République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulair
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse fonctionnelle

Présenté par

Chaib Mohammed Elamin, Larkem Abd elfettah , Zitouni Abou Baker seddik

SUJET DU MEMOIRE :

Equations différentielle fonctionnelles dans des algèbres de Banach

Soutenu le 20/10/2020 Devant Le Jury Composé de :

Mr : Ziane Mohammed	Président
Mr : Zentar oualid	Encadreur
Mr : Zitouni ismail	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Dédicace

Je dédie ce mémoire à …

Dans cet espace je souhaiterai dédier ce travail `à mes très chers parents

En premier lieu mes dédicaces vont droit à ma chère mère. Tes encouragements et tes prières

ont ´été d'un grands soutien pour moi je te remercie infiniment.

Je remercie également mon cher père pour sa présence dans ma vie, de son soutien et tous

ses sacrifices et ses précieux conseils, j'espère avoir réussi `a te rendre fière chose que je tâcherai

de continuer à faire.

-A mes chers frères pour leurs conseils et leur soutien.

A mes chers mes neveux

-A mes amis, merci à tous mes amis avec qui ont partagé des moments de ma vie au fil du temps

A mes binômes ***Amine et Fathi***

Merci pour tous les moments que nous avons passés ensemble dans ce travail

A ma promotion de Master 2 mathématique 2019/2020

Et Tous ceux que je connais de près ou de loin, merci à tous, sans exception.

Aboubaker

Dédicace

Je dédie ce mémoire à …

A mes parents

Aux plus belles créatures que dieu a créées sur terre, à cette source de tendresse, de Patience et de générosité. Aucune dédicace ne pourrait Exprimer mon respect, ma considération et mes chaleureux sentiments envers mes Chers Parents, Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Je prie le bon lieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils soient toujours fiers de moi.

-A mes chers frères pour leurs conseils et leur soutien.

A tous les membres de ma famille

-A mes amis, merci à tous mes amis avec qui ont partagé des moments de ma vie au fil du temps

A mes binômes **MOHAMED AMINE** et **ABOU BAKER SEDDIK**

En témoignage de l'amitié qui nous uni et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

A ma promotion de Master 2 mathématique 2019/2020

Et tous les amis dans les autres promotions

Et Tous ceux que je connais de près ou de loin, merci à tous, sans exception.

ABDELFETTAH

Dédicace

Je dédie ce mémoire à …

Dans cet espace je souhaiterai dédier ce travail à mes très chers parents

En premier lieu mes dédicaces vont droit à ma chère mère. Tes encouragements et tes prières

ont été d'un grands soutien pour moi je te remercie infiniment.

Je remercie ´également mon cher père pour sa présence dans ma vie, de son soutien et tous

ses sacrifices et ses précieux conseils, j'espère avoir réussi à te rendre fière chose que je tâcherai

de continuer à faire

-A mes chers frères pour leurs conseils et leur soutien.

A mes chers mes neveux

-A mes amis, merci à tous mes amis avec qui ont partagé des moments de ma vie au fil du temps

A mes binômes ***Aboubaker et Fathi***

Merci pour tous les moments que nous avons passés ensemble dans ce travail

A ma promotion de Master 2 mathématique 2019/2020

Et Tous ceux que je connais de près ou de loin, merci à tous, sans exception.

Mohamed amine

Dédicace

Dédicace

Dédicace

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier " Allah " le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

A notre encadreur de mémoire Ms. zentar walid enseignant à l'université ibn khaldoun de tairet , pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2019-2020 de Mathématiques et nos amis pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Notations

Dans ce terme et en application de la présente étude méthodologique des notions, nous avons pensé utile de formuler en même temps un sommaire explicite apte à faciliter la lecture du contenu de ce mémoire :

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$C(J, \mathbb{R})$	espace des fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$
$\mathcal{L}(E, E)$	l'ensemble des endomorphismes linéaires continues.
$L^1(J, \mathbb{R})$	l'espace de toutes les fonctions mesurables de Lebesgue sur J
$BM(J, \mathbb{R})$	l'espace de toutes les fonctions à valeurs réelles bornées et mesurables sur J
$AC([a, b])$	l'espace des fonctions réelles absolument continues sur $[a, b]$
$\|.\|$	norme
EDF	l'équation différentielle fonctionnelle
EFI	l'équation intégrale fonctionnelle
$EDFP$	l'équation différentielle fonctionnelle perturbées
$EIFP$	l'équation intégrale fonctionnelle perturbées

Introduction

Notre but est : D'une part, une familiarisation avec la méthode du point fixe dans l'étude de l'existence de solutions et de solutions extrémales de certaines équation différentielles et équations intégrales.
D'autre part, une acquisition de connaissance autour des problèmes considérés concernant le type d'équations, les espaces sur lesquels elles sont définies, la transformation du problème en un problème de point fixe, et enfin le type d'hypothèses imposées.
Pour cela, on a divisé notre travail en trois chapitres essentiels .
Chapitre 1 :
il consiste en un rappel des principales définitions et propriétés utilisées dans la suite du travail, ceci pour permettre une assimilation plus rapide de ces notions. Celles-ci sont constituées essentiellement de résultats d'analyse fonctionnelle. Nous rappelons aussi les théorèmes fondamentaux de point fixe intervenant dans les preuves des résultats d'existence de solutions.
Chapitres 2 :
Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution d'un certain problème aux limites. Plus précisément , on étudie le problème aux conditions aux limites suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)' & = & g\left(t, x_t\right) & p.p \;\; t \in I \\ x\left(t\right) & = & \theta\left(t\right) & t \in I_0 \end{cases}$$

et le problème :

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t), Sx) & p.p \;\; t \in I \\ x(t) & = & Gx(t) & t \in I_0 \end{cases}$$

sous certaines conditions (Lipscitz, Carathéodory,...) sur les fonctions f, g. Nous étudions aussi l'existence de solutions extrémales pour ces équations.
Chapitre 3 :
il s'agit dans ce chapitre d'étude de l'existence de solutions et de solutions extrémales pour des équations fonctionnelles intégrales de la forme :

$$x(t) = k(t, x(\mu(t)) + [f(t, x(\nu(t))] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds \right) \;\; \forall t \in J.$$

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et quelques outils de base

Dans ce chapitre, nous énoncerons des notions fondamentales d'analyse fonctionnelle qui vont nous servir comme outils de base.

On mentionne quelques premières propriétés, la définition des Algèbre de Banach , ainsi que quelques rappels sur les opérateurs . On terminera par quelques théorèmes de point fixe.

1.1 Sur les espaces

Définition 1.1.1 (Espace de Banach) .

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.1 .

Les espaces $L^1(J,\mathbb{R})$, $C(J,\mathbb{R})$, $BM(J,\mathbb{R})$ munis respectivement des normes suivantes :

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|dt, \quad \|x\|_C = \sup_{t\in J} |x(t)|, \quad \|x\|_{BM} = \max_{t\in J} |x(t)|$$

sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 (Algèbre) .

Une algèbre A sur le corps $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une multiplication (loi interne)

$$u : A \times A \longrightarrow A$$

qui est $\forall x, y, z$ éléments de A et α élément de $\mathbb{R}$:

1. *$(xy)z = x(yz)$ (associative).*
2. *$x(y + z) = xy + xz$ et $(y + z)x = yx + zx$ (distributive par rapport à l'addition).*
3. *$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$ ($\mathbb{R}$-bilinéaire).*

Remarque 1.1.1 .

Pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque, la notion de $\mathbb{K}$-algèbre se définit de manière analogue.

Définition 1.1.3 (Algèbre de Banach) .

On dit que A est une algèbre de Banach si les conditions suivantes sont satisfaites :

- *A est un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé, complet)*
- *A est une algèbre dont les lois sont compatibles avec la norme,*
- *pour tout $x \in A$ et $y \in A$ on a :*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

Exemple 1.1.2 .

1. *Si E est un espace de Banach alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ (des endomorphismes linéaires continues) est une algèbre de Banach.*
2. *Pour tout entier $n \geq 1$ l'algèbre $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est une algèbre de Banach si on la muni de la norme*

$$\|M\| = \sup_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |m_{ij}|.$$

Définition 1.1.4 (Relation Binaire) .

Une relation binaire R sur un ensemble X est dite relation d'ordre si elle satisfait les conditions suivantes :

1. *$\forall x \in X,\ (xRx)$ (réflexivité).*
2. *$\forall x, y, z \in X\ (xRy$ et $yRx \Rightarrow x = y)$ (antisymétrie).*
3. *$\forall x, y \in X,\ (xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz)$ (transitivité).*

Une relation d'ordre est dite totale si

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad xRy \quad et \quad yRx$$

Une relation d'ordre qui n'est pas totale est dite partielle.

Exemple 1.1.3 .

Dans l'espace $C(J, \mathbb{R})$ on définit la relation d'ordre $\preceq$ par :

$$\forall x, y \in X, \quad x \preceq y \Longleftrightarrow x(t) \leq y(t) \quad \forall t \in J.$$

Cette relation est une relation d'ordre partielle.

Définition 1.1.5 (Ensemble Convexe) .

Soit S un sous-ensemble d'un espace vectoriel X. S est dit convexe si :

$$\forall x, y \in S,\ \forall t \in [0, 1], \qquad xt + (1 - t)y \in S.$$

Exemple 1.1.4 .

1. *Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel est convexe.*
2. *Toute boule (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé est une partie convexe.*

Définition 1.1.6 (Cone) .

Soit K un sous-ensemble non vide fermé d'un espace normé X.

a) *K est dit un cone si :*

1. $K + K \subset K$
2. $\lambda K \subset K$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
3. $\{-K\} \cap K = \{0\}$, *où 0 est l'élément neutre pour l'addition dans X.*

b) *K est dit normal si la norme $\|.\|$ sur K est semi monotone, i.e.*

$$\exists N > 0 \forall x, y \in K : x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

c) *Soit l'espace X est une algèbre de Banach. On dit que K est un cone positif de X si*

$$K \circ K \subseteq K.$$

où $\circ$ est la multiplication définissant la structure d'algèbre de X.

Exemple 1.1.5 .

Soit l'espace de Banach $C(J, \mathbb{R})$. L'ensemble

$$K = \{x \in C(J, \mathbb{R}) : x(t) \geq 0, \forall t \in J\}$$

est un cone positive normal.

Remarque 1.1.2 .

— *Tout cone K de X permet de définir sur X une relation d'ordre partiel de la manière suivante :*

$$\forall x, y \in X, \ \ x \preceq y \Rightarrow y - x \in K.$$

— *Soit $a, b \in X$, l'intervalle $[a, b]$ est défini comme suit :*

$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$$

1.2 Sur les fonctions

Définition 1.2.1 (Fonction de Carathéodory) .

Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite Carathéodory si :

1. *la fonction $t \longmapsto f(t, x)$ est mesurable sur J, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *la fonction $x \longmapsto f(t, x)$ est continue pour presque tout $t \in J$.*

Si de plus la fonction f vérifie la condition suivante :

3. $\forall r > 0 \;\; \exists h \in L^1(J, \mathbb{R})$ *tel que* $\|f(t,x)\| \leq h(t) \quad \forall t \in J$ *et* $\forall x : \|x\| \leq r$,

f *est dite* L^1*-Carathéodory.*

Définition 1.2.2 (Fonction de Chandrabhan) .

Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite Chandrabhan si*

1. $t \longmapsto f(t,x)$ *est mesurable pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. $x \longmapsto f(t,x)$ *est croissante pour presque tout* $t \in J$.

Si de plus la fonction f *verifie la condition suivante :*

3. $\forall r > 0 \, \exists h \in L^1(J, \mathbb{R})$ *tel que :* $\|f(t,x)\| \leq h(t) \;\; \forall t \in J \;\; \forall x, \|x\| \leq r,$.

f *est dite* L^1*-Chandrabhan.*

Définition 1.2.3 (Fonction absolument continue) .

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite absolument continue sur* $[a,b]$*, si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints,* $]a_k, b_k[, k = 1, 2, ..., n$, *dans la somme des longueurs est inférieure à* δ *(i.e.* $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$*)*

$$\text{on a l'inégalité} \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

Définition 1.2.4 (Fonction de Lipschitz généralisée) .

Soit $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

f *est dite lipschitzienne-généralisée s'il existe une fonction* $l \in L^1(J, \mathbb{R})$*, telle que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq l(t) \|x - y\|, \text{ pour presque tout } t \in J,$$

La fonction l *est appelée la fonction de Lipschitz correspondante à* f.

- *Si* $l(t) = k$ *(où* $k > 0$ *est une constante positive),* f *est dite lipschitzienne de constante de Lipschitz* k.

- *Si* $0 < k < 1$, f *est dite une contraction.*

Exemple 1.2.1 .

La fonction $x \mapsto \dfrac{x + \sin x}{3}$ *est une* k*-contraction de* $\mathbb{R}$ *dans lui même, avec* $k = \dfrac{2}{3}$.

1.3 Sur les opérateurs

Définition 1.3.1 (Opérateur borné) .

Soit A *un opérateur linéaire défini d'un espace de Banach* X *dans lui même.* A *est dit borné s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\forall x \in X, \qquad \|Ax\| \leq c \|x\| \;.$$

Définition 1.3.2 (Opérateur monotone) .

Soit X un espace de Banach ordonné par un cone K. Un opérateur A défini de X dans dans lui même est dit :

— *monotone décroissant si :*

$$\forall x, y \in X : \quad x \preceq y \Rightarrow A(y) \preceq A(x).$$

— *monotone croissant si :*

$$\forall x, y \in X : \quad x \preceq y \Rightarrow A(x) \preceq A(y).$$

Définition 1.3.3 (Opérateur continu) .

Un opérateur A défini d'un espace de Banach X dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge vers $x \in X$, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ax.

Soit $C(J, X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X et soit M un sous ensemble de $C(J, X)$.

Définition 1.3.4 (Ensemble équicontinu) .

M est dit équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall t_1, t_2 \in J : \|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.3.5 (Ensemble uniformément borné) .

M est dit uniformément borné si :

$$\exists \ c > 0 : \|f(t)\| \leq c \qquad \forall t \in J, \ \textit{et} \ \forall f \in M.$$

Définition 1.3.6 (Ensemble relativement compact) .

M est dit relativement compact si $\overline{M}$ (adhérence de M) est compact.

Théorème 1.3.1 (Ascoli Arzela) .

M est relativement compact si et seulement si :

1. *M est uniformément borné.*
2. *M est équicontinu.*

Théorème 1.3.2 (Convergence dominé de Lebesgue) .

Soit X un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans X dont l'intégrale de la norme est fini (i.e. $f_n \in L^1(X, X)$) et soit $f : X \longrightarrow X$. On suppose que :

1. *La suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ pour presque tout $x \in X$.*
2. *Il existe une fonction $g \in L^1(X, \mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.*

Alors

$$f \in L^1(X,X), \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0.$$

Soit A un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui- même.

Définition 1.3.7 (Opérateur compact) .

L'opérateur A est dit compact si l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

Définition 1.3.8 (Opérateur totalement borné) .

L'opérateur A est dit totalement borné si pour tout ensemble borné B de l'espace X, l'ensemble $A(B)$ est relativement compact.

Définition 1.3.9 (Opérateur complètement continu) .

L'opérateur A est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.

Définition 1.3.10 (Opérateur convexe) .

L'opérateur A est dit convexe si :

$$\forall t \in [0,1] \;\; et \; \forall x, y \in A : \quad A(tx + (1-t)y) \leq tA(x) + (1-t)A(y).$$

Définition 1.3.11 (Contraction non linéaire) .

L'opérateur A est dit D-lipschitzien s'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante vérifiant

$$\forall x, y \in X : \|Ax - Ay\| \leq \psi(\|x - y\|) \qquad avec \;\; \psi(0) = 0.$$

La fonction ψ est appelée :

- *D-fonction de Lipschitz si $\psi(r) = \alpha.r$, $\alpha > 0$ et A est dit lipschitzien avec constante de Lipschitz α.*
- *En particulier si $\alpha < 1$, A est dit contraction et si $\psi(r) < r$ pour $r > 0$, A est dit contraction non linéaire.*
- *Si $\psi(r) = r$, A est dit opérateur non expansif.*

1.4 Sur les point fixe

Dans cette section, nous énonçons les théorèmes de point fixe qui serons utilisés dans les chapitres suivants.

Théorème 1.4.1 (B.C.Dhage[3]) .

Soit X un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu. Alors :

— *(i) Soit l'equation $Tx = x$ admet une solution.*

— *(ii) Soit l'ensemble* $\xi = \{u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda T u = u\}$ *est non borné.*

Théorème 1.4.2 (B.C.Dhage[4]) .

Soit X *un espace de Banach et soit* $T : X \longrightarrow X$ *une contraction non linéaire. Alors* T *admet un point fixe unique.*

Théorème 1.4.3 (B.C.Dhage[2]) .

Soit X *une algèbre de Banach et soit* $A, B : X \longrightarrow X$ *deux opérateurs tels que :*

— A *est D-lipschitzien avec comme D-fonction la fonction* ψ.

— B *est complètement continu.*

— $\exists r > 0$ *tel que :* $M\psi(r) < r$ *où* $M = \|B(X)\| = \sup\{\|Bx\|, x \in X\}$.

Alors :

1. *Soit l'équation* $AxBx = x$ *admet une solution.*
2. *Soit l'ensemble* $\xi = \left\{u \in X \ / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu = u\right\}$ *est non borné.*

Corollaire 1.4.1 (B.C.Dhage[1]) .

Soit X *une algèbre de Banach et soit* $A, B : X \longrightarrow X$ *deux opérateurs tels que :*

— A *est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz* α.

— B *est complètement continu.*

— $\alpha M < 1$ *où* $M = \|B(X)\| = \sup\{\|Bx\|, x \in X\}$.

Alors :

1. *Soit l'équation* $AxBx = x$ *a une solution.*
2. *Soit l'ensemble* $\xi = \left\{u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu = u\right\}$ *est non borné.*

Théorème 1.4.4 (B.C.Dhage[2]) .

Soit X *une l'algèbre de Banach ordonné par un cone* K *et soit* $a, b \in X$, *avec* $a \leq b$. *On Suppose que* $A, B : [a,b] \longrightarrow K$ *sont deux opérateurs tels que*

— A *est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz* α.

— B *est complètement continu.*

— $AxBx \in [a,b]$ *pour tout* $x \in [a,b]$.

— A *et* B *sont croissants.*

— $\alpha\ M < 1$ *où* $M = \|B([a,b])\| = \sup\{\|Bx\| : x \in [a,b]\}$.

Si le cone K *est positif et normal, alors l'équation opérationelle* $AxBx = x$ *admet une solution positive maximale et une solution positive minimale dans* $[a,b]$.

Théorème 1.4.5 (B.C.Dhage[2]) .

Soit X *une algèbre de Banach ordonné par un cone* K *et soit* $a, b \in X$, *avec* $a \leq b$. *On suppose que* $A, B : [a,b] \longrightarrow K$ *sont deux opérateurs tels que*

— *A est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz α.*

— *B est totalement borné.*

— *B est croissant.*

— *$\alpha\ M < 1$ où $M = \|B\left([a, b]\right)\| = \sup\left\{\|Bx\| : x \in [a, b]\right\}$.*

Si le cone K est positif et normal, alors l'equation opérationnelle $AxBx = x$ admet une solution positive maximale et une solution minimale positive dans $[a, b]$.

Théorème 1.4.6 (B.C.Dhage[2]) .

Soit X une algèbre de Banach ordonné par un cone K et soit $a, b \in X$ tels que $a \leq b$. Soit $A, B : [a, b] \longrightarrow K$ et $C : [a, b] \longrightarrow X$ trois opérateurs tels que

— *A est D-lipschitzien et croissant. Soit ψ_A la D-fonction de Lipschitz associée à A.*

— *B est complètement continu et croissant.*

— *C est lipschitzien et croissant. Soit ψ_C la D-fonction de Lipschitz associée a C.*

— *$\exists r > 0$ tel que : $M\psi_A(r) + \psi_C(r) < r$, òu $M = \|B([a, b])\| = \sup\{\|Bx\| :\ \ x \in [a, b]\}$.*

— *$a \leq AaBa + Ca$ et $AbBb + Cb \leq b$.*

Alors l'équation opérationnelle $AxBx + Cx = x$ admet une solution maximale positive et une solution minimale positive dans $[a, b]$.

Corollaire 1.4.2 (B.C.Dhage[2]) .

Soit X une algèbre de Banach ordonné par un cône K et soit $a, b \in X$ tels que $a \leq b$. Soit $A, B : [a, b] \longrightarrow K$ et $C : [a, b] \longrightarrow X$ trois opérateurs tels que

1. *A est croissant et lipschitzien avec comme constante de Lipschitz α.*
2. *B est complètement continu et croissant.*
3. *C est croissant et lipschitzien avec comme constante de Lipschitz β.*
4. *$\alpha M + \beta < 1$ où $M = \|B([a, b])\| = \sup\{\|Bx\| :\ \ x \in [a, b]\}$.*
5. *$a \leq AaBa + Ca$ et $AbBb + Cb \leq b$.*

Alors l'équation opérationnelle $AxBx + Cx = x$ admet une solution maximale positive et une solution minimale positive dans $[a, b]$.

Théorème 1.4.7 (B.C.Dhage[8]) .

Soit U un sous ensemble ouvert et borné de l'algèbre de Banach X, et soit $A, C : X \longrightarrow X$ et $B : \bar{U} \longrightarrow X$ trois opérateurs où$\bar{U}$ est l'adhérence de U, tels que :

— *A et C sont lipschitziens avec comme D-fonctions de Lipschitz ψ_A et ψ_C respectivement.*

— *$\left(\dfrac{I}{A}\right)^{-1}$ existe, I étant l'opérateur idebtité de$X$ dans X et l'opérateur $\dfrac{I}{A} : X \longrightarrow X$*

défini par : $\left(\dfrac{I}{A}\right)(x) = \dfrac{x}{Ax}$, est bien défini.

— *B est complètement continu.*

— $\exists r > 0$ *tel que :* $M\psi_A(r) + \psi_C(r) < r$ *où* $M = \left\| B\left(\bar{U}\right)\right\|$.

Alors

1. *Soit l'équation opérationelle* $AxBx + Cx = x$ *admet une solution dans* $\bar{U}$.
2. *Soit il existe* $u \in \partial U$ *et il existe* $\lambda \in]0,1[$ *tels que :* $\lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu + \lambda C\left(\frac{u}{\lambda}\right) = u$.

Corollaire 1.4.3 (B.C.Dhage[8]) .

Soit $\mathcal{B}(0,r)$ *la boule ouverte centrée en* 0 *et de rayon* r *dans l'algèbre de Banach* X, *et soient* $A, B, C : X \longrightarrow X$ *trois opérateurs tels que :*

— $\dfrac{I}{A}$ *est bien défini et injectif.*

— A *et* C *sont lipschitziens avec comme constantes de Lipschitz* α *et* β *respectivement.*

— B *est complètement continu.*

— $\alpha M + \beta < 1$, *où* $M = \left\| B\left(\bar{\mathcal{B}}[0,r]\right)\right\|$.

Alors,

1. *Ou bien l'équation opérationnelle* $AxBx + Cx = x$ *admet une solution dans* $\bar{\mathcal{B}}(0,r)$
2. *Ou bien il existe* $u \in X$ *et il existe* $\lambda \in]0,1[$ *tel que :* $\|u\| = r$ *et* $\lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu + \lambda C\left(\frac{u}{\lambda}\right) = u$

<u>DISCUSSION</u> :

Cette discussion concerne la notion de "bien défini", dans le sens que le rapport $\dfrac{x}{Ax}$ un sens. Ce qui est vrai pour les cas étudiés i.e. $X = \mathcal{BM}(J, \mathbb{R}), X = C(J, \mathbb{R})$...

Théorème 1.4.8 (B.C.Dhage[13]) .

Soit X *un espace de Banach et soit* A *et* $B : X \longrightarrow X$ *deux opérateurs tels que :*

— A *est une contraction.*

— B *est complètement continu.*

Alors :

1. *Soit l'équation opérationnelle* $Ax + Bx = x$ *admet une solution.*
2. *Soit l'ensemble* $\xi = \left\{u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \lambda Bu = u\right\}$ *est non borné.*

Théorème 1.4.9 (Heikkila et Lakshmikantham[6]) .

Soit $[a,b]$ *un intervalle ordonné du sous ensemble* Y *de l'algèbre de Banach* X *et soit* $Q : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *un opérateur croissant.*

Si pour toute suite monôtone $x_n \subset [a,b]$, *la suite* $\{Qx_n\}_n \subset Q([a,b])$ *est convergente, alors la suite* $\{Q^n a\}_n$ *(des* Q*-itération de* a*) converge vers le point fixe minimal* x_* *de* Q *et la suite* $\{Q^n b\}_n$ *(des* Q*-itération de* b*) converge vers le point fixe maximal* x^* *de* Q *i.e.*

$$x_* = \min\{y \in [a,b] : y \geq Qy\} \quad et \quad x^* = \max\{y \in [a,b] : y \leq Qy\}.$$

Chapitre 2

Sur des équations différentielle fonctionnelles dans une algèbre de Banach

Dans ce chapitre nous présentons l'étude de l'existence de solutions et de solutions extrémales pour un certain type d'équations différentielles fonctionnelles.

2.1 Un premier type de problème

Soit $r, a > 0$. On pose $I_0 = [-r, 0], I = [0, a]$ et $J = I_0 \bigcup I$.

L'espace $C = C(I_0, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach et la multiplication sur cette algèbre est définie par :

$$(xy)(t) = x(t)\, y(t), \quad \forall t \in I_0.$$

On considère l'équation différentielle fonctionnelle du premier ordre (notée (EDF)) :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{f(t, x(t))}\right)' &= \quad g(t, x_t) \qquad p.p \;\; t \in I \\ \qquad\qquad x(t) &= \quad \theta(t) \qquad\quad t \in I_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ et $g : I \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données et la fonction $x_t : I_0 \longrightarrow C$ est définie par

$$\forall \theta \in I_0, \qquad x_t(\theta) = x(t + \theta).$$

Définition 2.1.1 .

Une fonction $x \in C(J, \mathbb{R}) \cap AC(I, \mathbb{R})$ est dite solution de l'EDF (2.1) si

(i) *x vérifie l'équation dans (2.1).*

(ii) *La fonction $t \longmapsto \dfrac{x(t)}{f(t, x(t))}$ est absolument continue.*

2.1.1 Existence de solutions

L'objectif est de présenter le résultat, et sa preuve, sur l'existence d'une solution de l'EDF (2.1) dans l'algèbre de Banach $C(J,\mathbb{R})$.

Pour ce but, nous énumérons les hypothèses suivantes :

(H_1) La fonction $f : I\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est continue, et il existe une fonction $k\in B(J,\mathbb{R})$ telle que $k(t)>0$ pour tout $t\in I$ et

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq k(t)\,|x-y| \qquad p.p\ t\in I \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(H_2) $f\left(0,\theta\left(0\right)\right)=1$, pour tout $\theta\in C(I_0,\mathbb{R})$.

(H_3) la fonction g est $\mathcal{L}^1$-Carathéodory.

(H_4) il existe une fonction $\omega:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ continue et croissante, et une fonction $\gamma\in L^1(I,\mathbb{R})$ tel que $\gamma(t)>0$ pour tout $t\in J$ et

$$|g(t,x)|\leq\gamma(t)\omega(\|x\|_C) \qquad p.p\ t\in I, \forall x\in C.$$

Théorème 2.1.1 (Dhage[1]) .

Soit $\theta\in C(I_0,\mathbb{R})$. On Suppose que les hypothèses $(H_1)-(H_4)$ sont vérifiées, et que

$$\int_{c_1}^{\infty}\frac{ds}{\omega\left(s\right)} > c_2\left\|\gamma\right\|_{L^1}. \tag{2.2}$$

où

$$C_1=\frac{F\left\|\theta\right\|_C}{1-\|k\|\left(\left\|\theta\right\|_C+\left\|h\right\|_{L^1}\right)}, \quad C_2=\frac{F}{1-\|k\|\left(\left\|\theta\right\|_C+\left\|h\right\|_{L^1}\right)}, \quad \|k\|\left(\left\|\theta\right\|_C+\left\|h\right\|_{L^1}\right)<1.$$

et $F=\max\limits_{t\in J}|f(t,0)|$, $\quad \|k\|=\sup\limits_{t\in J}|k(t)|$.

Alors l'EDF (2.1) admet au moins une solution sur J.

Preuve

L'EDF (2.1) est équivalente à l'équation fonctionnelle intégrale (notée EIF) suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= f(t,x(t))\left[\theta(0)+\displaystyle\int_0^t g(s,x_s)ds\right] & t\in I. \\ x(t) &= \theta(t) & t\in I_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

On définit les deux opérateurs $A,B : C(J,\mathbb{R})\longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ comme ceci :

$$Ax(t)=\begin{cases} f(t,x(t)) & t\in I \\ 1 & t\in I_0 \end{cases}$$

et

$$Bx(t)=\begin{cases} \theta(0)+\displaystyle\int_0^t g(s,x_s)ds & t\in I. \\ \theta(t) & t\in I_0. \end{cases}$$

Alors EDF (2.1) est équivalente à l'équation opérationelle :

$$x(t) = Ax(t)Bx(t).$$

On doit montrer que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses du Corollaire 1.4.1.

Étape 1 : Montrons que A est lipschitzien :

On a d'après l'hypothèse (H_1), pour tous $t \in J$

$$\begin{array}{rcl} |Ax(t) - Ay(t)| & \leq & |f(t, x(t)) - f(t, y(t)| \\ & \leq & k(t)\,|x(t) - y(t)| \\ & \leq & k(t)\,\|x - y\| \quad \forall t \in J. \end{array}$$

En passant au " sup " on obtient, pour tout $x, y \in C(J, \mathbb{R})$:

$$\|Ax - Ay\| \leq \|k\|\,\|x - y\| \quad \forall x, y \in C(J, \mathbb{R}).$$

Ainsi, A est lipschitzien sur $C(J, \mathbb{R})$ avec comme constante de Lipschitz $\|k\|$.

Étape 2 : Montrons que B est complètement continu

1. B est continu :
   Soit (x_n) une suite convergente dans X vers $x \in X$. Nous allons vérifier que la suite $(Bx_n)_n$ converge vers Bx

   Soit $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} |Bx_n(t) - Bx(t)| & \leq & \left| \displaystyle\int_0^t g(s, x_{ns})ds - \int_0^t g(s, x_s)ds \right| \\ & \leq & \displaystyle\int_0^t |g(s, x_{ns}) - g(s, x_s)|ds \\ & \leq & \|g(., x_{n.}) - g(., x_.)\|_{L^1} \end{array}$$

   D'où :

$$\|Bx_n - Bx\| \leq \|g(., x_{n.}) - g(., x_.)\|_{L^1}$$

   d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 1.3.2), nous avons :

$$\|g(., x_{n.}) - g(., x_.)\|_{L^1} \longrightarrow_{n \to \infty} 0.$$

   Ce qui prouve que l'opérateur B est continu.
2. B transforme tout borné en un relativement compact.

Soit S un sous ensemble borné de $C(J, \mathbb{R})$. Pour montrer que $B(S)$ est relativement compact, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela (théorème 1.3.1). Ce qui revient à montrer que :

1. $B(S)$ est uniformément borné.

   — Si $t \in I$, nous avons :

$$\begin{aligned} |Bx(t)| &\leq |\theta(0)| + \int_0^t |g(s,x_s)ds| \\ &\leq \sup_{t\in J} |\theta(0)| + \int_0^t h(s)ds \\ &\leq \|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}. \end{aligned}$$

   — Si $t \in I_0$, nous avons :

$$|Bx(t)| \leq |\theta(t)| \leq \|\theta\|_C$$

   On en déduit que : $\|Bx\| \leq M$ où $M = \|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}$.

   Ainsi $B(S)$ est uniformément borné.

2. $B(S)$ est un ensemble équicontinu.

   Soit $x \in S$ et soit $t, \tau \in I$. On a :

$$\begin{aligned} |Bx(t) - Bx(\tau)| &\leq \left| \int_0^t g(s,x_s)ds - \int_0^\tau g(s,x_s)ds \right| \\ &\leq \left| \int_\tau^t g(s,x_s)ds \right| \\ &\leq \left| \int_\tau^t h(s)ds \right| \\ &\leq |p(t) - p(\tau)| \end{aligned}$$

   où $p(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)ds$. la fonction p est uniformément continue sur I

   On en déduit que : $|Bx(t) - Bx(\tau)| \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \tau$.

   De même si $t, \tau \in I_0$ on a

$$|Bx(t) - Bx(\tau)| \leq |\theta(t) - \theta(\tau)|.$$

   puisque θ est uniformément continue sur I_0, on déduit que :

$$|Bx(t) - Bx(\tau)| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow \tau.$$

   Ce qui prouve que $B(S)$ est équicontinu, et par conséquent $B(S)$ est relativement compact d'aprés le théorème d'*Ascoli- Arzela* (théorème 1.3.1).

Ainsi B est un opérateur complètement continu.

En conclusion, les hypothèses du Corollaire 1.4.1 sont vérifiées. On en déduit que soit la conclusion (1) du corollaire 1.4.1 est réalisée, soit la conclusion (2) qui l'est.

Montrons que la conclusion (2) n'est pas réalisée. C'est-à-dire que, nous allons vérifier que l'ensemble $\xi = \left\{ u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu = u \right\}$ est borné.

Soit $x \in \xi$, et $\lambda \in]0,1[$ tel que, pour $t \in J$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda A\left(\frac{x}{\lambda}\right)(t)\, Bx\,(t) \\ &= \begin{cases} \lambda\left[f(t,\dfrac{x(t)}{\lambda})\right]\left(\theta(0)+\displaystyle\int_0^t g(s,x_s)ds\right) & t \in I \\ \\ \lambda\theta\,(t) & t \in I_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} |x\,(t)| &\leq \lambda \left| f\left(t, \frac{x(t)}{\lambda}\right)\right| \left(\|\theta\|_C + \left| \int_0^t g(s,x_s)ds \right| \right) \\ &\leq \lambda \left(\left| f\left(t,\frac{x(t)}{\lambda}\right) - f\,(t,0) \right| + |f\,(t,0)| \right) \left(\|\theta\|_C + \int_0^t |g(s,x_s)ds| \right) \\ &\leq [k(t)x(t)+F]\left(\|\theta\|_C + \int_0^t |g(s,x_s)ds| \right) \\ &\leq k(t)\,\|x\| \left(\|\theta\|_C + \int_0^t |g(s,x_s)ds| \right) + F\left(\|\theta\|_C + \int_0^t |g(s,x_s)ds| \right) \\ &\leq \|k\|\,\|x\|\,(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}) + F\,\|\theta\|_C + F\int_0^t \gamma\,(s)\,\omega\,(\|x_s\|_C\,ds)\,. \end{aligned}$$

Posons $u(t) = \sup\limits_{s\in[-r,t]} |x(s)|$ pour $t \in J$. Alors on a

$$|x(t)| \leq u(t) \quad \forall t \in J \quad \text{et}\ \|x_t\|_C \leq u\,(t) \quad \forall t \in I.$$

Soit $t^* \in [-r,t]$ tel que $u(t) = |x(t^*)|$.

On a d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} u(t) &= |x(t^*)| \\ &\leq \|k\|\,|x(t^*)|\,(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}) + F\left(\|\theta\|_C + \int_0^{t^*} \gamma\,(s)\,\omega\,(\|x_s\|_C)\,ds \right) \\ &\leq \|k\|\,u(t)\,(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}) + F\left(\|\theta\|_C + \int_0^t \gamma\,(s)\,\omega\,(u(s)ds) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$u(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \gamma\,(s)\,\omega\,(u(s))\,ds.$$

où

$$C_1 = \frac{F\,\|\theta\|_C}{1-\|k\|\,(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})}, \qquad C_2 = \frac{F}{1-\|k\|\,(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})}.$$

Soit

$$\Psi(t) = C_1 + C_2 \int_0^t \gamma\left(s\right) \omega\left(u(s)\right) ds,\ t \in I.$$

On a $u(t) \leq \Psi(t),\ \forall t \in I$. En dérivant $\Psi(t)$ on trouve :

$$\begin{cases} \Psi'(t) \leq C_2 \gamma\left(t\right) \omega\left(\Psi(t)\right)\ p.p\ t \in I \\ \Psi(0) = C_1. \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^t \frac{\Psi' ds}{w\left(\Psi(s)\right)} \leq C_2 \int_0^t \gamma(s) ds \leq C_2 \left\|\gamma\right\|_{L^1}.$$

Ce qui donne en faisons le changement de variable $s = \Psi(t)$:

$$\int_{C_1}^{\Psi(t)} \frac{ds}{w(s)} \leq C_2 \left\|\gamma\right\|_{L^1} < \int_{C_1}^{\infty} \frac{ds}{w(s)}. \tag{2.4}$$

Il existe alors une constante $M > 0$ tel que : $\Psi\left(t\right) \leq M$ pour tout $t \in I$.

Ainsi, nous avons :

$$|x(t)| \leq u(t) \leq \Psi\left(t\right) \leq M. \tag{2.5}$$

D'autre part, nous avons pour $t \in I_0$

$$|x(t)| = |\theta(t)| \leq sup_{t \in I_0} |\theta(t)| = \|\theta\|_C \tag{2.6}$$

On conclu que, $\forall t \in J, |x(t)| \leq max\|\theta\|_C, M$ et donc l'ensemble ξ est borné, i.e. la conclusion (2) du Corollaire 1.4.1 n'est pas satisfaite et donc, c'est la conclusion 1 qui l'est.

Ainsi, l'équation opérationelle $AxBx = x$ admet au moins une solution dans J, et par conséquent l'EDF (2.1) admet au moins une solution dans J.■

Remarque 2.1.1 .

L'existence de la constante $M > 0$ vérifiant (2.5) se justifie de la manière suivante : Supposons par l'absurde que Ψ n'est pas bornée.
Du fait que : $\Psi'(t) = \gamma(t) w(u(t)) \geq 0$ donc Ψ est croissante. Delà $\lim_{t\to a} \Psi(t) = +\infty$.
En passant à la limite dans (2.4), on obtient :

$$\lim_{t \to a} \int_{C_1}^{\Psi(t)} \frac{ds}{w(s)} = \int_{C_1}^{\infty} \frac{ds}{w(s)} \leq C_2 \left\|\gamma\right\|_{L^1} < \int_{C_1}^{\infty} \frac{ds}{w(s)},$$

ce qui est impossible.
Ainsi : Ψ est bornée, et donc $\exists M > 0 : \Psi(t) \leq M\ \forall t \in J$.

2.1.2 Discussion

L'hypothèse (H_4) est en fait inutile. Elle intervient uniquement dans la partie de la preuve où on montre les estimations appriories sur les solutions de l'EDF (2.1). En effet, **l'hypothèse (H_3) suffit** puisque : pour $x \in \xi$, $\lambda \in]0,1[$ et $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \lambda \left| f\left(t, \frac{x(t)}{\lambda}\right) \right| \left(\|\theta\|_C + \left| \int_0^t g(s, x_s) ds \right| \right) \\
&\leq \lambda \left(\left| f\left(t, \frac{x(t)}{\lambda}\right) - f(t,0) \right| + |f(t,0)| \right) \left(\|\theta\|_C + \int_0^t |g(s, x_s) ds| \right) \\
&\leq [k(t)x(t) + F] \left(\|\theta\|_C + \int_0^t |g(s, x_s) ds| \right) \\
&\leq [k(t)x(t) + F] \left(\|\theta\|_C + \int_0^t |hs) ds| \right) \\
&\leq \|k\| \|x\| (\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}) + F(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|x\| \leq \frac{F(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})}{1 - \|k\| \|x\| (\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})} = c$$

donc :

$$\forall t \in J : |x(t)| \leq \|x\| \leq c.$$

ce qui montre que l'ensemble $\xi = \left\{ u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda A \left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu = u \right\}$ est borné par $max \|\theta\|_C, c$, où $\|\theta\|_C$ est donnée par (2.6)

Conséquence de la discussion : Le résultat du théorème 1.4.8 s'énnoncera alors comme ceci :

Théorème 2.1.2 (Résultat avec hypothèses affaiblies) .

Soit $\theta \in C(I_0, \mathbb{R})$. On suppose que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiées, et que

$$\int_{c_1}^{\infty} \frac{ds}{\omega(s)} > c_2 \|\gamma\|_{L^1}. \tag{2.7}$$

où

$$C_1 = \frac{F \|\theta\|_C}{1 - \|k\| (\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})}, \quad C_2 = \frac{F}{1 - \|k\| (\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1})}, \quad \|k\| (\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}) < 1,$$

et $F = \max_{t \in J} |f(t,0)|$, $\|k\| = \sup_{t \in J} |k(t)|$.

Alors l'EDF (2.1) admet au moins une solution sur J.

2.1.3 Existence de solutions extrémales

Dans l'algèbre de Banach $C(J, \mathbb{R})$ on concidère le cone K défini par

$$K = \{x \in C(J, \mathbb{R}) : x(t) \geq 0, \forall t \in J\}.$$

Le cone K est positif et normal dans $C(J,\mathbb{R})$. Il définit une relation d'ordre sur $C(J,\mathbb{R})$ par : $\forall u,v \in C(J,\mathbb{R}), u \preceq v \Longleftrightarrow u(t) \leq v(t)\ \forall t \in J$

De la positivité de K, se déduit le résultat suivant :

Lemme 2.1.1 (Dhage[1]) .

Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$ tel que $u_1 \preceq v_1$ et $u_2 \preceq v_2$ alors $u_1u_2 \preceq v_1v_2$.

Remarque 2.1.2 *En fait ce lemme est évident.*

Pour tous $a, b \in C(J,\mathbb{R})$ tel que : $a \leq b$, l'intervalle ordonnée $[a,b]$ est un ensemble dans $C(J,\mathbb{R})$ donné par :

$$[a,b] = \{x \in C(J,\mathbb{R}) : a \preceq x \preceq b\}.$$

Définition 2.1.2 .

Une fonction $a \in C(J,\mathbb{R})$ est dite sous-solution de l'EDF (2.1) sur J si

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a(t)}{f(t,a(t))}\right)' & \leq & g(t,a_t) & \forall t \in I \\ a(t) & \leq & \theta(t) & \forall t \in I_0. \end{cases}$$

Une fonction $b \in C(J,\mathbb{R})$ est dite sur-solution de l'EDF (2.1) sur J si

$$\begin{cases} \left(\dfrac{b(t)}{f(t,b(t))}\right)' & \geq & g(t,b_t) & \forall t \in I \\ b(t) & \geq & \theta(t) & \forall t \in I_0 \end{cases}$$

Définition 2.1.3 .

Une solution x_M de l'EDF (2.1) est dite solution maximale si pour toute solution x de l'EDF (2.1) on a

$$x(t) \leq x_M(t), \qquad \forall t \in J.$$

Une solution x_m de l'EDF (2.1) est dite minimale si pour toute solution x de l'EDF (2.1) on a

$$x_m(t) \leq x(t), \qquad \forall t \in J.$$

On considère les hypothèses suivantes :
(B_0) $f : J \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $g : J \times C \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\theta(t) \geq 0$ sur I_0.
(B_1) g est de Carathéodory.
(B_2) Les fonctions f et g sont croissantes.
(B_3) EDF (2.1) admet une sous-solution a et une sur-solution b sur J avec $a \leq b$.

Remarque 2.1.3 .

Supposons que B_1 et B_3 sont vérifiées, définissons la fonction $h : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$h(t) = |g(t,a_t)| + |g(t,b_t)| = g(t,a_t) + g(t,b_t) \quad \forall t \in I. \tag{2.8}$$

Alors h est Lebesgue intégrable et

$$|g(t,x_t)| = g(t,x_t) \leq h(t) \quad \forall t \in I, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Théorème 2.1.3 (Dhage[1]) .

Supposons que les hypothèses (H_1)-(H_3) *et* (B_0)-(B_3) *sont vérifiées.*

Si $\|k\|\left(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}\right) < 1$*, où* h *est définie par(2.8), alors l'EDF (2.1) admet au moins une solution maximale et une solution minimale positive sur* J*.*

Preuve

L'EDF (2.1) est équivalente à EFI (2.3) sur $X = C(J, \mathbb{R})$.

On définit deux opérateurs A et B par

$$Ax(t) = \begin{cases} f(t, x(t)) & t \in I \\ 1 & t \in I_0 \end{cases}$$

Et

$$Bx(t) = \begin{cases} \theta(0) + \displaystyle\int_0^t g(s, x_s)ds & t \in I. \\ \theta(t), & t \in I_0. \end{cases}$$

Alors l'EFI (2.3) se transforme en l'équation opérationelle

$$x(t) = Ax(t)Bx(t),$$

définie sur l'algèbre de Banach $C(J, \mathbb{R})$.

D'aprés la démonstration du Théorème 2.1.1, A est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz $\|k\|$ et B est un opérateur complètement continu. L'hypothèse (B_2) implique que les opérateurs A et B sont croissants sur $[a, b]$:

En effet, soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x \preceq y$. Alors d'après (B_2)

$$Ax(t) = f(t, x(t)) \le f(t, y(t))) = Ay(t) \quad \forall t \in I.$$

et

$$Ax(t) = 1 = Ay(t) \qquad \forall t \in I_0.$$

De même

$$\begin{aligned} Bx(t) &= \theta(0) + \int_0^t g(s, x_s)ds \\ &\le \theta(0) + \int_0^t g(s, y_s)ds \\ &= By(t) \qquad \forall t \in I. \end{aligned}$$

et

$$Bx(t) = \theta(t) = By(t) \qquad \forall t \in I_0.$$

Donc les opérateurs A et B sont croissants.
Maintenant, d'après le Lemme 2.1.1 et l'hypothèse B_3 on a :

$$\begin{aligned} a(t) &\leq [f(t, a(t))] \left(\theta(0) + \int_0^t g(s, a_s) ds\right) \\ &\leq [f(t, x(t))] \left((\theta(0) + \int_0^t g(s, x_s) ds\right) \\ &\leq [f(t, b(t))] \left(\theta(0) + \int_0^t g(s, b_s) ds\right) \\ &\leq b(t). \end{aligned}$$

Donc $a(t) \leq Ax(t)Bx(t) \leq b(t) \quad \forall t \in J$, et $\forall x \in [a, b]$, i.e. $AxBx \in [a, b] \; \forall x \in [a, b]$.

De plus

$$\begin{aligned} M &= \|B([a, b])\| \\ &= \sup\{\|Bx\| : \; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\left\{\|\theta\|_C + \sup_{t \in J} \int_0^t |g(s, x_s)| \, ds \quad x \in [a, b]\right\} \\ &\leq \|\theta\|_C + \int_0^t h(s) ds. \\ &= \|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}. \end{aligned}$$

vérifie :

$$\|k\| \, M \leq \|k\| \left(\|\theta\|_C + \|h\|_{L^1}\right) < 1.$$

En appliquant le Théorème 1.4.4 à l'équation opérationelle $Ax(t)Bx(t) = x(t)$, il résulte que l'EDF (2.1) admet une solution positive maximale et une solution positive minimale .■

Exemple 2.1.1 .

Soient les intervalles fermés bornés $I_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et soit l'EDF suivante :

$$\begin{cases} \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t))}\right)' = \frac{p(t)}{1 + \|x_t\|_C} & t \in I \\ x(t) = \sin(t) & t \in I_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

où $p \in L^1(I, \mathbb{R})$ et $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par : $\quad f(t, x(t)) = 1 + \alpha |x(t)|$, $\alpha > 0$, $\forall t \in I$.

On définit la fonction $g : I \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(t, x_t) = \dfrac{p(t)}{1 + \|x_t\|_C}$.

La fonction f est continue et lipschitzienne avec comme constante de Lipschitz α. La fonction g est L^1-Carathéodory avec $h(t) = p(t)$.

Si $\alpha(1 + \|p\|_{L^1}) < 1$, alors d'après le Théorème 2.1.1 l'EDF (2.9) admet au moins une solution sur J, puisque la fonction ω satisfait la condition (2.7) avec $\gamma(t) = p(t) \quad \forall t \in I$ et $\omega(r) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$.

2.2 Un deuxième type de problème

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à des équations différentielles fonctionnelles perturbées, notées EDFP du type,

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(t, x(t), Sx) \quad p.p. \;\; t \in I = [0, a] \\ x(t) &= Gx(t) \qquad\qquad t \in I_0 = [-r, 0] \end{cases} \tag{2.10}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \times BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $S, G : X \subset BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow Y \subset BM(J, \mathbb{R}^n)$ sont donnés, et $J = I_0 \cup I$.

Définition 2.2.1 .

Une solution de l'EDFP 2.10 est une fonction $x \in AC(J, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie l'égalité (2.10).

2.2.1 Existence de solutions

Nous rappelons qu'une application $f : J \times \mathbb{R}^n \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite L^1-Carathéodory si :

— $t \longrightarrow f(t, x, y)$ est meusurable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in BM(J, \mathbb{R}^n)$

— $(x, y) \longrightarrow f(t, x, y)$ est continue pour presque tout $t \in J$

— $\forall k > 0, \exists h \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que

$$|f(t, x, y)| \leq h(t), \quad p.p \;\; t \in J, \forall x, y \in BM(J, \mathbb{R}^n) : \|x\| \leq k.$$

On considère les hypothèse suivantes :

— (A_1) l'opérateur $S : BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow BM(J, \mathbb{R}^n)$ est continu

— (A_2) l'opérateur $G : BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(I_0, \mathbb{R}^n)$ est compact et continu. Soit $N = \sup\{\|Gx\| : x \in BM(J, \mathbb{R}^n)\}$

— (A_3)la fonction f est L^1-Carathéodory.

— (A_4) Il existe une fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et une fonction $\gamma \in L^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\gamma(t) > 0 \;\; p.p \;\; t \in I$ et

$$|f(t, x, y)| \leq \gamma(t)\phi(|x|) \quad p.p \;\; t \in I \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; et \;\; y \in BM(J, \mathbb{R}^n)$$

Théorème 2.2.1 (Dhage[3]) .

Supposons que les hypothèses $(A_1) - (A_4)$ sont satisfaites et que

$$\int_N^\infty \frac{ds}{\phi(s)} > \|\gamma\|_{L^1}.$$

Alors l'EDFP(2.10) admet au moins une solution sur J.

Preuve

EDF (2.10) est équivalente à l'équation intégrale fonctionnelle perturbée suivante, notée EIFP :

$$x(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx) ds & t \in I \\ Gx(s), & t \in I_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Soit $X = C(J, \mathbb{R}^n)$. On définit l'opérateur T sur X par la formule :

$$Tx(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ \\ Gx(t) & t \in I_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

On montre que l'opérateur T vérifie les hypothèses du théorème 1.4.1

Etape 1 : Montrons que T est un opérateur continu.
Soit (x_n) une suite convergente dans X vers $x \in X$. Vérifions que $Tx_n \to Tx$.
Soit $t \in J$ nous avons :

$$\begin{aligned} |Tx_n(t) - Tx(t)| &\leq \int_0^t |f(s, x_n(s), Sx_n) - f(s, x(s), Sx)|ds \\ &\leq \|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3.2), nous avons :

$$\|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où

$$\|Tx_n - Tx\| \leq \|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi T est un opérateur continu.

Etape 2 : Montrons que T transforme tout borné en un relativement compact. Pour cela, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela et donc montrer que si Y est un sous ensemble de$X$ avec Y borné alors :
2.1. $T(Y)$ est un ensemble uniformément borné.
Soit $x \in Y$ et $t \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |Tx(t)| &\leq N + \int_0^t |f(s, x(s), Sx)|ds \\ &\leq N + \int_0^t h(s)ds \\ &\leq N + \|h\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Si $t \in I_0$, nous avons :

$$|Tx(t)| \leq |Gx(t)| \leq N$$

Ainsi $\|Tx\| \leq M \ \forall x \in Y$, où $M = N + \|h\|_{l^1}$. Donc $T(Y)$ est uniformément borné dans X.

2.2. $T(y)$ est equicontinu

Soit $x \in Y$ et $t, \tau \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tx(\tau)| &\leq |\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds - \int_0^\tau f(s, x(s), Sx)ds| \\ &\leq |\int_\tau^t f(s, x(s), Sx)ds| \\ &\leq |\int_\tau^t h(s)ds| \\ &\leq |p(t) - p(\tau)| \end{aligned}$$

où $p(t) = \int_0^t h(s)ds$ une fonction uniformément continue.
on déduit que $|Tx(t) - Tx(\tau)|$ lorsque $t \longrightarrow \tau$.
De même pour $t, \tau \in I_0$

$$|Tx(t) - Tx(\tau)| = |Gx(t) - Gx(\tau)|$$

puisque l'opérateur G est compact et continu sur X, $G(Y)$ est relativement compact, et par conséquent $G(Y)$ est un ensemble équicontinu dans $C(I_0, \mathbb{R}^n)$.
D'où

$$|Gx(t) - Gx(\tau)| \longrightarrow 0 \;\; lorsque \;\; t \longrightarrow \tau$$

Si $\tau \in I_0$ et $t \in I$ alors on a :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tx(\tau)| &\leq |Gx(\tau) - Gx(0)| + |\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds| \\ &\leq |Gx(\tau) - Gx(0)| + \int_0^t h(s)ds \end{aligned}$$

Notons que si $|t - \tau| \longrightarrow 0$ alors $t \to 0$ et $\tau \to 0$.
D'aprè ce qui précède on déduit que :

$$|Tx(t) - Tx(\tau)| \to 0, lorsque \; t \to \tau.$$

Ainsi $T(Y)$ étant uniformément borné et équicontinu, d'après le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.3.1) T est un opérateur compact. Donc T est complètement continu. Les conditions du théorème(1.4.1) sont satisfaites, alors soit la première alternative du théorème (1.4.1) est vérifiée soit la deuxième est vérifiée.

Etape 3 : Montrons que la deuxième alternative (i.e.(ii)) n'est pas réalisée. C'est-à-dire que, nous allons vérifier que l'ensemble $\xi = \{u \in X \exists \lambda \in]0, 1[: \lambda Tu = u\}$ est borné.
Soit $x \in \xi$, et $\lambda \in]0, 1[$ tel que, pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda Tu(t) \\ &= \lambda[Gx(0) + \int_0^t f(s, u(s), Su)ds] \end{aligned}$$

pour $t \in I$
et pour $t \in I_0$ on a :

$$u(t) = \lambda Tu(t) = \lambda Gu(t)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq N + |\int_0^t f(s, u(s), Su)ds| \\ &\leq N + \int_0^t |f(s, u(s), Su)|ds \\ &\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(|u(s)|)ds. \end{aligned}$$

Soit $w(t) = N + \displaystyle\int_0^t \gamma(s)\phi(u(s))ds$ pour $t \in I$. On a $|u(t)| \leq w(t)$ $\forall t \in I$.
Puisque ϕ est croissante, en dérivant w on obtient :

$$\begin{cases} w'(t) \leq \gamma(s)\phi(w(t)) \\ w(0) = N \end{cases} \tag{2.13}$$

Ce qui donne après intégration entre 0 et t.

$$\int_0^t \frac{w'(s)ds}{\phi\,(w(s))} \leq \int_0^t \gamma(s)ds$$

En faisant un changement de variables on trouve

$$\int_0^{w(t)} \frac{ds}{\phi(s)} \leq \int_0^t \gamma(s)ds \leq \|\gamma\|_{L^1} < \int_0^\infty \frac{ds}{\phi(s)}.$$

Donc il existe une constante positive M tel que $w(t) \leq M$ pour tout $t \in J$.
On a ainsi,

$$|u(t)| \leq w(t) \leq M \ \forall t \in I$$

. et

$$|u(t)| \leq \lambda |Gu(t)| \leq \|Gu\| \leq N \ \forall t \in I_0,$$

et donc $|u(t)| \leq maxM, N$ pour tout $t \in J$.

Ainsi la deuxième alternative du Théorème 1.4.1 n'est pas réalisée. On en déduit alors, que l'EDF(2.10) admet au moins une solution sur J. ■

2.2.2 Affaiblissement des conditions

Dans cette section notre objectif est de présenter des conditions plus faibles que celles imposées dans le théorème 2.2.1 pour l'existence de solutions de l'equation (2.10).
On considère les hypothèses suivantes :

— (H_1) l'opérateur $S : BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow BM(J, \mathbb{R}^n)$ est continu.

— (H_2) l'opérateur $G : BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(I_0, \mathbb{R}^n)$ est compact et continu avec $N = \sup\{\|Gx\| : x \in BM(J, \mathbb{R}^n)\}$.
— (H_3) la fonction f est Carathéodory.
— (H_4) Il existe une fonction continue et croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\gamma \in L^1(J, \mathbb{R})$ telles que $\gamma(t) > 0$ $p.p$ $t \in J$ et

$$|f(t, x, y)| \leq \gamma(t)\phi(|x|) \quad p.p \;\; t \in I \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; et \;\; y \in BM(J, \mathbb{R}^n)$$

Théorème 2.2.2 .
Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont satisfaites et que

$$\int_N^\infty \frac{ds}{\phi(s)} > \|\gamma\|_{L^1}.$$

Alors l'EDFP(2.10) admet au moins une solution sur J.

Preuve

L'EDF (2.10) étant équivalente à l'equation intégrale fonctionnelle, notée EIF :

$$x(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds & t \in I \\ Gx(s), & t \in I_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

On définit l'opérateur T sur $X = C(J, \mathbb{R})$ par :

$$Tx(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ Gx(t) & t \in I_0. \end{cases} \tag{2.15}$$

On vérifie que l'opérateur T vérifiée les hypothèses du Théorème 1.4.1

Etape 1 : Montrons que T est un opérateur continu.
Soit (x_n) une suite convergente dans X vers $x \in X$. On vérifie que : $Tx_n \to Tx$.
Soit $t \in J$

$$\begin{aligned} |Tx_n(t) - Tx(t)| &\leq \int_0^t |f(s, x_n(s), Sx_n) - f(s, x(s), Sx)|ds \\ &\leq \|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \end{aligned}$$

On applique alors le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3.2) pour s'assurer que :

$$\|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

. En effet, soit $\begin{aligned} u : \;& I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & t \mapsto u_n(t) = f(t, x_n(t), Sx_n) \end{aligned}$ et $\begin{aligned} u : \;& I \to \mathbb{R}^n \\ & t \mapsto u(t) = f(t, x(t), Sx) \end{aligned}$
Nous avons $u_n(t)$ converge vers $u(t)$ p.p $t \in I$.

Par continuité de la fonction f par rapport à la deuxième variable, et puisque S est un opérateur continu on a :
$x_n \to x$ dans $C(J, \mathbb{R}^n)$ alors $Sx_n \to Sx$ et $f(t, x_n(t), Sx_n) \to f(t, x(t), Sx)$.
Il reste à trouver une fonction $g \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|u_n(t)\| \leq g(t).$$

Puisque la suite $(x_n)_n$ est convergente dans C alors : $\exists r_1 > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| < r_1$ et $\|x\| \leq r_1$.
Nous avons :

$$|x_n(t)| \leq \|x_n\| \leq r_1, \ \forall n \in N$$

Delà,

$$|u_n(t)| = |f(t, x_n(t), Sx_n)| \leq \gamma(t)\phi(|x_n(t)|) \leq \gamma(t)\phi(|r_1|) = g(t).$$

Les conditions du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3.2) sont ainsi satisfaites, on déduit que $\|f(., x_n(.), Sx_n) - f(., x(.), Sx)\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Maintenant pour $t \in I_0$, nous avons :

$$|Tx_n(t) - Tx(t)| \leq |Gx_n(t) - Gx(t)| \leq \|Gx_n - Gx\|$$

Puisque G est un opérateur continu alors :$\|Gx_n - Gx\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi nous avons vérifié que :

$$\|Tx_n - Tx\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui prouve que T est un opérateur continu.
Etape 2 : Montrons que T transforme tout borné en un relativement compact.
Soit Y un ensemble borné dans X. Il existe un $k > 0$ tel que : $\forall x \in Y, \forall t \in I, |x(t)| \leq \|x\| \leq k$
2.1. Montrons que $T(y)$ est un ensemble uniformément borné.
Soit $x \in X$ et $t \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq N + \int_0^t |f(s, x(s), Sx)| ds \\
&\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(|x(s)|) ds \\
&\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(k) ds \ (\forall s \in [0, t] \subset [0, a] = I : \phi(|x(s)|) \leq \phi(k).) \\
&\leq N + L \int_0^t \gamma(s) ds \\
&\leq N + L\|\gamma\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

où $L = \phi(k)$.
Soit $t \in I_0$. Nous avons :

$$|Tx(t)| \leq |Gx(t)| \leq N.$$

Ainsi $\|Tx\| \leq M \ \forall x \in Y$, où $M = N + L\|\gamma\|_{L^1}$. Ce qui prouve que $T(Y)$ est un ensemble uniformément borné.

2.2 Montrons que $T(Y)$ est un ensemble equicontinu
Soit $x \in Y$ et $t, \tau \in I$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Tx(\tau)| &\leq |\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds - \int_0^\tau f(s, x(s), Sx)ds| \\
&\leq |\int_\tau^t f(s, x(s), Sx)ds| \\
&\leq |\int_\tau^t \gamma(s)\phi(|x(s)|)ds| \\
&\leq L\int_\tau^t \gamma(s)ds = L|p(t) - p(\tau)|
\end{aligned}$$

où $p(t) = \displaystyle\int_0^t \gamma(s)ds$ et $L = \phi(k)$.
De même pour $t, \tau \in I_0$, nous avons :

$$|Tx(t) - Tx(\tau)| = |Gx(t) - Gx(\tau)|.$$

Puisque l'opérateur G est complètement continu sur X, $G(Y)$ est relativement compact, et par conséquent $G(Y)$ est un ensemble équicontinu dans $C(I_0, \mathbb{R}^n)$.
D'où

$$|Gx(t) - Gx(\tau)| \longrightarrow 0 \;\; lorsque \;\; t \longrightarrow \tau.$$

Si $\tau \in I_0$ et $t \in I$ alors on a :

$$|Tx(t) - Tx(\tau)| \leq |Tx(t) - Tx(0)| + |Tx(0) + Tx(\tau)|.$$

D'où, dans tout les cas nous avons : :

$$|Tx(t) - Tx(\tau)| \to 0, \; lorsque \; t \to \tau,$$

ce qui prouve que $T(Y)$ est ensemble équicontinu et d'après le Théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.3.1) T est un opérateur compact.
Ainsi T étant complètement continu, les conditions du Théorème 1.4.1 sont satisfaites, alors soit la première alternative du Théorème 1.4.1 est vérifiée soit la deuxième est réalisée.

Etape 3 : Montrons que la deuxième alternative n'est pas réalisée. C'est-à-dire que, nous allons vérifier que l'ensemble $\xi = \{u \in X \exists \lambda \in]0, 1[: \lambda Tu = u\}$ est borné.
Soit $x \in \xi$, et $\lambda \in]0, 1[$ tel que, pour $t \in I$,

$$\begin{aligned}
u(t) &= \lambda Tu(t) \\
&= \lambda[Gx(0) + \int_0^t f(s, u(s), Su)ds].
\end{aligned}$$

et pour $t \in I_0$ on a :

$$u(t) = \lambda Tu(t) = \lambda Gu(t).$$

D'où

$$\begin{aligned}|u(t)| &\leq N + |\int_0^t f(s,u(s),Su)ds| \\ &\leq N + \int_0^t |f(s,u(s),Su)|ds \\ &\leq N + \int_0^t \gamma(s)\phi(|u(s)|)ds.\end{aligned}$$

Soit $w(t) = N + \displaystyle\int_0^t \gamma(s)\phi(u(s))ds$ pour $t \in I$. On a $|u(t)| \leq w(t)$ $\forall t \in I$.
Puisque ϕ est croissante, en dérivent w on obtient :

$$\begin{cases} w'(t) \leq \gamma(s)\phi(w(t)) \\ w(0) = N \end{cases} \tag{2.16}$$

Par intégration, on déduit que :

$$\int_0^t \frac{w'(s)ds}{\phi\,(w(s))} \leq \int_0^t \gamma(s)ds$$

En faisant un changement de variables on trouve : .

$$\int_0^{w(t)} \frac{ds}{\phi(s)} \leq \int_0^t \gamma(s)ds \leq \|\gamma\|_{L^1} < \int_0^\infty \frac{ds}{\phi(s)}$$

Donc il existe une constante positive M telle que $w(t) \leq M$ pour tout $t \in J$.
On aura

$$|u(t)| \leq w(t) \leq M, sit \in I$$

. et

$$|u(t)| \leq \lambda|Gu(t)| \leq \|Gu\| \leq N,\ si\ t \in I_0.$$

D'où $|u(t)| \leq maxM, N$ pour tout $t \in J$.
Ainsi la deuxième alternative du théorème 1.4.1 n'est pas réalisée, alors l'EDF(2.10) admet au moins une solution. ■

2.2.3 Théorème d'unicité

On considère les hypothèses suivantes :

— (B_1) La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \times BM(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continu et vérifie :

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leq \max\left\{\frac{|x_1-x_2|}{a+|x_1-x_2|}, \frac{\|y_1-y_2\|}{a+\|y_1-y_2\|}\right\} \quad p.p\ \ t \in I$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $y_1, y_2 \in BM(J,\mathbb{R}^n)$.

— (B_2) l'opérateur $S : BM(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow BM(J,\mathbb{R}^n)$ est non expansif.

— (B_3) l'opérateur $G : BM(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow C(I_0,\mathbb{R}^n)$ satisfait :

$$|Gx(t) - Gy(t)| \leq \frac{|x(t) - y(t)|}{a + |x(t) - y(t)|} \quad p.p \quad t \in I_0.$$

$\forall x, y \in BM(J,\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.2.3 (Dhage[3]) .

Supposons que les hypothèses (B_1)-(B_2) sont satisfaites. Alors l'EDF(2.10) admet un solution unique sur J.

Preuve

Soit $X = C(J,\mathbb{R}^n)$ et soit l'opérateur T défini sur X par :

$$Tx(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ Gx(t) & t \in I_0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Nous allons montrer que T est une contraction non linéaire sur X.
En effet d'après l'hypothèse (B_1) on a, pour tout $x, y \in X$ et tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq \int_0^t |f(s, x(s), Sx) - f(s, y(s), Sy)|ds \\ &\leq \int_0^t \left(\max\left\{\frac{|x(s) - y(s)|}{a + |x(s) - y(s)|}, \frac{\|Sx - Sy\|}{a + \|Sx - Sy\|}\right\}\right) ds \\ &\leq \int_0^t \left(\max\left\{\frac{|x(s) - y(s)|}{a + |x(s) - y(s)|}, \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|}\right\}\right) ds \\ &\leq \int_0^t \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|} ds \\ &\leq \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|}. \end{aligned}$$

pour $t \in I$.
De même pour $t \in I_0$

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq |Gx(t) - Gy(t)| \\ &\leq \frac{|x(t) - y(t)|}{a + |x(t) - y(t)|} \\ &\leq \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|}. \end{aligned}$$

En passant au "Sup" on obtient

$$\|Tx - Ty\| \leq \psi(\|x - y\|).$$

où : $\psi(r) = \dfrac{ar}{a + r} < r$, c'est à dire que T est une contraction non linéaire.

Donc d'après le Théorème 1.4.2 l'opérateur T admet un point fixe unique, et par conséquent l'EDF 2.10 admet une solution unique sur J.■

2.2.4 Discussion

Le résultat du théorème 2.2.3 n'est pas justifier car pour $x, y \in X$ et $t \in I$, nous avons en fait :

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)| &\leq |Gx(0) - Gy(0)| + \int_0^t |f(s, x(s), Sx) - f(s, y(s), Sy)| ds \\
&\leq \frac{|x(0) - y(0)|}{a + |x(0) - y(0)|} + \int_0^t \left(\max \left\{ \frac{|x(s) - y(s)|}{a + |x(s) - y(s)|}, \frac{\|Sx - Sy\|}{a + \|Sx - Sy\|} \right\} \right) \\
&\leq \frac{|x(0) - y(0)|}{a + |x(0) - y(0)|} + \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|} \\
&\leq \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|} + \frac{a\|x - y\|}{a + \|x - y\|} = (1 + a) \frac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|}
\end{aligned}$$

En posant $\psi(r) = (1+a)\dfrac{\|x - y\|}{a + \|x - y\|}$, nous remarquons que ψ ne vérifie pas : $\psi(r) < r, \ \forall r > 0$.
En conclusion, T n'est pas nécessairement une contraction non linéaire.
Par contre le Théorème 2.2.3 s'applique pour un problème du type particulier qui a d'ailler motivé l'étude fait dans l'article ([Dhage[3]]) :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_t) & p.p \ \ t \in I \\ x(t) = \varphi(t) & t \in I_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \times C(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$
Puisque :

$$|Gx(0) - Gy(0)| = |\phi(0) - \phi(0))| = 0.$$

2.2.5 Existence de solutions extrémales

Nous rappelons qu'une application $f : J \times \mathbb{R}^n \times C$ est dite L^1**-Chandrabhan** si

(i) $t \longrightarrow f(t, x, y)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in BM(J, \mathbb{R}^n)$.

(ii) La fonction $f(t, x, y)$ est croissante par rapport à x et y pour presque tout $t \in J$

(iii) $\exists h \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\forall k > 0$

$$|f(t, x, y)| \leq h(t) \quad p.p \ \ t \in J \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \text{ et } \ y \in BM(J, \mathbb{R}^n) : \|x\|, \|y\| \leq k$$

On considère les hypothèses suivantes :

(C_1) L'opérateur $S : BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow BM(J, \mathbb{R}^n)$ est croissant.

(C_2) La fonction $f(t, x, y)$ est Chandrabhan.

(C_3) L'opérateur $G : BM(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(I_0, \mathbb{R}^n)$ est croissant.

(C_4) EDF (2.10) admet une sous solution a et une sur solution b, avec $a \leq b$.

Théorème 2.2.4 (Dhage[1]) .

Supposons que les hypothèses (A_2),(C_1)-(C_4) sont satisfaites. Alors l'EDF(2.10) admet au moins une solution maximale et une solution minimale sur J.

Preuve

La preuve du théorème 2.2.4 est basé sur le Théorème 1.4.9. En conséquence, nous allons vérifier que les hypothèses de ce dernier sont vérifiées. L'EDF(2.10) est équivalente à l'EIF(2.14) Pour $X = C(J, \mathbb{R}^n)$ et $T : [a, b] \longrightarrow X$ l'opérateur défini par :

$$Tx(t) = \begin{cases} Gx(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s), Sx)ds, & t \in I \\ Gx(t) & t \in I_0. \end{cases} \tag{2.19}$$

L'EFI(2.14)se transforme en l'équation opérationnelle suivante :$Tx = x$ dans l'espace de Banach X.

Etape1 Montrons que T est croissant.
Soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x \leq y$. Nous avons d'une part, pour $t \in I$:

$$\begin{aligned} Tx(t) &= Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds \\ &\leq Gy(0) + \int_0^t f(s, y(s), Sy)ds \\ &= Ty(t), \end{aligned}$$

et d'autre part, pour $t \in I_0$:

$$Tx(t) = Gx(t) \leq Gy(t) = Ty(t).$$

Donc l'opérateur T est croissant sur $[a, b]$

Etape 2 Montrons que l'opérateur T envoi l'interval $[a, b]$ dans lui même.
Nous avons, pour tout $t \in I$ et tout $x \in [a, b]$: : $\forall t \in I \quad et \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} a(t) &\leq Ga(0) + \int_0^t f(s, a(s), Sa)ds \\ &\leq Gx(0) + \int_0^t f(s, x(s), Sx)ds \\ &\leq Gb(0) + \int -0^t f(s, b(s), Sb)ds \\ &\leq b(t). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t \in I_0$:

$$a(t) \leq Ta(t) = Ga(t) \leq Gx(t) \leq Tx(t) \leq Gb(t) \leq b(t).$$

Ainsi $a(t) \leq Tx(t) \leq b(t), \forall t \in J$, et par conséquent $Tx \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]$.

Etape 3 Soit $(x_n)_n$ une suite monotone dans $[a, b]$. montrons que la suite $(Tx_n)_n$ converge dans $[a, b]$.
D'après la démonstration du Théorème 2.2.1 l'opérateur T est compact. Par conséquent, la suite $(Tx_n)_n$ converge dans $T([a, b])$.
D'après le théorème 1.4.9 EDF(2.10) admet une solution maximale et minimale sur J.■

Chapitre 3

Équations fonctionnelles intégrales

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats prouvant l'existence de solutions et de solutions extrémales pour certain type d'équations fonctionnelles intégrales.

3.1 Un problème

On s'intéresse à l'existence de solutions et de solutions extrémales dans l'algèbre de Banach $\mathcal{BM}(J,\mathbb{R})$ pour les équations intégrales fonctionnelles non linéaires notée EIF de la forme :

$$x(t) = k(t, x(\mu(t))) + [f(t, x(\nu(t))] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds \right) \quad \forall t \in J. \tag{3.1}$$

où $q : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f, g, k : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mu, \nu, \eta, \sigma : J \longrightarrow J$, avec $J = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 .

Une solution de l'équation (3.1) est une fonction $x \in BM(J,\mathbb{R})$ qui vérifiée l'égalité (3.1).

3.1.1 Résultat d'existence

On considère les hypothèses suivantes :

(H_0) Les fonctions $\mu, \nu, \sigma, \eta : J \longrightarrow J$ sont continues.

(H_1) La fonction $k : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et il existe une fonction bornée $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$|k(t, x) - k(t, y)| \leq \gamma(t) |x - y| \;\; p.p \; t \in J \; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(H_2) La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{f(t, x)}$ est bien définie pour tout $t \in J$ et $\dfrac{x}{f(t, x)} = \dfrac{y}{f(t, y)} \Rightarrow x = y$ pour tout $t \in J$.

(H_3) La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue et il existe une fonction bornée $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \alpha(t) |x - y| \qquad p.pt \in J.$$

(H_4) $q : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H_5) g est L^1-Carathéodory.

(H_6) Il existe une fonction continue croissante $\Psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et une fonction $p \in L^1(J, \mathbb{R})$, $p(t) > 0$ p.p $t \in J$ telles que

$$|g(t,x)| \leq p(t)\Psi(|x|) \ \ p.p\ t \in J, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.1.1 .

Supposons que les hypothèses $(H_0) - (H_6)$ sont satisfaites. S'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} \|\alpha\| \left(Q + \|p\|_{L^1} \Psi(r)\right) + \|\gamma\| < 1 \\ r > \dfrac{K + F\left(Q + \|p\|_{L^1} \Psi(r)\right)}{1 - \left[\|\alpha\| \left(Q + \|p\|_{L^1} \Psi(r)\right) + \|\gamma\|\right]} \end{array} \right. \tag{3.2}$$

òu $Q = \sup_{t\in J} |q(t)|$, $K = \sup_{t \in J} |k(t,0)|$ *et* $F = \sup_{t\in J} |f(t,0)|$.
Alors l'EIF (3.1) admet au moins une solution.

Preuve

Considérons les opérateurs A, B, C dans $BM(J, \mathbb{R})$ définis, pour $x \in BM(J, \mathbb{R})$ et $t \in J$ par :

$$\begin{array}{rcl} Ax(t) & = & f(t, x(\nu(t)), \\ Bx(t) & = & q(t) + \displaystyle\int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds, \\ Cx(t) & = & k(t, x(\mu(t)). \end{array}$$

Alors l'équation EIF (3.1) est équivalente a l'équation opérationelle

$$Ax(t)Bx(t) + Cx(t) = x(t), \ t \in J.$$

On montre que les opérateurs A, B et C satisfait les conditions du Corollaire 1.4.3.

Étape 1 : Montrons que l'opérateur $\dfrac{I}{A} : BM(J, \mathbb{R} \longrightarrow BM(J, \mathbb{R}$ telle que, pour $x \in BM(J, \mathbb{R})$ et $t \in J$: $\frac{I}{A}x(t) = \frac{x(t)}{Ax(t)} = \frac{x(t)}{f(t,x(t)}$ est bien défini.
Puisque $f(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in J \times \mathbb{R}$, l'opérateur $\dfrac{I}{A}$ est bien défini. D'après l'hypothèse (H_2) il vient que l'opérateur $\dfrac{I}{A}$ est injectif.

Étape 2 : Montrons que A et C sont lipschitziens :
Soit $x, y \in BM(J, \mathbb{R})$ et soit $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} |Ax(t) - Ay(t)| & = & |f(t, x(\nu(t)) - f(t, y(\nu(t))| \\ & \leq & \alpha(t) |x(\nu(t)) - y(\nu(t))| \\ & \leq & \|\alpha\| \|x - y\|. \end{array}$$

D'où l'on obtient :

$$\|Ax - Ay\| \leq \|\alpha\| \|x - y\| .$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}|Cx(t) - Cy(t)| &= |k(t, x(\mu(t)) - k(t, y(\mu(t))| \\ &\leq \gamma(t) |x(\mu(t)) - y(\mu(t))| \\ &\leq \|\gamma\| \|x - y\| .\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\|Cx - Cy\| \leq \|\gamma\| \|x - y\| .$$

Ainsi A et C sont lipschitziens avec comme constantes de Lipschitz $\|\alpha\|$ et $\|\gamma\|$ respectivement.

Étape 3.1 : Montrons que B est complètement continu :

1. B est continu

Soit (x_n) une suite convergente dans X vers $x \in X$. Montrons que $Bx_n \longrightarrow Bx$.
Soit $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned}|Bx_n(t) - Bx(t)| &\leq |\int_0^{\sigma(t)} g(s, x_n(\eta(s))ds - \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds| \\ &\leq \int_0^{\sigma(t)} |g(s, x_n(\eta(s)) - g(s, x(\eta(s))|ds \\ &\leq \int_0^1 |g(s, x_n(\eta(s)) - g(s, x(\eta(s))|ds \\ &\leq \|g(., x_n(\eta(.)) - g(., x(\eta(.))\|_{L^1}\end{aligned}$$

d'après le théorème de la convergente dominée de Lebesgue (Théorème 1.3.2) :

$$\|g(., x_n(\eta(.))) - g(., x(\eta(.)))\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où : $\|Bx_n - Bx\| \leq \|g(., x_n(\eta(.))) - g(., x(\eta(.)))\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Ainsi B est un opérateur continu.

2. Montrons que B transforme tout borné en un relativement compact.

Pour cela, nous allons utiliser le Théorème d'Ascoli-Arzela et donc montrer que

Soit (x_n) une suite dans $\bar{\mathcal{B}}(0, v)$, alors $\|x_n\| \leq v$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2.1 $B(x_n)$ est uniformément borné.

$$\begin{aligned}\|Bx_n\| &\leq \sup_{t\in J} |q(t)| + \sup_{t\in J} \int_0^{\sigma(t)} |g(s, x_n(\eta(s))| \, ds \\ &\leq Q + \int_0^1 h(s) \, ds \\ &= Q + \|h\|_{L^1} .\end{aligned}$$

donc B est uniformément borné.

2.2 $B(x_n)$ est équicontinu.

Soit $t, \tau \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned}|Bx_n(t) - Bx_n(\tau)| &\leq |q(t) - q(\tau)| + \left| \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds \right| \\ &\leq |q(t) - q(\tau)| + |m(t) - m(\tau)|\end{aligned}$$

où $\quad m(t) = \displaystyle\int_0^{\sigma(t)} h\,(s)\,ds.$

q, m sont continues sur J, donc uniformément continues et par conséquent on a

$$|Bx_n(t) - Bx_n(\tau)| \longrightarrow 0 \; lorsque \; t \longrightarrow \tau$$

Alors $\{Bx_n\}$ est un ensemble équicontinu.

D'après le théorème d'*Ascoly Arzela*(Théorème 1.3.1) B est complétement continu.

4. Montrons que :$\|\alpha\|M + \|\gamma\| < 1$ où $M = \|B\bar{\mathcal{B}}(0, v)\|$ et $\|\alpha\|$ et $\|\gamma\|$ sont les constantes de Lipschitz des opérateurs A et C respectivement.

$$\begin{aligned}M &= \left\|B(\bar{\mathcal{B}}\,(0, r)\right\| \\ &= \sup\left\{\left\|Bx : x \in \bar{\mathcal{B}}\,(0, r)\right\|\right\} \\ &= \sup_{x\in\bar{\mathcal{B}}(0,r)} \left\{\sup_{t\in J} |Bx(t)|\right\} \\ &\leq \sup_{x\in\bar{\mathcal{B}}(0,r)} \left\{\sup_{t\in J} |q(t)| + \sup_{t\in J} \int_0^{\sigma(t)} |g(s, x(\eta(s))|\,ds\right\} \\ &\leq \sup_{x\in\bar{\mathcal{B}}(0,r)} \left\{Q + \int_0^1 p(s)\Psi\left(\|x\|\right) ds\right\} \\ &\leq Q + \|p\|_{L^1}\Psi(r).\end{aligned}$$

alors

$$\|\alpha\|\,M + \|\gamma\| = \|\alpha\|\,(Q + \|p\|_{L^1}\,\Psi(r)) + \|\gamma\| < 1.$$

Donc, toute les conditions du Corollaire 1.4.3 sont satisfaites, alors ou bien la conclusion 1 est réalisée ou bien 2 est réalisée.

Maintenant, montrons que la deuxième alternative n'est pas réalisée :

Soit $u \in BM(J, \mathbb{R})$ avec $\|u\| = r$, et soit $\lambda \in]0, 1[$ alors on a :

$$u(t) = \lambda\left[k(t, \frac{1}{\lambda})u(\mu(t))\right] + \lambda\left[f(t, \frac{1}{\lambda})u(\nu(t))\right]\left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, u(\eta(s))ds)\right) \tag{3.3}$$

On a

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \left|\lambda k(t, \frac{1}{\lambda}u(\mu(t)) - \lambda k(t,0)\right| + \lambda\,|k(t,0)| + \\
&+ \left(\left|\lambda f(t, \frac{1}{\lambda}u(\nu(t)) - \lambda f(t,0)\right| + \lambda\,|f(t,0)|\right)\left(|q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} |g(s,u(\eta(s))|\,ds\right) \\
&\leq \gamma\,(t)\,|u(\mu(t))| + |k(t,0)| + (|\alpha\,(t)|\,|u(\nu(t))| \\
&+ \quad |f(t,0)|)\left(|q(t)| + \int_0^1 p(s)\Psi\,(|u(\eta(s))|)\,ds\right) \\
&\leq \|\gamma\|\,\|u\| + K + (\|\alpha\|\,\|u\| + F)\,(Q + \|p\|_{L^1}\,\Psi(\|u\|)) \\
\|u\| &\leq (\|\alpha\|\,(Q + \|p\|_{L^1}\,\Psi(\|u\|)) + \|\gamma\|)\,\|u\| + F\,(Q + \|p\|_{L^1}\,\Psi(\|u\|)) + K
\end{aligned}
$$

Posons $\|u\| = r$ dans l'inégalité précédente on trouve

$$
r \leq \frac{K + F\,(Q + \|p\|_{L^1}\,\Psi(r))}{1 - (\|\alpha\|\,(Q + \|p\|_{L^1}\,\Psi(\|u\|)) + \|\gamma\|)}
$$

C'est une contradiction avec la deuxième inégalité dans (3.2). Alors la conclusion 1 est satisfaite, donc EFI admet au moins une solution u dans J avec $\|u\| \leq r$. ■

3.1.2 Discussion

On peut affaiblir l'hypothèse (H_5), on supposons seulement que g est Carathéodory et utilisons l'hypothèse (H_6)

• Pour que B soit uniformément borné :

$$
\begin{aligned}
\|Bx_n\| &\leq \sup_{t\in J}|q(t)| + \sup_{t\in J}\int_0^{\sigma(t)} |g(s,x_n(\eta(s))|\,ds \\
|Bx_n(t)| &\leq sup_{t\in J}|q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} p(s)sup_{s\in J}\psi(x_n(\eta(s))ds \\
&\leq q + \psi(r)\int_0^1 p(s)ds \\
&\leq q + N\|p\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

D'où :$\|Bx\| \leq q + N\|p\|_{L^1}$ tel que : $\quad N = \psi(r)$.

• Pour que l'ensemble $B\{x_n\}$ soit équicontinu :

Soit $t, \tau \in J$ alors on a

$$
\begin{aligned}
|Bx_n(t) - Bx_n(\tau)| &\leq |q(t) - q(\tau)| + \left| \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds \right| \\
&\leq |q(t) - q(\tau)| + |\int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} p(s)\psi(|x_n(\eta(s))|)ds| \\
&\leq |q(t) - q(\tau)| + N|\int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} p(s)ds| \\
&\leq |q(t) - q(\tau)| + |m(t) - m(\tau)|
\end{aligned}
$$

où $m(t) = \displaystyle\int_0^{\sigma(t)} p(s)ds.$

q, m sont continues sur J, donc uniformément continues et par conséquent on a

$$|Bx_n(t) - Bx_n(\tau)| \longrightarrow 0 \; lorque \; t \longrightarrow \tau$$

Alors $\{Bx_n\}$ est un ensemble équicontinu.

Applications

On considère l'équation fonctionnelle différentielle EDF :

$$\left(\frac{x(t) - k(t, x(\mu(t)))}{f(t, x(\nu(t)))}\right)' = g(t, x(\eta(t)), \quad t \in J, \tag{3.4}$$

satisfait la condition initiale

$$x(0) = \varepsilon, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

tel que $k, g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ et $\mu, \nu, \eta : J \longrightarrow J$ sont continus avec $\nu(0) = 0 = \mu(0)$.

Une solution de EDF (3.4)-(3.5) est une fonction absolument continue $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les equations (3.4)-(3.5) dans J.

L'existence de la solution est donnée par :

Théorème 3.1.2 .

Supposons que les hypothèses H_1) - H_3) et $H_2 - H_5$) sont satisfaite.
Donc s'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que l'inéquation (3.2) est satisfaite avec $Q = \left|\dfrac{\epsilon - k(0, \varepsilon)}{f(0, \varepsilon)}\right|$, *alors EDF (3.4)-(3.5) admet une solution sur J.*

Preuve

EDF (3.4)-(3.5) est équivalente à l'équation intégrale

$$x(t) = k(t, x(\mu(t)) + [f(t, x(\nu(t))] \left(\frac{\varepsilon - k(0, \varepsilon)}{f(0, \varepsilon)} + \int_0^t g(s, u(\eta(s))ds\right)$$

Applicons le théorème (3.1.1) avec $q(t) = \dfrac{\varepsilon - k(0,\varepsilon)}{f(0,\varepsilon)}$, $\sigma(t) = t$ et l'espace $BM(J,\mathbb{R})$ est remplacé par $C(J,\mathbb{R})$.■

3.1.3 Existence des solutions extrémales

Soit $K \in BM(J,\mathbb{R})$ un cone positive, normale défini par

$$K = \{x \in BM(J,\mathbb{R}) : x(t) \geq 0, \forall t \in J\}$$

On définit une relation d'ordre à l'aide d'un cone K par :

$$\forall x, y \in X, x \leq y \Longrightarrow y - x \in K.$$

Définition 3.1.2 .

Une fonction $a \in BM(J,\mathbb{R})$ est dite sous-solution de EIF (3.1) si

$$a(t) \leq k(t, a(\mu(t))) + [f(t, a(\nu(t))] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, a(\eta(s)))ds \right) \qquad \forall t \in J.$$

Une fonction $b \in BM(J,\mathbb{R})$ est dite sur-solution de EIF (3.1) si

$$b(t) \geq k(t, b(\mu(t))) + [f(t, b(\nu(t))] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, b(\eta(s)))ds \right) \qquad \forall t \in J.$$

On considère les hypothèses suivantes

(q_0) Les fonctions $\mu, \nu, \eta : J \longrightarrow J$ sont continues.

(q_1) La fonction $q : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue avec $Q = \sup_{t \in J} |q(t)|$.

(q_2) La fonction $k : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et il existe une fonction bornée $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$|k(t,x) - k(t,y)| \leq \gamma(t)|x - y| \qquad p.pt \in J.$$

(q_3) La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue et il existe une fonction bornée $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \alpha(t)|x - y| \qquad p.pt \in J.$$

(q_4) $g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est de carathéodory.

(q_5) Les fonctions f, g et k sont croissantes presque tout $t \in J$.

(q_6) EFI (3.1) admet une sous-solution a et une sur-solution b, avec $a \leq b$.

Théorème 3.1.3 .

Supposons que les hypothèses q_0), q_6) sont satisfaites, si

$$\|\alpha\|(Q + \|h\|_{L^1}) + \|\gamma\| < 1.$$

Alors EIF (3.1) admet une solution maximale et une solution minimale.

Preuve

On considère l'intervalle ordonné $[a, b]$ dans $BM(J, \mathbb{R})$ qui est bien défini d'après l'hypothèse q_6).
Définissons sur $\mathcal{BM}(J, \mathbb{R})$ les trois opérateurs A, B, C par

$$\begin{aligned} Ax(t) &= f(t, x(\nu(t))) && t \in J \\ Bx(t) &= q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds && t \in J \\ Cx(t) &= k(t, x(\mu(t))) && t \in J. \end{aligned}$$

Alors EFI (3.1) est équivalente a l'équation opérationnelle

$$Ax(t)Bx(t) + Cx(t) = x(t) \qquad t \in J.$$

On doit montrer que les opérateurs A, B et C vérifient les conditions théorème (1.4.6)
Puisque les fonctions f, q, k et g sont positives, on a $A, B : BM(J, \mathbb{R}) \longrightarrow K$.

Étape 1 : Montrons que les opérateurs A, C sont lipschitziens et croissants.
De la même manière que pour les preuves des théorèmes précèdent, on déduit que les opérateurs A, C sont croissants et lipschitziens avec les constantes de lipschitz $\|\alpha\|$, $\|\gamma\|$ respectivement.

Étape 2 : Montrons que l'opérateur B est complètement continu.

1. L'opérateur B est complètement continu d'après la démonstration du théorème (3.1.1).

Donc B est complètement continu.
Finalement on a

$$\begin{aligned} M\phi_A(r) + \phi_c(r) &= \|B([a, b])\|\phi_A(r) + \phi_C(r) \\ &\leq (\|\alpha\|(Q + \|h\|_{L^1}) + \|\gamma\|)r < r \qquad \forall r > 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\|\alpha\|(Q + \|h\|_{L^1}) + \|\gamma\| < 1.$$

Les hypothèses du théorème (1.4.6) sont vérifies, alors l'équation opérationnelle

$$Ax(t)Bx(t) + Cx(t) = x(t) \qquad \forall t \in J,$$

admet une solution maximale et une solution minimale.■

Applications

On considère l'équation fonctionnelle différentielle EDF :

$$\left(\frac{x(t) - k(t, x(\mu(t)))}{f(t, x(\nu(t)))} \right)' = g(t, x(\eta(t))), \quad t \in J, \tag{3.6}$$

satisfait la condition initiale

$$x(0) = \varepsilon, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

tel que $k, g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ et $\mu, \nu, \eta : J \longrightarrow J$ sont continus avec $\nu(0) = 0 = \mu(0)$.

Une solution de EDF (3.6)-(3.7) est une fonction absolument continue $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les equations (3.6)-(3.7) dans J.
On définit une relation d'ordre à l'aide du cone positive, normale $K = \{x \in C(J, \mathbb{R}) : x(t) \geq 0 \forall x \in J\}$.

Une fonction $u \in C(J, \mathbb{R})$ est une sous solution de FDE (3.6)-(3.7) si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\dfrac{u(t) - k(t, u(\mu(t)))}{f(t, u(\nu(t)))}\right)' & \leq & g(t, u(\eta(t))), \quad t \in J, \\ \\ u\,(0) & \leq & \varepsilon_0 \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Une fonction $v \in C(J, \mathbb{R}$ est une sur solution de FDE (3.6)-(3.7) si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\dfrac{v(t) - k(t, v(\mu(t)))}{f(t, v(\nu(t)))}\right)' & \geq & g(t, v(\eta(t))), \quad t \in J, \\ v\,(0) & \geq & \varepsilon_0 \end{array} \right. \tag{3.9}$$

L'existence des solutions éxtrémales est donnée par :

Théorème 3.1.4 .
Supposons que les hypothèses $(q_5) - (q_6)$ sont vérifiées, si

$$\|\alpha\|(\frac{\epsilon - k(0, \varepsilon)}{f(0, \varepsilon)} + \|h\|_{L^1}) + \|k\| < 1.$$

Alors EDF (3.6)-(3.7) admet une solution maximale et une solution minimale sur J.

Preuve

EDF (3.6)-(3.7) est équivalente à l'équation intégrale :

$$x(t) = k(t, x(\mu(t))) + [f(t, x(\nu(t)))] \left(\frac{\varepsilon - k(0, \varepsilon)}{f(0, \varepsilon)} + \int_0^t g(s, u(\eta(s)))ds \right), \quad t \in J.$$

Donc le résultat est obtenu par une application direct du théorème (1.4.6).■

Bibliographie

[1] B.C.Dhage,S.N Salunkhe, Ravi P. Agrwal and W.Zhang-A Functional differntial equation in Bannach algebras, *Math.Inequal. and Appl*, N0 1 (2005) 89-99.

[2] B.C.Dhage-Fixed point théorèmes in ordered Banach Algebras and applications, *Panamer. Math*, J.94 :(1999), n 93-102.

[3] B.C.Dhage- Existence theory for functional initial value problems of ordinary differential equations, *EJQTDE*, (2004), N0 15.

[4] F.E Browder- Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, *Porc.Symp.Pure Math.Amer.Math.Soc.Providence,Rhde Island*, (1976).

[5] B.C.Dhage-Nonlinear functional boundary value problems in Banachalgebrasinvolving Carathéodories, *Kyungpook Math*, J.46 :(2006), N 00-00.

[6] S.Heikkila and V. Lakshmikantham-Monotone Iterative Techniaue for Nonlinear Discontinues Differential Equations, *Maarcel Dekker Inc*, (1994).

[7] B.C.Dhage, J.Henderson and S.K. Ntouyas-Periodic Boundary value problemes of first order ordinary differential equations in Banach Alegebras,(1991).

[8] B.C.Dhage-On some variants of schauders fixed point principale and applications to non linear integral equations,*J.Math.Phys.*25(1988), n 603-611.

[9] B.C.Dhage-On some nonlinear alternatives of Leary-Schauder type and functional integral equations, *Archivum Mathematicum (Brno)*, Tomus 42 (2006),11-23.

[10] B.C.Dhage-Some non linear alternatives in Banach algebras with applications, nonlinear studies (accepted).

[11] B.C.Dhage-On existence of extremal solutions of nonlinear functional integral equations in Banach algebras. Receved 23 august 2003 and in revised from 9 may 2004.

[12] B.C.Dhage-On a fixed point theorem of Krasnoselkii-Schaffer type, *EJQTDE*, N0 6 (2002).

[13] D.R.Smart-Fixed Points Theorems, *Cambridge University Press*, New York, (1980).

[14] Christain Leruste-Calcul différentiel. *Masson.*

[15] Laurent Schwartz-topologie générale et analyse fonctionnelle. *Hermann édition des sciences et des arts.*

Équations différentielle fractionnelles dans des algèbres de Banach

Résumé

Le principe de point fixe est très important dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires, en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.
Dans ce mémoire, une familiarisation avec la méthode du point fixe dans l'étude de l'existence de solutions et de solutions extrémales de certaines équation différentielles et équations intégrales.

Phrases et mots clés : équations différentielles fractionnaires, existence de solutions, point fixe, algèbre de Banach .

Abstract

The fixed point principle is so important in the study of several non linear differential equations, particulary, problems of existence and uniqeness.
In this thesis, a familiarization with the fixed point method in the study of the existence of solutions and extremal solutions of certain differential equations and integral equations.

Key words and phrases : fractional differential equations, existence of solutions, fixed point,Banach algebra