

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET  
Faculté des Mathématiques et d'Informatique  
Département de Mathématiques



Spécialité : Mathématiques  
Option : Analyse Fonctionnelle Et Applications

Pour obtenir  
Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

*Notions générales sur les espaces Orlicz et  
Musielak-Orlicz*

Présenté par

\*Bahloul Rabah                      \*Kheiter Hadj  
\*Benziane Bachir                    \*Mansouri Ammar

soutenu devant le Jury composé de

*Mr. Larabi Abderrahmane	Président
*Mr. Zanou Abdel kader	Encadreur
*Mr.Ouardani Abderrahmane	Examineur

Promotion : 2019 \ 2020

## REMERCIEMENT

Tout d'abord, nos remerciements vont aux Allah qui nous éclairé le chemin du savoir et de nous avoir donné le bon sens et la grande volonté pour réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur, Monsieur Zanou Abdelkader, qui a supervisé notre travail tout en nous laissant une grande marge de liberté, nous le remercions pour son encadrement, sa disponibilité et la patience de ses remarques tout au long et la réalisation de se projet.

Nous remercions également le président du jury Mr A. Larabi, et l'examineur Mr A. Ouardani d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Nous voulons, à cette occasion avec le plus grand honneur, remercier sincèrement Mr. Abed Elkader. Senouci et tout nos enseignants.

Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères gratitude à les personnes qui ont vraiment contribué à l'élaboration de la présente de ce mémoire.

Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.

Merci à tous.

♥ \_\_\_\_\_ *Je décide mon travail à* \_\_\_\_\_ ♥

ma mère pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.

À mes frères et mes sœurs.

À mes aimables amis et collègues d'étude.

À mes chers collègues de la protection civile équipe A unité du oued  
lilie chacun son nom.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet  
soit possible, je vous dit merci.

*Bahloul Rabah*

♥ \_\_\_\_\_ *Je décide mon travail à* \_\_\_\_\_ ♥

à ma mère pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.

à mon père pour son soutien, son affection et la confiance qu'il  
m'a accordé.

à tout les membres de ma famille.

à tout le groupe de ce travail.

à mes amis Fouad, Omar, Rafik, Hossine, Tayeb.

à tous ceux qui m'aiment.

à tous les étudiants de Master 2.

à tous les enseignants.

*Kheiter Hadj*

---

♥ \_\_\_\_\_ *Je décide mon travail à* \_\_\_\_\_ ♥

À mes parent. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mes aimables amis et collègues d'étude.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possibles, je vous dit merci.

\_\_\_\_\_ *Benxiane Bachir* \_\_\_\_\_

---

♥ \_\_\_\_\_ *Je décide mon travail à* \_\_\_\_\_ ♥

À mes parent. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mes aimables amis et collègues d'étude.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possibles, je vous dit merci.

\_\_\_\_\_ *Mansouri Ammar* \_\_\_\_\_

<b>Notation générale</b>		<b>v</b>
<b>Introduction</b>		<b>viii</b>
<b>1 Préliminaire</b>		<b>1</b>
1.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .		1
1.1.1 Espaces normés . . . . .		1
1.2 Quelques rappels sur la théorie de la mesure . . . . .		2
1.2.1 Mesure : non atomique, complète, $\sigma$ -finie . . . . .		2
1.2.2 Fonctions mesurables . . . . .		3
1.2.3 Mesure à densité . . . . .		3
1.3 Les espaces de Lebesgue $L_p$ $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .		3
1.3.1 Rappel de quelques résultats d'intégration . . . . .		3
1.3.2 quelques inégalités intégrales . . . . .		4
1.3.3 Les espaces de Lebesgue . . . . .		5
1.3.4 propriétés des espaces $L_p$ . . . . .		5
1.4 Les fonctions convexes . . . . .		6
<b>2 Espace modulaire</b>		<b>8</b>
2.1 propriétés de la modulaire . . . . .		9
2.2 Continuité d'un modulaire . . . . .		10
2.3 Normes sur les espaces modulaire . . . . .		10
2.4 Modulaire et norme . . . . .		11
2.5 topologie et convergence dans les espaces modulaires . . . . .		12

<b>3</b>	<b>Espace d'Orlicz</b>	<b>13</b>
3.1	Les fonctions d'orlicz et les N-fonctions . . . . .	13
3.2	Définitions et exemples . . . . .	13
3.3	Ecriture intégrale d'une N-fonction . . . . .	14
3.4	La relation entre les fonctions d'Orlicz et semi modulaire sur $\mathbb{R}$ . . . . .	15
3.5	Fonction complémentaire d'une fonction d'Orlicz . . . . .	18
3.6	Inégalité de young . . . . .	19
3.7	La condition $\Delta_2$ . . . . .	20
3.8	Espace d'Orlicz . . . . .	22
3.9	Classe d'Orlicz . . . . .	23
3.10	Modulaire d'Orlicz . . . . .	24
3.11	Normes sur les espaces d'Orlicz . . . . .	24
3.12	Propriétés des espaces d'Orlicz . . . . .	26
3.13	La convergence dans les espaces d'Orlicz . . . . .	27
3.14	La convergence modulaire dans les espaces d'Orlicz . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Espace de Musielak-Orlicz</b>	<b>28</b>
4.1	Fonction d'Orlicz généralisées . . . . .	28
4.2	La fonction conjugué . . . . .	29
4.3	Espaces de Musielak-Orlicz . . . . .	29
4.4	La condition $\Delta_2$ . . . . .	29
4.5	Modulaire d'Orlicz musielak . . . . .	29
4.6	Classe de Musielak-Orlicz . . . . .	31
4.7	Norme sur les espaces de Musielak-Orlicz . . . . .	31
4.8	Résultas de convergence . . . . .	32
4.9	Quelques propriétés des espaces de Musielak-Orlicz . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Espace de Lebesgue a exposant variable</b>	<b>36</b>
5.1	Définitions et propriétés . . . . .	36
5.1.1	Exposant variable . . . . .	36
5.2	Espaces de lebeque généralisés . . . . .	37
5.3	Les normes sur l'espace de Lebesgue a exposant variable . . . . .	37
5.4	Propriétés de l'espace de Lebesgue a exposant variable . . . . .	38
5.5	Résultats de convergence . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Applications</b>	<b>40</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>

Bibliographie

43

## NOTATION GÉNÉRALE

- $(\Omega, \Sigma, \mu)$  : Espace mesuré de mesure  $\mu$ .
- $M(\Omega, \mu)$  : l'ensemble des fonctions  $\mu$ - mesurables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$
- $M(\Omega)$  : L'ensemble des fonctions  $\mu$ - mesurables sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- $S(\Omega, \mu)$  : L'ensemble des fonctions simples sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  Presque partout.
- $f_k \rightarrow f$   $f_k$  : suite convergente vers  $f$ .
- $f_k \nearrow f$   $f_k$  : suite croissante et convergente vers  $f$ .
- $\chi_A$  : Indicatrice de  $A$ ,  $\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & t \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $L^p(\Omega) : \{f \in M(\Omega) \quad \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu < \infty \text{ pour } 1 \leq p < \infty\}$ .
- $L^\infty(\Omega) : \{f \in M(\Omega) \exists \alpha > 0, |f(t)| \leq \alpha \quad \mu - p.p. t \in \Omega\}$ .
- $\rho$  : Semi-modulaire ou modulaire
- $\rho^*$  : Semi-modulaire (ou modulaire) conjugué.
- $\varphi$  : Fonction de Musielak-Orlicz
- $\phi(\Omega, \mu)$  : Ensemble des fonction de Musielak-Orlicz.
- $\varphi^*$  : La fonction complémentaire de  $\varphi$ .
- $\rho_\varphi$  : Modulaire de musielak-Orlicz  $\rho_\varphi(f) = \int_{\Omega} \varphi(y, f(y)) d\mu$ .
- $L^\varphi(\Omega, \mu)$  : Espace de Musielak-Orlicz
- : La condition  $-\Delta_2$  Condition de croissance sur  $\varphi$ .
- $P(\Omega, \mu)$  : L'ensemble des exposants variables définis sur un ensemble mesurable  $\Omega$ .
- $P(\Omega)$  : L'ensemble des exposants variables définis sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .
- $p^+, p^-$  : sup ess et inf ess de  $p$ .
- $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$  : Espace de Lebesgue généralisé.



- $L^{p(y)}(\Omega)$  : Espace de Lebesgue généralisé muni de la mesure de Lebesgue.
- $\|\cdot\|_{\varphi}^{\circ}$  : Norme d'Orlicz.
- $\|\cdot\|_{\varphi}$  : Norme de Luxemburg.
- $\|\cdot\|_{\varphi}^A$  : Norme d'Amemiya.

Les premières tentatives pour généraliser les espaces de Lebesgue classiques  $L^p$  avec ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) ont été faites au début de l'année 1930 par W.Orlicz, quand il a considéré l'espace fonctionnel  $L^\phi(\Omega, \mu)$  défini par :

$$L^\phi(\Omega, \mu) = \left\{ f \in M(\Omega, \mu), \text{ tel que } \rho(\lambda f) = \int_{\Omega} \phi(\lambda|f(x)|)dx < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$

où  $\phi$  est une fonction convexe dite fonction d'Orlicz qui possède des propriétés analogues à celles de la fonction puissance, qui définit les espaces de Lebesgue usuels.

Par la suite H.Nakano s'est concentré sur l'étude des propriétés principales de la fonction  $\rho$ , ce qui l'a amené à définir une classe plus large d'espaces fonctionnels, appelés espaces modulaires. En 1959 W. Orlicz et J.Musielak ont développé la théorie des espaces de Musielak-Orlicz, qui sont un exemple d'espaces modulaires, défini de la même manière que les espaces d'Orlicz, en considérant une fonction  $\varphi$  définie sur  $\Omega \times [0, +\infty[$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , telle que,  $\varphi(\cdot, t)$  est mesurable, et  $\varphi(x, \cdot)$  est une fonction d'Orlicz,  $\varphi(x, t)$  est appelée fonction d'Orlicz généralisée ou encore fonction de Musielak-Orlicz.

**Exemple 0.0.1.**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = |x|^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

*cette fonction n'appartient pas à  $L^p(\mathbb{R})$  pour tout  $p$  tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ . En effet pour une valeur donnée à  $p$ ,  $f$  se développe très rapidement à l'origine et décroît lentement à l'infini. On considère les espaces  $L^2$  et  $L^4$ , puis on partage le domaine de  $f$  et on trouve  $f \in L^2([-2, 2])$  et  $f \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2, 2])$ .*

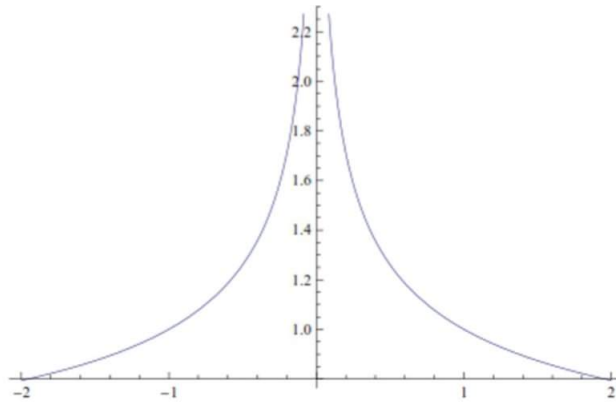


FIGURE 1 – Représentation graphique de fonction

Notre travail est structuré en six chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions et aussi quelques théorèmes fondamentaux très utiles dans ce qui suit.

Dans le deuxième chapitre nous présentons une classe importante d'espaces fonctionnels appelés espaces modulaires, nous nous intéressons aux propriétés et résultats essentiels pour définir les espaces d'Orlicz et Musielak-Orlicz.

Dans le troisième chapitre on expose brièvement les espaces fonctionnels notamment l'espace d'Orlicz et leurs propriétés (la structure géométrique, algébrique, ..etc)

Dans le quatrième chapitre nous présentons les espaces de Musielak-Orlicz, un exemple d'espaces modulaire où la modulaire est donnée par l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles. On donnera les propriétés basiques de ces espaces. Dans le cinquième chapitre on définit les espaces de Lebesgue à exposants variables  $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$  qui sont un cas particulier des espaces de Musielak-Orlicz et une généralisation des espaces de Lebesgue classiques  $L^p$ .

Dans le dernier chapitre on termine notre travail par des exemples d'applications ce qu'on a fait dans ce mémoire.

## 1.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

### 1.1.1 Espaces normés

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K$ . On appelle norme sur  $E$  toute application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  notée  $\|\cdot\|$ , vérifiant pour toute  $x, y \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Définition 1.1.** On appelle espace vectoriel normé le couple  $(E, \|\cdot\|)$ , où  $E$  est un espace vectoriel sur  $K$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ .

**Définition 1.2.** Deux normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sont dites équivalentes dans un e.v.n s'il existe deux nombres réels  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que pour tout  $x \in E$  on ait :

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

**Définition 1.3.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \quad \|x_p - x_q\| < \epsilon.$$

**Définition 1.4.** Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de  $E$  converge dans  $(E, \|\cdot\|)$ . Un espace vectoriel normé complet est dit "espace de Banach".

**Définition 1.5.**  $E'$  le dual de  $E$  est l'espace des formes linéaires continues sur  $E$ . L'ensemble  $E'$  est un espace vectoriel muni de la norme,

$$\|u\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |u(x)|.$$

## 1.2 Quelques rappels sur la théorie de la mesure

**Définition 1.6.** Soit  $E$  un ensemble quelconque. Une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre) sur  $E$  est une famille  $\mathcal{A}$  de parties de  $E$  telles que :

1.  $E \in \mathcal{A}$ ,
2.  $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$  (Stabilité par passage au complémentaire). Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés les parties mesurables, ou parfois  $\mathcal{A}$ -mesurables s'il y a ambiguïté.  $(E, \mathcal{A})$  est appelé espace mesurable.

**Définition 1.7.** Une mesure positive, ou simplement une mesure, sur un ensemble mesurable  $(E, \mathcal{A})$  est une application  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  vérifiant :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2. Pour toute famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties mesurables deux à deux disjointes on a,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Le triplet  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est appelé espace mesuré.

### 1.2.1 Mesure : non atomique, complète, $\sigma$ -finie

**Définition 1.8.** On dit que la mesure  $\mu$  est  $\sigma$ -finie lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de  $E$  par des sous-ensembles de mesures finies, c'est-à-dire il existe  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tels que :

$$\mu(E_n) < +\infty \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

**Définition 1.9.** Un ensemble  $A \in \mathcal{A}$  est dit atome si,  $\mu(A) > 0$  et pour tout sous-ensemble mesurable  $B$  de  $A$  avec  $\mu(B) < \mu(A)$  on a  $\mu(B) = 0$ . Une mesure est dite non atomique si pour tout ensemble mesurable  $A$  avec  $\mu(A) > 0$ , il existe un sous-ensemble mesurable  $B$  de  $A$  tel que :

$$0 < \mu(B) < \mu(A).$$

$C$  'est-à-dire,  $A$  n'est pas un atome.

**Définition 1.10.** On dit que la mesure  $\mu$  est complète si tout ensemble  $\mu$ -négligeable est mesurable.

## 1.2.2 Fonctions mesurables

**Définition 1.11.** Soit  $(E, \mathcal{A})$  et  $(F, \mathcal{B})$  deux espaces mesurables. On dit que l'application  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$  est mesurable pour les tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (ou  $f \text{ est } (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mesurable) si :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \text{ on a } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Autrement dit, l'image réciproque de toute partie mesurable est mesurable.

## 1.2.3 Mesure à densité

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

**Définition 1.12.** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  une fonction mesurable positive sur  $E$  alors  $\forall A \in \mathcal{A}$  la fonction :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R}_+. \\ A &\mapsto \int_E f \chi_A d\mu. \end{aligned}$$

est une mesure sur  $\mathcal{A}$  dite mesure de densité  $f$  par rapport à  $\mu$  et on écrit  $\gamma = f\mu$ .

## 1.3 Les espaces de Lebesgue $L_p$ $1 \leq p \leq \infty$

### 1.3.1 Rappel de quelques résultats d'intégration

**Théorème 1.1.** (convergence dominée de Lebesgue)[2].

Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  qui converge pour presque tout  $x \in \Omega$  vers  $f$ . On suppose qu'il existe une fonction  $g$ , Lebesgue mesurable sur  $\Omega$ , telle que :

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Pour tout  $n \leq N$  et tout  $x \in \Omega$ . Alors les fonctions  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots, n$ ) ont des intégrales finies et,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

**Lemme 1.1.** (*Lemme de Fatou*)

Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions positives mesurables p.p sur  $\Omega$ , alors :

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Le théorème qui suit (de Fubini) est un moyen très utile dans différents calculs sur les intégrales.

**Théorème 1.2.** (*Théorème de Fubini*)

Soit  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$  ( $i = 1, 2$ ) des ouverts mesurables et posons :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Soit  $f(x, y)$  une fonction intégrable sur  $\Omega$ . Alors :

$$\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \text{ et } \int_{\Omega_2} f(x, y) dy.$$

existent, de plus,

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

### 1.3.2 quelques inégalités intégrales

#### Notation

Soit  $p \in [1, \infty[$ , soit  $\Omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $L_p(\Omega)$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f$  mesurables définies p.p sur  $\Omega$  tel que,

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx,$$

est finie. On donne les inégalités importantes suivantes :

#### Inégalité de Hölder

Soit  $f \in L_p(\Omega)$  et  $g \in L_{p'}(\Omega)$  tel que :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Alors  $|fg| \in L_1(\Omega)$ , de plus :

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

## Inégalité de Minkowski

Soit  $p \in [1, \infty[$  et  $f, g \in L_p(\Omega)$ . Alors  $f + g \in L_p(\Omega)$ , de plus :

$$\left( \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

### 1.3.3 Les espaces de Lebesgue

#### Notation

Dans ce qui suit, on considère une relation d'égalité entre les éléments de  $L_p$ . On dit que  $f_1 = f_2$  si et seulement si  $f_1(x) = f_2(x)$  presque partout dans  $\Omega$ . Dans le cas où  $\Omega$  est un intervalle ouvert  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ , on écrit  $L_p(a, b)$  au lieu de  $L_p]a, b[$ .

**Lemme 1.2.** Soit  $p \geq 1$ .  $L_p(\Omega)$  est un espace vectoriel, posons :

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

alors,

$\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $L_p(\Omega)$ .

**Preuve :** On vérifie les axiomes usuels suivants :

1.  $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$  p.p. Dans un sens l'implication est triviale, elle reste aussi vérifiée dans l'autre car l'intégrale de Lebesgue d'une fonction  $f$  est nulle si et seulement si la fonction  $f$  est nulle p.p sur  $\Omega$ ,
2.  $\|\lambda f(x)\| = |\lambda| \|f(x)\|$ , on a :  $\left( \int_{\Omega} |\lambda f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f(x)\|_p$ ,
3.  $\|f(x) + g(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p + \|g(x)\|_p$ . l'inégalité triangulaire découle directement de l'inégalité de Minkowski.

On résume dans ce qui suit les propriétés essentielles des espaces  $L_p$  :

#### 1.3.4 propriétés des espaces $L_p$

1.  $L_p(\Omega)$  est un espace de Banach pour :  $1 \leq p \leq \infty$ ,
2.  $L_p(\Omega)$  est un espace réflexif pour :  $1 < p < \infty$ ,
3.  $L_p(\Omega)$  est séparable pour :  $1 \leq p < \infty$ .



## L'espace $L_\infty(\Omega)$

On note  $L_\infty(\Omega)$  l'ensemble de toutes les fonctions mesurables  $f$  définies p.p sur  $\Omega$  telle qu'il existe une constante  $k$  et un ensemble  $E \in \Omega$  avec  $\mu(E) = 0$  tel que,

$$|f(x)| \leq k \text{ pour } x \in \Omega - E.$$

On définit sur  $L_\infty(\Omega)$  la somme  $f + g$  est le produit  $\lambda f$  comme précédemment. On a  $L_\infty(\Omega)$  est un espace vectoriel, on définit la semi-norme :

$$N_p(f) = \sup \text{ess } |f(x)|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés du sup et on prenant compte de la relation d'équivalence (p.p) on montre aisément que  $N_p(f)$  est une norme sur  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach, il n'est pas réflexif.

## 1.4 Les fonctions convexes

**Définition 1.13.** Soient  $E$  un espace vectoriel réel et  $f$  une application définie sur  $E$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $f$  est dite

1. **convexe** si  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1]$ , on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

2. **strictement convexe** si  $\forall x, y \in E, x \neq y, \forall \lambda \in [0, 1]$  on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

3. **concave** si  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1]$  on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Graphiquement, la convexité de  $f$  veut dire que la courbe représentative de  $f$  est au dessous de ses cordes (une corde est un segment joignant deux points de la courbe de  $f$ ).

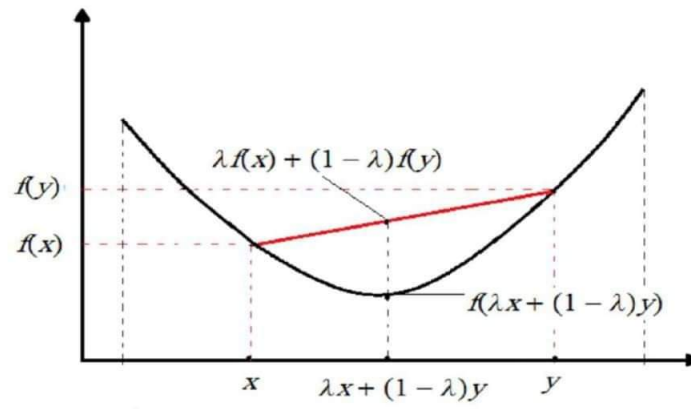


FIGURE 1.1 – Fonction convexe

## CHAPITRE 2

## ESPACE MODULAIRE

Pour l'étude des espaces d'Orlicz et Musielak-Orlicz, il suffit de rester dans le cadre des espaces de Banach. Toutefois, dans le contexte des espaces de Musielak-Orlicz ce n'est pas la meilleure façon de définir sa topologie. Au lieu de cela, il est préférable de commencer par introduire les espaces modulaires.

**Définition 2.1.** Soit  $X$  un espace vectoriel réel.

La fonction  $\rho : X \rightarrow [0, +\infty]$  est dite semi modulaire sur  $X$  si les propriétés suivantes sont vérifiées.

1.  $\rho(0)=0$ ,
2.  $\rho(\lambda x)=\rho(x)$  pour tout  $x \in X$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  avec  $|\lambda|=1$ ,
3.  $\rho$  est convexe, c'est à dire  $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y) \forall \alpha, \beta \geq 0$  avec  $\alpha + \beta=1$ ,
4.  $\rho(\lambda x)=0$  pour tout  $\lambda > 0$  implique  $x=0$ .

**Remarques 2.1.** la semi modulaire est dite modulaire si  $\rho(x) = 0$  implique  $x = 0$ .

**Définition 2.2.** Si  $\rho$  est une semi modulaire (respectivement modulaire) sur  $X$  alors,

$$X_\rho = \{x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(\lambda x) = 0\}$$

est dite *espace semi-modulaire* (resp. *modulaire*).

**Exemple 2.0.1.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ .  $\rho_p(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx$  défini un modulaire continu sur  $L^0(\Omega)$ .

**Théorème 2.1.** soit  $\rho$  une semi modulaire sur  $X$  alors  $X_{\rho}$  est un  $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

*preuve*

soient  $x, y \in X_{\rho}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$  par définition de l'espace  $X_{\rho}$  et comme  $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x)$  on a  $\alpha x \in X_{\rho}$  Grâce à la convexité de  $\rho$  on a :

$$0 \leq \rho(\lambda(x + y)) \leq \frac{1}{2}\rho(2\lambda x) + \frac{1}{2}\rho(2\lambda y)$$

d'où,

$$\lim \rho(\lambda(x + y)) \leq \lim \frac{1}{2}\rho(2\lambda x) + \lim \frac{1}{2}\rho(2\lambda y)$$

,

par suite,

$$x + y \in X_{\rho}$$

.

Ainsi  $X_{\rho}$  est un espace vectoriel.

## 2.1 propriétés de la modulaire

Soit  $\rho$  une semi-modulaire sur  $X$  alors

1. 
$$\begin{cases} \rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x) \leq |\lambda|\rho(x) & \forall |\lambda| \leq 1, \\ \rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x) \geq |\lambda|\rho(x) & \forall |\lambda| \geq 1, \end{cases}$$
2.  $\rho(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho(x_i)$  pour  $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ,
3. Pour  $x \in X$ , l'application  $\lambda \mapsto \rho(\lambda x)$  est non décroissante.

**Remarques 2.2.** La semi modulaire est toujours convexe.

## 2.2 Continuité d'un modulaire

La modulaire  $\rho$  est dite :

Continue à droite si  $\lim \rho(\lambda x) = \rho(x)$ , pour tout  $x \in X_\rho$

Continue à gauche si  $\lim \rho(\lambda x) = \rho(x)$ , pour tout  $x \in X_\rho$

Continue si elle est continue à gauche et à droite.

## 2.3 Normes sur les espaces modulaire

### Normes de luxemburg

**Théorème 2.2.** *soit  $\rho$  une modulaire convexe sur  $X$ , alors la fonction définie par :*

$$\|f\|_\rho = \inf\{\lambda > 0, \rho\frac{f}{\lambda} \leq 1\}$$

.

*est une norme sur  $X_\rho$  appelé **norme de Luxemburg**.*

**preuve**

*Si  $f=0$  alors  $\rho(f) = 0$  donc  $\|f\|_\rho = 0$ .*

*Si  $\|f\|_\rho = 0$  alors :*

$$\rho(\alpha f) \leq 1, \forall \alpha > 0.$$

*Soit  $0 < u \leq 1$  alors,*

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{u}{u}f\right) \leq u\rho\left(\frac{1}{u}f\right) \leq u.$$

*En faisant tendre  $u \rightarrow 0^+$  on obtient  $\rho(f) = 0$ ,*

*Ceci implique que  $f = 0$ .*

*Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f \in X_\rho$ , alors :*

$$\|\alpha f\|_\rho = \inf\{\lambda > 0, \rho\left(\frac{\alpha f}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$

*Soit  $f, g \in X_\rho$  et soit  $u, v \in \mathbb{R}$  tels que  $u > \|f\|_\rho$  et  $v > \|g\|_\rho$ . alors :*

$$\rho\left(\frac{f}{u}\right) \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho\left(\frac{f}{v}\right) \leq 1.$$

par la convexité de  $f$  on obtient,

$$\rho\left(\frac{f+g}{u+v}\right) = \rho\left(\frac{u}{u+v}\frac{f}{u} + \frac{v}{u+v}\frac{g}{v}\right) \leq \frac{u}{u+v}\rho\left(\frac{f}{u}\right) + \frac{v}{u+v}\rho\left(\frac{g}{v}\right) \leq 1.$$

D'où,

$$\|f+g\|_\rho \leq u+v.$$

Finalement,

$$\|f+g\|_\rho \leq \|f\|_\rho + \|g\|_\rho.$$

**Remarques 2.3.** Si  $\rho$  n'est pas convexe alors  $\|\cdot\|_\rho$  n'est pas une norme.

## Norme d'amemiya

**Théorème 2.3.** Soit  $\rho$  une modulaire convexe sur  $X$  .alors la fonction définie par :

$\|f\|_\rho^A = \inf \lambda [1 + \rho(\frac{f}{\lambda})]$  est une norme sur  $X_\rho$  appelée **norme d'amemiya**.

**preuve :** Si  $f = 0$  alors  $\|f\|_\rho^A = 0$

## 2.4 Modulaire et norme

**Lemme 2.1.** Soit  $\rho$  une semi-modulaire sur  $X$  alors on a :

$$\|x\|_\rho \leq 1 \Leftrightarrow \rho(x) \leq 1.$$

Si de plus  $\rho$  est continue alors,

$$\begin{cases} \|x\|_\rho < 1 \Leftrightarrow \rho(x) < 1 \\ \|x\|_\rho = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1. \end{cases}$$

## 2.5 topologie et convergence dans les espaces modulaires

On peut munir l'espace modulaire  $X_\rho$  de la topologie induite par la norme en considérant, comme ouverts élémentaires, les ensembles :

$$B(x_0, \varepsilon) = \left\{ x \in X_\rho, \|x - x_0\|_\rho < \varepsilon \right\}, x_0 \in X_\rho, \varepsilon > 0.$$

1. La convergence dans les espaces modulaires peut être introduite de la manière suivante : Une suite  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset (X, \rho)$  sera dite modulaire convergente vers un élément  $x \in X$ , lorsqu'il existe un nombre réel  $k > 0$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(k(x_n - x)) = 0.$$

2. Le lien entre la convergence modulaire et la convergence au sens de la norme  $\|\cdot\|_\rho$  est donné par :

$$\|x_n - x\|_\rho \rightarrow 0 \text{ si et seulement si } \rho(k(x_n - x)) \rightarrow 0, \forall k > 0.$$

**Lemme 2.2.** *Soit  $X_\rho$  un espace modulaire, alors la convergence modulaire et la convergence au sens de la norme sont équivalentes si et seulement si  $\rho(x_k) \rightarrow 0$  implique  $\rho(2x_n)$ .*

**Lemme 2.3.** *Soit  $\rho$  une semi-modulaire sur  $X$  et  $(x_n) \subset X_\rho$  alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\rho = 0$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\lambda x_n) = 0$  pour tout  $\lambda > 0$ .*

**preuve :** [3].

Si on retourne un moment aux espaces de Lebesgue  $L_p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$  qu'on a vu précédemment, une fonction  $u$  définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  appartient à  $L_p(\Omega)$  si :

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty. \quad (3.1)$$

L'espace  $L_p(\Omega)$  est normé par :

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2)$$

Si on pose  $\phi : \phi(t) = t^p$  on peut récrire (3.1) et (3.2) respectivement sous la forme :

$$\int_{\Omega} \phi(|u(x)|) dx < \infty, \\ \|u\|_p = \phi^{-1} \left( \int_{\Omega} \phi(|u(x)|) dx \right).$$

$\Phi^{-1}$  étant la fonction inverse de  $\phi : \phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}$  On peut nous demander maintenant si c'est possible de remplacer la fonction  $\phi$  ci-dessus par une fonction plus générale. On définit les fonctions de Young ou les  $N$ -fonctions.

### 3.1 Les fonctions d'orlicz et les N-fonctions

### 3.2 Définitions et exemples

**Définition 3.1.** On appelle *fonction d'Orlicz* une fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  telle que :

1.  $\phi$  est paire, convexe et continue à gauche sur  $[0, \infty]$ .
2.  $\phi(0) = 0$  et  $\phi$  n'est pas identiquement nulle. Si de plus,



3.  $\phi(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ ,
4.  $\phi(x) < \infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  c'est à dire  $\phi$  est à valeurs dans  $[0, \infty]$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$ .

la fonction  $\Phi$  est dite **N-fonction**.

**Remarques 3.1.** Le vocabulaire pour ces fonctions change d'un autre à un autre. Parfois une N-fonction est appelée fonction d'Orlicz et les fonctions d'Orlicz sont dite  $\phi$ -fonctions. Donc à chaque fois qu'on regarde un document sur les espaces d'Orlicz, il faut vérifier les conditions imposées à la fonction qui définit ces espaces. Les espaces d'Orlicz et leurs propriétés ont été initialement étudiées dans le cas d'une N-fonction.

**Exemple 3.2.1.** Pour tout  $t > 0$  et  $1 \leq p < +\infty$ .

$$t \mapsto \phi(t) = t^p.$$

$$t \mapsto \phi(t) = \frac{1}{p}t^p.$$

$$t \mapsto \phi(t) = \exp(|t|) - 1.$$

Sont des  $\phi$ -fonctions.

### 3.3 Ecriture intégrale d'une N-fonction

**Définition 3.2.** Soit  $\phi$  une N-fonction alors sur l'ensemble  $\{t \geq 0, \phi(t) < \infty\}$ ,  $\phi(t)$  peut s'écrire comme suit :

$$\int_0^t a(s) ds,$$

avec  $a$  la dérivée à droite de  $\phi$  de plus,  $a$  est non décroissante et continue à gauche.

**Exemple 3.3.1.**  $x \mapsto \phi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$  avec  $1 < p < \infty$  alors  $p(t) = \phi'(t) = t^{p-1}$ .

$x \mapsto \phi(x) = e^{x^2} - 1$  alors  $p(t) = 2te^{t^2} \phi'(t)$ .

**Remarques 3.2.** La valeur de  $\phi(x)$  est la surface délimitée par la courbe de  $P$ , l'axe des abscisses et les deux droites  $t = 0$  et  $t = x$ . ce qui donne que la fonction  $\phi$  est strictement croissante.

### 3.4 La relation entre les fonctions d'Orlicz et semi modulaire sur $\mathbb{R}$

**Lemme 3.1.** Soient  $\phi : [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty]$  et  $\rho$  son extension paire (son prolongement par parité) à  $\mathbb{R}$ , c'est à dire :

$$\rho(t) := \phi(|t|) \forall t \in \mathbb{R},$$

Alors  $\phi$  est une  $\phi$ -fonction si et seulement si  $\rho$  est une semi modulaire sur  $\mathbb{R}$  avec  $X_\rho = \mathbb{R}$ ,

De plus,  $\phi$  est une  $\phi$ -fonction positive si et seulement si  $\rho$  est une modulaire sur  $\mathbb{R}$  avec  $X_\rho = \mathbb{R}$ .

#### Preuve : La nécessité

Soit  $\phi$  est une  $\phi$ -fonction alors  $\phi$  est convexe, continue à gauche,  $\phi(0)=0, \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t)=0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t)=\infty$ , donc  $\rho$  satisfait aussi ces propriétés :

$X_\rho = \mathbb{R}$  découle du fait que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t)=0$ , et pour que  $\rho$  soit une semi modulaire il reste à montrer que :

$$\rho(\lambda t_0) = 0, \forall \lambda > 0 \Rightarrow t_0 = 0,$$

On suppose que  $\rho(\lambda t_0) = 0, \forall \lambda > 0$ . Par hypothèse  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$ , alors il existe  $t_1 > 0$  tel que  $\phi(t_1) > 0$ , il n'existe aucun  $\lambda > 0$  pour que  $t_1 = \lambda t_0$ .

En effet, s'il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$t_1 = \lambda t_0,$$

on aurait :

$$0 < \phi(t_1) = \phi(\lambda t_0) = 0,$$

Ce qui donne une contradiction.

Donc on a nécessairement

$$t_0 = 0.$$

Supposons, maintenant que  $\phi$  est positive c'-a-d que,

$$(\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0)$$

alors par hypothèse ceci est équivalent à

$$(\rho(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0),$$

Donc  $\rho$  est une modulaire sur  $\mathbb{R}$ .

### La suffisance

Soit  $\phi$  une semi modulaire sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\phi$  est convexe,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi$  est continue à gauche. Pour que  $\phi$  soit une  $\phi$ -fonction, il reste à montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$ .

Commençant par montrer que,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = 0,$$

Pour cela on a :

$X_\rho = \mathbb{R}$  ceci est équivalent à  $\forall t \in \mathbb{R} \exists \lambda > 0$  tel que  $\rho(\lambda t) < 1$  alors  $\exists t_1 > 0$  pour le quel  $\rho(t_1) < +\infty$ . Soit  $t \in [0, t_1]$ , alors il existe  $0 \leq \lambda \leq 1$  tel que  $t = \lambda t_1$  ce qui implique que  $\lambda = \frac{t}{t_1}$ .

Par suite,

$$\rho(t) = \rho\left(\frac{t}{t_1} t_1\right) \leq \frac{t}{t_1} \rho(t_1)$$

Donc on obtient,

$$\phi(|t|) \leq \frac{t}{t_1} \phi(t_1)$$

Par passage à la limite on aura,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(|t|) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t_1} \phi(t_1) = 0.$$

D'où,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = 0. \quad (3.3)$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$$

Par la contraposée de  $(\rho(\lambda t) = 0 \forall \lambda > 0 \Rightarrow t = 0)$ , c-à-d.

$$(t \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0, \rho(\lambda t) \neq 0)$$

.

En particulier,

$\exists t_2 > 0$  tel que  $\rho(t_2) > 0$  ce implique  $\phi(t_2) > 0$ .

Alors,

$$\forall K \in N^* \phi(K, t_2) > K \phi(t_2) > 0$$

.

Par passage à la limite on obtient,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(k, t_2) > \lim_{t \rightarrow +\infty} K \phi(t_2)$$

.

On aura :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi\left(\frac{t}{t_2}, t_2\right) > \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t_2} \phi(t_2) = +\infty$$

.

Donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty. \quad (3.4)$$

De les equations (3.3) et (3.4) on resulte que  $\phi$  est une  $\phi$ -fonction.

Supposons maintenant que  $\rho$  est une modulaire sur  $\mathbb{R}$  et montrons que  $\phi$  est positive. On a :

$$\rho(t) = 0 \Rightarrow t = 0$$

.

On suppose le contraire,

$$t > 0 \Rightarrow \rho(t) > 0.$$

Ce qui donne,

$$\phi(|t|) = \phi(t) > 0.$$

D'où  $\phi$  est positive.

Et par conséquence  $\mathbb{R}$  est un espace modulaire.

### 3.5 Fonction complémentaire d'une fonction d'Orlicz

**Définition 3.3.** Soit  $\phi$  une fonction d'Orlicz. La fonction  $\phi^* : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , définie par :

$$\phi^*(y) = \sup_{x \geq 0} \{x, y - \phi(x)\} \forall y \geq 0.$$

S'appelle la **fonction complémentaire** ou la **fonction conjuguée** de  $\phi$ .

**Exemple 3.5.1.** La fonction complémentaire de  $\phi_p(x) = \frac{|x|^p}{p}$ ,  $1 \leq p < +\infty$  est,

$$\phi_p^*(x) = \frac{1}{q} |y|^q \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En effet,

$$\phi_p^*(y) = \sup_{x \geq 0} \{x|y| - \phi_p(x)\} = \sup_{x \geq 0} \{x|y| - \frac{|x|^p}{p}\} \forall y \in \mathbb{R}.$$

Posons  $f(x) = x|y| - \frac{|x|^p}{p}$  alors,

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x < |y|^{\frac{1}{p-1}} \\ f'(x) < 0 \text{ si } x > |y|^{\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

Donc  $f$  atteint son maximum au point  $x = |y|^{\frac{1}{p-1}}$ .

## 3.6 Inégalité de young

**Proposition 3.1.** *Le couple  $(\phi, \phi^*)$  satisfait à l'inégalité de young*

$$xy \leq \phi(x) + \phi^*(y) \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

On a l'inégalité dans l'inégalité de young si et seulement si  $x = q(y)$  ou  $y = p(x)$  c-à-d :

$$xp(x) = \phi(x) + \phi^*(p(x)). \quad (3.6)$$

et

$$q(y)y = \phi(q(y)) + \phi^*(y).$$

**preuve :** Soit  $y_0 = p(x)$  sans perte de généralité on suppose que  $y \leq y_0$ . Donc

$$\phi^*(y) \leq \int_0^y q(s)ds = \int_0^{y_0} q(s)ds + \int_{y_0}^y q(s)ds.$$

Quand  $s \leq y_0 = p(x)$  alors par définition de  $q$  on obtient  $q(s) \geq x$ . Par conséquent :

$$\phi^*(y) \leq \int_0^{y_0} q(s)ds + \int_{y_0}^y xds = \int_0^{y_0} q(s)ds + x(y - y_0).$$

Donc,

$$\phi(x) + \phi^*(y) \geq \int_0^x p(t)dt + \int_0^{y_0} q(s)ds + x(y - y_0).$$

Donc pour montrer l'inégalité de young il suffit de montrer que

$$\phi(x)(x) + \int_0^{y_0} q(s)ds = xy_0.$$

$xy_0$  est la surface du rectangle de sommet  $A(0, 0)$ ,  $B(x, 0)$ ,  $C(x, p(x))$  et  $D(0, y_0)$ . Donc

$$xy_0 = \phi(x) + \int_G dudv.$$

avec,

$$G = \{(u, v) \text{ tel que } 0 \leq u \leq x \text{ et } p(u) \leq v \leq y_0\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_G dudv &= \int_0^x \left( \int_{p(u)}^{y_0} dv \right) du = \int_0^x (y_0 - p(u)) du. \\ &= \int_0^x y_0 du - \int_0^x p(u) du = xy_0 - \phi(x). \end{aligned}$$

D'autre part on peut aussi exprimer  $G$  comme suit :

$$G = \{(u, v) \text{ tel que } 0 \leq v \leq y_0 \text{ et } 0 \leq u \leq q(v)\}.$$

Par suite,

$$\int_G dudv = \int_0^{y_0} \left( \int_0^{q(v)} du \right) dv = \int_0^{y_0} q(v) dv = \phi^*(y_0).$$

Finalement on a obtenu que

$$xy_0 - \phi(x) = \phi^*(y_0).$$

### 3.7 La condition $\Delta_2$

La condition  $\Delta_2$  est une condition de croissance sur les fonctions d'Orlicz. Elle joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie des espaces d'Orlicz.

**Définition 3.4.** *On dit que la  $N$ -fonction  $M(u)$  satisfait la condition  $\Delta_2$ , s'il existe une constante  $K > 0$  telle que,*

$$M(2u) \leq kM(u), (u \geq u_0).$$

Pour une valeur positive de  $u_0$ .

**Définition 3.5.** Une fonction d'Orlicz  $\phi$  satisfait :

1. La condition  $-\Delta_2$  globalement ( $\phi \in \Delta_2$ ), s'il existe  $K > 2$  tel que,

$$\phi(2x) \leq K\phi(x) \forall x > 0.$$

2. La condition  $-\Delta_2$  à l'infini ( $\phi \in \Delta_2(\infty)$ ), s'il existe  $K > 2$  et  $x_0 > 0$  tel que,

$$\phi(2x) \leq K\phi(x) \forall x > x_0.$$

3. La condition  $-\Delta_2$  au voisinage de zéro ( $\phi \in \Delta_2(0)$ ), s'il existe  $K > 2$  et  $x_0 > 0$  tel que,

$$\phi(2x) \leq K\phi(x) \forall x \geq x_0.$$

Évidemment,  $\phi \in \Delta_2$  si et seulement si :

$$\phi \in \Delta_2(\infty) \text{ et } \phi \in \Delta_2(0).$$

**Exemple 3.7.1.** 1. La fonction  $M(s) = |s| \ln(|s| + 1)$  est satisfaite la condition  $\Delta_2$ . En effet, on peut vérifier aisément que  $M$  est une  $N$ -fonction et on a  $K = 4$ .

2. On a aussi la fonction  $M(s) = \frac{1}{p}|s|^p$ , pour  $p > 1$  est vérifiée la condition  $\Delta_2$ . En effet, on a  $K = 2^p$ .

**Proposition 3.2.** Si  $\phi \notin \Delta_2(\infty)$ , alors il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels positifs croissante vers l'infini telle que :

$$\phi(2x_n) > 2^n \phi(x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$



preuve : [7] exemple 1.9.

**Remarques 3.3.** La condition- $\Delta_2$  à l'infini est conservée par équivalence à l'infini des  $N$ -fonctions.

## 3.8 Espace d'Orlicz

**Définition 3.6.** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\phi$  une  $N$ -fonction.

On définit l'espace d'Orlicz  $L_\phi(\Omega)$  par :

$$\begin{aligned} L_\phi(\Omega) &= \{f \in M(\Omega) \text{ telle que } \exists \lambda > 0 : \lambda f \in L_\phi^0(\Omega)\} \\ &= \{f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_G \phi(\lambda f(x)) d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

**Exemple 3.8.1.** L'espace  $L^\infty$  est l'espace d'Orlicz  $L_{\phi_\infty}$  avec,  $\phi_\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\phi_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 3.3.**  $L_\phi(\Omega)$  est un espace vectoriel réel.

**preuve :** Soient  $f_1, f_2 \in L_\phi(\Omega)$ . Alors il existe  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  tels que  $\rho_\phi(\lambda_1 f_1) < \infty$  et  $\rho_\phi(\lambda_2 f_2) < \infty$ .

Soit  $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ . En utilisant la convexité et la croissance de  $\phi$  on obtient,

$$\begin{aligned} \int_G \phi\left(\frac{\lambda}{2}(f_1 + f_2)\right) d\mu &\leq \int_G \frac{1}{2}(\phi(\lambda f_1) + \phi(\lambda f_2)) d\mu, \\ &\leq \int_G \frac{1}{2}(\phi(\lambda_1 f_1) + \phi(\lambda_2 f_2)) d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Donc,

$$f_1 + f_2 \in L_\phi(\Omega).$$

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $f \in L_\phi(\Omega)$ , montrons que  $\beta f \in L_\phi(\Omega)$ . D'après ce qui précède on a  $nf \in L_\phi(\Omega), \forall n \geq 1$ .

Comme  $\mathbb{R}$  est archimédien alors  $\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\beta \leq n$  et ainsi on obtient  $\beta f \in L_\phi(\Omega)$ .

Par conséquent,  $L_\phi(\Omega)$  est un espace vectoriel réel.

**Remarques 3.4.**  $L_\phi^0(\Omega) \subset L_\phi(\Omega)$  et  $L^\infty(\Omega) \subset L_\phi(\Omega)$ .

### 3.9 Classe d'Orlicz

On appelle classe d'Orlicz l'ensemble des fonctions  $f \in M(\Omega)$  vérifiant

$$\int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu < \infty.$$

On note  $L_\phi^0(\Omega)$  la classe d'Orlicz. c'est-à-dire :

$$L_\phi^0(\Omega) = \{f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu < \infty\}.$$

**Remarques 3.5.**  $L_\phi^0(\Omega)$  n'est pas un espace vectoriel.

**preuve :** Il suffit de montrer que si  $f \in L_\phi^0(\Omega)$  alors  $2f \notin L_\phi^0(\Omega)$ .

On prend par exemple  $\Omega = [0, 1]$  et

$$\phi(x) = e^{|x|} - 1 \text{ et } f(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \rho_\phi(f) &= \int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu = \int_{\Omega} [e^{|f(x)|} - 1] d\mu = \int_{\Omega} (e^{\frac{n}{2}} - 1) \chi_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}]} d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} (e^{\frac{n}{2}} - 1) \mu \left( \left[ \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right] \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} (e^{\frac{n}{2}} - 1) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\sqrt{e}}{2} \right)^n - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

On a la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$  converge et  $\frac{\sqrt{e}}{2} < 1$  donc  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$  est aussi convergente.

Donc,  $\rho_\phi(f) < \infty$  alors  $f \in L_\phi^0(\Omega)$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \rho_\phi(2f) &= \int_{\Omega} \phi(2f(x)) d\mu = \int_{\Omega} [e^{2|f(x)|} - 1] d\mu = \int_{\Omega} (e^n - 1) \chi_{\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]} d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} (e^n - 1) \mu \left( \left[ \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right] \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} (e^n - 1) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{e}{2}\right)^n - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

On a  $\frac{e}{2} > 1$  donc la série  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{e}{2}\right)^n$  diverge.

D'où

$$2f \notin L_\phi^0(\Omega).$$

### 3.10 Modulaire d'Orlicz

**Définition 3.7.** *La fonctionnelle,*

$$\begin{aligned} \rho_\phi : M(\Omega) &\rightarrow [0, \infty] \\ f &\mapsto \rho_\phi(f) = \int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu \end{aligned}$$

*est une modulaire convexe sur  $M(\Omega)$  dite **modulaire d'Orlicz**.*

### 3.11 Normes sur les espaces d'Orlicz

Dans la théorie des espaces d'Orlicz, trois normes sont apparues. Dans les années trente Orlicz a introduit la norme,

$$\|f\|_\phi^e = \sup \left\{ \int_{\Omega} |f(t)g(t)| d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega), \rho_{\phi^*}(g) \leq 1 \right\}$$

dite norme d'Orlicz, puis Nakano (1950), Morse-Transue(1950), et Luxemburg (1955) ont considéré une autre norme, qui est parfois appelée la norme de Luxemburg-Nakano mais généralement dans la littérature, elle est appelée la norme de Luxemburg. Cette norme est la fonction de Minkowski

(la jauge) de la boule unité pour la modulaire d'Orlicz  $\rho_\phi$ . C'est-à-dire,

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_\phi \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

Approximativement à la même époque, I. Amemiya a considéré la norme,

$$\|f\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} [1 + \rho_\phi(kf)]$$

dite **norme d'Amemiya**.

## Norme d'Orlicz

**Proposition 3.4.** Soit  $f \in L_\phi(\Omega)$  alors,

$$\|f\|_\phi^o = \sup \left\{ \int_\Omega |f(t)g(t)| d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega), \rho_{\phi^*}(g) \leq 1 \right\},$$

est une norme sur l'espace  $L_\phi(\Omega)$  dite **norme d'Orlicz**.

## Norme de luxemburg

**Proposition 3.5.** Soit  $f \in L_\phi(\Omega)$  alors,

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_\phi \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\},$$

est une norme sur l'espace  $L_\phi(\Omega)$  dite **norme de Luxemburg**.

## N'orme d'Amemiya

Soit  $f \in L_\phi(\Omega)$  alors ,

$$\|f\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} [1 + \rho_\phi(kf),]$$

est une norme sur l'espace  $L_\phi(\Omega)$  dite **norme d'Amemiya**.

## 3.12 Propriétés des espaces d'Orlicz

### La complétude

**Théorème 3.1.** *L'espace d'Orlicz  $L_\phi(\Omega)$  muni de l'une de ces normes est un espace de Banach.*

#### preuve

On va donner la démonstration dans le cas de la norme d'Orlicz.

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de Cauchy dans  $L_\phi(\Omega)$ . Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } \|f_n - f_m\|_\phi^o < \varepsilon, \quad (3.7)$$

Ceci signifie que pour toute fonction  $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$  avec  $\rho_{\phi^*}(g) \leq 1$ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \int_{\Omega} |f_n(x) - f_m(x)| |g(x)| d\mu < \varepsilon,$$

Il en résulte que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge en mesure. Donc elle contient une sous suite  $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge presque partout vers une limite notée  $f(x)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , en vertu de **(3.9)** on peut trouver un  $k_\varepsilon$  telle que pour tout  $k, k + p > k_\varepsilon$ , on a

$$\int_{\Omega} |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)| |g(x)| d\mu < \varepsilon, \quad (3.8)$$

pour toute fonction  $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$  qui satisfait  $\rho_{\phi^*}(g) \leq 1$ .

Par passage à la limite quand  $p \rightarrow \infty$  dans **3.10** on obtient

$$\int_{\Omega} |f(x) - f_{n_k}(x)| |g(x)| d\mu < \varepsilon, \quad (3.9)$$

Il résulte de l'inégalité **(3.11)** que  $f_0 - f_{n_k} \in L_\phi(\Omega)$ ,  $f \in L_\phi(\Omega)$  et  $\|f - f_{n_k}\|_\phi < \varepsilon$ . C'est-à-dire la sous suite,  $(f_{n_k})_k$  converge en norme vers  $f$ . Alors, la suite de Cauchy  $(f_n)_{n \geq 1}$  possède une sous suite convergente donc elle converge aussi vers la même limite  $f$  D'où  $L_\phi(\Omega)$  est complet. Par conséquent  $L_\phi(\Omega)$  est un Banach.

### La séparabilité

$L_\phi(\Omega)$  est un espace séparable si et seulement si  $\phi$  vérifie la condition  $\Delta_2$ .

## La réflexivité

**Théorème 3.2.** *Les espaces  $L_\phi(\Omega)$  sont réflexifs si et seulement si  $\phi$  et  $\phi^*$  vérifiant la condition de croissance  $\Delta_2$ .*

## 3.13 La convergence dans les espaces d'Orlicz

La convergence usuelle dans les espaces d'Orlicz peut être introduite grâce à la norme d'Orlicz  $\|\cdot\|_\phi$ , on a :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L_\phi(\Omega) \text{ i.e. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_\phi = 0.$$

## 3.14 La convergence modulaire dans les espaces d'Orlicz

**Définition 3.8.** *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments dans  $L_\phi(\Omega)$ .*

*On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $\rho_\phi$  convergente (ou modulaire convergente) vers  $f \in L_\phi(\Omega)$ , si et seulement s'il existe  $\lambda > 0$  tel que,*

$$\rho_\phi \left( \frac{f_n - f}{\lambda} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*et on note  $f_n \xrightarrow{\rho_\phi} f$ .*

Dans ce chapitre on expose une généralisation de l'espace d'Orlicz, d'où une généralisation de la fonction de Young (N-fonction)  $\phi(u)$ , en une N-fonction généralisée  $\varphi(x, u)$ , alors on a, un espace d'Orlicz généralisé ou espace d'Orlicz-Musielak.

## 4.1 Fonction d'Orlicz généralisées

**Définition 4.1.** Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie complète.

La fonction  $\varphi : \Omega \times [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty]$  est dite fonction d'Orlicz généralisée ou fonction de Musielak-Orlicz, et on écrit  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$

$$\varphi \in \phi(\Omega, \mu) \text{ si et seulement si } \begin{cases} 1) \varphi(y, \cdot) \text{ est une } \phi \text{-fonction } \forall y \in \Omega \\ 2) \varphi(\cdot, t) \text{ est mesurable } \forall t \geq 0 \end{cases}$$

**Exemple 4.1.1.** Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie complète. Soit  $p : \Omega \rightarrow [1, +\infty]$  une fonction mesurable, alors la fonction  $\bar{\varphi}(y, t)$  définie par,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \Omega \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (y, t) &\mapsto \bar{\varphi}_{p(\cdot)}(y, t) = t^{p(y)}, \end{aligned}$$

et la fonction  $\tilde{\varphi}(y, t)$  définie par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \Omega \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (y, t) &\mapsto \tilde{\varphi}_{p(\cdot)}(y, t) = \frac{1}{p(y)} t^{p(y)}, \end{aligned}$$

sont des fonctions d'Orlicz généralisées.

## 4.2 La fonction conjugué

**Définition 4.2.** Soit  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ . La fonction  $\varphi^* : \Omega \times [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty]$ , définie par :

$$\varphi^*(y, u) = \sup_{t \geq 0} \{tu - \varphi(y, t)\} \forall y \in \Omega, \forall u \geq 0,$$

s'appelle *la fonction complémentaire ou la fonction conjuguée de  $\varphi$  au sens de Young*.

## 4.3 Espaces de Musielak-Orlicz

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie complète. On note par  $M(\Omega, \mu)$  l'ensemble des fonctions  $\mu$ -mesurables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  modulo la relation d'équivalence  $\ll = \mu - p.p \gg$

## 4.4 La condition $\Delta_2$

**Définition 4.3.** On dit que  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$  satisfait la condition- $\Delta_2$ , s'il existe une constante  $k \geq 2$  telle que,

$$\varphi(y, 2t) \leq k\varphi(y, t) \text{ pour tout } y \in \Omega \text{ et } t \geq 0.$$

## 4.5 Modulaire d'Orlicz musielak

Le lemme suivant montre que toute  $\phi$ -fonction généralisée, génère une semi modulaire sur l'ensemble des fonctions mesurables  $M(\Omega, \mu)$ .

**Lemme 4.1.** [3]. Soient  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$  et  $f \in M(\Omega, \mu)$  alors,

1. La fonction :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow [0, \infty] \\ y &\longmapsto \varphi(y, |f(y)|), \end{aligned}$$

est mesurable.

2. La fonction  $\rho_\varphi$  définie ainsi,

$$\begin{aligned} \rho_\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty] \\ f &\longmapsto \rho_\varphi(f) = \int \varphi(y, |f(y)|) d\mu, \end{aligned}$$

est une semi modulaire sur  $M(\Omega, \mu)$ , dite semi modulaire induite par  $\varphi$ . De plus, si  $\varphi$  est positive, alors  $\rho_\varphi$  est une modulaire dite modulaire de Musielak-Orlicz.



**preuve**

1. Il suffit juste de considérer le cas où  $f \geq 0$ .

Soit  $(f_k)_k$  une suite croissantes de fonctions simples, non négatives, qui converge simplement vers  $f$ . Alors,  $f_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j^k \chi_{\Omega_j^k}$  avec  $\Omega_j^k \in \Sigma$  et sont deux à deux disjoints.

$$\varphi(y, |f_k(y)|) = \varphi\left(y, \sum_{j=1}^n \alpha_j^k \chi_{\Omega_j^k}(y)\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(y, \alpha_j^k) \chi_{\Omega_j^k}(y),$$

qui est mesurable Comme  $\varphi$  est croissante et continue alors  $(\varphi(y, f_k(y)))_k$  est croissante et converge vers  $\varphi(y, f(y))$  D'où  $\varphi(\cdot, f)$  est mesurable.

2. Montrons que  $\rho_\varphi$  est une semi modulaire. De la définition de  $\rho_\varphi$  on a :

$$\rho_\varphi(0) = 0 \text{ et } \rho_\varphi(\lambda f) = \rho_\varphi(f) \text{ pour } |\lambda| = 1.$$

La convexité de  $\rho_\varphi$  découle de celle de  $\varphi$  et de la croissance de l'intégrale. Il reste donc à montrer que  $(\rho_\varphi(\lambda f) = 0 \forall \lambda > 0) \implies f = 0$  Soit  $f \in M(\Omega, \mu)$  telle que  $\rho_\varphi(\lambda f) = 0 \forall \lambda > 0$  alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(y, kf(y)) = 0 \quad \mu - p \cdot p \text{ dans } \Omega,$$

Comme  $\mathbb{N}$  est dénombrable on déduit que,

$$\varphi(y, kf(y)) = 0 \quad \mu - p \cdot p \text{ dans } \Omega, \forall k \in \mathbb{N},$$

Par hypothèse  $\varphi$  est convexe et  $\varphi(y, 0) = 0$  alors,

$$\varphi(y, \lambda f(y)) = 0 \quad \mu \cdot p \cdot p \text{ dans } \Omega, \forall \lambda > 0,$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(y, t) = +\infty \forall y \in \Omega$  alors,

$$|f(y)| = 0 \quad \mu - p \cdot p \text{ dans } \Omega, \forall \lambda > 0,$$

D'où,

$$f = 0.$$

Donc  $\rho_\varphi$  est une semi modulaire. Supposons maintenant que  $\varphi$  est positive et  $\rho_\varphi(f) = 0$  alors  $\varphi(y, f(y)) = 0$  pour presque tout  $y \in \Omega$  Puisque  $\varphi$  est positive on a  $\varphi(y, f(y)) = 0 \implies f(y) = 0$  pour presque tout  $y \in \Omega$  d'où,

$$f = 0.$$

Ce qui montre que  $\rho_\varphi$  est une modulaire.

## 4.6 Classe de Musielak-Orlicz

**Définition 4.4.** Soit  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ , on définit la classe de Musielak-Orlicz comme suit :

$$L_{oc}^\varphi(\Omega, \mu) = \{f \in L^\varphi(\Omega, \mu), \rho_\varphi(f) < +\infty\}.$$

**Remarques 4.1.** La classe de Musielak-Orlicz n'est pas un espace vectoriel.

**Exemple 4.6.1.** 1. Les espaces de Lebesgue classiques  $L^p(\Omega, \mu)$  avec  $0 \leq p < +\infty$ , sont des espaces de Musielak-Orlicz définies par la fonction,

$$\varphi_p(y, t) = \bar{\varphi}_p(t) = |t|^p.$$

2. Les espaces d'Orlicz  $L^\phi(\Omega, \mu)$ , sont un cas particulier des espaces de Musielak-Orlicz, en prenant,

$$\phi(y, t) = \phi(t).$$

## 4.7 Norme sur les espaces de Musielak-Orlicz

Dans les espaces de Musielak-Orlicz  $L^\phi(\Omega, \mu)$ , on définit trois normes, qui sont appelées norme d'Orlicz, norme de Luxemburg et norme d'Amemiya. Ces normes sont définies comme suit :

**Définition 4.5.** Soit  $f \in L^\phi(\Omega, \mu)$  alors,

1.

$$\|f\|_\phi^\circ = \sup \left\{ \int_\Omega |f(t)g(t)| d\mu : g \in L^{\phi^*}(\Omega, \mu), \rho_{\phi^*}(g) \leq 1 \right\}.$$

est une norme sur l'espace  $L^\phi(\Omega, \mu)$  dite **norme d'Orlicz**.

2.

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho_\phi \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

est une norme sur l'espace  $L^\phi(\Omega, \mu)$  dite **norme de Luxemburg**.

3.

$$\|f\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} [1 + \rho_\phi(kf)].$$

est une norme sur  $L^\phi(\Omega, \mu)$  dite **norme d'Amemiya**.

## 4.8 Résultats de convergence

Dans les espaces de Lebesgue classiques les théorèmes fondamentaux de convergences sont la convergence dominée, la convergence monotone et le lemme de Fatou, on démontrera les trois versions de ces théorèmes dans les espaces de Musielak-Orlicz. Nous verrons aussi les relations entre les types de convergence définis sur ces espaces à savoir la convergence en norme, en modulaire et la convergence en mesure.

**Lemme 4.2.** (*lemme de Fatou pour la modulaire*) Soit  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$  et  $f$  une fonction mesurable, et soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables, Si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \mu - p.p$  alors on a,

$$\rho_\varphi(f) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \rho_\varphi(f_k).$$

**preuve :** On a :

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(f) &= \int_{\Omega} \varphi(y, f(y)) d\mu \\ &= \int_{\Omega} \varphi\left(y, \lim_{k \rightarrow +\infty} |f_k(y)|\right) d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu, \end{aligned}$$

d'où,

$$\rho_\varphi(f) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \rho_\varphi(f_k).$$

**Lemme 4.3.** (*convergence monotone*) [3], [2]. Soit  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$  et  $f$  une fonction mesurable, et soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables croissante telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f_k| \rightarrow |f| \mu - p.p$ , alors,

$$\rho_\varphi(f) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_\varphi(f_k).$$

**preuve :** Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions croissante convergente vers une fonction  $f$ ,

$$|f_k| \nearrow |f| \mu - p.p.$$

comme  $\varphi$  est croissante et continue à gauche alors,

$$\varphi(y, |f_k(y)|) \nearrow \varphi(y, |f(y)|) \mu - p.p.$$

Par la croissance de l'intégrale et grâce au théorème de la convergence monotone on aura,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi(y, f(y)) d\mu &= \int_{\Omega} \varphi\left(y, \lim_{\Omega} |f_k(y)|\right) d\mu \\
&= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_{\varphi}(f_k).
\end{aligned}$$

**Lemme 4.4.** (convergence dominée) [3], [2]. Soit  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$  et  $f, g$  deux fonctions mesurables, et soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables, Si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \mu - p.p$ ,  $|f_k| \leq |g| \mu - p.p$  et  $\rho_{\varphi}(\lambda g) < +\infty, \forall \lambda > 0$  alors,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \text{ dans } L^{\varphi}(\Omega, \mu).$$

En particulier, si  $\rho_{\varphi}(\lambda g) < +\infty$  pour un certain  $\lambda > 0$  alors,

$$f_k \xrightarrow{\rho} f \text{ dans } L^{\varphi}(\Omega, \mu).$$

**preuve :** On suppose que,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = f \mu - p.p, |f_k| \leq |g| \forall k \in \mathbb{N} \text{ et } \rho_{\varphi}(\lambda g) < +\infty \quad \forall \lambda > 0$$

alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} |f_k - f| &= 0 \mu - p.p \text{ et } |f| \leq |g| \\
&\Rightarrow |f_k - f| \leq 2|g| \\
&\Rightarrow \lambda |f_k - f| \leq 2\lambda |g| \forall \lambda > 0.
\end{aligned}$$

On a,

$$\rho_{\varphi}(\lambda g) < +\infty \Rightarrow \rho_{\varphi}(2\lambda g) < +\infty \quad \forall \lambda > 0,$$

On utilise le théorème de la convergence dominée, et on conclut que,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(y, \lambda |f_k - f|) d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(y, \lambda |f_k - f|) d\mu \\
&= \int_{\Omega} \varphi\left(y, \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} |f_k - f|\right) d\mu \\
&= \int_{\Omega} \varphi(y, 0) d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Grâce au **lemme(2.3)** on obtient,  $(f_k)_k$  converge vers  $f$  dans  $L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ .

**Lemme 4.5.** Si  $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ , alors toute suite de Cauchy  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{\varphi}(\Omega, \mu)$  pour la norme admet

une sous suite qui converge  $\mu$ -p.p vers une fonction mesurable  $f$ .

## 4.9 Quelques propriétés des espaces de Musielak-Orlicz

### La complétude

**Théorème 4.1.** [3]. Soit  $\phi \in \varphi(\Omega, \mu)$  alors l'espace  $L^\phi(\Omega, \mu)$  est un espace de Banach.

preuve :

D'après le **théorème(1.1)**  $L^\varphi(\Omega, \mu)$  est un espace vectoriel Il reste à montrer que toute suite de Cauchy de  $L^\varphi(\Omega, \mu)$  converge dans  $L^\varphi(\Omega, \mu)$  Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy, grâce au **lemme(4.5)** il existe une sous suite  $(f_{n_k})_k$  et une fonction mesurable  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $(f_{n_k})_k$  converge vers  $f$  pour presque tout  $y \in \Omega$  Par suite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(y, |f_{n_k}(y) - f(y)|) = 0 \mu - p.p.$$

Soit  $\lambda > 0$ , comme  $(f_n)_n$  est de Cauchy, alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, k \geq N_0, \|\lambda(f_m - f_k)\|_\varphi \leq \varepsilon.$$

Prenant  $0 < \varepsilon < 1$ , par le **lemme(2.1)** on obtient,

$$\rho_\varphi(\lambda(f_m - f_k)) \leq \varepsilon$$

et d'après le **lemme (4.2)** on a,

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(\lambda(f_m - f_k)) &= \int_{\Omega} \varphi(\lambda(f_m - f_k)) d\mu \\ &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\lambda(f_m - f_{n_k})) d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(\lambda(f_m - f_{n_k})) d\mu \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_\varphi(\lambda(f_m - f)) = 0, \forall \lambda > 0.$$

Donc d'après le **lemme(2.3)** on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\varphi = 0.$$

## La séparabilité

Pour établir les théorèmes de séparabilité dans les espaces de Musielak-Orlicz la mesure  $\mu$  doit être séparable.

**Définition 4.6.** (*mesure séparable*) Soit  $\mu$  une mesure, elle est dite séparable s'il existe une suite  $(A_k)_k \subset \Sigma$  qui vérifie,

1.  $\mu(A_k) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .
2. Pour tout  $A \in \Sigma$ , avec  $\mu(A) < \infty$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$  :

$$\mu(A \Delta A_k) < \varepsilon.$$

(où  $\Delta$  désigne la différence symétrique).

**Exemple 4.9.1.** La mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  est séparable.

## CHAPITRE 5

# ESPACE DE LEBESGUE A EXPOSANT VARIABLE

Les espaces de Lebesgue à exposant variables sont apparus dans la littérature pour la première fois déjà dans un article 1931 par Orlicz. Le champ des espaces de fonctions à exposant variables a connu une croissance explosive ces dernières années. La référence standard pour les propriétés de base c'est l'article [6] par Kováčik et Rákosník. (Les mêmes propriétés ont été dérivées par différentes méthodes par Fan et Zhao [5] (10)ans après. Quelques aperçus du champ existent voir aussi, par exemple [4] Le but de ce paragraphe est de suggérer des analogues propriétés des espaces de Lebesgue  $L^p$ , il est clair que nous ne puissions pas simplement remplacer  $p$  par  $p(x)$  dans la définition usuel de la norme dans le  $L^p$ . Cependant, les espaces de Lebesgue peuvent être considérés comme cas particuliers des espaces d'Orlicz appartenant à une famille plus nombreuse des soi-disant espaces modulaires.

Si la fonction  $p$  est p.p fini dans  $\Omega$ , alors  $L^{p(x)}$  est un cas particulier de les espaces d'Orlicz-Musiela.

## 5.1 Définitions et propriétés

### 5.1.1 Exposant variable

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie complète.

**Définition 5.1.** On appelle exposant variable sur  $\Omega$  toute fonction mesurable,  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ , on note  $P(\Omega, \mu)$  l'ensemble de ces exposants. On pose,

$$p^+ = \sup \text{ess } p = \inf \{ \alpha > 0, |p| \leq \alpha \mu - p \cdot p \}.$$

et

$$p^- = \inf \text{ess } p = \inf \{ \alpha > 0, |p| > \alpha \mu - p \cdot p \}.$$

**Exemple 5.1.1.** Soit  $\Omega = \mathbb{R}$ , alors les fonctions définies par  $p(y) = p$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $p(y) = 2 + \sin(y)$  sont des exposants variables.

**Remarques 5.1.** Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , alors on note l'ensemble des exposants variables par  $P(\Omega)$ .

1. Dans toute la suite on considère les deux fonctions  $\varphi_{p(\cdot)}(y, t) = t^{p(y)}$  et  $\varphi_{p(\cdot)}(y, t) = \frac{1}{p(y)}t^{p(y)}$ .
2. Si  $p^+ < \infty$ , alors l'exposant variable  $p$  est dit bornée.

## 5.2 Espaces de lebeque généralisés

**Définition 5.2.** Soient  $p \in P(\Omega, \mu)$  et  $\varphi_{p(\cdot)} \in \phi(\Omega, \mu)$ , alors,

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)} : M(\Omega, \mu) &\longrightarrow [1, \infty] \\ f &\longmapsto \int_{\Omega} \varphi_{p(y)}(y, |f(y)|) d\mu, \end{aligned}$$

est une modulaire et l'espace

$$\begin{aligned} L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) &= \left\{ f \in M(\Omega, \mu) : \int_{\Omega} \varphi_{p(y)}(y, \lambda|f(y)|) d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega, \mu) : \int_{\Omega} |\lambda f(y)|^{p(y)} d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\} \end{aligned}$$

Ou,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) = \left\{ f \in M(\Omega, \mu) : \int_{\Omega} \frac{|\lambda f(y)|^{p(y)}}{p(y)} d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\},$$

est appelé espace de Lebesgue généralisé ou espace de Lebesgue à exposant variable.

## 5.3 Les normes sur l'espace de Lebesgue a exposant variable

**La norme de Luxemburg**

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho_{p(y)} \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

**La norme d'Orlicz**

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{\circ} = \sup_{g \in L^{q(y)}(\Omega, \mu)} \int_{\Omega_{q(y)}(s) \leq 1} f(y)g(y) | d\mu \text{ avec } q(y) = \frac{p(y)}{p(y) - 1}.$$



## La norme d'Amemiya

$$\|f\|_{p(\cdot)}^A = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} [1 + \rho_{p(\cdot)}(\lambda f)].$$

**Proposition 5.1.** [1]. Soit  $p \in P(\Omega, \mu)$ , si  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$  alors  $f$  est localement intégrable.

**Théorème 5.1.** [3]. Soit  $p \in P(\Omega, \mu)$  alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $p^+ < \infty$ ,
2.  $\varphi_{p(\cdot)}$  vérifie la condition-  $\Delta_2$  avec la constante  $2^{p^+}$ .

## 5.4 Propriétés de l'espace de Lebesgue a exposant variable

**Théorème 5.2.** L'espace  $L^{p(x)}(\Omega)$  est un espace normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach.

**preuve :** Soit  $\{f_k\}$  une suite de fonctions de Cauchy dans  $L^{p(x)}(\Omega)$ , et soit  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que,

$$\int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g(x)| dx < \varepsilon, \quad (5.1)$$

pour tout  $m, n \geq n_0$  et pour toute fonction  $g(x)$ , telle que  $\rho_{p'}(g) \leq 1$ . On décompose  $\Omega$  en des sous ensembles disjoints  $\Omega_k$  de mesure finie et on définit les fonctions

$$g_k = (1 + |\Omega_k|)^{-1} \chi_{\Omega_k}, k \in \mathbb{N},$$

alors,

$$\rho_{p'}(g) \leq \int_{\Omega_k} (1 + |\Omega_k|)^{-p(x)} dx + (1 + |\Omega_k|)^{-1} \leq 1.$$

On remplace  $g$  par  $g_k$  dans (5.1) on trouve,

$$\int_{\Omega_n} |f_m(x) - f_n(x)| dx \leq \varepsilon (1 + |\Omega_n|), m, n \geq n_0, k \in \mathbb{N}.$$

alors la suite  $f_n$  est de Cauchy et convergente dans  $L^{\Omega_k}$  par induction on trouve des sous suites  $f_n^{(k)}$  et des fonctions  $f^{(k)} \in L^1(\Omega_k)$ , telles que  $f_n^{(k)} \rightarrow f(x)$  pour  $x \in \Omega_n, k \in \mathbb{N}$  p.p, ainsi,

$$f_m^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x) \chi_{\Omega_k}(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega \text{ p.p}$$

On remplace  $f_m$  par  $f_m^{(m)}$  dans (5.1) et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient,

$$\int_{\Omega} \left| f(x) - f_n(x) \right| \left| g(x) \right| dx \leq \sup_m \int_{\Omega} \left| f_m^{(m)}(x) - f_n(x) \right| \left| g(x) \right| dx \leq \varepsilon,$$

pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $g$ , avec  $\rho_{p'}(g) \leq 1$ . Par conséquent,

$$\|f - f_n\|_p^0 \leq \varepsilon.$$

**Remarques 5.2.** Si  $|\Omega| = 0$ , alors l'espace  $L^{p(x)}(\Omega)$  c'est l'espace d'Orlicz.

**Corollaire 5.1.** L'espace dual de  $L^{p(x)}(\Omega)$  c'est l'espace  $L^{p'(x)}(\Omega)$  ssi  $p \in L^\infty(\Omega)$ . l'espace  $L^{p(x)}(\Omega)$  est un espace réflexif ssi :

$$1 < \operatorname{ess\,inf}_\Omega p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_\Omega p(x) < \infty.$$

## La séparabilité

**Théorème 5.3.** [3]. Soit  $p \in P(\Omega, \mu)$ , tel que  $p^+ < \infty$  et  $\mu$  est une mesure séparable (voir la définition 3.6), alors

$$L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) \text{ est séparable.}$$

## 5.5 Résultats de convergence

En plus des résultats de convergence obtenus dans le chapitre précédent, nous donnons d'autres résultats de convergence dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 5.4.** [1]. Soit  $p \in P(\Omega)$  on suppose que  $p^+ < +\infty$ , pour tout  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  et pour toute suite  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes,

1.  $f_k$  converge vers  $f$  en norme,
2.  $f_k$  converge vers  $f$  en modulaine,
3.  $f_k$  converge vers  $f$  en mesure et pour un certain  $\gamma > 0$ ,  $\rho(\gamma f_k) \longrightarrow \rho(\gamma f)$ .

**Théorème 5.5.** [1]. Soit  $p \in P(\Omega)$  et soit une suite de fonctions  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ . Si  $(f_k)_k$  converge vers  $f$  en norme alors elle converge vers  $f$  en mesure.

$$f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} f \implies f_k \xrightarrow{\mu} f.$$

**preuve :** [3].

Dans cette section, on s'intéresse à des exemples d'espaces d'Orlicz munis de la norme d'Orlicz. Des résultats du même type sont obtenus dans le cas de la norme de luxemburg

**Exemple 6.0.1.** *Les espaces  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) sont des espaces d'Orlicz avec,*

$$\phi_p(x) = |x|^p$$

De plus,

$$\|f\|_{\phi_p}^o = \begin{cases} \omega_p \|f\|_{L^p} & \text{avec } \omega_p = p(p-1)^{\left(\frac{1-p}{p}\right)}, \text{ si } 1 < p < \infty \\ \|f\|_{L^1} & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

En effet,

Montrons que  $L_{\phi_p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} L_{\phi_p}(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \int_{\Omega} \phi_p(\lambda f(t)) d\mu < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \lambda^p \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) : \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu < \infty \right\} \\ &= L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Calculons maintenant la norme d'Orlicz de  $f$ .

$$\begin{aligned} \|f\|_{\phi_p}^o &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} [1 + \rho_{\phi_p}(kf)] \\ &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[ 1 + \int_{\Omega} |kf(t)|^p d\mu \right] = \inf_{k>0} \frac{1}{k} [1 + k^p \|f\|_{L^p(\Omega)}^p]. \end{aligned}$$

Soit  $1 < p < \infty$ , considérons la fonction  $g$  de variable  $k > 0$  définie par,

$$g(k) = \frac{1}{k} \left[ 1 + k^p \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \right].$$

La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0, \infty[$  et sa dérivée est de la forme,

$$g'(k) = \frac{-1}{k^2} + (p-1)k^{p-2} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

de plus,

$$\begin{cases} g'(k) < 0 & \text{si } k < \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ g'(k) = 0 & \text{si } k = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ g'(k) > 0 & \text{si } k > \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}} \end{cases}$$

Cela signifie que,  $g$  est décroissante sur  $]0, \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}}[$ , et croissante sur  $]\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}}, \infty[$  Alors,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\phi_p}^o &= \inf_{k>0} g(k) \\ &= g\left(\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}}\right) \\ &= p(p-1)^{\left(\frac{1-p}{p}\right)} \|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas  $p = 1$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\phi_1}^o &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[ 1 + \int_{\Omega} \phi_1(kf(t)) d\mu \right] \\ &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[ 1 + \int_{\Omega} |kf(t)| d\mu \right] = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[ 1 + k \int_{\Omega} |f(t)| d\mu \right] \\ &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} + \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

## CONCLUSION

Nous estimons que la théorie des espaces d'Orlicz et de Musielak-Orlicz est un domaine très intéressant et trouve beaucoup d'applications (Optimisation, EDP...); et avec les conditions les plus faibles  $1 < p^- \leq p^+ < \infty$  les espaces de Lebesgue généralisés ont aussi de nombreuses propriétés intéressantes. Comme la théorie de ces espaces est d'actualité beaucoup de questions sont encore posées :

- Trouver un ensemble dense dans  $L^{p(\cdot)}$  quand  $p^+ = \infty$ .
- Sous quelles conditions l'ensemble  $L^{p(\cdot)} \cap_{1 \leq p < \infty} L^p$  est dense dans  $L^{p(\cdot)}$ .
- Caractériser le dual de  $L^{p(\cdot)}$  quand  $p^+ = \infty$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.V.Cruz-Urbe and A.Fiorenza , variable Lebesgue spaces,Applied and Numerical-Harmonic-Annlysis,springer Basel (2013).
- [2] H.Brezis.Analyse fonctionnell théorie et application.Masson,paris 1983.
- [3] L.Diening ,p,Harjulehoto, p.Hasto and M.Ruzickn ,Lebsgue and sobolev spaces with variable exponents,December (2010).
- [4] L.Diening .Maximal function on generalized Lebesgue spaces  $L^{P(\cdot)}$ , Math .Inequal.App,Vol 7(2004),pp.245,253.19.
- [5] X.L.Fan and D.zhao,on the spaces  $L^{P(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$ , J.Math .Anal.Appl,vol 263(2001) ,pp.424-446.19.
- [6] O.Kovacik and J .Rakosnik,On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$ , Czeehoslovak mathimatical journal,Vol 41 (1991),pp. (592-618).19.
- [7] S.Chen.Geometry of orlicz spaces.Dissertationes Math 1996 .