République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun - Tiaret -

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de MATHEMATIQUES

MÉMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et d'Informatique
FILIERE :Mathématiques
SPECIALITE :Analyse Fonctionnelle Et Équations Différentielles

Présenté par

•ABDALLAH FATIHA
•BENALI SABRINA

SUJET DU MÉMOIRE

QUELQUES RÉSULTATS DE MOYENNISATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLE

Soutenu le :28/09/2020

Devant Le Jury Composé de :

Mr : GUEDDA LAHCENE	*Pr*	**Président**
Mr : BENIA KHAIR EDDINE	*M.A.A*	**Examinateur**
Mr : OUARDANI ABDERRAHMANE	*M.C.B*	**Encadreur**

Année Universitaire : **2019 \ 2020**

Remerciements

Je remercie avant tout «Allah» qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail .

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à l'encadreur de ce mémoire, Ms Ouardani Abderrahmane, pour son patience, son disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion

J'exprime ma profonde gratitude et reconnaissance à Monsieur Guedda Lahcene pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury de soutenance. Je tiens également à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur Benia Khair Eddine de m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail. Je les remercie pour leurs remarques et leurs suggestions.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères soeurs AICHA , DALILA ,HASSINA , HADIL pour leurs encouragements permanents.

A mes chers frères WAIL ,MOHAMED pour leur appui et leur encouragement.

A toute mes amis .

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

FATIHA.

Je dédie ce mémoire :

A ma mère et à mon père en guise de remerciement et de reconnaissance pour toute la confiance , le soutien et l'aide qu'ils m'ont apporté tout en m'encourageant pour empreintes la voie de la réussite .

A mes chères soeurs MANEL, AMINA, KHADIDJA, SOUDJOUD.

A mon seul frère MOHAMED AYOUB .

A ma tante djamilla et son marie qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments difficiles .

A tous mes amis .

A tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon coeur , je dis grand merci .

SABRINA.

Table des matières

Introduction

Les méthodes mathématiques utilisés en physique conduisent le plus souvent à des problèmes pour les quels il n'est pas possible de donner des solutions explicites. Les solutions numériques sont présents ou quand des domaines de calcule sont très grands. Dans de telles situations, on peut tenter d'élaborer des modèles plus simples, soit en annulant un paramètre, soit en se limitant à l'étude d'un domaine plus petit : les deux simplifications pouvant être combinées. Lorsqu'on annule un petit paramètre, noté de façon symbolique ε, il se peut que la solution initial tende uniformément vers la solution du problème réduit quand ε tend vers zéro. On est alors confronté à un problème dit de perturbation régulière.

Considérons une équation différentielles dépendant d'un petit paramètre ε. Le théorème de la dépendance continue et même différentiable par rapport aux paramètres est également un puissant instrument de calcul. En effet, admettons que nous ayons résolu un système d'équation différentielle pour une certaine valeur du paramètre. On peut alors trouver une solution approchée pour des valeurs proches du paramètre. Pour cela il nous suffira de calcule la valeur de la dérivée de cette solution par rapport au paramètre (pour la quelle nous savons résoudre ce système). Cette dérivée, qui est une fonction du temps, est elle même solution d'une certaine équation différentielle qu'on appelle équation aux variations.

Si la perturbation est de l'ordre de ε. On détermine cette quantité approximativement par la résolution des équations aux variations pour la solution non perturbée. Mais si l'on s'intéresse au comportement de la solution sur des intervalles du temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.

De nombreuses méthodes on été développés pour tenter de résoudre des problèmes de perturbation. Parmi les méthodes les plus célèbres et les plus importantes figue la méthode de moyennisation (Averaging Theory). Cette méthode consiste à remplacer l'équation perturbée par une équation moyennée plus simple, dont les solutions sont étudiées sur des intervalles de temps de l'ordre $1/\varepsilon$ (c'est-à-dire sur des intervalles de temps lent de l'ordre 1).

Ensuite on dire des conclusions sur le comportement du mouvement perturbe pendant des intervalles de temps de l'ordre $1/\varepsilon$.

Dans ce mémoire, on va présenter la méthode de moyennisation dans les équations différentielles ordinaires (ODE).

Ce mémoire est composé en trois chapitres comme suite :

Chapitre 01 :

Nous rappelons quelques définitions et notions de l'analyse fonctionnelle qui nous seront indispensables a la compréhension de la suite de cet mémoire.

Chapitre 02 :

Nous présentons la méthode de moyennisation dans les équations différentielles ordinaires (ODE). Les solutions d'une non autonome, équation sous la forme normale

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{t}{\varepsilon}, x, \varepsilon).$$

Ou $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$(est un petit paramètre positif) sont approximées par les solutions de l'équation moyenné autonome

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}.$$

Chapitre 03 :

Application :On considère l'équation de Van der pol

$$\ddot{x} + x + \epsilon h(x, \dot{x}) = 0 \qquad\qquad \epsilon << 1.$$

Avec les valeurs initiales $\dot{x}_0, x_0$ donné et h tel que $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfaire les conditions avant, (h est une fonction périodique).

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 les équations différentielles ordinaires

1.1.1 Différents types d'équations

Définition 1.1.1. *Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO , d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \longmapsto x(t)$ et ses dérivées $\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^n$ au point t définie par*

$$F(t, x, \ddot{x}, ..., x^n) = 0 \tag{1.1}$$

Où F n'est pas indépendante de sa dernière variable x^n. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier). La solution x en général sera a valeur dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ où n sera le plus souvent égale à 1, ou 3, On dit que cette équation est scalaire si F est à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.1. *l'équation différentielle*

$$\dot{x} + x^2 - t = 0,$$

est du premier ordre avec $V = \mathbb{R}^3$ et $F(t, x, \dot{x}) = \dot{x} + x^2 - t$.

Définition 1.1.2. *On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme*

$$x^n = f(t, x, \ddot{x}, ..., x^{n-1}).$$

Définition 1.1.3. *On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équations de la forme*

$$x^n = f(x, \ddot{x}, ..., x^{n-1}).$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

Définition 1.1.4. *Une EDO de type* (1.1) *d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^n(t) + a_{n1}(t)x^{n-1}(t) + ... + a_1(t)x^{'}(t) + a_0(t)x(t) = g(t),$$

avec tous les x^i de degré 1 *et tous les coefficients dépendant au plus de t.*

Exemple 1.1.2. *l'équation $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$ est une équation ordinaire linéaire d'ordre deux à coefficient constantes.*

1.2 Solutions d'une équation différentielle

Définition 1.2.1. *On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n sur certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction x définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.*

On notera en général cette solution (x, I). Si I contient sa borne inférieur notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$).

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

1.2.1 Solutions Maximales

l'expression solution maximales est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.2.2. *Soient $x : I \longrightarrow U$ et $\tilde{x} : \tilde{I} \longrightarrow \tilde{U}$ deux solutions de l'équation différentielle. On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x si : $I \subset \tilde{I}$ et*

$$\tilde{x}(t) = x(t), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Définition 1.2.3. *On dit qu'une solution* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est maximale si y n'admet pas de prolongement* $\tilde{x} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *avec* $\tilde{I} \supsetneq I$.

Théorème 1.2.1. *Toute solution y se prolonge en une solution maximale* $\tilde{x}$ *(pas nécessairement unique).*

1.2.2 Solutions Globales

Définition 1.2.4. *Soit* I *un intervalle inclus dans* $\mathbb{R}$. *Une solution* (x, I) *est dite globale dans* I *si elle est définie sur l'intervalle* I *tout entier.*

Remarque 1.2.1. *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple 1.2.1. $\dot{x} = x^2$ *sur* $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. *On a d'une part la solution* $x(t) = 0$ *en est une solution évidente.*
2. *Soit alors* $y \neq 0$ *on a* $\dot{x} = X^2$ *s'écrit* $\frac{\dot{x}}{x^2} = 1$, *d'où par intégration*

$$-\frac{1}{x(t)} = t + C \ , \ \ x(t) = \frac{1}{t+C} \ \text{(C est une constante).}$$

Cette solution est maximale mais non globale, $y(t) = 0$ *est la seule solution globale.*

1.3 Fonction lipschitzienne

Soit $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^n$, f une application définie de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.1. *L'application* f *est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur* Ω *s'il existe une constante* k, *appelée la constante de Lipschitz de* f, *telle que :*

$$\forall x \in I, \ \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq k\|y - z\|.$$

Remarque 1.3.1. *On dit que* f *est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si tout point de* $I \times \mathbb{R}^n$ *admet un voisinage* Ω *sur lequel* f *est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

1.4 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction.

Définition 1.4.1. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme suivante :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x),$$

pour $(t, x(t)) \in U$, et un point $(t_0, x_0) \in U$ le problème de cauchy correspondant consiste a chercher des solution x, tell que $x(t_0) = x_0$. On note le problème de cauchy de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{1.2}$$

Définition 1.4.2. *Une solution du problème de Cauchy* (1.2) *sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0; x_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

- *pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,*
- *pour tout $t \in I$, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$,*
- *$x(t_0) = x_0$*

Théorème 1.4.1. *Soit $f : I \times V \longrightarrow X$ une application continue, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et V un ouvert connexe non vide d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach et (t_0, x_0) un point fixe de $\mathbb{R} \times V$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient t_0, alors x est une solution du problème de Cauchy* (1.2) *sur I si et seulement si*

1. *pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in I \times V$,*
2. *x est continue sur I,*
3. *pour tout $t \in I$*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Preuve: Soit $x : I \longrightarrow V$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I qui contient t_0 et que $(t, x(t)) \in I \times V$.
Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (1.2). Alors x est dérivable sur I et vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

En intégrant les deux membres de t_0 à t, on obtient pour tout $t \in I$

$$\int_{t_0}^{t} x'(t)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

ce qui donne, en remplaçant $x(t_0)$ par x_0

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Inversement, supposons que pour tout $t \in I$, x vérifie :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{1.4}$$

alors, d'aprés la continuité de x et f, donc la dérivabilité de la fonction $t \mapsto f(t, x(t))$, on obtient

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \text{pour tout} \quad t \in I, \tag{1.5}$$

de plus x vérifie $x(t_0) = x_0$ ce qui signifie que x est solution du problème (1.2). $\square$

1.5 l'existence et l'unicité et prolongement

Théorème 1.5.1. ***Théorème de Cauchy Lipschitz***
Soient $f \in \mathcal{C}(I; R^n)$ où I est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, et $(t_0, x_0) \in I$. On suppose f est une application continue et localement lipschitzienne en la deuxième variable. Alors on a les propriétés suivants.

Existence : il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T]; J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Unicité : Si x est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Théorème 1.5.2. *Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $\mathcal{C} = |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b$ soit inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On note*

$$M = \sup_{(t,x)\in\mathcal{C}} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \quad et \quad \alpha = \min(a, \frac{b}{M}).$$

Alors il existe au moins une solution au problème de Cauchy au $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

lemme 1.5.1. ***lemme de Gronwall***
Supposons pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ on a

$$\varphi(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)ds$$

ou φ et β sont continues et $\beta(t) > 0$ alors

$$\varphi(t) \leq \ a e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

lemme 1.5.2. ***lemme de Gronwall*** *(cas spécial)*
on suppose que $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$\varphi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds + \delta_3$$

avec $\varphi(t)$ est continue pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ et $\delta_1 > 0,\ \delta_2 \geq 0,\ \delta_3 \geq 0$ alors

$$\varphi(t) \leq (\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3)e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

Théorème 1.5.3. ***Critère de prolongement***

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteur continu et localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable et* (t_0, x_0) *condition initiale de Problème de Cauchy (1.2). Soit* (J, x)*l'unique solution maximale du problème de Cauchy. On rappelle que J nécessairement ouvert. On la note* $J =]\alpha, \beta[$ *avec* $\beta \in]t_0, +\infty]$ *et* $\alpha \in [-\infty, t_0[$

1. *Si* $\beta < +\infty$*, alors* $\sup\limits_{t \in [t_0, \beta[} \|x(t)\| = +\infty$.
2. *Si* $\alpha > -\infty$*, alors* $\sup\limits_{t \in]\alpha, t_0]} \|x(t)\| = +\infty$.

Chapitre 2

Méthode de moyennisation

Dans les systèmes dynamiques, la méthode de calcul de moyenne (également appelée théorie de calcul de moyenne) exploite des systèmes contenant une séparation des échelles de temps : une oscillation rapide contre une dérive lente. Cela suggère que nous effectuons une moyenne sur une période de temps donnée afin d'aplanir les oscillations rapides et d'observer le comportement qualitatif de la dynamique résultante. La solution approchée tient sous un temps fini inversement proportionnel au paramètre dénotant l'échelle de temps lente. Il s'avère que c'est un problème habituel où il existe un compromis entre la qualité de la solution approximative et le temps nécessaire pour être proche de la solution d'origine. Plus précisément, le système a la forme suivante

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1.$$

d'une variable d'espace de phase x. L'oscillation rapide est donnée par f contre une dérive lente de $\dot{x}$. La méthode de moyenne donne un système dynamique autonome

$$\dot{y} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(y, s, 0)\, ds =: \varepsilon \bar{f}(y).$$

qui rapproche les courbes de solution de $\dot{x}$ à l'intérieur d'une région connectée et compacte de l'espace des phases et dans le temps de $1/\varepsilon$.

Le but de cet chapitre est de considérer une équation différentielle qui est

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{t}{\varepsilon}, x, \varepsilon). \tag{2.1}$$

et de montrer que des solutions de (2.1) peut etre approchée par ceux que l'on de l'equation moyenne

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y). \tag{2.2}$$

C'est -à - dire. La méthode de moyennisation [4, 7] nous permet de conclure que les solutions du système non-autonome (2.1) sont approximées par les solutions du système autonome (2.2), dit système moyenné du système (2.1). L'approximation est valable pour les intervalle d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ lorsque ε est suffisamment petit dans (2.2).

La fonction $\bar{f}$ est la moyenne de fonction f dans (2.1).

Introduisons dans l'équation (2.1) un changement de variable dans l'échelle de temps en posant $t = \varepsilon\tau$ celle ci devient

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon). \tag{2.3}$$

Faisons le même avec l'équation (2.2). L'équation moyenné s'écrit alors

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon \bar{f}(y). \tag{2.4}$$

L'étude des équations de la forme (2.1) est appelé la forme standard a été intitiué par N.N Bogolyubov, Il est à noter que les écritures (2.1) et (2.3) sont équivalentes, l'étude de problème à l'une ou l'autre l'échelle de temps $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ indifféremment aux mêmes résultats.

2.1 Cas périodique

Nous allons énoncé le théorème de moyennisation, Pour cela

On considère le problème de valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Supposons que $f(t, x)$ est T-périodique en t, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et ε un petit paramètre et

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon \bar{f}(y) \\ y(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Avec

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,y)dt$$

2.1.1 Dépendance d'un petit paramètre ε

Considérons le problème à valeur initiale plus générale que (2.5)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon f(t,x,\varepsilon) = \varepsilon f_1(t,x) + \varepsilon^2 f_2(t,x,\varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

On suppose $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ est T-périodique en t. Le problème moyennée autonome associée

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon \bar{f}(y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Avec

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,y)dt$$

Théorème 2.1.1. *On considère le problème à valeur initiale* (2.7) *et* (2.8) *avec* $x, y, x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$*(*ε_0 *est un constant arbitraire),* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

1. $f_1, f_2, \frac{\partial f_1}{\partial x}$ *sont définies, continues et bornées par une constante* M *indépendante de* ε *sur* $[t_0, +\infty] \times D$,
2. f_2 *est lipschitzienne continue avec* $x \in D$,
3. f_1 *est* T*-périodique en* t*, avec* T *une constante indépendante de* ε,
4. $y(t)$ *reste dans* D *pour* $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon})$.

Alors

$$x(t) - y(t) = o(\varepsilon); \quad \textit{quand} \quad \varepsilon \to 0,\ t \in o(\varepsilon).$$

Preuve: Les hypothèses (1) et (2) garantissent l'existence et l'unicité des solutions des deux problèmes de valeur initiale (2.7) et (2.8) en mettant à l'échelle $\tau = \varepsilon t$, on admet l'existence d'une solution d'équation sur l'échelle de temps $\frac{1}{\varepsilon}$ en t.

On définie

$$u(t,y) = \int_0^T [f_1(s,y) - \bar{f}(y)]ds.$$

On a

$$\|u(t,y)\| \leqslant 2MT \qquad\qquad \text{pour } t \geqslant t_0 \text{ et } y \in D.$$

Nous introduisons

$$z(t) = y(t) + \varepsilon u(t,y),$$

comme $y \in D,\ \forall t \geqslant t_0$ on a l'estimation

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| =&\|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)\|\\ \leq&\|x(t)-z(t)\| + \|z(t)-y(t)\|\\ \leq&\|x(t)-z(t)\| + 2\varepsilon MT.\end{aligned}$$

On notons que

$$x(t)-z(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} ds,$$

et on calcule

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f_1(t,x) + \varepsilon^2 f_2(t,x,\varepsilon) - \frac{dy}{dt} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\ldots\frac{dy}{dt} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)$$

Remplaçons $\frac{dy}{dt}$ par $\varepsilon \bar{f}(y)$, on aura

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f_1(t,x) + \varepsilon f_1(t,z) + R.$$

Où

$$R = \varepsilon^2 f_2(t,x,\varepsilon) - \varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\bar{f}(y) - \varepsilon f_1(t,y) - \varepsilon f_1(t,z).$$

On a

$$\|\bar{f}(y)\| \leq M \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \|\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\| \leq 2MT,$$

grâce à la continuité lipschitzienne de f nous avons

$$\begin{aligned}\|f_1(t,z(t)) - f_1(t,y(t))\| =&L\|z(t)-y(t)\|\\ \leq&L\varepsilon\|u(t,y)\|\\ \leq&2L\varepsilon MT\end{aligned}$$

donc il existe une constante k telle que

$$\|R\| \leq k\varepsilon^2,$$

c'est clair que

$$\begin{aligned}\|x(t)-z(t)\| \leq &\int_{t_0}^{t} \|\frac{dx}{dt}-\frac{dz}{dt}\| \\ \leq &\varepsilon \int_{t_0}^{t} \|f_1(t,x)-f_1(t,z)+k\varepsilon\| \\ \leq &\varepsilon \int_{t_0}^{t} \|f_1(t,x)-f_1(t,z)\|ds + k\varepsilon^2(t-t_0) \\ \leq &\varepsilon L \int_{t_0}^{t} \|x(s)-z(s)\|ds + k\varepsilon^2(t-t_0)\end{aligned}$$

D'après lemme de Gronwall

$$\|x(t)-z(t)\| \leq \varepsilon\frac{k}{L}e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon\frac{k}{L},$$

par conséquent

$$\|x(t)-y(t)\| \leq \varepsilon(\frac{k}{L}e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L}),$$

si $e^{\varepsilon L(t-t_0)}$ est borné par une constante indépendante de ε aura l'approximation

$$y(t)-x(t)=o(\varepsilon) \qquad quand \qquad \varepsilon \to 0.$$

$\square$

Théorème 2.1.2. *la forme la plus simple de moyennisation est le cas périodique qui vise à résoudre un problème de perturbation sous la forme standard*

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\varepsilon f_1(t,x)+\varepsilon^2 f_2(t,x,\varepsilon) \\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{2.9}$$

On suppose f_1 est T-périodique en t et on introduit la moyenne

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(s,z)ds$$

Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \varepsilon \bar{f}(z) \\ z(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

on observe que l'introduction de la nouvelle variable (l'échelle de temps) $\tau = \varepsilon t$ dans (2.10) *supprime ε donnant ce qui appelle le système de guide*

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = \bar{f}(w) \\ w(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

si la solution de (2.11)*est $w(\tau)$,alors la solution de* (2.10)*est :*

$$z(t,\varepsilon) = w(\epsilon t) \tag{2.12}$$

les solutions de ces systèmes restent proche (d'ordre ε) à l'échelle de temps d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$.

Théorème 2.1.3. ***L'approximation** .*
On considère le problème a valeur initiale en l'espace $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon f(t,x,\varepsilon) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, la fonction $f(t,x,\varepsilon)$ est définie par $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, et ε un petit paramètre , est périodique en t avec la période T indépendant de ε.
Supposons que le problème (2.13) *est présenté comme*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f_1(t,x) + \varepsilon^2 f_2(t,x) + ... + \varepsilon^n f_n(t,x) + \varepsilon^{n+1} f_{n+1}(t,x,\varepsilon) \tag{2.14}$$

Où $f_i(t,x)$ $\quad i=\overline{1,n}$ $\quad$ *et* $\quad f_{n+1}(t,x,\varepsilon)$ *sont* T*-périodique en* t.
D'après le changement de variable suivant

$$x = y + \varepsilon u_1(t,y) + \varepsilon^2 u_2(t,y) + ... + \varepsilon^k u_k(t,y),$$

avec T*-périodique coefficients, on a*

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}_1 + ... + \varepsilon^n \bar{f}_n(y) + \varepsilon^{n+1}\tilde{f}(t,y,\varepsilon) \tag{2.15}$$

où $\tilde{f}(t,y,\varepsilon)$ *admet les même propriété de* $f_{n+1}(t,x,\varepsilon)$.
On considère le problème

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y,\varepsilon),$$

où

$$\bar{f}(y,\varepsilon) = \bar{f}_1 + ... + \varepsilon^{n-1}\bar{f}_{n-1}(y)$$

On écrit le problème à valeur initiale (2.13) *sous forme*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon \bar{f}(y,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\tilde{f}(t,y,\varepsilon) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Où $\bar{f}$, $\tilde{f}$ *sont des fonctions moyennées correspondantes à* $f_i(t,x)$ *respectivement.*

2.1.2 L'approximation du première ordre

La transformation presque-identité est la forme

$$x = U(y,t,\varepsilon) = y + \varepsilon u_1(y,t,\varepsilon) \tag{2.17}$$

Où u_1 est périodique en t avec période T, ici y est la variable qui remplacera x. le but est de choisir u_1 de sorte que porte l'équation d'origine (2.17).

$$\dot{x} = \varepsilon f_1(x,t) + \varepsilon^2 f_2(x,t,\varepsilon), \tag{2.18}$$

dans l'équation moyennée complète

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + f_2^*(y, t, \varepsilon), \tag{2.19}$$

pour certains f_2^*, induit par la transformation et aussi périodique en t. Alors l'équation moyenné

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}(z), \tag{2.20}$$

est obtenu par supprimant le dernier terme et en changeant le nom de la variable de y à z. z n'est pas une nouvelle variable liée à x ou y par n'importe quelle formule, z est introduit juste pour distinguer la solution de (2.19) celles de (2.20).

lemme 2.1.1. *Il existe application* $\boldsymbol{U}$ *(pas unique) tel que* (2.17) *transmettre* (2.18) *à* (2.19)*, en particulier,* u_1 *admet constant Lipschitz* $2\lambda_{f_1}T$ *(* T *est la période).*

Théorème 2.1.4. *les solutions* $x(t, \varepsilon)$*et* $z(t, \varepsilon)$ *définie ci-dessus satisfait l'estimation*

$$\|x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\| = o(\varepsilon)$$

pour temps $o(\varepsilon)$*.*

Preuve: D'après l'inégalité triangulaire

$$\|x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\| \leq \|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| + \|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| + \|y(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\|$$

d'après (2.17)

$$\|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| = o(\varepsilon)$$

et d'après le lemme (2.0.6)

$$\|y(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\| = o(\varepsilon)$$

alors

$$\|x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\| = o(\varepsilon)$$

pour le temps d'ordre $o(\varepsilon)$. □

2.2 Cas générale

Définition 2.2.1. *soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur U.*

On note f_T la fonction moyenne locale de f est donnée par :

$$f_T(t,x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+s,x)ds.$$

lemme 2.2.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur U.*
Si f est T-périodique en t alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n;\ f_T(t,x) = \bar{f}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+s,x)ds.$$

Preuve: Soit $t \in \mathbb{R}$ On a :

$$f_T(t,x) = \bar{f}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+s,x)ds,$$

et

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t+s,x)ds = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s,x)ds = \bar{f}(x),$$

On pose $t+s=u$.
On a :

$$\begin{aligned} f_T(t,x) &= \frac{1}{T}\int_t^0 f(s,x)ds + \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds + \frac{1}{T}\int_T^{t+T} f(s,x)ds \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^t f(s,x)ds + \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds + \frac{1}{T}\int_T^{t+T} f(s,x)ds \end{aligned}$$

comme f est périodique, on a :

$$\frac{1}{T}\int_T^{t+T} f(s,x)ds = \frac{1}{T}\int_0^t f(s,x)ds.$$

Donc

$$f_T(t,x) = -\frac{1}{T}\int_T^{t+T} f(s,x)ds + \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds + \frac{1}{T}\int_T^{t+T} f(s,x)ds.$$

Alors

$$f_T(t,x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds = \bar{f}(x).$$

□

Définition 2.2.2. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on dit que f est K.B.M (Kryblov,Bogoluibov et Mitropolsky) si :*

i) f est continue en t et $x \in \mathbb{R}_+ \times D$

ii) f est Lipschitz par rapport à la deuxième variable $x \in D$,

iii) $\bar{f} = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds$ existe, et cette limite uniformément par rapport à x dans les ensembles compacts $k \subset D$.

lemme 2.2.2. *Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction k-Lipschitz dans $\mathbb{R}$.*

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} : \|x(t) - x_T(t)\| \leq \frac{1}{2}kT.$$

Preuve: Soit $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_T(t)\| &= \|\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T x(t+s)ds\| \\ &= \|\frac{1}{T}\int_0^T x(t) - x(t+s)ds\| \\ &\leq \frac{1}{T}\int_0^T \|x(t) - x(t+s)\|ds\end{aligned}$$

comme x est k-Lipschitz dans $\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_T(t)\| &\leq \frac{1}{T}\int_0^T k|t-t-s|ds \\ &\leq \frac{1}{T}\int_0^T k|-s|ds \\ &\leq \frac{k}{T}\int_0^T sds \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{k}{T}T^2 = \frac{1}{2}kT\end{aligned}$$

d'où :

$$\|x(t) - x_T(t)\| \leq \frac{1}{2}kT.$$

□

Corollaire 2.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times D \to \mathbb{R}^n$ une fonction de K.B.M soit $x(\tau)$ une solution de l'équation différentielle :*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) \qquad\qquad t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{2.21}$$

On suppose que :

$$M = \sup_{\substack{x\in D\\ 0\leq \varepsilon L \leq L}} \|f(t,x)\| < \infty, \qquad\qquad L > 0 \ (L : \textit{fixé constante arbitraire}).$$

Alors :

$$\forall t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}] : \qquad\qquad \|x(t) - x_T(t)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon ML. \qquad\qquad (\textit{puisque } k = \varepsilon L)$$

Preuve: Nous avons ainsi : $x(t)$ est εM-Lipschitz sur $[0, \dfrac{L}{\varepsilon}]$ par le lemme (2.2.1) on a :

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_T(t)\| &\leq \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon M|-s|ds \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon MT.\end{aligned}$$

□

lemme 2.2.3. *On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases}\dot{x} = \varepsilon f(t,x) \\ x(0) = x_0\end{cases} \tag{2.22}$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et Lipschitz.

$$\begin{cases}\dot{y} = \varepsilon f_T(t,y) \\ y(0) = x_0\end{cases} \tag{2.23}$$

Si x et y sont des solutions de (2.22) et (2.23), supposées existe au mois une solution sur d'intervalles du temps τ du type $[0, \frac{L}{\varepsilon}]$ où $L > 0$ est une constante arbitraire.

Alors

$$x(\tau) = y(\tau) + o(\varepsilon T).$$

Preuve: On écrit l'équation différentielle comme une équation intégrale, on a :

$$x(t) = a + \varepsilon \int_0^t f(s, x(s))ds$$

avec (2.2.1) et lemme (2.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|x(t) - a - \varepsilon \int_0^t f_T(s, x(s))ds\| \\
&\leq \|x(t) - x_T(t)\| + \|x_T(t) - a - \varepsilon \int_0^t f_T(s, x(s))ds\| \\
&\leq \varepsilon MT(1 + \frac{1}{2}kL)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$x(t) = a + \varepsilon \int_0^t f_T(s, x(s))ds + \mathcal{O}(\varepsilon T)$$

depuis :

$$y(t) = a + \varepsilon \int_0^t f_T(s, y(s))ds$$

On a :

$$x(t) - y(t) = \varepsilon \int_0^t [f_T(s, x(s)) - f_T(s, y(s))]ds + \mathcal{O}(\varepsilon T)$$

et d'après la continuité de Lipschitz de f_T(hérite de f)

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \int_0^t k\|x(s) - y(t)\|ds + o(\varepsilon T).$$

avec le lemme de Gronwall :

$$\|x(t) - y(t)\| = o(\varepsilon T e^{\varepsilon kt})$$

□

Théorème 2.2.1. ***moyenne générale***

On considère les problèmes de la valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.24}$$

avec :$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et*

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon \bar{f}(z) \\ z(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Où :

$$\bar{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t,x)dt$$

et $x,\ z,\ x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n,\ t \in [0,\infty),\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.
Supposons :

1. f *est une fonction K B M avec une fonction moyennisée* $\bar{f}$ *d'ordre* $\delta(\varepsilon)$.
2. $z(t)$ *appartient à un sous -ensemble intérieur de* D *sur l'échelle de temps* $\frac{1}{\varepsilon}$.

Puis :

$$x(t) - z(t) = o(\sqrt{\delta(\varepsilon)}) \tag{2.26}$$

comme $\varepsilon \to 0$ *sur l'échelle de temps* $\frac{1}{\varepsilon}$.
Où

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{x\in D} \sup_{t\in[0,\frac{L}{\varepsilon})} \varepsilon \left| \int_0^t [f(s,x) - \bar{f}(z)]ds \right|.$$

Preuve: On applique les lemmes (2.2.2) et (2.2.3) ,utilisant l'inégalité triangulaire, on a sur l'échelle de temps $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$x(t) = z(t) + o(\varepsilon T) + o(\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon T})$$

Les erreurs sont du même ordre de grandeur si :

$$\varepsilon^2 T^2 = \delta(\varepsilon).$$

Pour

$$x(t) = z(t) + o(\sqrt{\delta(\varepsilon)}),$$

si $T = \sqrt{\delta_(\varepsilon)\varepsilon}$. □

Chapitre 3

Application

3.1 L'équation de Van der pol

L'oscillateur Van der Pol a été initialement proposé par l'ingénieur électricien et physicien néerlandais Balthasar van der Pol alors qu'il travaillait chez Philips. Van der Pol a trouvé des oscillations stables, qu'il a ensuite appelées oscillations-relaxation et sont maintenant connues comme un type de cycle limite dans les circuits électriques utilisant des tubes à vide. Lorsque ces circuits ont été commandés près du cycle limite, ils sont entraînés, c'est-à-dire que le signal de conduite entraîne le courant avec lui. Van der Pol et son collègue, van der Mark, ont rapporté dans le numéro de septembre 1927 de Nature qu'à certaines fréquences de conduite un bruit irrégulier a été entendu, qui s'est révélé plus tard être le résultat d'un chaos déterministe.

L'équation de Van der Pol est utilisée depuis longtemps dans les sciences physiques et biologiques.

On considère l'équation de Van der pol

$$\ddot{x} + x + \epsilon h(x, \dot{x}) = 0 \qquad \epsilon << 1. \tag{3.1}$$

Avec les valeurs initiales $\dot{x}_0, x_0$ donné et h tel que $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfaire les conditions avant, (h est une fonction périodique).

Soit

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -x - \varepsilon h(x, y) \end{cases}$$

.

Quand $\varepsilon = 0$, les solutions sont

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(t+\theta) \\ y(t) = -r\sin(t+\theta) \end{cases} \tag{3.2}$$

où r, θ sont constants sur les trajectoires.

Quand $\varepsilon \neq 0$, on s'attend à une dérive lente de r, θ (très petite évolution), mais les trajectoires restent bien circulaires avec une période proche de 2π.

Soit

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(t+\theta(t)) \\ y(t) = -r(t)\sin(t+\theta(t)) \end{cases} \tag{3.3}$$

voir cela comme une définition de $r(t)$, $\theta(t)$. C'est-à-dire

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\tan\left(t + \theta(t)\right) = -\frac{y(t)}{x(t)}.$$

Trouver encore pour $\dot{r}$, $\dot{\theta}$. On a $r^2 = x^2 + y^2$, alors

$$\begin{aligned} r\dot{r} =& x\dot{x} + y\dot{y} \\ =& x(y) + y(-x - \varepsilon h) = -\varepsilon y h \\ =& -\varepsilon h\left(-r\sin(t+\theta)\right) \end{aligned}$$

donc

$$\dot{r} = \varepsilon h \sin(t+\theta).$$

De même, en utilisant

$$\frac{d}{dt}\left(\tan^{-1}\left[-\frac{y(t)}{x(t)}\right]\right) = \frac{d}{dt}\left(t + \theta(t)\right),$$

on obtient

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon h}{r} \cos(t+\theta).$$

On remarque que

$$\dot{r} = o(\varepsilon), \quad \dot{\theta} = o(\varepsilon).$$

Notons

$$h = h(x,y) = h(r\cos(t+\theta), -r\sin(t+\theta)).$$

Ainsi a été fait notre système pour $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ non autonome !.

Mais on peut expliquer la séparation des échelles de temps (oscillation rapide vs dérive lente). Aplanir les oscillations rapides en faisant la moyenne sur un cycle de longueur 2π. Étant donné $g(t)$, définir la moyenne sur un cycle par rapport à t comme suit

$$\bar{g}(t) =< g > (t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(s)ds.$$

Remarquons que

$$\dot{\bar{g}} = \bar{\dot{g}}.$$

Alors on a

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\dot{r}} =< \varepsilon h \sin(t+\theta) >_t$$

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\dot{\theta}} =< \frac{\varepsilon h}{r} \cos(t+\theta) >_t .$$

Sur un cycle on a

$$r = \bar{r} + o(\varepsilon), \quad \theta = \bar{\theta} + o(\varepsilon).$$

Remplaçons r, θ par $\bar{r}$, $\bar{\theta}$. Nous pouvons analyser avec des méthodes de plan de phase. Approximation : Traite $\bar{r}$, $\bar{\theta}$ comme des constantes lors de l'exécution de moyennes $<\cdot>_t$.

En résume : La solution du problème (3.1) non perturbé est :

$$\begin{cases} x = r\cos(t+\theta) \\ \dot{x} = -r\sin(t+\theta) \end{cases} \tag{3.4}$$

Donc l'équation (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon[\sin(t+\theta)h(r\cos(t+\theta), -r\sin(t+\theta)] \\ \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{r}[\cos(t+\theta)h(r\cos(t+\theta), -r\sin(t+\theta)] \end{cases} \tag{3.5}$$

et la forme dite standard du type

$$\dot{x} = \varepsilon h(t, x)$$

avec $x = (r, \theta)$ et h et 2π-périodique. Alors

$$\begin{aligned} h_1(r) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(s+\theta)h(r\cos(s+\theta), -r\sin(s+\theta))ds \\ =& \int_0^{2\pi} \sin(\tau)h(r\cos(\tau), -r\sin(\tau))d\tau \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_2(r) =& \frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(s+\theta)h(r\cos(s+\theta), -r\sin(s+\theta))ds \\ =& \int_0^{2\pi} \cos(\tau)h(r\cos(\tau), -r\sin(\tau))d\tau \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = -\varepsilon h_1(\bar{r}) \\ \dot{\bar{\theta}} = -\varepsilon \dfrac{h_2(\bar{r})}{\bar{r}} \end{cases} \tag{3.6}$$

Si on prend $h(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}$ on a :

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \frac{\varepsilon}{2} r(1 - \frac{\bar{r}^2}{4}) \\ \dot{\bar{\theta}} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Si la condition initiale l'amplitude $r_0 = 0$ ou l'amplitude $\bar{r}$ est stable pour tout temps
Si $r_0 = 0$ correspondant a un instable point critique de l'équation d'origine.
Si $r_0 = 2$ donnant une solution périodique.
Alors

$$x(t) = 2\sin(t - \theta_0) + o(\varepsilon)$$

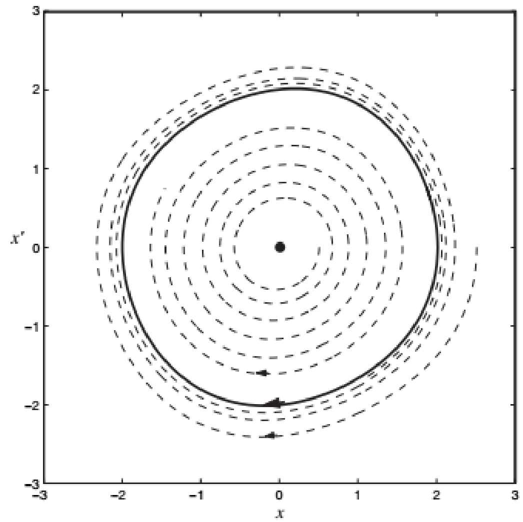

FIGURE 3.1 – cette figure est les orbites phase de l'équation de Van der pol $\ddot{x} + x = (1 - x^2)\dot{x}$ *ou* $\varepsilon = 0.1$

généralement on trouve

$$x(t) = \frac{r_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{(1 + \frac{1}{4}r_0^2(e^{\varepsilon t} - 1))^{\frac{1}{2}}} \tag{3.8}$$

sur l'échelle de temps $\frac{1}{\varepsilon}$, les solutions tend vers la solution périodique.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal and V. Lakshmikantham. Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations, volume 6 of Series in Real Analysis. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993.

[2] V.Sh. Burd. Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval : Theory and Applications, volume 255 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC ; 1 edition, 2007.

[3] J-P.Demailly Analyse numérique et équations différentielles ,nouvelle édition , EDP sciences ,2006

[4] L.D.Akulenko Schemes of the Krylov-Bogolyubov Averaging Method for the Highest Powers,Doklay Physics ,vol46 ,No.9,2001,pp 654-658

[5] M.Lakrib The method of averaging and functional differential equations with delay, Int.J. Math. Math. Sci. 26, no. 8 (2001),497-511

[6] M.Lakrib T.Kharaz A.Bourada Averaging for ordinary differential equations perturbed by a small parameter,Mathematica Bohemica ,vol.141(2016),No2,143-151

[7] J.A.Sanders F.Verhulst J.Murdorck Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems ,Applied Mathematical sciences 59 , Springer-Verlag New York , (2007).

[8] A.Bourada Thèse de Doctorat Sur les équations et inclusions différentielles : existence et approximation asymptotique de solutions .Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès ,Hal archives -ouvertes , 2016