RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : **Analyse fonctionelle et applications**

Présentée par

Harhouze Hicham

Mekhaldi Abdelhamid

C_0-Semi-groupes

Soutenu, le 13/10/2020 devant le jury composé de

M. Maazouz Kada, MCB, Univ. de Tiaret (Président)
M. Ouardani Abdelrrahman, MCB, Univ. de Tiaret (Examinateur)
M. Benia Kheireddine, MAA, Univ. de Tiaret (co-encadreur)
M. Benia Yassine, MCB, Univ. d'Alger 1 (Rapporteur)

Promotion :2019/2020

Remerciement

★ Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout
Miséricordieux qui nous a donné la force et le courage pour réaliser ce travail.

★ Le grand merci à notre promoteur

M.Benia Yassine

pour ses conseils et son aide et qui a mis à disposition tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

★ Nous voudrons remercier en deuxième lieu les membres de
jury M .Maazouz Kada pour le grand honneur qu'il nous fait en président le
jury de notre soutenance, M. Ouardani Abdelrrahman pour l'honneur qu'il nous
fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

★ Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de Mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

★ Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

★ ★ ★

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à ieu de m'avoir donner le courage et la volonté afin de terminer mes études.

✓ A mes très chers parents qui m'ont soutenue dans la réussite de mes études.

✓ A tous mes amis sans exception et toute la promotion de Mathematiques

Mekhaldi Abdelhamid

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à dieu de m'avoir donner le courage et la volonté afin de terminer mes études.

✓ A mes très chers parents qui m'ont soutenue dans la réussite de mes études.

✓ A tous mes amis sans exception et toute la promotion de Mathematiques

Harhouze Hicham

Résumé

On s'intéresse à la théorie des semi-groupes et ses applications. Il s'agit de généraliser pour des opérateurs linéaires sur un espace de Banach la notion d'exponentielle, ceci en vue de disposer d'un outil théorique pour la résolution d'équations d'évolution linéaires.
Mots clés : semi-groupe , générateur infinitésimal, théorème de Hille-Yosida.

Abstract

In this work we are interested in the theory of semi-groups and its applications to abstract differential equations. It is a question of generalizing for linear operators on a Banach space the notion of exponential, in order to have a theoretical tools for the resolution of linear evolutions equations.

Key words : semigroupes, infinitesimal generator, Hille-Yosida theorem.

Table des matières

INTRODUCTION

Les semi-groupes jouest un rôle centrale dans l'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles dans un espace de Banach. Pour résoudre ce type d'équations , on utilise le théorème de Cauchy- lipschitz.

Le théorème de Cauchy-lipschitz résout les problèmes du type suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = x_0 \in X \end{cases}$$

tel que $u(t) = e^{tA}x_0$ est l'unique solution de ce problème avec $A \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ l'algèbre de Banach X et

$$\mathbb{R}^+ \ni t \longmapsto e^{tA} \in \mathcal{L}$$

$$e^{tA} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(tA)^K}{K!}.$$

Soit le problème non homogène suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ dans X. La solution de ce problème donnée par

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s$$

Comme le théorème de Cauchy-Lipschitz est inutitul pour résoudre des équations aux dérivées partielles donc il est naturel d'introduire un nouveau théorème qui appelée théorème de Hille-Yosida ,qui lui un outil plus puissant et fondamental reliant les propriétés de dissipation d'énergie d'un opérateur non borné à l'existence et l'unicité et la régularité des solutions d'une équation différentielle partielle. grâce au cette théorème on montre une fois encore que les deux équations des deux problèmes précédent admettons une solution unique et mieux.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Opérateurs Linéaires

1.1.1 Propriétés, définitions et exemples

Définition 1.1.
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. On dit que l'application ou l'opérateur $A : E \longrightarrow F$ est linéaire si, pour tout $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$A(x+y) = Ax + Ay,$$
$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et on a $A(0) = 0$.

- ⋆ *Si $E = F$, A est un endomorphisme de E.*
- ⋆ *Si A est un isomorphisme de E dans E, alors A est un homomorphisme*
- ⋆ *Si $F = \mathbb{K}$ alors A est dite forme linéaire sur E. Quand E est un ensemble de fonctions, A est souvent appelé une fonctionnelle linéaire.*

Définition 1.2.
Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de l'opérateur A par

$$\mathcal{I}mA = \{Ax, \; x \in E\},$$

et le noyau de l'opérateur A par

$$Ker(A) = \{x \in E, \; Ax = 0\}.$$

1.2 Opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire, le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.1.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) *A est continui.*

(ii) *A est continui en 0.*

(iii) *Il existe $c > 0$, telle que $\|Ax\| \leq c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

preuve

- $i) \Rightarrow ii)$ est évidente.
- Supposons que A est continue en 0, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x\| < \alpha \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon.$$

Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, $\;x \neq 0$. On pose

$$x' = \frac{\alpha}{2\,\|x\|},$$

alors

$$\|x'\| = \frac{\alpha}{2} < \alpha,$$

par conséquent

$$\|Ax'\| \leq \varepsilon,$$

ainsi

$$\|Ax'\| = \left\| A\left(\frac{\alpha}{2\,\|x\|}x\right)\right\| = \frac{\alpha}{2\,\|x\|}\,\|Ax\| < \varepsilon.$$

Il résulte

$$\|A(x)\| < \frac{2\varepsilon}{\alpha}\,\|x\|\,.$$

Alors $ii) \Rightarrow iii)$.

- Pour l'implication $iii) \Rightarrow i)$. On suppose que iii) est vérifiée, alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|A(x-y)\| \leq C\,\|x-y\|\,,$$

ainsi

$$\|Ax - Ay\| \leq C \|x - y\|.$$

A est Lipschitzienne, donc continue.

Définition 1.3.
Une application linéaire continue $A : E \to F$ est dite bornée.

Preuve

(1) *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectorielle des applications linéaires continues de E dans F.*

(2) *Si $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Remarque 1.1.
Si E est de dimension finie , alors tout application linéaire de E dans F est continue.

Définition 1.4. ***(Norme d'un opérateur Linéaire Continue)***
Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire continu. Le nombre $\sup\limits_{\substack{x \in E \\ X \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est appelé la norme de A et noté $\|A\|$.

Remarque 1.2.

1) *D'après le Théorème 1.1 $\sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est finie.*

2) *S'il existe $C > 0$ telle que $\|Ax\| \leq C \|x\|$ pour tout $x \in E$, alors A est bornée et $\|A\| \leq C$. De plus, on a $\|Ax\| < \|A\| \|x\|$, pour tout $x \in E$.*

3) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ *ainsi*

$$\|A\| = inf\{C;\ \|Ax\| \leq C\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Proposition 1.2.
Soient E, F, G des espaces vectoriels normés.

(1) *Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*

(2) *Si $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.*

(3) *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\alpha A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.*

(4) *Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|B \circ A\| \leq \|B\| \|A\|$.*

Notation. On note $A \circ B$ la composition des opérateurs A et B par AB.

Théorème 1.2.
Soient E un espace vectoriel normée et F un espace de Banach. Alors l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ est de Banach.

Définition 1.5.
Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $AB = Id_F$ et $BA = Id_E$. Un tel opérateur est unique (lorsque il existe). On l'appelle opérateur inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Théorème 1.3. *(d'inversion de Banach)*
Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, si A est bijectif alors son inverse A^{-1} est continu.

1.3 Domaine, graphe et fermeture

Soit E un espace de Banach

Définition 1.6.
Soit A un opérateur linéaire sur un sous espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ á valeurs dans E. $\mathcal{D}(A)$ est appelé domaine de l'opérateur A.

Définition 1.7.

1. *Le graphe de l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$ est un sous espace de $E \times F$ donnée par*
$$G(A) = \{(x, Ax),\ x \in \mathcal{D}(A)\}.$$
2. *On dit que A est fermé si son graphe $G(A)$ est un fermé de $E \times F$.*
3. *On dit que $B : \mathcal{D}(B) \longrightarrow E$ est une extension de $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$, si $G(A) \subset G(B)$, c'est-à-dire $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Proposition 1.3.
$A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$ est fermé si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ tel que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in E$ et $Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in E$, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.4.
Soit $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *A est fermé.*

(2) $\mathcal{D}(A)$ *muni de la norme du graphe notée* $\|\cdot\|_G$ *et définie par*

$$\|x\|_G = \|(x, Ax)\|_G = \|x\| + \|Ax\|\,,$$

est un espace de Banach.

Propriétés 1.1.
Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ *un opérateur linéaire fermé et* B *un opérateur linéaire borné sur* E*, alors*

1) $AB : \mathcal{D}(AB) \subset E \longrightarrow E$ *est un opérateur linéaire fermé.*
2) A *est borné si et seulement si* $\mathcal{D}(A) = E$.
3) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   i) A *est continue.*
   ii) $\mathcal{D}(A)$ *est fermé dans* E.

1.4 Ensemble résolvant et spectre résolvant

Définition 1.8.
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ *un opérateur linéaire.*

1. *On appelle ensemble résolvant de* A *qu'on note* $\rho(A)$ *l'ensemble*

   $$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} : E \longrightarrow \mathcal{D}(A) \text{ est borné } \}.$$

   Si A *est fermé d'après le théorème du graphe fermé on a*

   $$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - A, \mathcal{D}(A) \longrightarrow E \text{ est bijectif}\}\,.$$

2. *On appelle spectre de* A*, l'ensemble* $\sigma(A) = \mathbb{K}\backslash\rho(A)$.
3. *Pour* $\lambda \in \rho(A)$*, l'opérateur linéaire borné* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est appelé la résolvante de* A *au point* λ.
4. *On appelle rayon spectral de* A*, noté* $r(A)$ *l'ensemble définie par*

   $$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} (\lambda).$$

Proposition 1.5.
Si $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ est un opérateur linéaire, alors pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Preuve
On a

$$\left[\lambda R(\lambda, A) - \lambda R(\lambda, A)\right] R(\mu, A) = R(\mu, A),$$

et

$$\left[\mu R(\mu, A) - \lambda R(\mu, A)\right] R(\lambda, A) = R(\lambda, A).$$

La différence des deux égalités précédentes et compte tenu du fait que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent, on trouve

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Théorème 1.4.
Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.

(1) *Si $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et $\sigma(A) \subset \bar{B}(0, \|A\|)$.*

(2) *$\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.*

(3) *$\sigma(A)$ est un compact non vide de $\mathbb{K}$.*

(4) *Si A est mesurable alors $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}$.*

(5) *On a $\sigma(A) \subset \bar{B}(0, (A))$. De plus $\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Preuve

(1)

$$\begin{aligned} |\lambda| > \|A\| &\Rightarrow |\lambda|^{-1} \|A\| < 1 \\ &\Rightarrow (I - \lambda^{-1}A) \quad \text{est inversible} \quad \left(\left\|\lambda^{-1}A\right\| \leq \left|\lambda^{-1}\right| \|A\|\right) \\ &\Rightarrow (\lambda I - A) \quad \text{est inversible} \\ &\Rightarrow \lambda \in \rho(A). \end{aligned}$$

(2) On a $\rho(A) \neq 0$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \lambda &\longmapsto f(\lambda) = \lambda I - A. \end{aligned}$$

Ainsi $\rho(A) = f^{-1}(I\mathcal{L}(E))$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| \leq |\lambda - \mu|\,,$$

donc f est 1-Lipschitzienne , alors continue.

(3) On a

$$\sigma(A) = \mathbb{K}\backslash\rho(A) = \mathbb{K} \cap C_{\mathbb{K}}\mathcal{L}(A),$$

d'après 1) et 2), $\sigma(A)$ est fermé et borné donc compact.

Remarque 1.3.

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires inversibles.

Chapitre 2

Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Soit E un espace de Banach et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans lui même.

Définition 2.1.
Une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ est appelée semi-groupe si elle vérifie les deux assertions suivantes :

1. $T(0) = I$.
2. $T(t+s) = T(t).T(s) \quad , \ \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 2.1.1.

1. *Soient $k \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{C}$, on considère l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) + ky(t) = 0 & , t > 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

dont la solution est $y(t) = e^{-kt}x_0$
Soient $X = \mathbb{C}$, $T(t) : x_0 \longrightarrow (e^{-kt})x_0$. $T(t)$ est la multiplication par e^{-kt}. $T(t)$ est un semi-groupe, car
- $T(0) = e^{-k \cdot 0} = 1$.
- $T(t+s) = e^{-k(t+s)} = e^{-kt} \cdot e^{-ks} = T(t) \cdot T(s)$.

2. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $x_0 \in \mathbb{C}^n$ *, on considère*

$$\begin{cases} y'(t) + Ay(t) = 0 \qquad , t > 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

Posons

$$T(t) = e^{-tA},$$

où $\left(e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tk)^k}{k!}\right)$.

Alors

$$y(t) = e^{-tA}x_0.$$

3. *Soit* E *un espace de Banach et* $A \in \mathcal{L}(E)$ *et* $x_0 \in E$*. l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) + Ax(t) = 0, \qquad t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a l'unique solution

$$x(t) = e^{-tA}x_0,$$

où $e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!}$.

Remarques 2.1.

Dans les deux exemples l'application $T(t)$ *est bien définie au sens des séries normalement convergentes.*

Définition 2.2.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe définie sur un espace de Banach* E*.*

Posons

$$D(A) = \left\{ x \in E,\ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe dans } E \right\}.$$

L'opérateur A *de* $D(A)$ *dans* E *défini par*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

est appelé générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$*.*

2.2 Semi-groupe uniformément continu

Définition 2.3.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe définie sur un espace de Banach E.

- *On dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

- *On dit a qu'il est fortement continu si pour tout $x \in E$*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)-I\|_{E} = 0.$$

- *On dit a a qu'il est faiblement continu si pour tout $x \in E$ et $y \in E$*

$$\lim_{t\to 0^+} |< T(t)x - x, y >| = 0.$$

Proposition 2.1.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateur linéaires, alors Pour tout $t \geq 0$, $T(t)$ est inversible.

Preuve

Comme $T(t)$ est uniformément continu , on a donc

$$\lim_{t\to 0} T(t) - I = 0,$$

alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)} < 1, \quad \forall t \in]0,\delta],$$

ainsi on distingue deux cas :

1) Si $t \in]0,\delta]$, on a

$$\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$$

donc $T(t)$ est inversible.

2) Soit $t > \delta$, il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in [0,\delta[$ tels que $t = n\delta + h$. Par conséquent

$$T(t) = T(n\delta + h) = T(\delta)^n T(h),$$

comme $h \geq 0$ et $\delta > 0$, on déduit que $T(t)$ est inversible pour tout $t > \delta$.

Théorème 2.1.

Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \longrightarrow E$ est le générateur d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $\mathcal{D}(A) = E$ et $A \in \mathcal{L}(E)$.

Preuve

1) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu donc

$$\lim_{t\longrightarrow 0} T(t) = I,$$

il existe $\rho > 0$, assez petit tel que

$$\left\| \frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(t)\mathrm{d}t - I \right\|_{\mathcal{L}(E)} < 1. \tag{2.1}$$

$T : [0,\rho] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ est une fonction continue, alors $\int_0^\rho T(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann et par conséquent, 'après la Proposition 2.1 , l'opérateur $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(t)\,\mathrm{d}t$ est inversible et en conséquence $\int_0^\rho T(t)$ est inversible,

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^\rho T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_0^\rho T(t+h)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\rho T(t)\,\mathrm{d}t,$$

par le changement de variable $t + h = s$ dans la première intégrale du coté droit, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^\rho T(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{h}\int_h^{\rho+h} T(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\rho T(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_h^0 T(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_0^{\rho+h} T(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\rho T(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_h^0 T(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_0^{\rho+h} T(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_\rho^0 T(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)=\left(\frac{1}{h}\int_{\rho}^{\rho+h}T(s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_{0}^{h}T(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_{0}^{\rho}T(t)\right)^{-1},$$

lorsque $h\longrightarrow 0^+$, le coté gauche donc converge en norme, tel que

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}(T(h)-I)=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_{\rho}^{\rho+h}T(s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_{0}^{h}T(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_{0}^{\rho}T(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1},$$

alors

$$A=\left(\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\int_{\rho}^{\rho+h}T(s)\,\mathrm{d}s-\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}T(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_{0}^{\rho}T(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

On déduit que le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ est $A\in\mathcal{L}(E)$ définit par

$$A=(T(\rho)-I)\left(\int_{0}^{\rho}T(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}$$

2) Pour l'implication inverse. Soient $A\in\mathcal{L}(E)$, $t\geq 0$

$$T(t)=e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n\,!}A^n,$$

où $A^n=A.A.A\dots A$, n fois, $A^0=I$ et $\|A^n\|\leq\|A\|^n$.

Il est claire que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires, car

- $T(0)=I$,
- $T(t+s)=e^{(t+s)A}=e^{tA}.e^{sA}=T(t)T(s)$.

Afin de prouver que ce semi-groupe est uniformément continu, notons que

$$\begin{aligned}\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)}&=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n\,!}A^n-I\right\|_{\mathcal{L}(E)}\\&=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\,!}A^n\right\|\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}t^n\frac{\|A\|^n}{n\,!}\\&\leq e^{t\|A\|}-1\longrightarrow 0 \text{ lorsque t}\longrightarrow 0^+,\end{aligned}$$

on déduit que $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} T(t) = I$ et donc $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continue.

Maintenant, nous devons montrer que A est le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.

À cet effet, il suffit de vérifier que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{t}(T(t) - I) - A \right\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t}(T(t) - I) - A \right\|_{\mathcal{L}(E)} &= \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} A^n - I \right) - A \right\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} A^n - tA \right\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} A^n \right\| \\
&= t^2 \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{n\,!} A^n \right\| \\
&\leq t^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{n\,!} \|A\|^n \\
&\leq t^2 \|A\|^2 e^{t\|A\|}.
\end{aligned}$$

Comme $A \in \mathcal{L}(E)$, lorsque $t \longrightarrow 0$, le coté gauche converge en norme, alors A est un générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Théorème 2.2.

Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus des opérateurs linéaires bornés, si

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \to 0} \frac{S(t) - I}{t} \tag{2.2}$$

alors $T(t) = S(t)$, pour tout $t \geq 0$

Preuve

Soit $a > 0$. Montrons que $S(t) = T(t)$, pour $0 \leq t \leq a$, comme $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$

sont des semi-groupes uniformément continus , nous voyons que les applications

$$t \longmapsto \|T(t)\|$$

et

$$t \longmapsto \|S(t)\|$$

sont continues, il existe un constante $c > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[0,a[} \{\|T(t)\|, \|S(t)\|\} \leq c.$$

soit $\varepsilon \geq 0$, d'après (2.2) il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{1}{t}\|T(t) - S(t)\| < \frac{\epsilon}{ac^2}, \text{ pour } 0 \leq t \leq \delta$$

ainsi

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} - \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t} = 0.$$

ce qui implique

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I - S(t) + I) = 0,$$

alors

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - S(t)) = 0,$$

$$\left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| < \frac{\epsilon}{ac^2}, pour \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Soit $0 \leq t \leq a$, on choisi $n \geq 1$ tel que $\dfrac{t}{n} \in]0, \delta[$, d'après les propriétés des semi-groupes , il s'ensuit que

$$\begin{aligned}T(t)-S(t)=&\left[T\left(n\frac{t}{n}\right)\right]-\left[S\left(n\frac{t}{n}\right)\right]\\
=&T\left(n\frac{t}{n}\right)S\left(0\frac{t}{n}\right)-T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right)\\
+&T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right)-T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right)\\
+&T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right)-\ldots-T\left(0\frac{t}{n}\right)S\left(n\frac{t}{n}\right)\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right)-T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right]\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left(T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right)\left[T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right]S\left(\frac{kt}{n}\right)\end{aligned}$$

De l'inégalité

$$\left\|\frac{T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}\right\|\leq\frac{\epsilon}{ac^2},$$

nous obtenons

$$\left\|T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|\leq\frac{\epsilon}{ac^2}\frac{t}{n}$$

et par suite

$$\|T(t)-S(t)\|\leq\sum_{k=0}^{n-1}c\frac{\epsilon}{ac^2}\frac{t}{n}c<\epsilon,\forall t\in[0,a[.$$

Puisque $\epsilon>0$ est arbitraire , il en résulte que $T(t)=S(t)$, pour tout $t\in[0,a[$. Comme $a>0$ est aussi arbitraire , il s'ensuit que $T(t)=S(t),\forall t\in[0,\infty)$.

Corollaire 2.1.

Soit $(T(t))_{t\geq0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires borné, alors

a) Il existe un unique opérateur linéaire borné A tel que $T(t)=e^{tA},\forall t\geq0$.

b) L'opérateur A de a) est un générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq0}$.

c) Il existe $w\geq0$ tel que $\|T(t)\|\leq e^{wt},\forall t\geq0$;

d) L'application $[0,\infty[\ni t\longmapsto T(t)\in\mathcal{L}(E)$ *est différentiable et*

$$\frac{dT(t)}{\mathrm{d}t}=AT(t)=T(t)A,\forall t\geq 0.$$

Preuve

Commonçant d'abord par montrer $b)$ qui découle de $a)$

$b)$ D'après a), on a $T(t)=e^{tA}$, et d'après le Théorème 2.1 on déduit que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.

$a)$ On note A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t\geq 0}$, A est le générateur infinitésimal d'un e^{tA} (d'après le Théorème 2.1), et donc d'après le Théorème 2.2 on déduit que $T(t)=e^{tA}$.

$c)$ Nous avons

$$\|T(t)\|=\|e^{tA}\|\leq e^{t\|A\|},\forall t\geq 0.$$

Pour $w=\|A\|$, nous obtenons l'inégalité

$$\|T(t)\|\leq e^{wt},\forall t\geq 0.$$

$d)$ l'assertion d) provient des égalités suivantes

$$A=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{T(t)-I}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{T(t)-T(0)}{t-0},$$

nous en déduisons que l'application considérée est dérivable au point $t=0$. Soient t $>$ 0 et h $>$ 0 . Alors

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h}-AT(t)\right\| &\leq \left\|\frac{T(h)-I}{h}-A\right\|\|T(t)\|\\ &\leq \left\|\frac{T(h)-I}{h}-A\right\|e^{t\|A\|},\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h}-AT(t)\right\|=0.$$

Par conséquent , l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à droite et on a

$$\frac{d^+T(t)}{\mathrm{d}t}=AT(t),\forall t>0.$$

Soient t $>$ 0 et h $<$ 0 tel que t+h $>$ 0, Alors

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h}-AT(t)\right\| &\leq \left\|\frac{I-T(-h)}{h}-AT(-h)\right\| \|T(t+h)\| \\ &\leq \left\|\frac{T(-h)-I}{-h}-AT(-h)\right\| e^{(t+h)\|A\|},\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}=AT(t).$$

Par conséquent l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à gauche et nous avons

$$\frac{d^{-}T(t)}{\mathrm{d}t}=AT(t), \forall t>0.$$

Finalement on voit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0,\infty)$ et nous avons

$$\frac{dT(t)}{\mathrm{d}t}=AT(t), \forall t\geq 0.$$

On vérifie que $AT(t)=T(t)A, \forall t\geq 0$.

Définition 2.4.

Une famille d'opérateurs $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{L}(E)$ est appelé un groupe d'opérateurs linéaires sur E si

(i) $G(0)=I$

(ii) $G(t+s)=G(t)G(t)$, *Pour tout* $t,s\in\mathbb{R}$

Si, de plus

$$\lim_{t\longrightarrow 0}G(t)=I,$$

le groupe est appelé uniformément continu.

Remarques 2.2.

Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés, il peut être étendu à un groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires.
Plus précisément, il existe un groupe linéaires $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ tels que $G(t)=T(t)$ pour tout $t\geq 0$.
En effet, en vertu de Proposition 2.1, on peut définir $G(t)$ par

$$G(t)\begin{cases}[T(-t)]^{-1} & si \quad t<0\\ T(t) & si \quad t\geq 0\end{cases}$$

On peut facilement voir que $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe uniformément continu d'opéra-

teurs linéaires qui étendu $(T(t))_{t\geq 0}$.

Corollaire 2.2.
Si $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires alors l'application* $t \longmapsto T(t)$ *est continue de* $[0, +\infty[$ *dans* $\mathcal{L}(E)$.

Preuve
Soit $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires qui étend $(T(t))_{t\geq 0}$ et soient $t > 0, h \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq \|T(t)\|\|G(h)x - x\|.\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\|G(h)x - x\| = 0,$$

alors

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \lim_{h\longrightarrow 0}\|T(t)\|\|G(h)x - x\| = 0.$$

Si $t = 0$, la continuité découle de la définition 2.4

2.3 C_0-Semi-groupes

Définition 2.5.
On appelle C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* E*, une famille* $(T(t))_{t\geq 0}$ *de* $\mathcal{L}(E)$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1- $T(0) = I$.

2- $T(t+s) = T(t).T(s), \quad \forall t, s \geq 0$.

3- $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in E$.

Un $\mathcal{C}_0$*-semi-groupes est aussi appelé semi groupes fortement continu sur* E.

Exemple 2.3.1.
Soit

$$\mathcal{C} = \{f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est uniformément continue et bornée}\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{s\in[0,+\infty[} |f(s)|.$$

l'espace $\mathcal{C}$ est un espace de Banach.
Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs définis sur $\mathcal{C}$ par

$$(T(t)f)s = f(t+s), \forall t \geq 0 \text{ et } s \in [0, +\infty[.$$

$(T(t))_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur $\mathcal{C}$ appelé $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de translation à droite.
Le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ est donné par

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C}, f' \text{ existe et } f' \in \mathcal{C}\},$$

et

$$Af = f', \ \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

$(T(t))_{t\geq 0}$ n'est pas uniformément continu sur $\mathcal{C}$ car A n'est pas borné.

Théorème 2.3.
Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, alors il existe $M \geq 1$ et $w \in \mathbb{R}$, tel que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{tw}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve
Tout d'abord, on montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|T(t)\|$ est borné pour $0 \leq t \leq \delta$, c'est-à-dire

$$\exists M > 0, \|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \delta].$$

Supposons qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $t_k \geq 0$ et $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} t_k = 0$, telle que

$$\|T(t_k)\| \longrightarrow \infty \quad (\|T(t_k)\| \geq k).$$

Du Théorème de Banach-Steinhaus on déduit qu'il existe $x \in E$ tel que $\|T(t_k)x\|$ est non borné. Ce qui contredis la condition le fait que

$$\lim_{t\longrightarrow 0} T(t)x = x, \forall x \in E.$$

Nous avons $\|T(0)\| = \|I\| = 1$, ce qui signifie que $M \geq 1$ pour tout $t \geq 0$, on pose $t = n\delta + r$, $t \geq 0$, $0 \leq r < \delta, n \in \mathbb{N}$.

En utilisant la propriété $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(n\delta + r)\| \\ &= \|T(\delta)^n T(r)\| \\ &\leq M^n \cdot M \\ &\leq M^{\frac{t}{\delta} - \frac{r}{\delta}} \cdot M \\ &\leq M^{\frac{t}{\delta}} \cdot M \\ &= Me^{wt},\end{aligned}$$

où $w = \frac{\ln M}{\delta}$.

Proposition 2.2.
Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, alors pour tout $x \in E$, $t \longmapsto T(t)x$ est une fonction continue de $[0, \infty[$ dans E.

Preuve
Montrons que $t \longmapsto T(t)x$ est continu à droite et à gauche.
On utilise les propriétés des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes et le théorème précédent, soient $x \in E$ et $t, h \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)[T(h)x - x]\| \\ &\leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt}\|T(h)x - x\|\end{aligned}$$

tel que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} T(t+h)x = T(t)x, \tag{2.3}$$

pour $0 \leq h \leq t$, on a

$$\begin{aligned}\|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\ &= \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{w(t-h)}\|x - T(h)x\|,\end{aligned}$$

tel que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} T(t-h)x = T(t)x. \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4), on déduit que $t \longmapsto T(t)$ est continue.

Théorème 2.4.
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, alors

(i) *Pour tout $x \in E$ et $t > 0$, on a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

(ii) *Pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, on a $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et on a l'égalité*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x$$

(iii) *Pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, on a $T(t)x \in D(A)$, de plus l'application $[0,\infty[\ni t \longmapsto T(t)x$ est dérivable sur $[0,\infty[$ (de classe C^1 on $[0,\infty[$) et satisfait*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x. \tag{2.5}$$

(iv) *Pour tout $x \in D(A)$ et $0 \leq s \leq t \leq +\infty$, on a*

$$\int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = T(t)x - T(s)x.$$

Preuve

(i) *L'égalité résulte de ce qui suit*

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(s) - T(t))x\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|(T(s) - T(t))x\,\mathrm{d}s\| \\ &\leq \sup_{x\in[t,t+h]} \|T(s)x - T(t)x\|,\end{aligned}$$

et de la continuité de l'application $[0,\infty[\ni t \longmapsto T(t)x$ on déduit l'égalité.

(ii) *Soient $x \in E$ et $h > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\,\mathrm{d}u - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)x\,\mathrm{d}u - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,\mathrm{d}u - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\,\mathrm{d}u - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

par passage à limite lorsque $h \longrightarrow 0$ et compte tenue de 1. on obtient

$$A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = T(t)x - x, \forall t \geq 0,$$

et

$$\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A).$$

(iii) *Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
&\leq Me^{wt} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où

$$\frac{d^+}{\mathrm{d}t} T(t)x = T(t)Ax, \forall t \geq 0.$$

Si $t-h>0$, alors

$$\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}-T(t)Ax\right\| \leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax+Ax-T(h)Ax\right\|$$
$$\leq Me^{(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|+\|T(h)Ax-Ax\|\right),$$

par suite

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax.$$

et

$$\frac{d^-}{\mathrm{d}t}T(t)x=T(t)Ax, \forall t\geq 0.$$

L'application $t\longmapsto T(t)x$ est dérivable sur $[0,\infty[$ pour tout $x\in\mathcal{D}(A)$, de plus on a l'égalité

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x, \quad \forall t\geq 0.$$

(iv) *On intègre* (2.5) *de s à t, d'après* 3. *on obtient*

$$\int_s^t \frac{d}{\mathrm{d}\tau}T(\tau)x\mathrm{d}\tau=\int_s^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau=\int_s^t AT(\tau)x\mathrm{d}\tau,$$

ainsi

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau=\int_s^t AT(\tau)x\mathrm{d}\tau.$$

Théorème 2.5.

Soient $(T(t))_{t\geq 0}\in SG(M,w)$ et A son générateur infinitésimal, alors

(i) *$x\in D(A)$ et $Ax=y$ si et seulement si*

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)yds, \quad \forall t\geq 0.$$

(ii) *Si $x\in D(A)$ alors $T(t)x\in D(A)$ et on a l'égalité*

$$T(t)Ax=AT(t)x, \quad \forall t\geq 0.$$

Preuve ***(i)*** *Soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, alors*

$$\frac{d}{\mathrm{d}s}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y, \quad \forall s \in [0,t], t \geq 0,$$

d'où

$$\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{d}{\mathrm{d}s}T(s)x\,\mathrm{d}s = T(t)x - x, \forall t \geq 0.$$

Pour l'implication inverse. Supposons que pour tout $x, y \in E$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \geq 0.$$

d'où

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s = T(0)y = y, \quad \forall t \geq 0$$

compte tenu du Théorème 2.4. Finalement, on remarque que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

(ii) *Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}. \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$ pour tout $t \geq 0$.

Remarques 2.3. *on voit que*

$$T(t)D(A) \subseteq D(A), \quad \forall t \geq 0$$

Théorème 2.6.

Soient $(T(t))_{t \geq 0} \in SG(M, w)$ et A son générateur infinitésimal, alors

1. $\overline{D(A)} = E$.
2. *A est un opérateur fermé.*

Preuve

1. Soit $x \in E$, Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,\mathrm{d}s, \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} t_n = 0$.
On a $x_n \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,\mathrm{d}s = T(0)x = x$$

par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} Ax_n = y$,
pour tout $s \in [0, t]$

$$\begin{aligned}\|T(s)Ax_n - T(s)y\| &\leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\|\\ &\leq Me^{wt}\|Ax_n - y\|\end{aligned}$$

ainsi $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$.
D'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s,$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}[T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s,$$

où bien

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s.$$

Finalement,

$$\lim_{t\longrightarrow0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\longrightarrow0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s = y,$$

par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, il résulte que A est un opérateur fermé.

Théorème 2.7.
Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux $\mathcal{C}_0$-semi-groupes sur E, de générateurs infinitésimaux, respectivement A et B. Si $A = B$ alors

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve
Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$, on définit l'application

$$[0, t] \ni s \longmapsto h(s)x = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A),$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{\mathrm{d}s}h(s)dx &= \frac{d}{\mathrm{d}s}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{\mathrm{d}s}S(s)x \\
&= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\
&= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par suite $h(0)x = h(t)x$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$. (car h est constante)
Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $t \geq 0$, il résulte que

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } x \in E,$$

où bien

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.6.
Un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelé $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contractions, or d'opérateurs non extensifs, s'il est de type $(1, 0)$, c'est-à-dire si pour tout $t \geq 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1.$$

Théorème 2.8.
Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur E satisfaisant $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{wt}$, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $(A - cI, \mathcal{D}(A))$ est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $S(t) = (e^{-ct}T(t))_{t\geq 0}$ sur X.

Preuve

1. Vérifions que $(e^{-ct}T(t))_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. Pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$, on a
   (i) $S(0) = e^{-c0}T(0) = I$,
   (ii)
$$\begin{aligned} S(t+s) &= e^{-c(t+s)}T(t+s) \\ &= e^{-c(t+s)}T(t) \cdot T(s) \\ &= e^{-ct} \cdot e^{-cs}T(t)T(s) \\ &= e^{-ct}T(t)e^{-cs}T(s) \\ &= S(t)S(s). \end{aligned}$$
   (iii) $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t)x = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} e^{-ct}T(t)x = x$ donc $S(t) = (e^{-ct}T(t))_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.

2. Montrons que $(A - cI, \mathcal{D}(A))$ est son générateur infinitésimal. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.4.
   Soit $x \in \mathcal{D}(A)$
$$\begin{aligned} \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(e^{-ct}T(t)\right)x &= \frac{d}{\mathrm{d}t}e^{-ct}T(t)x + e^{-ct}\frac{d}{\mathrm{d}t}T(t)x \\ &= -ce^{-ct}T(t)x + e^{-ct}AT(t)x \\ &= -ce^{-ct}T(t)x + e^{-ct}T(t)Ax \\ &= e^{-ct}T(t)(-cI + A)x, \end{aligned}$$
   alors $(A - cI)$ est le générateur infinitésimal de $(e^{-ct}T(t))_{t\geq 0}$.
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{-ct}T(t)\right)x &= \frac{d}{dt}e^{-ct}T(t)x + e^{-ct}\frac{d}{dt}T(t)x \\ &= -ce^{-ct}T(t)x + e^{-ct}AT(t)x \\ &= -ce^{-ct}T(t)x + e^{-ct}T(t)xT(t)Ax \\ &= e^{-ct}T(t) \quad (-cI + A) \end{aligned}$$
   Alors $(A - CI)$ le générateur infinitésimal de $(e^{-ct}T(t))_{t\geq 0}$

2.4 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 2.9. *(Hille-Yosida)*
Soit A un opérateur linéaire, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi -groupe de contraction si et seulement si

1- A est fermé et $\overline{D(A)} = E$

2- L'ensemble résolvant de A, $\rho(A)$ contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\|\frac{1}{\lambda}.$$

Preuve

Commençant tout d'abord par montrer la condition nécessaire du théorème.
Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, d'après le Théorème 2.9 , A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$, donc 1. est prouvé.
Pour 2., on considère la formule

$$\frac{1}{a-\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{at}\,\mathrm{d}t,$$

vérifiée pour tout $a, \lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(a) \leq 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, on définit donc par analogie l'opérateur

$$R(\lambda)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale est bien définie puisque $\|T(t)\| \leq 1$, de plus

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)\| &= \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t} T(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t}\| \|T(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{s \longrightarrow \infty} \int_0^s e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{s \longrightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right|_0^s \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

alors $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, d'où $R(\lambda) \in \mathcal{L}(E)$.
Maintenant, on montre que $R(\lambda)(\lambda I - A) = Id_{\mathcal{D}(A)}$ et $(\lambda I - A)R(\lambda) = Id_X$.
Soit $x \in E$ et $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t+h)x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ainsi $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$.
Soit le changement de variable, $t+h=u$ alors $t=u-h$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, donc

$$\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(u-h)}T(u)x\,\mathrm{d}u = \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)}T(t)x\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t+h)x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)}T(t)x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}\int_h^{0} e^{-\lambda(t-h)}T(t)x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)}T(t)x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} (e^{-\lambda t}e^{\lambda h}T(t) - e^{-\lambda t}T(t))x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t}e^{\lambda h}T(t)x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

comme $h \longrightarrow 0^+$, on a

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x = AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$$

et

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x,$$

alors

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I_X \tag{2.6}$$

$\star$ Soit $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t)x \, \mathrm{d}t \\
&= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, \mathrm{d}t \\
&= AR(\lambda)x.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x &\Longrightarrow \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = x \\
&\Longrightarrow R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \\
&\Longrightarrow R(\lambda)(\lambda I - A) = Id_{\mathcal{D}(A)} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Alors de (2.6) et (2.7)

$$R(\lambda) = R(\lambda; A)$$

En conclusion, on a

$$R(\lambda) = R(\lambda; A) \text{ et } \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Pour prouver que les conditions (1) et (2) du théorème 2.9 sont suffisantes, nous aurons besoin des lemmes suivants.

Définition 2.7.

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire satisfait les conditions (1) et (2) du théorème 2.9, et soit $\lambda > 0$. L'opérateur $A_\lambda : E \longrightarrow E$, défini par

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A),$$

est appelé l'approximation de Yosida de A.

Lemme 2.1.

Soit $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire qui satisfait les condition (1) et (2) du Théorème 2.9
alors

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$, *pour tout* $x \in E$

(ii) $A_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda, A)x = \lambda x$, *pour tout* $x \in E$

(iii) $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$, *pour tout* $x \in D(A)$

Preuve

(i) *On suppose que* $x \in \mathcal{D}(A)$, *donc*

$$R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x,$$

ainsi

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = R(\lambda; A)Ax,$$

et comme $R(\lambda) = R(\lambda; A)$

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|R(\lambda; A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(A)$ *dense dans* E *et* $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq 1$, *on déduit que*

$$\lambda R(\lambda; A)x \longrightarrow x \text{ quand } \lambda \longrightarrow +\infty \text{ pour tout } x \in E.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I &= \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda(\lambda I - A)R(\lambda; A) \\ &= \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda^2 R(\lambda; A) + \lambda A R(\lambda; A) \\ &= \lambda A R(\lambda; A) \\ &= A_\lambda, \end{aligned}$$

alors, pour tout $x \in E$

$$\lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda x = A_\lambda x.$$

(iii) *D'après* 1. *et puisque la résolvante et l'opérateur commutent, pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \lambda A R(\lambda; A)x = \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} \lambda R(\lambda; A)Ax = Ax.$$

Lemme 2.2.

On suppose que A *satisfait aux conditions (1) et (2) du théorème 2.8.*

Si A_λ *est l'approximation de Yosida de* A, *alors* A_λ *est le générateur infinitésimal* *d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contraction $e^{tA\lambda}$. De plus pour tout $x \in E$ et $\lambda, \mu > 0$*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \forall t \geq 0. \tag{2.8}$$

Preuve

*D'après **(ii)**, $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$, et donc le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe e^{tA_λ} appartient aussi à $\mathcal{L}(E)$*

on affirme que $\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$, car

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}\right\| &= \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)-t\lambda I}\right\| \\
&\leq \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\right\| \left\|e^{-t\lambda I}\right\| \\
&\leq e^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|}e^{-t\lambda} \\
&\leq e^{t\lambda}e^{-t\lambda} = 1
\end{aligned}$$

il est claire que $e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}, A_\lambda$ et A_μ commutent entre aux on appliquent le Théorème de accroissements finis, on voir que

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right) ds\right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\|tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t\left\|(A_\lambda x - A_\mu x)\, e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t\left\|(A_\lambda x - A_\mu x)\right\| ds \\
&\leq t\left\|(A_\lambda x - A_\mu x)\right\|
\end{aligned}$$

Preuve

- *Soit $x \in D(A)$*

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &\leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \\
&\leq t\left\|(A_\lambda x - Ax)\right\| + t\left\|Ax - A_\mu x\right\|
\end{aligned} \tag{2.9}$$

  *et Pour tout $t \geq 0$, D'après le Lemme 2.1 **(iii)** et d'après (2.8) il existe un opérateur linéaire $T(t)D(A)X \longrightarrow X$, tel que Pour tout $x \in D(A)$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x \tag{2.10}$$

tel que $T(t)D(A) \subseteq X \longrightarrow X$.

En effet, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, *d'après 2.9 et le Lemme 2.1 (iii)* $(e^{tA_\lambda})_{\lambda>0}$ *est une suite de Cauchy.*

Soit $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

et comme $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* X, *on peut écrire :*

Soit $x \in E$, *et* $\epsilon > 0$, *il existe* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *tel que*

$$\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall \lambda, \mu > \delta.$$

Soient $\lambda, \mu > 0$ *et* $x \in E$, *soit* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \epsilon, \quad t \in [0, \alpha], \forall \alpha > 0, \forall \lambda, \mu > \delta$$

$(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ *converge uniformément dans* $[0, \alpha]$ *pour tout* $\alpha > 0$, *par le critère de Cauchy uniforme.*

- *On va vérifier que la limite* $T(t)$ *est un* C_0 *semi-groupe de contraction.*
  1. $T(0)x \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^0 x = x$. *qui implique* $t(0) = I$ *et puisque* $\|T(x)x\| \leq \|T(x)\|\|x\|$ *alors* $\|T(t)\| \leq 1$
  2. $T(t+s)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda} = T(t) \cdot T(s)$
  3. $t \longmapsto T(t)x$ *est continue pour* $t \geq 0$ *comme une limite uniforme des fonctions continues* $t \longmapsto e^{tA_\lambda}x$.

     Alors $T(t)$ *est* C_0 *semi-groupe de contraction.*
- *Montrons maintenant que* A *est un générateur infinitésimal de* $T(t)$

  D'après le Théorème 2.4 (iv), on a

$$\begin{aligned} T(x)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} \left(e^{tA_\lambda}x - x\right) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &\le \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_0\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_0 - e^{tA_\mu}x_0\right\| + \left\|e^{tA_\mu}x_0 - e^{tA_\mu}x\right\| \\ &\le \left\|e^{tAx}\right\| \|x - x_0\| + \frac{\varepsilon}{3} + \left\|e^{tA_\mu}\right\| \|x - x_0\| \\ &\le \|x - x_0\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|x - x_0\| < \varepsilon\end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$ *tel que*

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| < \varepsilon, \qquad \forall \lambda, \mu > \delta.$$

on déduire alors que $\left(e^{tA_\lambda}x\right)_{\lambda>0}$ *est un suite de Cauchy.*
D'autre part

$$\|e^{tA_\lambda}\| \le 1, \quad \forall t \ge 0,$$

donc

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \forall t \ge 0, \quad \forall x \in E$$

et d'après le Théorème de Banach Steinhauss $T(t) \in \mathcal{L}(E)$, *par conséquent, pour tout* $\lambda > 0$ *et* $x \in E$

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$$

est uniforme par rapport à t *dans chaque ensemble compact de* $\mathbb{R}^+$.
En effet,

$$\begin{aligned}\|A_\lambda e^{sA_\lambda}x - T(s)Ax\| &\le \|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - e^{sA_\lambda}Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \\ &\le \|e^{sA_\lambda}\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \\ &\le \|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\|,\end{aligned}$$

lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$,

$$\|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \longrightarrow 0,$$

on déduit alors, la convergence uniforme de $(e^{tA_\lambda}A_\lambda x)$ *vers* $(T(t)Ax)$, *sur tout intervalle borné.*

- *Maintenant, soit* B *le générateur infinitésimal de* $(T(t))_{t\ge0}$ *et soit* $x \in \mathcal{D}(A)$, *prouvons que* $A = B$.
  On divise (2.11) *par* $t > 0$, *lorsque* $t \longrightarrow 0$, *on remarque que* $x \in \mathcal{D}(B)$ *et* $Bx = Ax$. *Ainsi* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$

puisque B est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$, il résulte de la condition nécessaire que $1 \in \rho(B)$, en conséquent $(I-B)$ est inversible, et $(I-B)^{-1}X = \mathcal{D}(B)$.
Comme $(I-B)\mathcal{D}(A) = (I-A)\mathcal{D}(A)$ et d'après 2. $(I-A)\mathcal{D}(A) = X$, il s'ensuit que $(I-B)\mathcal{D}(A) = X$ d'où $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.
$A = B$ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contraction.

Chapitre 3

Quelques applications

3.1 Problème homogène à valeur initiale

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

où t est la variable du temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach E, avec $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire et $x \in E$ est donnée la valeur initiale à E.

Remarques 3.1. *Le problème* (3.1) *est appelé problème homogène abstrait de Cauchy associé à* $(A, \mathcal{D}(A))$ *et la valeur initiale* x

Définition 3.1.
On dit que $u : \mathbb{R}^+ \to X$ *est solution classique du problème* (3.1)*, si* u *est continue pour* $t \geq 0$*, continument différentiable avec* $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *pour* $t > 0$ *et* u *vérifie* (3.1)*.*

Théorème 3.1.
Soit A *le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur* E*. Alors pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$*, la fonction* $u : t \mapsto u(t) = T(t)x$ *est l'unique solution classique du problème* (3.1)*.*

Preuve
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, il vient du Théorème 3.1, que $u(t) = T(t)x$ est une solution classique du problème (3.1).

Pour l'unicité. Soit v une autre solution de (3.1). Soit $a > 0$, alors pour tout $s \in [0, a]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(T(t-s)v(s))}{\mathrm{d}s} &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s)\\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction $s \mapsto T(t-s)v(s)$ est constante, donc

$$T(t)v(0) = T(0)v(t)$$

mais $v(0) = T(0)x = x$, d'où

$$u(t) = v(t) = T(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

3.2 Problème non homogène à valeur initiale

Dans cette section nous étudions le problème non homogène à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.2}$$

où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ dans E. On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t>0}$.

Remarques 3.2. *L'équation correspondante à $f = 0$ (le cas homogène) admet une solution unique pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$*

Définition 3.2.
Une fonction $u : [0, T[\to X$ est dite solution (classique du problème (3.2) sur $[0, T[$ si

1) *u est continue sur $[0, T[$.*

2) *u est continument différentiable sur $]0, T[$*

3) *$u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < t < T$ et u vérifie (3.2).*

Théorème 3.2.
Si $f \in L^1(0, T; X)$, alors pour tout $x \in E$ le problème (3.2) admet au plus une solution.

Si la solution existe, elle est donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{3.3}$$

Preuve

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de générateur infinitésimal A et soit u une solution de (3.2). Alors la fonction $s \mapsto g(s) = T(t-s)u(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$ et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s)\\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s))\\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s)\\ &= T(t-s)f(s).\end{aligned}$$

$f \in L^1(0,T;X)$ donc $s \mapsto T(t-s)f(s)$ est intégrable et en intégrant (3.3) de 0 à t, on obtient

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

ainsi

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

Remarques 3.3. *Pour tout $f \in L^1(0,T;X)$, le membre de droite de la formule* (3.3) *définit une fonction continue sur $[0,T]$. Donc il est naturel de le considérer comme une solution "généralisée" de* (3.2) *même s'il n'est pas différentiable et ne vérifie pas exactement* (3.2) *au sens de la Définition 3.2. D'où la motivation pour introduire la définition suivante :*

Définition 3.3.

Soient A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, $x \in E$ et $f \in L^1(0,T;X)$. La fonction $u \in C([0,T];X)$ donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est appelée solution intégrale (ou solution "mild") de (3.2) *avec donnée initiale sur* $[0,T]$.

Lemme 3.1. *Soit $g : [a,b[\to X$ une fonction continue admettant une dérivée à droite g'_d continue sur $[a,b[$. Alors g est continument différentiable sur $[a,b[$.*

Théorème 3.3.
Soient A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, $f \in L^1(0,T;X)$ continue sur $]0,T]$ et soit v la fonction définie par

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Le problème à valeur initiale (3.2) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a) v est continument différentiable sur $]0,T[$

b) $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < t < T$ et la fonction $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $]0,T[$.

Réciproquement, si (3.2) admet une solution u sur $[0,T[$ pour un certain $x \in \mathcal{D}(A)$, alors v vérifie les conditions a) et b).

Preuve
Si le (3.2) admet une solution u pour un certain $x \in \mathcal{D}(A)$, alors cette solution est donnée par (3.3). Par conséquent, $t \mapsto v(t) = u(t) - T(t)x$ est différentiable pour $t > 0$ comme différence de deux fonctions différentiables et on a $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$, donc v' est continue sur $]0,T[$ et par suite $a)$ est vérifié.

De plus si $x \in \mathcal{D}(A)$ alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ pour $t \geq 0$ et par suite $v(t) = u(t) - T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et on a

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax.$$

Alors $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $]0,T[$, ainsi $b)$ est vérifiée.

D'autre part on a pour tout $h > 0$

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

puisque f est continue, alors

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s = f(t).$$

Si v est continument différentiable sur $]0,T[$, il s'ensuit alors que $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Puisque $v(0) = 0$ alors $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème (3.2) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.
Si $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < t < T$, il vient de l'égalité (3.3) que v est différentiables a droite en t et sa dérivée a droite est $v'_d(t) = Av(t) + f(t)$. Comme v'_d est continue, il vient alors par le Lemme 3.1 que v est continument différentiable sur $]0,T[$ et $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Puisque $v(0) = 0, u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de (3.2) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.

Exemple 3.2.1. *(L'équation d'advection)*
Considérons l'équation d'advection qui décrit les phénomènes du transport

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0, t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $X = L^2(\mathbb{R})$.
Écrivons le problème (3.4) *sous la forme abstraite en posant $u(t) = v(\cdot,t)$*

$$(PHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = f \end{cases} \tag{3.5}$$

où $A = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ avec le domaine $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R});\ u' \in L^2(\mathbb{R})\}$.
Comme A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe défini sur E par

$$(T(t)f)(x) = f(x-t),\ x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

alors il vient du Théorème 3.3 ? que pour tout $f \in \mathcal{D}(A)$, la fonction définie par

$$u(x,t) = (T(t)f)(x) = f(x-t)$$

est l'unique solution de (3.4)

Exemple 3.2.2. *(L'équation de la chaleur)*
L'équation de la chaleur et le semi-groupe de Gauss-Weierstrass dans $BC(\mathbb{R})$
Considérons l'équation de la chaleur qui décrit les phénomènes de diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.6}$$

où $f \in BC(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions bornés continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On va utiliser la transformée de Fourier partielle par rapport à E pour trouver une solution (formelle) de (3.6).

Rappelons que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier partielle par rapport a E de u est la fonction notée $\widehat{u}$ définie par

$$\hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi\xi} u(x,t)dx, \xi \in \mathbb{R}$$

On a

$$\frac{\sqrt{\partial u}}{\partial x}(\xi, t) = i\xi\hat{u}(\xi, t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) = -\xi^2\hat{u}(\xi, t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t)$$

En appliquant la transformée de Fourier a (3.6) *On trouve :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\xi, t) = -\xi^2\hat{u}(\xi, t), t > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.7}$$

(3.7) *est une équation différentielle ordinaire, où ξ joue le rôle d'un paramètre, et dont la solution est donnée par*

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi), t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}$$

Pour trouver u on applique la transformée de Fourier inverse en utilisant le fait que

$$e^{-t\xi^2} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-\zeta^2}{4t}}}$$

pour $t > 0$ et que $\widehat{u}\widehat{v} = \widehat{u * v}$. Par suite, on trouve que

$$u(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-t^2}{4t}} * f$$

alors

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-g)^2}{4t}} f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Puisque $f \in BC(\mathbb{R})$ et en utilisant le Théorème de dérivation sous le signe intégral, on montre que u est bien une solution de (3.6).

Notons que la condition initiale de (3.6) *est vérifiée par u donnée par* (3.8) *dans* *le sens suivant*

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et on note encore $u(x,0) = f(x)$.

Le résultat se reproduit dans le langage des semi-groupes de la façon suivante : pour toute fonction $f \in BC(\mathrm{R})$ *et tout* $t \geq 0$ *on pose*

$$T(t)f = u(\cdot, t),$$

où u *est l'unique solution classique de* (3.7) *donnée par* (3.8). *On définit ainsi le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* $BC(\mathrm{R})$ *appelé le semi-groupe de Gauss-Weierstrass par*

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4H}} f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad et \qquad T(0) = I.$$

Le semi-groupe de Gauss-Weierstrass n'est pas un $\mathcal{C}_0-$ *semi-groupe. Il s'avère que* $T(t)f \to f$ *lorsque* $t \to 0^+$ *dans* $BC(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $f \in BUC(\mathbb{R})$, *où* $BUC(\mathbb{R})$ *est l'espace des fonctions bornées uniformément continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Conclusion

La théorie des semi-groupes repose sur la construction d'une formule explicite de représentation des solutions et de son analyse en fonction des données.

L'intérêt des techniques opérationnelles est de permettre une étude unifiée des EDP et de fournir pour ceux-ci des conditions nécessaires et suffisantes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions.

Bibliographie

[1] S. Attal : *Operator semi groups*, Université lyon 1, France.

[2] H. Brezis : *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2011.

[3] F. Elona : *On semi groups of linear operators* , Central European University, 2014.

[4] N. Dunford, J.T.Schwartz : *Linear operators I* , Wiley, 1958.

[5] K. Engel ; R. Nagel : *Short course on semigroups*. Springer, 2010.

[6] M. Moussaoui : *Semi-groupes et applications*, Doctoriales Nationales de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Constantine, 28-31/10/2017.

[7] D. Mugnolo : *Semigroup methods for evolution equations on networks* , Febuary 4, 2014.

[8] A. Pazy : *Semigroups of linear Operator and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1983.

[9] J-P .Raymond : *Équation d'évolution*, Université Paul Sabatier.

[10] S. Saidi : *La théorie spectrale des opérateurs* , Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel, 2016/2017.

[11] L. Vrabie :C_0-*Semigroups and applications*, Elsevier Science B.V., 2003.