of volterra type integral operators. *Siberian Mathematical Journal*, 48(5) :884–896, 2007.

[21] L. E. PERSSON. Generalizations of some classical inequalities and their applications. *Teubner Texte Math.*, 1990.

[22] Lars-Erik Persson, Olga V. Popova, and Vladimir D.Stepanov. Two-sided hardy-type inequalities for monotone functions. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 55(8-10) :973–989.

[23] JR R. P.BOAS. Inequalities for monotonic series. *J. Math. Anal. Appl.*, 1960.

[24] E Sawyer. Boundedness of classical operators on classical lorentz spaces. *Studia Mathematica*, 96(2) :145–158, 1990.

[25] Vladimir D Stepanov. Integral operators on the cone of monotone functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3) :465–487, 1993.

[26] G. Talenti. Asseroazioni sopra una classe di disuguaghanza. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, (39) :171–185, 1969.

[27] G.N. Tomaselli. A class of inequalities. *Ball. Un. Mat. Ital*, (2) :622–631, 1969.