Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Universite IBn Khaldoun – Tiaret –
Faculte des Mathematique et Informatique
Departement de Matématique

Spéscialité : Matématique

Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Mémoire de Fin d'étude pour Obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Introduction au Calcul Fractionnaire

Présenté Par :

- ZIANI NADJIA
- SENOUCI OUAHIBA
- ABBES NACERA
- DJAID SANAA

Soutenu devant le Jury composé de

• SOUID MOHAMED SAID	MCA	Président
• BENDAOUD ABED SID AHMED	MCB	Examinateur
• KADDA MAAZOUZ	MCB	Encadreur

Promotion : 2018/2019

REMERCIEMENTS

D'abord nous remercions Dieu le Tout-Puissant. Nous tenons à remercier tous ceux qui, par leurs enseignants Leur collaboration et leurs conseils, ont contribué à l'élaboration de ce travail. Sans leurs aides, ce travail de fin d'étude n'aurait pas pu être mené à terminer. Nous remercions notre coordinateur : Mr Maazzouz Nos remercions tout particulièrement nos familles et amies pour nous Avoir supportées, soutenues, encouragées tout au long de ces années d'études Nous remercions encore toutes les personnes non citées qui de près ou de loin Ont collaboré à la réalisation de notre travail de fin d'étude.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes parents : Ma mère Fatiha, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie ; Mon pere Ahmed, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et les soutiens permanents venu de vous. A mes frères : Abdennasser, Nawel, et sur tout mon frère Mouloud. A tous mes amies qui m'ont encouragé. A mon professeur encadreur Mr Maazouz pour son aide A tous mes professeurs qui m'ont enseigné au primaire jusqu'à maintenant, je les dédie ce travail qui est le résultat de leurs efforts et leurs encouragements. Enfin je dédie ce mémoire, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour l'élaboration de ce travail. ZIANI NADJIA

Dédicace

Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de mes chers parents qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver a ce que je suis aujourd'hui. Que Dieu protège et que la réussite soit toujours a ma portée pour que je puise vous combler de bonheur . Je dédie aussi ce travail a :
mes parents.
mon frère ; kacem, khaled,kheiredinne mes soeuers :Mouna, Naima et mes lui familles.
tous mes. amies mes collègue et tous ceux m'estiment. SENOUCI OUAHIBA

Dédicace

,A l'homme de ma vie , mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur celui qui s'est toujours sacrifie pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père MOHAMED A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore. Aux personnes dont j'ai bien aimés la présence dans ce jour, à tous mes frères AEK et AMAR à mes sœurs F ,k,F et je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragement. a personne qui m'ont toujours aide et encouragé qui étai toujours à mes cotés MOHAMED ABBES NACERA

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère. • A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père BAGHDADI,. • A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère BOUSMAHA YAMINA , qui disparu trop tôt ,dieu la bénisse . • A vous mes frères (RABIE et MOSTAFA) qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études.

• A mon adorable petite sœur LATIFA , qui je souhaite son succès en BAC . • A mes grands-mères, Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie. • A tous les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant. Merci pour leurs amours et leurs encouragements. DJAID SANAA

Table des matières

Introduction

Un aperçu historique sur la dérivation fractionnaire Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'intégration sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Liebnitz,à qui on droit l'idée de la dérivation fractionnaire .Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre $(n, \frac{d^n y}{dx^n})D^n y$,où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans Q. Il posa la question :et si $n = \frac{1}{2}$?
En 1695 , dans une lettre à l'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}(x)$ sera égal à$x^2\sqrt{dx : x}$. :un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». sur ces question , nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou lagrange 17 siècle ,Laplace Fourier, Liouville,$(1832, 1837)$ et Riemann (1847)20 siècle , ainsi Grùnwal 1867 et Letnikov (1868) dans la seconde moitié de même siècle .IL semble qu'une contradiction dans les définitions ait en empêché un succès plus grand de la théorie , qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus , l'absence au début d'une interpolation géométrique ou physique clair de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué a ce que des champs de recherche passionnants reste dans l'ombre Notre mémoire est contient quatre chapitre organisé comme suite : Au début de ce travail on commence par le premier chapitre intitulé « préliminaire » nous rassemblons quelques définitions est

notation de base concernant l'équation différentielle fractionnaire que nous utilisons tout au long de ce travail. On définie les fonctions suivantes :Betta,Gamma et Mittag–Leffler avec des propriétés importantes et nous donnons quelques théorèmes de point fixe Schauder ,Schafer Banach ainsi les dérivées et les intégrales au sens de Riemann-Liouville et Hadamard .Après dans le deuxième chapitre il est divisé en deux sections . Dans la section 1, on définit la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et on étude l'existence de la solution de problème (2.5) (2.6) basons sur le théorème de point fixe de Schauder. Dans la section 2 nous donnons deux exemples pour illustrer l'utilité de nos résultats principaux Dans le troisième chapitre on définie la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer et l'équation intégral de Voltera après on étudier l'existence et l'unicité de problèmes Cauchy généralisée considérer dans (3.2) (3.3) dans l'espace C on base sur le théorème de point fixe de Banach. Et dans le dernier chapitre on définie la dérivée et l'intégrale fractionnaire au sens de Hilfer Katugampola dans la première section. Et dans la deuxième section on introduit le dérivée partielle de Hilfer – Katugampola et discuter d'autre formulation pour les dérivées fractionnaire après dans section trois on trouve l'existence et l'unicité de la solution pour les problème (4.13)(4.14) et dans le dernier section on présente des solutions explicites du problème (4.25)(4.26). On termine ce mémoire par une conclusion et une bibliographie. Phase et mots clés : Équation différentielle, dérivée et l'intégrale fractionnaire, existence et l'unicité, point fixe.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les fonction Bêta et Gamma

Définition 1.1. *l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Euler* $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad pour \qquad R(x) > 0 \tag{1.1}$$

1. Une propriété importante de la fonction de Gamma $\Gamma(x)$ est la relation de récurrence suivante :
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
2. Qu'on peut démontrer par une intégration par parties :
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = [-e^{-t} t^{x-1}]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$$

Remarques 1.1. *La fonction de Gamma Euler généralise la factorielle*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$\forall n \in N^{\star}$ *on peut démontrer :*

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\Gamma(1) = n!$

Définition 1.2. *Soit* $(p,q) \in C^2$ *avec* $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$ *alors*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Proposition 1.1. *:Les propriétés de Bêta :*

1. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$
2. $\beta(p,q) = \beta(p+1,q) + \beta(p,q+1)$
3. $\beta(p,q+1) = \frac{q}{p}\beta(p+1,q) = \frac{q}{p+q}\beta(p,q)$

1.2 La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.3. *La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonction suivante :*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad \text{avec} \qquad \alpha > 0, \qquad z \in C, \tag{1.2}$$

La fonction généralisée de Mittag-leffler est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \qquad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.3}$$

Proposition 1.2. *:*

1. $E_{1.1}(z) = e^z$.
2. $E_{1.2}(z) = \frac{e^{z-1}}{z}$.
3. $E_{1.3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$.

4. $\forall m \in N$

$E_{1.m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{k!}\right].$

5. $E_{2.1}(z^2) = \cosh(z).$

6. $E_{2.2} = \frac{\sinh(z)}{2}.$

Preuve :

1. : Soit $z \in C$,alors

$$E_{1.1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$$

2. On a

$$E_{1.2}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}$$

Comme

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

on obtient

$$e^z = z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!} + 1$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!} = \frac{e^z-1}{z}$$

comme $E_{1.2} = \frac{e^z-1}{z}$

3. On a $E_{1.3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{(k++2)!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{k-2}}{k!}$

Puisque

$$e^z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \Longrightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \frac{e^z-1-z}{z^2}$$

et alors on trouve

$$E_{1.3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \frac{1}{z-1}\left[e^z - \sum_{k=0}^{1} \frac{z^k}{k!}\right]$$

4. soit $m \in N^*$ fixe on a

$$E_{1.m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right]$$

1.3 Quelques relations avec les fonctions classiques

1. $E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z$
2. $E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$
3. $E_{\frac{1}{2}}(z) = E(z^2)[1 + evf(z)]$
   $= E(z^2)[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt]$
4. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$
5. $E_{2,2}(z) = \frac{\sinh}{\sqrt{z}}(\sqrt{z})$

1.4 Transformation de Laplace

1. Soit $F(s)$ la transformée de Laplace $f(t)$ définie par :

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

2. $f(t)$ est la fonction originale qui peut être obtenue par la transformée de Laplace inverser de $F(s)$:

$$f(t) = L^{-1}F(s) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} F(s) ds \qquad avec \qquad c = Re(s) > 0$$

3. La transformée de la place du produit de convolution deux fonctions f et g

s'écrit sous la forme :

$$L(f(t) * g(t), s) = F(s)G(s)$$

4. La transformée de la place d'une dérivée d'ordre entier est :

$$\begin{aligned} L[f^n(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k-1}(0) \end{aligned}$$

5. La transformé de la place de la fonction t^{n-1} est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p) s^{-p}$$

1.5 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 1.4. *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$*

1.5.1 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction sur un convexe compact dans un espace de Banach.
Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact.alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe

1.5.2 la Contractante de Banach

Soit U une partie d'un espace de Banach X et $T : U \to X$ l'application T est dite contractante dans U s'il existe λ, $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\| Tx - Ty \| \leq \lambda \| x - y \| \, \forall x, y \in U$$

Si V est aussi une partie d'un espace de Banach Y et $T : U \times V \to X$ alors T est dite contraction uniforme s'il existe λ , $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$\| T(x, v) - T(y, v) \| \leq \lambda \| x - y \| \, \forall x, y \in U, v \in V$$

1.5.3 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un convexe fermée ,on suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$,$NU \to C$ un opérateur complètement continue ,alors on a l'alternative suivant :

1. N admet un point fixe .
2. Il existe $u \in \partial u; u = \lambda N(u)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

1.5.4 Théorème de Brower

Ce théorème énoncent que si une fonction continue f vérifie certaines propriété alors il existe un point x_0 tq $f(x_0) = x_0$ (définie dans un intervalle ferme bornée non vide).

1.5.5 Produit de convolution

Soient f et g deux fonctions mesurables $f.g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
le produit de convolution est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

.

1.6 La dérivée et l'intégrale au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5. *La dérivée d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville pour une fonction donnée $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt})^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ est la partie entière de α . Si $\alpha \in]0, 1[$ alors

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds$$

Exemple 1.6.1. *Calculons $D^\alpha t^\lambda$,pour $\lambda > -1$, nous trouverons*

$$D^\alpha t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, \alpha > 0, \lambda > -1$$

en particulier,si $\lambda = 0$ alors

$$D^\alpha t^\lambda \equiv D^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Définition 1.6. *Soit $f : [a, b] \to R$ on appelle l'intégrale de Riemann-liouville de f :*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\alpha (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

Proposition 1.3. *Soit $f \in C^0([a, b])$ pour α,β complexes tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ on a*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$$

Pour $Re(\alpha) > 1$ *on a*

$$\frac{d}{dt} I_a^{\alpha} f = I_a^{\alpha-1} f$$

et pour $Re(\alpha) > 0$ *on a*

$$\lim_{\alpha \to 0} (I_a^{\alpha} f)(t) = f(t)$$

1.7 la Transformation de Laplace de la dérivée de Riemann

L'intégrale de Riemann-Liouville peut notamment S'écrire comme le produit de convolution des fonctions $g(t)$ et $f(t)$

$${}_0I_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) f(t)$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution,on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale aux sens de Riemann-Liouville

$$L\{^{RL}D_t^{\alpha} f(t)\} = L\{^{GL}D_t^{\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée aux sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$$D^{\alpha} = g^{(n)}(t)$$

Ce qui entraine
$g(t) = I^{(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1} f(\tau) d\tau$, $n-1 < \alpha < n$.

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$ {}_0D_t^{\alpha} f(t) = s^{\alpha} G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) $$

Où

$$ G(s) = s^{(n-\alpha)} F(s). $$

A partir de la définition de la dérivée de Riemann-Liouville,il vient que

$$ g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}{}_0 D_t^{-(n-\alpha)} f(t) =_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t). $$

ou ${}_{\alpha}D_t^{\alpha} f(t)$ est la dérivée d'ordre α qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$ {}_{\alpha}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\alpha}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau\right) $$

1.8 L'intégrale et la dérivée au sens d'Hadamard

1.8.1 L'intégral fractionnaire au sens d'Hadamard

Définition 1.7. *L'intégrale fractionnaire de Hadamard de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ est définie par :*

$$ ({}^{H}I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \qquad \textit{avec} \qquad x \in]a, b[$$

Dans le cas général

$$ ({}^{H}I_{a^+,\mu}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \qquad , \textit{avec} \qquad x \in (a, b) $$

$$ (I_{a^+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \qquad (a < x < b) \tag{1.4} $$

et

$$(I_{b-}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt \qquad (a<x<b) \tag{1.5}$$

Définition 1.8. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale d'ordre n de type Hadamard pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ et donnée par la formule suivante :*

$$({}^{H}I_{a^+,\mu}^{n}f)(x) = x^{\mu}\int_{a}^{x}\frac{dt_1}{t_1}\int_{a}^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}...\int_{a}^{t_{n-1}}f(t_n)\frac{dt_n}{t_n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{a}^{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\frac{f(t)}{t}dt. \qquad x>a$$

On peut résonner par récurrence :

on prendre $\mu = 0$

Montrons pour $n = 2$:

$$\begin{aligned}({}^{H}I_{a^+}^{2}f)(x) &= \int_{a}^{x}\frac{dt_1}{t_1}\int_{a}^{t_1}f(t_2)\frac{dt_2}{t_2}\\ &= \int_{a}^{x}\frac{1}{t_1}\left(\int_{a}^{t_1}f(t_2)\frac{dt_2}{t_2}\right)dt_1\end{aligned}$$

par intégration par parties :

$$\begin{aligned}({}^{H}I_{a^+}^{2}f)(x) &= \log(t_1)\int_{a}^{t_1}f(t_2)\frac{dt_2}{t_2}|_a^x - \int_{a}^{x}(\log(t_1)f(t_1)\frac{dt_1}{t_1}\\ &= \log(x)\int_{a}^{x}f(t_2)\frac{dt_2}{t_2} - \int_{a}^{x}(\log(t_1))f(t_1)\frac{dt_1}{t_1}\\ &= \int_{a}^{x}(\log x - \log t)f(t)\frac{dt}{t}\\ &= \int_{a}^{x}(\log\frac{x}{t})f(t)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Donc : elle est vraie pour $n = 2$

Supposons qu'elle est vraie pour n ou la démontre pour $n + 1$:

$$({}^{H}I_{a^+}^{n+1}f)(x) = \int_{a}^{x}\frac{dt_1}{t_1}\int_{a}^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}...\int_{a}^{t_{n-1}}\frac{dt_n}{t_n}\int_{a}^{t_n}f(t_{n+1})\frac{dt_{n+1}}{t_{n+1}.}$$

On pose :

$g(t) = \int_a^{t_n} f(t_{n+1}) \frac{dt_{n+1}}{t_{n+1}}$
on obtient :

$$\begin{aligned} ({}^H I_{a^+}^{n+1} f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{n-1} \frac{g(t)}{t}\, dt \\ &= \frac{1}{n(n-1)!} \int_a^x n(\log \frac{x}{t})^{n-1} \frac{1}{t} \int_a^t f(s) \frac{ds}{s}\, dt \end{aligned}$$

par intégrations par parties :

$$\begin{aligned} ({}^H I_{a^+}^{n+1} f)(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \left[-(-\log \frac{t}{x})^n \right] \int_a^t f(s) \frac{ds}{s} |_a^x + \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^n \frac{f(t)}{t}\, dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^n \frac{f(t)}{t}\, dt. \end{aligned}$$

Par conséquent elle est vraie pour $n+1$
Donc : elle est vérifiée.
On peut généraliser ,la formule précédente pour $n = \alpha$ *qui est nombre réelle quelconque par la définition suivante :*

Définition 1.9. *On considère les paramètres suivants* $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ *satisfaisant* $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha), 0 < \alpha < \beta, \gamma > 1, 0 \leq \mu \leq 1$ *Ainsi, on définis des espaces*

$$C_{1-\gamma,\mu}^{\alpha,\beta}[a,b] = \varphi \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b],^\rho D_\beta^{\alpha,\beta} a^+ \varphi \in C_{\mu,\rho}[a,b]$$

et

$$C_{1-\gamma,\rho}^{\gamma}[a,b] = \varphi \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b],^\rho D_{a^+}^{\gamma} \varphi \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b]$$

Où $C_{\mu,\rho}[a,b]$ *et* $C_{1-\gamma,\rho}[a,b]$ *sont les espaces pondérés des fonctions continues sur* $(a,b]$
.

1.8.2 La dérivée au sens d'Hadamard

Définition 1.10. *La dérivée au sens d'Hadamard de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ est définie par*
Pour $\mu = 0$

$$(D^{\alpha}_{0^+} f)(x) := (\delta)^n (I^{n-\alpha}_{0^+} f)(x)$$

Dans le cas générale

$$(D^{\alpha}_{0^+,\mu} f)(x) := x^{-\mu}(\delta)^n x^{\mu}(I^{n-\alpha}_{0^+,\mu} f)(x)$$

avec $x > 0$, $\delta = x\frac{d}{dx}$, $R(\alpha) \geqslant 0$ et $I^{n-\alpha}_{0^+,\mu}$ $I^{n-\alpha}_{-,\mu} f$ est l'intégrale d'Hadamard .

Exemple 1.8.1.

$$\left(I^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}$$

En particulier , si $\beta = 1$ et $R(\alpha) \geqslant 0$, alors la dérivée d'Hadamard de constante a dans le cas général est déférente de zéro

$$(D^{\alpha}_{a^-}1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \qquad \textit{et} \qquad (D^{\alpha}_{b^-}1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{-\alpha}$$

Chapitre 2

La dérivée au sens de Caputo

2.1 La dérivée au sens de Caputo

Définition 2.1. *La dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo pour une fonction donnée f définie par :*

$$^{C}D_0^{\alpha}f :=^{C} D^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds$$

$n = [\alpha] + 1$

Exemple 2.1.1. *Soit $f(t) = t^{\alpha-1}, \qquad \alpha > 0, \qquad t > 0$ nous avons*

$$^{c}D_0^{\alpha}t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)}t^{-1} = 0, \qquad (\Gamma(0) = \infty)$$

$$I_0^{\alpha}D_0^{\alpha}t^{\alpha-1} = I_0^{\alpha}(0) = 0$$

$$D_0^{\alpha}(I_0^{\alpha}t^{\alpha-1}) = t^{\alpha-1}$$

alors $I_0^{\alpha}D_0^{\alpha} \neq D_0^{\alpha}I_0^{\alpha}$

Définition 2.2. *D'après les exemples ci-dessus,on remarque que*

1. $D^\alpha I^\alpha = I_d \qquad , I^\alpha D^\alpha \neq I_d \qquad$ *,pour* $\alpha > 0$ *(*I_d *opérateur d'identité)*
2. ${}^{RL}D^\alpha f(t) := D^m I^{m-\alpha} f(t) \neq I^{m-\alpha} D^m f(t) :={}^c D^\alpha f(t)$ *avec* $m-1 < \alpha \leq m$

Remarques 2.1. *:*

1. *la dérivée au sens de Riemann-Liouville* D^α *d'une constante réelle* K *est différente de zéro*
2. *la dérivée au sens de Caputo* ${}^cD^\alpha$ *de constante* k *est identiquement nulle ,i.e* ${}^cD^\alpha k \equiv 0, \qquad \alpha > 0$

2.2 L'existence de la solution

En considérer le problème aux limite

$$ {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c D^\alpha y(t)), \qquad pour \qquad t \in J = [0, b], 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

$$ y(0) + \lambda \int_0^b y(t) = y(b) \tag{2.2}$$

ou ${}^cD^\alpha$ est le dérivée de Caputo $f : J \times R \times R$ est une fonction donnée ,et $\lambda \in (0, +\infty)$

Lemme 2.1. *[6]Soient et* $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ $\alpha > 0$ *alors*
$I^\alpha({}^cD^\alpha h(t)) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{m-1} t^{m-1}$
$c_i \in \mathbb{R}$ *arbitraire* $i = 0, 1, ..., m-1, m = [\alpha] + 1$

Lemme 2.2. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h \in C(J.\mathbb{R})$ *une fonction donnée, alors le problème au limite*

$$ {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \qquad t \in J \tag{2.3}$$

$$y(0) + \lambda \int_0^b y(t)dt = y(b) \tag{2.4}$$

a une solution unique donnée par

$$y(t) = \int_0^b G(t,s)h(s)ds,$$

ou $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{b\Gamma(\alpha)} \left(\dfrac{(b-s)^{\alpha-1}}{\lambda} + \dfrac{\alpha b(t-s)^{\alpha-1} - (b-s)^{\alpha}}{\alpha} \right) & si \quad 0 \leqslant s < t \\ \dfrac{1}{b\Gamma(\alpha)} \left(\dfrac{(b-s)^{\alpha-1}}{\lambda} - \dfrac{(b-s)^{\alpha}}{\alpha} \right) & si \quad t \leqslant s < b \end{cases} \tag{2.5}$$

Preuve :
par le Lemme 2.1

$$\begin{aligned} y(t) &= I^{\alpha}({}^{c}D^{\alpha}y(t)) \\ &= I^{\alpha}(h(t)) - c_0 \qquad c_0 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c_0 \end{aligned}$$

nous avons par intégration en utilisant le théorème intégrale de Fubini.

$$\begin{aligned} \int_0^b y(s)ds &= \int_0^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} h(\tau)d\tau - c_0 \right) ds \\ &= \int_0^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau}^b (s-\tau)^{\alpha-1} ds \right) h(\tau)d\tau - c_0 b \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^b (b-\tau)^{\alpha} h(\tau)d\tau - c_0 b. \end{aligned}$$

applique la condition aux limites (2.4) nous avons $y(0) = -c_0$

$$y(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c_0$$

c'est

$$\frac{1}{b\Gamma(\alpha)}\int_0^b \left(\frac{(b-s)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\lambda}\right)h(s)ds$$

donc la solution unique de (2.3)-(2.4) est :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{1}{b}\int_0^b \left(\frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\lambda} - \frac{(b-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)h(s)ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} + \frac{1}{b}\left(\frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\lambda} - \frac{(b-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)\right]h(s)ds \\ &+ \frac{1}{b\Gamma(\alpha)}\int_t^b \left(\frac{(b-s)^{\alpha-1}}{\lambda} - \frac{(b-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)h(s)ds \\ &= \int_0^b G(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Lemme 2.3. *la fonction $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ est une solution du problème (2.1)-(2.2) si et seulement si $y \in C(J,\mathbb{R})$ est une solution de l'équation intégrale.*

$$y(t) = \int_0^b G(t,s)\phi(s)ds. \tag{2.6}$$

ou $G(t,s)$ c'est la fonction de Green donné par (2.5) et $\phi \in C(J,\mathbb{R})$ satisfait l'équation implicite

$$\phi(s) = f(s, y(s), \phi(s))$$

Théorème 2.1. *On suppose que*
$(H_1) f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue
(H_2) il existe constante $0 < l < 1$ et $0 < k < \dfrac{1-l}{bG^*}$ tel que

$$|f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})| \leqslant k|x-\bar{x}| + l|y-\bar{y}| \qquad G^* = sup|g(t)| \qquad t \in [0.1]$$

Pour chaque $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in J$
Alors il existe une solution unique au problème (2.1), (2.2)

Preuve :
Nous transformons le problème (2.1)-(2.2) en problème point fixe considérer l'opérateur $A : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ définie par :

$$Ay(t) = \int_0^b G(t,s)\varphi(s)ds \tag{2.7}$$

Ou $G(t, s)$ est la fonction de Green donné par (2.5) et $\varphi \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait la condition des fonctions implicite :

$$\varphi(s) = f(s, y(s)\varphi(s)).$$

nous montrons que A est une contraction
Soit $u, v \in C(J, \mathbb{R})$, pour chaque $t \in J$, nous avons .

$$(Au)(t) - (Av)(t) = \int_0^b G(t,s)(\varphi(s) - \Psi(s))ds$$

Où

$$\varphi(s) = f(s, u(s), \varphi(s))$$

$$\psi(s) = f(s, v(s), \psi(s))$$

Et

$$|\varphi(s) - \Psi(s)| \leqslant k|u(s) - v(s)| + l|\varphi(s) - \Psi(s)|$$

Ainsi

$$|\varphi(s) - \Psi(s)| \leqslant \frac{k}{1-l}|u(s) - v(s)|.$$

Puis

$$\begin{aligned}
|(Au)(t)-(Av(t))| &\leqslant \int_0^b |G(t,s)(\varphi(s)-\Psi(s))|\,ds\\
&\leqslant \frac{k}{1-l}\int_0^b |G(t,s)||u(s)-v(s)|ds\\
&\leqslant \frac{bkG^*}{1-l}\,\|u-v\|_\infty
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Au-Av\|_\infty \leqslant \frac{bkG^*}{1-l}\,\|u-v\|\,\infty.$$

Puisque

$\dfrac{bkG^*}{1-l} < 1$

Alors l'opérateur A est contractante.

Alors le théorème de Banach point fixe le problème (2.1)-(2.2) a une solution unique.

Maintenant nous donnons une résultat d'existence basé sur le théorème des points fixes de Schauder.

Théorème 2.2. *Soient* $(H_1)et(H_2)$ *tenir si :*

$$1-l-bkG^*>0 \tag{2.8}$$

Le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution

Preuve :

Soit

$$D=\{y\in C(J,\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leqslant\gamma\}$$

Où

$$\gamma>\frac{bf^*G^*}{1-l-bkG^*} \tag{2.9}$$

Avec $f^* = \sup_{t\in J}\{f(t,0,0)\}$
Il est clair que est un sous-secteur fermé convexe de $C(J,R)$ l'opérateur A être définie dans (2.7).nous montrons que A vérifie les hypothèses des Schauders. La preuve sera donné en plusieurs étapes

Étape 1 : A est continue
Soit u_n une suite telle que $u_n \to u$ dans $C(J,\mathbb{R})$
Alors pour chaque $t \in J$,

$$\varphi_n(s) = f(s, u_n(s), \varphi_n(s))$$

$$\varphi(s) = f(s, u(s), \varphi(s))$$

Nous avons :

$$|\varphi_n(s) - \varphi(s)| \leqslant k|u_n(s) - u(s)| + l|\varphi_n(s) - \varphi(s)|$$

C'est

$$|\varphi_n(s) - \varphi(s)| \leqslant \frac{k}{1-l}|u_n(s) - u(s)|$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|(Au_n)(t) - (Au)(t)| &\leqslant \int_0^b |G(t,s)(\varphi_n(s) - \varphi(s)|\, ds \\
&\leqslant \frac{k}{1-l}\int_0^b |G(t,s)||u_n(s) - u(s)|ds
\end{aligned}$$

Puisque $u_n \to u(s)$,on a $\varphi_n \to \varphi$ et le théorème de convergence dominé par le Lebesgue $\|A(u_n) - A(u)\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Par conséquence A est continue.

Étape 2 : $A(D) \subset D$
Soit $y \in D$, nous allons montrer que $Ay \in D$.

Pour chaque $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned} |(Ay)(t)| &= |\int_0^b G(t,s)\varphi(s)ds| \\ &\leqslant \int_0^b |G(t,s)||\varphi(s)|ds. \end{aligned}$$

Par H_2 nous avons

$$\begin{aligned} |\varphi(s)| &= |f(s,y(s),\varphi(s)| \\ &\leqslant |f(s,y(s),\varphi(s)| - |f(s,0,0) + f(s,0,0)| \\ &\leqslant k|y(s) + l|\varphi(s)| + |f(s,0,0)| \\ &\leqslant \frac{k|y(s)| + |f(s,0,0)|}{1-l} \\ &\leqslant \frac{k\|y\|_\infty + f^*}{1-l} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} |(Ay)(t)| &\leqslant \frac{k||y||_\infty + f^*}{1-l} \int_0^b |G(t,s)|ds \\ &\leqslant \frac{k||y||_\infty + f^*}{1-l} bG^* \\ &\leqslant \frac{k\gamma + f^*}{1-l} bG^* \end{aligned}$$

Par(2.9)nous avons

$$\|Ay\|_\infty \leqslant \gamma$$

Alors $A(D) \subset D$

Étape 3 : A une partie D dans un equicontinue de $C(J,R)$ soit $y \in D$, $t_1, t_2 \in J$,$t_1 < t_2$;

$$\begin{aligned}
|(Ay)(t)_2 - (Ay)(t)_1| &= \left| \int_0^b G(t_2, s)\varphi(s)ds - \int_0^b G(t_1, s)\varphi(s)ds \right| \\
&\leqslant \int_0^b |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \, |\varphi(s)|ds \\
&\leqslant \frac{k\|y\|_\infty + f^*}{1-l} \int_0^b |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \, ds
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$ de même choit de l'intégrale si-ces-sus ont te danse a zéro par le théorème d'Arzela Ascoli.
A est complètement continue . on en déduite que A a un point fixe y qui est une solution de problème (2.1)-(2.2).

2.3 Exemples

Dans cette section, nous donnons deux exemples pour il lustrer l'utilité de notre résultat principe .

Exemple 2.3.1. *Considérons le problème aux limites*

$$^cD^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{|y(t)| + |^cD^{\frac{1}{2}}y(t)|}{10(1 + |y(t)| + |^cD^{\frac{1}{2}}y(t)|)} \qquad t \in J = [0, 1] \tag{2.10}$$

$$y(0) + \int_0^1 y(t)dt = y(1) \tag{2.11}$$

Ensemble

$$f(t, x, y) = \frac{x + y}{10(1 + x + y)} \qquad (t, x, y) \in J \times [0.\infty) \times [0.\infty)$$

Il est claire que f est continue

soit $x, y \in [0.\infty)$ *et* $t \in J$. *puis*

$$\begin{aligned} |f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})| &= \frac{1}{10}\left|\frac{x+y}{1+x+y} - \frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+\bar{x}+\bar{y}}\right| \\ &= \frac{1}{10}\left|\frac{1}{1+\bar{x}+\bar{y}} - \frac{1}{1+x+y}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{10}\left|x+y-\bar{x}-\bar{y}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{10}\left(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|\right) \end{aligned}$$

alors par l'hypothèse (H_2) *est vraie avec*

$$k = l = \frac{1}{10}$$

de 2.5 , G *est donné par :*

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \dfrac{\frac{1}{2}(t-s)^{-\frac{1}{2}} - (1-s)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} & si 0 \leqslant s < t \\ \dfrac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \dfrac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} & si t \leqslant s < 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

De (2.12) alors

$$\begin{aligned} \int_0^t G(t,s)ds &= \int_0^1 G(t,s)ds + \int_t^1 G(t,s) \\ &= \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &- \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})} + \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \end{aligned}$$

On peut facilement voir que

$$G^* < \frac{4}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} < \frac{10}{\sqrt{\pi}}$$

Puisque : $0 < \dfrac{bkG^*}{1-l} < \dfrac{10}{9\sqrt{\pi}} < 1$ *,le théorème implique que le problème (2.10)-(2.3.1) a une solution unique .*

Exemple 2.3.2. *Considérer le problème des valeurs limites*

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{3 + |y(t)| + |^cD^\alpha y(t)|}{(20+e^t)(1+|y(t)|+|^cD^\alpha y(t)|)} \qquad t \in J = [0.1], \alpha \in (0.1) \tag{2.13}$$

$$y(0) + \int_0^1 y(t) = y(1). \tag{2.14}$$

ensemble

$$f(t,x,y) = \frac{3+|x|+|y|}{(20+e^t)(1+|x|+|y|)} \qquad (t,x,y) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

il est claire f *est continue .*
tel que $x, y\mathbb{R}$ *et* $t \in J$ *, puis*

$$\begin{aligned} f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y}) &= \frac{1}{(20+e^t)}\left|\frac{3+|x|+|y|}{1+|x|+|y|} - \frac{3+\bar{x}+\bar{y}}{1+\bar{x}+\bar{y}}\right| \\ &= \frac{1}{(20+e^t)}\left|\frac{1}{1+|\bar{x}|+|\bar{y}|} - \frac{1+x+y}{1+\bar{x}+\bar{y}}\right| \\ &\leqslant \frac{2}{(20+e^t)}\,||x|+|y|+|\bar{x}+\bar{y}| \\ &\leqslant \frac{1}{10}\left(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|\right). \end{aligned}$$

alors l'hypothése (H_2) *est vérifie que*

$$k = l = \frac{1}{10}.$$

et nous avons

$$f^* = \sup|f(t,0,0)| = \frac{1}{7}.$$

de (2.5),G est donné par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dfrac{\alpha(t-s)^{\alpha-1} - (1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} & si \quad 0 \leqslant s < t \\ \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \quad si \quad t \leqslant s < 1 \\ . \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} G(t,s)ds &= \int_0^t G(t,s)ds + \int_t^1 G(t,s)ds \\ &= -\frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

Nous avons facilement voir que

$$G^* < \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}$$

la condition (2.5) est satisfaite pour les valeurs appropriées de $\alpha \in]0,1[$ *,Théorème 2.1-2.2 affirme que le problème a au moins une solution .*

Chapitre 3

La dérivée au sens d' Hilfer

Définition 3.1. *[5]*
Soient $\alpha \in]m-1, m[$ *et* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *avec* $m \in N$ *et* $f \in C^m([a,b])$ *, on appelle dérivée d'ordre* α *et de type* β *au sens de Hilfer de* f *au point* a *la fonction définie par :*

$$(D_a^{\alpha,\beta})f)(x) = \left(I_a^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_a^{(1-\beta)(m-\alpha)}f)\right)(x)$$

Où $I_a^{\cdot}$ *est l'intégrale de Riemann-Liouville.*
Particulièrement si $0 < \alpha < 1$ *alors*

$$\begin{aligned}
(D_a^{\alpha,\beta}f)(x) &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)}f)\right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(I_a^{(1-\gamma)}f)\right)(x) \\
&= (I_a^{\beta(1-\alpha)}D_a^{\gamma}f)(x)
\end{aligned}$$

Où $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ et D_a^{γ} est la dérivée au sens de Riemann-Liouville

$$C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b] = \{f \in C_{1-\gamma}[a,b], D_{a^+}^{\alpha,\beta}f \in C_{1-\gamma}[a,b]\}$$

et

$$C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b] = \{f \in C_{1-\gamma}[a,b], D^{\gamma}_{a^+} f \in C_{1-\gamma}[a,b]\} \tag{3.1}$$

Lemme 3.1. *[5]*
Soit $f \in L^1(a,b)$ est l'espace de Lebesgue des fonction intégrale sur (a,b), si $D_a^{\beta(1-\alpha)} f$ existe et dans $L^1(a,b)$
alors

$$D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f = I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f$$

.

Preuve :
soient $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $f \in L^1(a,b)$

$$\begin{aligned}
(D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f)(x) &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)} \circ I_a^{\alpha} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)+\alpha} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{1-\beta+\alpha\beta} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{1-\beta(1-\alpha)} f) \right)(x) \\
&= (I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f)(x).
\end{aligned}$$

Lemme 3.2. *[5]*
Soient $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, et $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$. si $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ alors

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha,\beta} f = I_a^{\gamma} D_a^{\gamma} f,$$

et

$$D_a^{\gamma} I_a^{\alpha} f = D_a^{\beta(1-\alpha)} f.$$

Preuve : :
montrons que :

Soient $0 < \alpha < 1$,$0 < \beta < 1$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ et $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}$

$$\begin{aligned}(I^{\alpha}_{a} D^{\alpha,\beta}_{a} f)(x) &= I^{\alpha}_{a}[(I^{\beta(1-\alpha)}_{a} D^{\gamma}_{a} f)(x)] \\ &= (I^{\alpha}_{a} \circ I^{\beta(1-\alpha)}_{a}) D^{\gamma}_{a} f(x) \\ &= (I^{\alpha+\beta-\alpha\beta}_{a} D^{\gamma}_{a} f)(x) \\ &= (I^{\gamma}_{a} D^{\gamma}_{a} f)(x).\end{aligned}$$

montrons que :

$$\begin{aligned}D^{\gamma}_{a} I^{\alpha}_{a} f &= (D^{\alpha+\beta-\alpha\beta}_{a} \circ I^{\alpha}_{a}) f \\ &= \left(\frac{d}{dx} I^{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}_{a} \circ I^{\alpha}_{a}\right) f \\ &= \left(\frac{d}{dx} I^{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}_{a}\right) f \\ &= D^{\beta}_{\alpha}(1-\alpha) f.\end{aligned}$$

3.1 Problème de Cauchy généralisé

Nous considérerons le problème de valeur initiale

$$D^{\alpha,\beta}_{a+} y(x) = f(x,y) \qquad x > a, 0 < \alpha < 1, 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \tag{3.2}$$

$$I^{1-\alpha}_{a+} y(a^{+}) = y_a \qquad , \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \tag{3.3}$$

$$C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b] = \{f \in C_{1-\gamma}[a,b], D^{\gamma}_{a+} f \in C_{1-\gamma}[a,b]\} \tag{3.4}$$

Définition 3.2. *[4] L'opérateur $0 < \alpha < 1$ de type $0 \leq \beta \leq 1$ et définie par*

$$D^{\alpha,\beta} I_a = I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} D I^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{a^+}$$

Lemme 3.3. *[4]*

Soient $0 < \alpha < 1, \qquad 0 \leq \beta \leq 1, \qquad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ *si* $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ *alors*

$$I^{\gamma}_{a^+} D^{\gamma}_{a^+} f = I^{\alpha}_{a^+} D^{\alpha,\beta}_{a^+} f$$

et $D^{\gamma}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f = D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} f$

Lemme 3.4. *[4]*
Soient $0 < \alpha < 1, \qquad 0 \leq \beta \leq 1, \qquad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ *si* $f \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *et* $I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a} f \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *alors*$D^{\alpha,\beta}_{a} I^{\alpha}_{a} f$ *existe dans* $[a,b]$ *et*

$$D^{\alpha,\beta}_{a} I^{\alpha}_{a} f(x) = f(x), \qquad x \in [a,b]$$

Preuve

D'après le Lemme 3.1 on a

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\beta}_{a} I^{\alpha}_{a} f(x) &= I^{\beta(1-\alpha)}_{a} D^{\beta(1-\alpha)}_{a} f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Soient* $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$, *et* $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[\alpha,\beta]$ *alors*

$$D^{\alpha,0}_{a} f =^{RL} D^{\alpha}_{a} f,$$

et

$$D^{\alpha,1}_{a} f =^{C} D^{\alpha}_{a} f.$$

Preuve

Si $\beta = 0$

$$
\begin{aligned}
(D_a^{\alpha,0}f)(x) &= \left(I_a^0 \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\alpha} f\right)(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}(I_a^{1-\alpha} f)\right)(x) \\
&= ({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x)
\end{aligned}
$$

Si $\beta = 1$

$$
\begin{aligned}
(D_a^{\alpha,1}f)(x) &= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^0 f\right)(x) \\
&= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} f\right)(x) \\
&= ({}^{C}D_a^{\alpha} f)(x)
\end{aligned}
$$

Exemple 3.1.1. *Prenons la fonction* $f(x) = (x-a)^{\delta}$

$$
\begin{aligned}
D_a^{\alpha,\beta}(x-a)^{\delta} &= I_a^{\beta(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_\alpha^{1-\beta(m-\alpha)}(x-a)^{\delta}) \\
&= I_a^{\beta(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(1-\beta)(m-\alpha)+\delta+1}(x-a)^{1-\beta}(m-\alpha)+\delta\right) \\
&= I_a^{\beta(m-\alpha)} \left(\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(1-\alpha-\beta m+\alpha\beta+\delta)}(x-a)^{\alpha\beta+-\alpha-\beta m}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(1+\delta-\alpha)}(x-a)^{\delta-\alpha} \\
&= {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\delta}.
\end{aligned}
$$

3.2 Équation intégrale de Voltera équivalente

Définition 3.3.

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{y_a}{\Gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta)}(x-a)^{(\alpha-1)(1-\beta)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt, \qquad x>a \end{aligned} \tag{3.5}$$

Théorème 3.1. *Soit* $\gamma = \alpha + \beta$ *ou* $0 < \alpha < 1$ *et* $0 \leq \beta \leq 1$
Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction telle que* $f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *pour chaque* $y \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *,si* $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ *,alors* y *satisfais (3.2)-(3.3)si et seulement si* y *satisfais (3.5)*

Preuve

D'abord nous prouvons la condition nécessaire
Soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ est de une solution(3.2)-(3.3)nous voulons prouver que c'est aussi a solution l'équation intégrale(3.5)par la définition de $C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ nous avons

$$I^{1-\gamma}_{a^+} y \in C[a,b] et \qquad D^{\gamma}_{a^+} y = D(I^{1-\gamma}_{a^+} y) \in C_{1-\gamma}[a,b]$$

Donc nous avons

$$I^{1-\gamma}_{a^+} y \in C^{1}_{1-\gamma}[a,b]$$

. pour obtenir

$$I^{\gamma}_{a^+} D^{\gamma}_{a^+} y(x) = y(x) - \frac{y_(a)}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1}, \qquad x \in [a,b] \tag{3.6}$$

Puisque par l'hypothèse $D^{\gamma}_{a^+} y \in C_{1-\gamma}[a,b]$ donne

$$I^{\gamma}_{a^+} D^{\gamma}_{a^+} y = I^{\alpha}_{a^+} D^{\alpha,\beta}_{a^+} y = I^{\alpha}_{a^+} f, \qquad dans[a,b] \tag{3.7}$$

de(3.6)et (3.7)on obtient

$$y(x) = \frac{y_(a)}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + [I^{\alpha}_{a^+} f(t, y(t))](x), \qquad x \in [a, b] \tag{3.8}$$

qui est l'équation (3.5)
maintenant nous prouvons la suffisante. Soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a, b]$ satisfait l'équation (3.5)qui peut être écrit comme (3.8) en appliquant l'opérateur $D^{\gamma}_{a^+}$ de (3.8).

$$D^{\gamma}_{a^+} y = D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \tag{3.9}$$

de (3.9)et l'hypothèse $D^{\gamma}_{a^+} y \in C_{1-\gamma}[a, b]$ nous avons

$$DI^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f = D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \in C_{1-\gamma}[a, b] \tag{3.10}$$

également puisque $f \in C_{1-\gamma}[a, b]$

$$I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \in C_{1-\gamma}[a, b] \tag{3.11}$$

Il découle de (3.10)et (3.11) cette $I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f \in C^{1}_{1-\gamma}[a, b]$ Ainsi f et $I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f$ maintenant en appliquant $I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}$ de (3.9) nous pouvons écrire

$$D^{\alpha,\beta} y(x) = f(x, y(x)) - \frac{[I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t, y(t))](a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}(x-a)^{\beta(1-\alpha)-1} \tag{3.12}$$

Puisque $1 - \gamma < 1 - \beta(1-\alpha)$,implique que

$$[I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t, y(t))](a) = 0$$

D'où la relation (3.12)réduite à $D^{\alpha,\beta}_{a^+} y(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in (a, b]$ montrons que la condition initial(3.3) est également valable ,nous appliquons $I^{1-\gamma}_{a^+}$ de (3.8) impliquent que

$$I^{1-\gamma}_{a^+} y(x) = y_a + [I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+} f(t, y(t))](x) \tag{3.13}$$

Dans (3.13)prendre la limite comme $x \to a$ on obtient

$$I_{a^+}^{1-\gamma} y(a) = y_a + [I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(t, y(t))](a) = y_a$$

Cela complète la preuve

Remarques 3.1. *dans les hypothèses de Théorème 3.1 la solution satisfait relation*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} y(x) - \frac{y_(a)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1}$$

Ainsi ,la solution satisfait le problème de Cauchy

$$D_{a+}^{\alpha} y(x) = \frac{y_(a)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1} + f(x,y), \qquad I_{a^+}^{1-\alpha}(y(a^+)) = 0$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section ,nous établissons l'existence d'une solution unique au problème de type Cauchy (3.2)-(3.3) dans l'espace $C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b]$ défini en (3.4) le résultat est obtenu sous la condition de Théorème 3.1 et la condition de Lipschitz sur $f(.,y)$ par rapport à la deuxième variable

$$|f(x, y_1 - f(x, y_2))| \leq A|y_1 - y_2| \tag{3.14}$$

pour tout $x \in (a,b]$ et pour chaque $y_1, y_2 \in G \subset \mathbb{R}, ouA > 0$ est constant

Théorème 3.2. *[4]*
Soient $0 < \alpha < 1, \qquad 0 \leq \beta \leq 1, \qquad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta.$
Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction qui* $f(., y(.)) \in C_{1-\gamma}^{\beta(1-\alpha)}[a,b]$ *pour tout* $y \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *et satisfait à la condition de Lipschitz(3.14)en ce qui concerne le deuxième argument alors il existe une solution unique y pour le problème de type Cauchy (3.2)-(3.3) dans l'espace* $C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$

Preuve :

Selon le Théorème 3.1,le résultat de l'équation intégrale de Voltera (3.5) équation ,qui suffit

$$y(x) = Ty(x) \tag{3.15}$$

Où

$$Ty(x) = y_0(x) + [I_{a^+}^{\alpha} f(t, y(t))](x) \tag{3.16}$$

Avec

$$y_0(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} \tag{3.17}$$

Nous prouvons d'abord l'existe d'une solution unique y dans les espaces $C_{1-\gamma}[a,b]$ notre preuve est basée sur le partitionnement de l'intervalle $[a,b]$ en sous intervalles sur les quels l'opérateur T est une contraction . Alors nous utilisons le théorème du point fixe de Banach . Notez $C_{1-\gamma}[C_1, C_2], a \leq C_1 \leq C_2 \leq b$ est un espace métrique complet avec la métrique définie par

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C_{1-\gamma}[C_1,C_2]} := \max_{x\in[C_1,C_2]} |(x-a)^{1-\gamma}[y_1(x) - y_2(x)]|$$

sélection $x_1 \in [a,b]$ tel que

$$w_1 = \frac{A\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}(x_1 - a)^{\alpha} < 1 \tag{3.18}$$

Où $A > 0$ est la constante de Lipschitz dans (3.14) clairement $y_0 \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$. Alors $Ty \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$.Dans ce cas T contes $C_{1-\gamma}[a, x_1]$ dans lui-même. D'ailleurs de

(3.14)-(3.16)et pour chaque$y_1, y_2 \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} &= \|I^{\alpha}_{a^+} f(t, y_1(t)) - I^{\alpha}_{a^+} f(t, y_2(t))\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq \|I^{\alpha}_{a^+}[|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|]\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq (x_1 - a)^{\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq A(x_1 - a)^{\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \|y_1(t) - y_2(t)\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} \\
&\leq w_1 \|y_1(t) - y_2(t)\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]}
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse 3.18 nous permet d'appliquer le théorème du point fixe de Banach pour obtenir une solution unique $y_0^* \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$ à l'équation (3.5)sur l'intervalle $[a, x_1]$. Si $x_1 \neq b$ alors on considère l'intervalle $[a, x_1]$. Sur cet intervalle on considère la solution $y \in C[x_1, b]$ pour l'équation

$$y(x) = Ty(x) := y_{01}(x) + [I^{\alpha}_{x^1} f(t, y(t))](x), \in C[x_1, b] \tag{3.19}$$

Où

$$y_{01}(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^{x_1} f(t, y(t))dt \tag{3.20}$$

Sélectionner $x_2 \in (x_1, b]$ tel que

$$w_2 = \frac{A}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_2 - x_1)^{\alpha} < 1 \tag{3.21}$$

Puisque la solution est définie de manière sur l'intervalle $(a, x_1]$,on peut considère que y_{01} est une fonction connue pour $y_1, y_2 \in [x_1 - x_2]$,il résulte de la condition de

Lipschitz (3.14) que

$$\begin{aligned}
\|Ty(1)-Ty(2)\|_{C[x_1,x_2]} &= \|I^{\alpha}_{x_1^+}f(t,y_1(t))-I^{\alpha}_{x_1^+}f(t,y_2(t))\|_{C[x_1,x_2]}\\
&\leq \|I^{\alpha}_{x_1^+}[|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|]\|_{C[x_1,x_2]}\\
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_2-x_1)^{\alpha}\|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\|_{C[x_1,x_2]}\\
&\leq \frac{A}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_2-x_1)^{\alpha}\|y_1(t)-y_2(t)\|_{C[x_1,x_2]}\\
&\leq w_2\|y_1(t)-y_2(t)\|_{C[x_1,x_2]}
\end{aligned}$$

Puisque $0 < W_2 < 1, T$ est une contraction ,puisque $f(x,y(x)) \in C[x_1,x_2]$ pour chaque $y \in C[x_1,x_2]$ implique que $I^{\alpha}_{x_1^+}f \in C[x_1,x_2]$ est donc le cote droit de (3.19) est dans $C[x_1,x_2]$. Donc T correspond $C[x_1-x_2]$,il existe une solution unique$y_1^* \in c[x_1,x_2]$ de équation (3.5) sur l'intervalle $[x_1,x_2]$. de plus que $y_1^*(x_1)=y_0^*(x_1)$ donc si $y_1^*(x_1)=y_0^*(x_1)$

$$y^*(x)=\begin{cases} y_0^*(x) & 0<x\leq x_1\\ y_1^*(x) & x_1<x\leq x_2\end{cases}$$

Puis $y_* \in C_{1-\gamma}[a,x_1]$, alorsy_* est l'unique solution de (3.5)en $C_{1-\gamma}[a,x_1]$ sur l'intervalle $(a,x_1]$ Si $x_2 \neq b$ nous répétons le processus si nécessaire .dites $M-2$ fois pour obtenir la solution unique$y_k^* \in C[x_k-x_{k+1}]$

$$k=2,3,...M, a=x_0<x_1<...x_M=b$$

tel que $w_{k+1}=\dfrac{A}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_{k+1}-x_k)^{\alpha}<1$ en conséquence , nous avons la solutions unique$y^* \in C_{1-\gamma}[a,b]$de (3.5) donne par

$$y^*(x)=y^*k(x),\in C(x_k-x_{k+1}], k=0,1,...M-1. \tag{3.22}$$

Il reste à montrer qu'une telle solution unique $y^* \in C_{1-\gamma}[a,b]$ est en fait $C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$

de (3.5). nous avons

$$y(x) = Ty(x) = y_0(x) + [I_{a^+}^{\alpha} f(t, y^*(t))](x)$$

Appliquer y aux deux cotes

$$\begin{aligned} D_a^{\gamma} y^*(x) &= D_a^{\gamma}[I_{a^+}^{\alpha} f(t, y^*(t))](x) = [D_a^{\gamma-\alpha} f(t, y^*(t))](x) \\ &= [D_a^{\beta(1-\alpha)} f(t, y^*(t))](x) \end{aligned}$$

tel que :$\gamma \geq \alpha$, par hypothèse . le cote droit est en $C_{1-\gamma}[a, b]$ et ainsi $D_{a^+}^{\gamma} y^*(x) \in C_{1-\gamma}[a, b]$ donc par le Théorème 3.1y^* est la solution unique de (3.2)-(3.3)

Chapitre 4

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer-Katugampola

Définition 4.1. *(Katugampola 2011[7])Soit $\alpha, c \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ et $\varphi \in X_c^p(a,b)$, ou $X_c^p(a,b)$ l'espace des fonctions mesurables de Lebesgue à valeur complexes . les intégrales généralisées , sont définies respectivement par*

$$({}^{\rho}I_{a_+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}\varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a \tag{4.1}$$

$$({}^{\rho}I_{b_-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{t^{\rho-1}\varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-\alpha}}dt, \qquad x < b \tag{4.2}$$

et $\rho > 0$.

Définition 4.2. *(Katugampola 2014 [8])Soient $\alpha, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$,et soit $n = [\alpha] + 1$,ou $[\alpha]$ est la partie entière de α.Les dérivées généralisées ,${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}(x)$ et ${}^{\rho}D_{a^-}^{\alpha}(x)$,sont définis par*

$$\begin{aligned} ({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}\varphi)(x) &= \delta_\rho^n({}^{\rho}I_{a^+}^{n-\alpha}\varphi)(x) \\ &= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{t^{\rho-1}\varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}}dt, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}({}^{\rho}D^{\alpha}_{a^-}\varphi)(x) &= (-1)^n\delta^n_{\rho}({}^{\rho}I^{n-\alpha}_{a^-}\varphi)(x)\\ &= \frac{(-1)^n\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n\int_x^b\frac{t^{\rho-1}\varphi(t)}{(x^{\rho}-t^{\rho})^{1-n+\alpha}}dt, \qquad (4.4)\end{aligned}$$

respectivement, si les intégrales existent et $\delta^n_{\rho} = \left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n$

Théorème 4.1. *Soient* $\alpha > 0, \beta > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ *et* $\rho, c \in \mathbb{R}, \rho \geq c$. *En suite pour* $\varphi \in X^p_c(a,b)$ *la propriété de semi-groupe est valide, c'est-à dire.*

$$({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}I^{\beta}_{a^+}\varphi)(x) = ({}^{\rho}I^{\alpha+\beta}_{a^+}\varphi)(x)$$

.

Lemme 4.1. *Soient* $x > a, {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}$ *et* ${}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}$ *,tel que défini dans les équations(4.1) et (4.3), respectivement . En suite pour* > 0 *et* $\xi > 0$*,on a*

$$\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\xi-1}\right](x) = \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\alpha+\xi)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha+\xi-1},$$

$$\left[{}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}\right](x) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

.

Lemme 4.2. *Soient* $0 < \alpha < 1, 0 \leq \gamma < 1$ *si* $\varphi \in C_{\gamma}[a,b]$*et* ${}^{\rho}I^{1-\alpha}_{a^+}\varphi \in C^1_{\gamma}[a,b]$ *, en suite*

$$({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a_+}\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\varphi)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}$$

pour tout $x \in (a,b]$

Lemme 4.3. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $0 \leq \gamma < 1$ *alors* ${}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}$ *est bornée de* $C_{\gamma,\rho}[a,b]$ *dans* $C_{\gamma,\rho}[a,b]$

Lemme 4.4. *Soit* $n \in \mathbb{N}_0$ *et* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ *tel que*
$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 < 1$ *puis*

$$C^n_{\delta_{\rho}}[a,b] \longrightarrow C^n_{\delta_{\rho,\mu_1}}[a,b] \longrightarrow C^n_{\delta_{\rho,\mu_2}}[a,b]$$

Et

$$\|f\|_{C^n_{\delta_\rho,\mu_2}[a,b]} \leq K_{\delta_\rho}\|f\|_{C^n_{\delta_\rho,\mu_1}[a,b]},$$

Ou

$$K_{\delta_\rho} = \min\left[1, \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\mu_2-\mu_1}\right], \qquad a \neq 0$$

En particulier ,

$$C[a,b] \longrightarrow C_{\mu_1\rho}[a,b] \longrightarrow C_{\mu_2\rho}[a,b],$$

Et

$$\|f\|_{C_{\rho,\mu_2}[a,b]} \leq \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\mu_2-\mu_1}\|f\|_{C_{\rho,\mu_1}[a,b]}, \qquad a \neq 0$$

$$({}^\rho D^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi)(x) = f(x,\varphi(x)), \qquad x > a > 0 \tag{4.5}$$

Ou,$0 < \alpha < 1, \qquad 0 \leq \beta \leq 1, \qquad \rho > 0$ avec la condition initiale

$$({}^\rho I^{1-\gamma}_{a^+}\varphi)(a) = c, \qquad \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha), \qquad c \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

$$c_0 = 1, \qquad c_k = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma[\alpha(jm+l)+1]}{\Gamma[\alpha(jm+1+l)+1]} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

4.1 La dérivée fractionnaire de Hilfer-Katugampola

Dans cette section , le principal du résultat, on introduit la dérivée fractionnaire de Hilfer-Katugampola et discuter d'autres formulations pour les dérives fractionnaires.

Définition 4.3. *Soit α et β de d'ordre de type satisfait à $n-1 < \alpha < n$ et $0 \leq \beta \leq 1$, avec $n \in \mathbb{R}$,la dérivé par rapport à x, avec $\rho > 0$ d'une fonction $\varphi \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b]$est défini par*

$$\begin{aligned}
({}^\rho D^{\alpha,\beta}_{a}\varphi)(x) &= \left(\pm{}^\rho I^{\beta(n-\alpha)}_{a}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a^\pm}\varphi\right)(x) \\
&= \left(\pm{}^\rho I^{\beta(n-\alpha)}_{a^\pm}\delta^n_\rho I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a^\pm}\varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

ou I est l'intégrale fractionnaire généralisée donnée dans la Définition 4.1. Article , il faut considérer la cas $n = 1$ seulement cas le dérivé de Hilfer et la dérivée de Hilfer-Hadamard sont discuté avec $0 < \alpha < 1$.Notez qu'on présente et discuter de nos nouveaux résultats concernant la fraction Hilfer -Katugampola dérivé utilisant uniquement l'opérateur du coté gauche .Une procédure analogue peut être développé en utilisant l'opérateur du coté droit .

la propriété suivante montre qu'il est possible d'écrire opérateur ${}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+}$ en termes d'opérateur donnée par

$$\begin{aligned} {}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}(x) &= \delta^n_{\rho}({}^{\rho}I^{n-\alpha}_{a^+}\varphi)(x) \\ &= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{t^{\rho-1}\varphi(t)}{(x^{\rho}-t^{\rho})^{1-n+\alpha}}dt, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} {}^{\rho}D^{\alpha}_{a^-}(x) &= (-1)^n\delta^n_{\rho}({}^{\rho}I^{n-\alpha}_{a^-}\varphi)(x) \\ &= \frac{(-1)^n\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{t^{\rho-1}\varphi(t)}{(x^{\rho}-t^{\rho})^{1-n+\alpha}}dt, \end{aligned} \tag{4.9}$$

Propriété 4.1. *l'opérateur ${}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+}$ peut être écrit comme*

$${}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+} ={}^{\rho} I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\delta^{\rho}_{\rho}I^{1-\gamma}_{a^+} ={}^{\rho} I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\delta_{\rho}D^{\gamma}_{a^+}, \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$$

Preuve on a

$$\begin{aligned} ({}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^-}\varphi)(x) &= {}^{\rho}I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right) \\ &\times \left\{\frac{\rho^{1-(1-\beta)(1-\alpha)}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho^-1}}{(x^{\rho}-t^{\rho})^{1-(1-\beta)(1-\alpha)}}\varphi(t)dt\right\} \\ &= \left[{}^{\rho}I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\frac{\rho^{1+\alpha+\beta-\alpha\beta}}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha)-1}\times\int_a^x \frac{t^{\rho^-1}}{(x^{\rho}-t^{\rho})^{1-(1-\beta)(1-\alpha)}}\varphi(t)dt\right] \\ &= ({}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+}D^{\gamma}_{a^+}\varphi)(x) \end{aligned}$$

Ou l'opérateur D est la dérivé fractionnaire généralisée donnée dans la Définition 4.2.

Propriété 4.2. *La dérivé fractionnaire* ${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}$ *est interpolateur de la fonction suivante dérivé :Hilfer* $(\rho \to 1)$
Hilfer-Hadamard$(\rho \to 0^+)$
généralisée $(\beta = 0)$
Caputo type $(\beta = 1)$
Riemann-Liouville $(\beta = 0, \rho \to 1)$
Hadamard $(\beta = 0, \rho \to 0^+)$
Caputo $((\beta = 1, \rho \to 1$
Caputo-Hadamard$(\beta = 1, \rho \to 0^+)$
Liouville$(\beta = 0, \rho \to 1, a = 0)$ *et Weyl* $(\beta = 0, \rho \to 1, a = -\infty)$ *.Ce fait est illustre dans le diagramme.*

Lemme 4.5. *Soit* $0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ *si* $\varphi \in C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$*,alors*

$$ {}^{\rho}I_{a^+}^{\gamma} D_{a^+}^{\gamma}\varphi = {}^{\rho} I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi \tag{4.10} $$

$$ {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma} I_{a^+}^{\alpha}\varphi = {}^{\rho} D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\varphi \tag{4.11} $$

Preuve On preuve d'abord eq(4.10).En utilisant le Théorème 4.1 et la Propriété 4.1, on peux écrire

$$ \begin{aligned} {}^{\rho}I_{a^+}^{\gamma} D_{a^+}^{\gamma}\varphi &= {}^{\rho}I_{a^+}^{\gamma} I_{a^+}^{-\beta(1-\alpha)} D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi \\ &= {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} I_{a^+}^{-\beta+\alpha\beta} D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi \\ &= {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi \end{aligned} $$

prouver eq(4.11), on utilise la Définition 4.3 et la Théorème 4.1, obtient

$$\begin{aligned} {}^{\rho}D^{\gamma}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi &= \delta_\rho I^{1-\gamma}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi \\ &= \delta^{\rho}_{\rho} I^{1-\beta+\alpha\beta}_{a^+}\varphi \\ &= \delta^{\rho}_{\rho} I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi \\ &= {}^{\rho}D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi \end{aligned}$$

Lemme 4.6. *Soit* $\varphi \in L^1(a,b)$,*si* ${}^{\rho}D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi$ *existe sur* $L^1(a,b)$ *alors*

$${}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi =^{\rho} I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi$$

Preuve

$$\begin{aligned} {}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi &= {}^{\rho}I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} D^{\gamma}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi =^{\rho} I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\delta_\rho I^{1-\gamma}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi \\ &= {}^{\rho}I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\delta_\rho I^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi =^{\rho} I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi \end{aligned}$$

Lemme 4.7. *Soient* $0<\alpha<1, 0\leq\beta\leq 1$ *et* $\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$ *si* $\varphi\in C_{1-\gamma}[a,b]$ *et* ${}^{\rho}I^{1-\beta(1-\alpha)} \in C^1_{1-\gamma}[a,b]$ *alors* ${}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi$ *existe sur* $(a,b]$ *et*

$${}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi = \varphi, \qquad x\in(a,b]. \tag{4.12}$$

Preuve On utilise les Lemmes 4.1,4.6 et 4.2 on obtient

$$\begin{aligned} ({}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) &= ({}^{\rho}I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi)(x) \\ &= \varphi(x) - \frac{({}^{\rho}I^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\beta(1-\alpha)-1} \\ &= \varphi(x), \qquad x\in(a,b]. \end{aligned}$$

4.2 Équivalence entre le problème généralisé de Cauchy et l'équation intégrale de voltera

On considère l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante

$$({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) = f(x,\varphi(x)), \qquad x > a > 0 \tag{4.13}$$

Ou,$0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1, \rho > 0$ avec la condition initiale

$$({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\gamma}\varphi)(a) = c, \qquad \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha), \qquad c \in \mathbb{R} \tag{4.14}$$

Le théorème suivant donne l'équivalence entre le problème eq(4.13)(4.14) et l'équation intégrale de voltera, donnée par

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{c}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} t^{\rho-1}f(t,\varphi(t))dt.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Théorème 4.2. *Soit $\gamma = \alpha+\beta(1-\alpha), 0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$ si $f : (a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(.,\varphi(.)) \in C_{1-\gamma}[a,b]$ pour tout $\varphi \in C_{1-\gamma}[a,b]$, alors φ satisfait les équations (4.13),(4.14) si et seulement si cela satisfait équation(4.15)*

4.3 Existence et unicité de solution au problème de Cauchy

dans cette section , on trouve l'existence et l'un des unes de la solution pour les problèmes équations (4.13) (4.14) dans l'espace $C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}$, $p[a,b]$, définie dans le Propriété4.2, et sur $(.\varphi)$ avec respect de seconde variable , c'est a dire que $f(.,\varphi)$

délimité dans une région $G \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha \| f(x, \varphi_1) - f(x, \varphi_2) \|_{C_{1-\gamma,\rho[a,b]}} \leqslant A \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{C_{1-\gamma,\rho[a,b]}} \tag{4.16}$$

pour tout $x \in (a, b]$ et pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in G$ ou $A \geqslant 0$ est constante

Théorème 4.3. *Soient* $0 < \alpha < 1, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$ *soit* $f : (a, b)] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(., \varphi(.)) \in C_u, \rho[a, b]$ *pour tous* $\varphi \in C_u, [a, b]$ *avec* $1 - \alpha \leqslant u \leqslant 1 - \beta(1 - \alpha)$ *satisfaisant la condition de Lipschitz eq(4.16) par a rapport a la* 2^{me} *variable en suit il existe une solution unique* φ *pour le problème eq (4.13) -(4.14)dans l'espace* $C^{\alpha+\beta}_{1-\gamma,u[a,b]}$

Preuve selon le Théorème 4.2 il suffit de prouver qu'il existe une solution unique pour l'équation intégrale de Volterra eq(4.15) cette équation peut être écrire comme :

$$\varphi(x) = T\varphi(x)$$

ou

$$T\varphi(x) = \varphi_0(x) + [{}^\rho I^\alpha_{a^+} f(t, \varphi(t))](x) \tag{4.17}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{c}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{\gamma-1} \tag{4.18}$$

ainsi on divise l'intervalle $(a, b]$ en sous intervalles sur lesquelles opérateur T est une contraction on utilise alors le théorème de Banach a point fixe.

Théorème 4.4. *Note que* $\varphi \in C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ *ou* $a = x(0) < x_1 < .... < x_n = b$ *et* $C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ *est un espace métrique complet avec des métriques* $d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1-\gamma,\rho[a,x_1]} = \max_{x\in[a,x_1]} a \in [a, x_1] \left| \left(\frac{x^\rho - x^a}{\rho} \right)^{1-\gamma} [\varphi_1 - \varphi_2] \right|$ *choisir* $x_1 \in [a, b]$ *telle que l'inégalité*

$$w_1 = \frac{A\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \left(\frac{x_1^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha < 1 \tag{4.19}$$

ou $A > 0$ est une constante , tient, comme dans eq(4.16) . Ainsi $\varphi_0 \in C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ et de Lemme 4.3 on a $T\varphi \in C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ et T carte $C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ en $C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$. par conséquent de eq(4.16)-(4.17) , Lemme 4.3 et pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$, en peut écrire

$$\begin{aligned}
\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{C_{1-\gamma}[a,x_1]} &= \|{}^\rho I^\alpha_{a^+} f(t, \varphi_1(t)) -{}^p I^\alpha_{a^+} f(t, \varphi_2(t))\|_{C_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}} \\
&= \|{}^\rho I^\alpha_{a^+}[|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|]\|_{C_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}} \\
&\leqslant \left(\frac{x_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \\
&\times \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\|_{C_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}} \\
&\leq A\left(\frac{x_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{C_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}} \\
&\leqslant w_1\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{C_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}}
\end{aligned}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{C}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \tag{4.20}$$

Par hypothèse eq(4.19) . on peut utiliser le point fixe de Banach pour obtenir une solution unique $Q^* \in c_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ pour eq(4.15) sur l'intervalle $(a, x_1]$.cette solution est obtenue en tant que d'un séquence convergente$T^k\varphi^*_(0)$:

$$\lim_{k\to\infty} \|T^k\varphi^*_0 - \varphi^*\|_{c_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}} = 0 \tag{4.21}$$

ou φ^*_0 est une fonction quelconque dans $c_{1-\gamma}, \rho[a, x_1]$ et

$$\begin{aligned}
(T^k\varphi^*_0)(x) &= (TT^{k-1}\varphi^*_0)(x) \\
&= \varphi_0(x) + [{}^\rho I^\alpha_{a^+} f(t, (T^{k-1}\varphi^*_0)(t))](x) \qquad k \in N
\end{aligned}$$

on prend $\varphi_0^*(x) = \varphi_0(x)$ avec $\varphi_0(x)$ définie par eq (4.20) .dénotant

$$\varphi_k(x) = (T^k\varphi_0^*)(x) \qquad k \in N \tag{4.22}$$

Alors eq(4.22) admet le formulaire

$$\varphi_k(x) = \varphi_0(x) + [{}^\rho I_a^\alpha + f(t, \varphi_{k-1}(t))](x) \qquad k \in N$$

D'autre part , eq(4.21) peut être s'écrit comme

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\varphi^* - \varphi^*\|_{c_{1-\gamma,\rho[a,x_1]}} = 0$$

on considère l'intervalle $[x_1, x_2]$ ou $x_2 = x_1 + h_1, \qquad h_1 > 0$ et $x_2 < b$ puis par eq (4.15) , on peut écrire

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{C}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1} t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t, \varphi(t))dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x} \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t, \varphi(t))dt \\
&= \varphi_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x} t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t, \varphi(t))dt
\end{aligned}$$

où $\varphi_{01}(x)$, définie par :

$$\varphi_{01}(x) = \frac{c}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1} t^{p-1}\left(\frac{x^p - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t, \varphi(t))dt$$

et la fonction connue et $\varphi_{01}(x) \in C_{1-\gamma,\rho[x_1,x_2]}$, utiliser les mêmes argument a dessus, on conclut qu'il existe une solution unique $\varphi^* \in C_{1-\gamma,\rho[x_1,x_2]}$ pour eq (4.15) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. le prochaine intervalle a prendre en compte et $[x_1, x_2]$, ou $x_3 = x_2 + h_2, h_2 > 0$ et $x_3 < b$. Répéter ce processus , on conclut qu'il existe une solution unique $\varphi^* \in$

$C_{1-\gamma,\rho[x_1,x_2]}$ pour (4.15) sur l'intervalle $[a,b]$. Il faut montrer que cette solution unique $\varphi^* \in C_{1-\gamma}\rho[a,b]$ est aussi dans $C_{1-\gamma^{\alpha-\beta},u[a,b]}$ il faut montrer que $({}^pD^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi^*) \in C_u, \rho[a,b]$ on souligne ce φ^* est la limite de la séquence φ_k, ou $\varphi_k = T^k\varphi_0^* \in C_{1-\gamma}, \rho[a,b]$, c'est a dire

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \varphi^*\|_{C_{1-\gamma,\rho[a,b]}} = 0 \tag{4.23}$$

sur un chois adéquat de $\varphi_0^*(x)$ sur chaque sous-intervalle $[a,x_1], ..., [x_{n-1}]$ si $\varphi_0(x) \neq 0$ alors ou peut admettre $\varphi_0^* = \varphi_0$ et une fois $\mu \geqslant 1-\gamma$, de Lipschitz condition , eq(4.16) et par Lemme 4.4 on peut écrire

$$\begin{aligned} \|{}^\rho D^{\alpha,\beta}_{0^+}\varphi_k -{}^\rho D^{\alpha,\beta}_{0^+}\varphi^*\|_{c_{\mu,p[a,b]}} &= \|f(x,\varphi_k) - f(x,\varphi^*)\|_{c_{\mu,\rho[a,b]}} \\ &\leqslant A\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\mu-1+\gamma} \|\varphi_k - \varphi^*\|_{c_{1-\gamma,\rho[a,b]}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

par eq (4.23) et (4.24) , on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \|\ {}^\rho D^{\alpha}_{a^+}\varphi_k -{}^\rho D^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi^*\|_{c_{\mu,\rho[a,b]}} = 0$$

de cette dernière expression , on a $(D^{\alpha,\beta}_a\varphi^*) \in c_{\mu,\rho[a,b]}$ si
$((D^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi_k) \in c_{\mu,\rho[a,b]}), k = 1,2.......$ Depuis $({}^\rho D^{\alpha}_{a^+}\varphi_k)(x) = f(t,\varphi_{k-1}(x))$, puis par l'argument précédent, on obtient que $f(t,\varphi*(.)) \in c_{\mu,p[a,b]}$ pour tout $\varphi^* \in c_{\mu,\rho[a,b]}$. par conséquence, $\varphi^* \in c^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\mu[a,b]}$

4.4 Problèmes de type Cauchy pour les équations différentielles fractionnaire :

Dans cette section , on présente des solutions explicites aux équations différentielles fractionnaires impliquant l'opérateur différentielle de Hilfer-Katugampola $({}^\rho D^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi)(x)$ d'ordre $0 < \alpha < 1$ et type $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ dans l'espace $c^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\rho[a,b]}$ définie dans la Propriété 4.2 . On considère le problème de Cauchy suivant :

$$({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) - \lambda\varphi(x) = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \tag{4.25}$$

$$({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\gamma}\varphi)(a) = C, \qquad \gamma = \alpha - \beta(1-\alpha) \tag{4.26}$$

ou $C, \lambda \in \mathbb{R}$. on suppose que $f(x) \in c_{\mu,\rho[a,b]}$ avec $0 \leqslant \mu < 1$ et $\rho > 0$. En suite , par le Théorème 4.2 , le problème équations(4.25)-(4.26) ,équivalente a résoudre l'intégrale équation suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{C}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)\varphi(t)dt \\ &+ \frac{1}{I(\alpha)}\int_a^x t^{p-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)dt \end{aligned} \tag{4.27}$$

pour résoudre eq (4.27) , on utilise la méthode des approximation successive , c'est -a-dire

$$\varphi(x)\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \varphi_0(x) + \frac{\lambda}{I(\alpha)}\int_0^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\varphi_{k-1}(t)dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\varphi_{k-1}(t)dt \qquad ,(k \in N) \end{aligned} \tag{4.29}$$

on utilise eq (4.1)-(4.28) et le Lemme 4.1 , on a l'expression suivante pour :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_0(x) + ({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\varphi_0)(x) + ({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f)(x) \\ &= C\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j + \beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j + \beta(1-\alpha)-1} + ({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f)(x) \end{aligned} \tag{4.30}$$

De même , en utilisant les équations (4.28)-(4.30) et le Théorème 4.1 on obtient une expression pour φ_2, comme suite :

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \varphi_0(x) + ({}^\rho I^\alpha_{a^+}\varphi_1)(x) + ({}^\rho I^\alpha_{a^+} f)(x) \\
&= c\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} \\
&+ \lambda({}^\rho I^\alpha_{a^+} +^\rho I^\alpha_{a^+} f)(x) + ({}^\rho I^\alpha_{a^+} f)(x) \\
&= c\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} \\
&+ \int_a^x \sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j)} t^{\rho-1} \frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}^{\alpha j-1} f(t)dt
\end{aligned}$$

pour suivant ce processus , l'expression de $\varphi_k(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= c\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda^{j-1}}{I(\alpha j+\beta(1-\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} \\
&+ \int_a^x \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda^{j-1}}{I(\alpha j)} t^{\rho-1} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j-1} f(t)dt.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$k \to +\infty$ on obtient l'expression $\varphi(x)$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= C\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} \\
&+ \int_a^x \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda^{j-1}}{I(\alpha j)} t^{\rho-1} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j-1} f(t)dt.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

changer l'indice de somme dans cette dernière expression
$j \to j+1$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j+\gamma)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\gamma-1} \\ &+ \int_a^x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)} t^{\tau-1} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\gamma-1} \end{aligned} \tag{4.33}$$

En utilisant la Définition 1.3, on peut réécrire la solution en termes de deux paramètre Mittag-Lefler les fonctions

$$\varphi(x) = c\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}\left[\lambda\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}\right]$$
$$+\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\rho}\left[\lambda\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}\right] f(t)dt \tag{4.34}$$

la fonction $f(x,\varphi) = \lambda\varphi(x) + f(x)$ vérifie la condition de Lipschitz, (4.16) pour tout $x_1, x_2 \in [a,b]$ et tout $y \in G$, ou G est un ensemble ouvert sur $\mathbb{R}$. si $\mu \geqslant 1-\gamma$, alors par Théorème (4.3) , le problème équations(4.25)-(4.26) a une solution unique donnée par eq (4.34) dans une espace $C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\mu[a,b]}$. Note que le problème eq (4.25) -(4.26) doute la solution est donnée par eq (4.34) , comprend les cas particulière suivante :

1. Si $\rho \to 1$ et $\beta = 0$, alors $\gamma = a$ et on a un problème impliquant Riemann-Liouville la dérivée fractionnaire , sa solution peut être trouvée dans (Kilbas et al .
2. Pour $\rho \to 1$et $\beta = 1$ notre dérivée devient la dérivée de Caputo, la solution peut être trouvée dans (Kilbas).
3. Considérant $\rho \to 0^+$ et $\beta = 0$, on a $\gamma = a$ un problème de Cauchy formulé avec la dérivé Hadamard ; la solution peut être trouvé dans (kilbas).
4. D'autre cas particuliers sur viennent lorsque on modifie les paramètres tel que d'écrits dans la Propriété 4.2 certains d'autre eux sont présentes a- dessous.

5. Un cas particulier et le cas lorsque $f(x) = 0$, on a le problème suivant :

$$({}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) - \lambda\varphi(x) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1; \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

$$({}^\rho I_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}\varphi)(a) = C, \qquad \gamma = \alpha + \beta(1-\gamma).$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a < x \leqslant b$. la solution est donnée par

$$\varphi(x) = C\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-\rho}, \qquad E_{\alpha,\gamma}\left[\lambda\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}\right]$$

En autre , considérer le problème de Cauchy suivant :

$$({}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) - \lambda\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\xi}\varphi(x) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{4.35}$$

$$({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}\varphi)(a) = C, \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad \rho > 0 \tag{4.36}$$

avec $\lambda, \xi \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b$ et $\xi > -\alpha$. on suppose $[\lambda\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\xi}\varphi] \in C_{1-\alpha,\rho[a,b]}$
En suite , par le Théorème 4.2,le problème(4.35)-(4.36) est équivalent a intégrale suivante a l'équation :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} \\ &+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\xi}\varphi(t)dt\end{aligned} \tag{4.37}$$

on applique la méthode des approximation successives pour résoudre l'équation intégrale eq (4.7), c'est on considère

$$\varphi_0(x) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} \tag{4.38}$$

et

$$\varphi_k(x) = \varphi_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1} \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\xi} \varphi_{k-1}(t)dt \tag{4.39}$$

pour $k = 1$ et en utilisant le Lemme 4.1 , on a

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_0(x) + \lambda \left({}^pI_a^\alpha \left(\frac{t^p - a^p}{p}\right)^{\xi} \varphi_0 \right)(x) \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} + \frac{c\lambda}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\xi)}{\Gamma(2\alpha+\xi)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{2\alpha+\xi-1} \end{aligned} \tag{4.40}$$

pour $k = 2$ et en utilisant a nouveau lemme , on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi_0(x) + \lambda \left({}^\rho I_{a^+}^\alpha \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\xi} \varphi_1 \right)(x) \\ &= \varphi_0(x) + \frac{c\lambda}{\Gamma(\alpha)} \left({}^\rho I_{a^+}^\alpha \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\xi-1} \right)(x) \\ &+ \frac{c\lambda^2}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\xi)}{\Gamma(2\alpha+\xi)} \left({}^\rho I_{a^+}^\alpha \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{2\alpha+2\xi-1} \right)(x) \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} \left(1 + c_1 \left[\lambda \frac{x^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{\alpha+\xi} \right] \\ &+ c_2 \left[\lambda \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\xi} \right]^2 \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\xi)}{\Gamma(2\alpha+\xi)} \qquad c_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\xi)\Gamma(2\alpha+2\xi)}{\Gamma(3\alpha+2\xi)\Gamma(3\alpha+\xi)} \tag{4.41}$$

En continuant ce processus , on obtient l'expression pour $\varphi_k(x)$, donnée par :

$$\varphi_k(x) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x^p - a^p}{p}\right)^{\alpha-1} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} c_j \left[\lambda \left(\frac{x^p - a^p}{p}\right)^{\alpha+\xi} \right]^j \right] \tag{4.42}$$

ou

$$c_j = \Pi_{i=1}^{j} \frac{\Gamma[r(\alpha+\xi)]}{\Gamma[r(\alpha+\xi)+\alpha]}, \qquad j \in N \tag{4.43}$$

on peut écrire la solution de l'équation en termes de Mittag- Lefler la fonction généralisé :

$$\varphi_k(x) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_\alpha, \frac{1+\xi}{\alpha}, \frac{1+(\xi-1)}{\alpha} 1+\xi/\alpha \left[\lambda \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\xi}\right]. \tag{4.44}$$

si $\xi \geqslant 0$ eq(4.16)

Conclusion

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisations de la dérivation et de l'intégration ordinaires ordre arbitraire. Notre but principal dans ce mémoire est de présenter plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo , Hilfer et Hilfer- Katugampola dans un espace de Banach ce résultats est obtenu à l'aide de la technique de point fixe combinée avec un certain processus de continuation.

Bibliographie

[1] J.Dugundji,A.Granas,
Fixed point Theory,Springer-Verlag,New York,2003.

[2] |.Podlubny,Fractional Différentiel Équations,Academic Press,San Diego,1999.

[3] S.G.Samko,A.A.Kilbas,O.I.Marichev,Fractionals Integrals and Derivatiyes.Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon,1993.

[4] R.Hilfer(Ed.),Applications of Fractional Calculus in Physique,World Scientific,Singapore,2000.

[5] Hacen DIB, Equations Différentielles Fractionnaires EDA-EDO (4éme école) Tlemcen,mai 2009,23-27.Dérivation fractionnaire au sens de Hilfer et applications aux équations différentielles fractionnaires.

[6] S.Zhang,Positive solutions for boundary-value problème of nonlinear fractional differntial equations,Electron.J.Differntial Equations,26(2006).1-12

[7] Katugampola UN (2011) New approach to a generalized fractional integral. Appl Math Comput 218 :860–865

[8] Katugampola UN (2014) A new approach to generalized fractional derivatives. Bull Math Anal Appl 6 :1–15