REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Mémoire de fin d'études Pour obtenir

le diplôme de Master

Théme

Notions sur les fonctions de distribution, réarrangement et applications

Présenté par :

*BENAOUALI MOHAMED

*BENCHOHRA YOUNES

*FETTOH ABDELHAK

*NOUIDIR ABDELLAH

soutenu le 02/07/2019 devant le Jury composé de

***Mr. HALIM BENALI**	**Président**
***Mr.SOFRANI MOHAMMED**	**Examinateur**
***Mr. SENOUCI AEK**	**Encadreur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Table des matières

REMERCIEMENTS

Nos remerciements avant tout le Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.
Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur
Monsieur M.A.SENOUCI
pour m'avoir donné la chance de travailler tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessé de nous donner ses conseils et remarques.
Nous remerciements s'adressent aussi aux membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger ce travail.
Merci à vous M.Halim, d'avoir accepté de présider le jury.
Merci à vous M. SOFRANI pour faire l'honneur d'accepter d'examiner ce travail.
Nos remerciements vont également à tous les professeurs et enseignants du départment mathématique qui ont suivi toute au long de notre cycle d'étude.
Nous exprimons nos profondes gratitudes à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré. Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidés de près ou de loin à élaborer et réaliser ce mémoire.
Et un grand merci à nos familles ainsi que nos amis et collègues pour leurs encouragements.

DÉDICACES

Après de longues années d'études et de travail, nous dédions ce modeste travail :
A mes très chers parents, que dieu les bénisse et les protège pour leurs soutien moral et financier, pour leurs encouragements et les sacrifices qu'ils ont endurés.
A mes frères et mes sœurs.
A l'esprit de mes grands-mères.
A tous mes oncles, tantes et cousins. A toute ma grande famille. A tous mes fidèles amis.
A mes enseignants qui nous ont dirigé et aidé et surtout soutenu pour être un jour un cadre en mathématique.
A tous ceux qui nous connaissent de près ou de loin.
Nous tenons enfin de dédier ce travail à tous mes amis d'étude de AFA et mes collègues et mes voisins.
A tous les proches qu'ils sont mentionnés et les autres qu'ils sont oubliés veuillez nous excuser.

Introduction

Dans ce travail on considère les notions de distributions et de réarrangements. Ces dernières sont étroitement liées aux espaces fonctionnelles de Marcinkiwiz, Lorenz. Ainsi ces notion sont appliquées à certaines opérateurs, par exemple : l'opérateur de Hardy-Littlewood.

Le mémoire comprend une introduction, et trois chapitres, une conclusion et une bibliographie.

Au 1^{er} chapitre sont abordés les espaces de Lebesgue où sont données quelques propriétés sous forme d'inégalités classiques telles que celle de Hölder, Minkowski ,de plus est considère le dual de l'espace de Lebesgue L_p.

Le 2^{eme} chapitre est composé de définition et propriété des fonctions de distribution et réarrangement (au sens de Lebesgue) et aux espace de Lebesgue.
Les fonctions de distribution et réarrangement des outils importants dans l'étude des espaces fonctionnelles, de la théorie d'interpolation et autre.

Dans le 3^{eme} chapitre sont données des applications des fonctions de distribution et de réarrangement, à savoir : au espace Marcinkiwiecz (espace faible) à la théorie d'interpolation, à l'opérateur maximale (Hardy Littlwood) et aux espace de Lorentz suivant aux même définis à l'aide de fonction de réarrangement.

Ainsi en considère à la fin du 3^{eme} chapitre une publication de MIGUEL A. ARINO et BENJAMIN MUCKENHOUPT sur les fonctions maximales sur l'espace de Lorentz classique et l'inégalité de Hardy avec poids pour une fonction décroissante, où dans les espace classiques de Lorentz on prouve que l'opérateur maximal est bornée en caractérisons les fonctions de poids.

Ici interviennent l'opérateur de Hardy et autre notion où sont utilisées les fonctions de distribution et de réarrangement.

A la fin on trouve une conclusion et une bibliographie assez récente et détaillée.

Chapitre 1

Espaces classiques de Lebesgue

1.1 Définition et inégalités intégrales

1.1.1 Notations :

1) On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle.

2) On note par p.p pour dire presque partout.

3) $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω mesurable .

4) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est noté par $C(\mathbb{R}^n)$.

5) On dit que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, et à support compact.

Lemme 1.1. ***(Lemme de Fatou)*** *: Soit f_k une suit des fonctions mesurables et positives sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} inf\,(f_n(x))$ est mesurable et de plus :*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx \leq \sup_{k\in N} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Démonstration : Voir [11],[4].

Théorème 1.1. ***(Convergence monotone)*** *Soient* $k \in \mathbb{N}, f_k$ *des fonctions non négatives mesurables sur ensemble* Ω *mesurable,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, de plus* $f_k(x) \leq f_{(k+1)}(x)$ *p.p, et* $f(x) = \lim_{k\to\infty} (f_k(x))$ *alors :*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k(x)dx = \int_{\Omega} \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx. \tag{1.1}$$

Démonstration : Voir [11],[4].

Théorème 1.2. ***(Convergence dominée)*** *Soient* $k \in \mathbb{N}, f_k$ *des fonctions mesurables sur ensemble* Ω *mesurable,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, et p.p existe sur* Ω *la limite finie* $f(x)$ *telle que :*
$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$*, s'il existe une fonction* G *intégrable et non négative, telle que p.p sur* Ω *:*

$$|f_k(x)| \leq G(x). \tag{1.2}$$

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$ *les fonctions* f_k *et la fonction* $f(x)$ *sont intégrable sur* Ω *et*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx. \tag{1.3}$$

Démonstration : voir [11],[4].

Remarque 1.1. *La plus petite possible fonction* G *dans* (1.3) *est la fonction* G *définie comme suit :*

$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|, \quad \forall x \in \Omega$$

Théorème 1.3. ***(Théorème de Fubini)*** *Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque tous Les $x \in E$, $f(x,y)$ est intégrable sur F, pour presque tous les $y \in F$ $f(x,y)$ est intégrable sur E et*

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \left(\int_F f(x,y)dy\right) dx = \int_F \left(\int_E f(x,y)dx\right) dy \tag{1.4}$$

Démonstration : Voir [11], [4].

Remarque 1.2. *Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.*

Théorème 1.4. ***(Théorème de Luzin)*** *Pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur un segment $[a,b]$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $\varphi(x)$ continue sur $[a,b]$ telle que :*

$$|\{x, f(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon, \tag{1.5}$$

Démonstration : Voir [7] Ch. V théorème 9.

1.2 L'espace de Lebesgue

Dans ce qui suit on définit l'espace de Lebesgue (espace des fonctions).

Définition 1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L_p(\Omega)$ si :*

(1) *f est mesurable sur Ω .*

(2) $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty$.

Exemple 1.2.1. *Soit :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in E_1 \\ -1 & si\ x \in E/E_1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Avec $E_1 \subset E, E_1$ *non mesurable, alors :*

(1) *n'est pas vérifiée.*

(2) $\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E dx\right)^{1/p} = |E|^{\frac{1}{p}} < \infty$, *donc* $f \notin L_p(E)$.

Définition 1.2. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \inf_{e\subset\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x) \tag{1.7}$$

$$\inf_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup_{e\subset\Omega} \inf_{x\in\Omega/e} f(x) \tag{1.8}$$

Définition 1.3. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *mesurable et soit* $f : \Omega \to \mathbb{C},\ |\Omega| > 0$,
On dit que $f \in L_\infty(\Omega)$ *si :*

(1) f *est mesurable sur* Ω .

(2) $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega} vrai|f(x)| < \infty$

Remarque 1.3. *On pose* $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ *pour* $|\Omega| = 0$.

Théorème 1.5. ***(Théorème de Riesz)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *un ensemble mesurable et* f *une fonction mesurable sur* Ω, *alors :*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \tag{1.9}$$

Démonstration : Voir [1], et [3].

1.2.1 Inégalités de Hölder :

Lemme 1.2. ***(Inégalité de Young)*** *Soit* $p, q \geq 1$, *alors :*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.10}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Lemme 1.3. *Pour* $0 < p < 1$, *on a :*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.11}$$

Corollaire 1.1. *Soit* $p, q, r \geq 1$ *tels que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *alors :*

$$\forall A, B \geq 0, \quad (AB)^r \leq \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q \tag{1.12}$$

Démonstration : Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.11) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$(AB)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q \tag{1.13}$$

Lemme 1.4. *Soit* Ω *un ensemble mesurable, si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *sont mesurables sur* Ω, *et* g *est non négative, alors :*

$$\inf_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx \tag{1.14}$$

Démonstration :. Soit $e \subset \Omega$ tel que $|e| = 0$, alors :

$$\int_\Omega fgdx = \int_{\Omega\backslash e} fgdx \leq \sup_{\Omega\backslash e} f(x) \int_\Omega gdx \tag{1.15}$$

Alors :

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega/e} f(x) \int_\Omega g(x)dx \tag{1.16}$$

d'où :

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \inf_{x\in e} \sup_{x\in\Omega\backslash e} f(x) \int_\Omega gdx = \sup_{x\in\Omega} \text{vraif}(x) \int_\Omega gdx \tag{1.17}$$

D'une manière analogue on prouve l'inégalité gauche de (1.14)

Corollaire 1.2. *Soit* Ω *un ensemble mesurable, si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *sont mesurables sur* Ω *et* $f \in L_\infty(\Omega), g \in L_1(\Omega)$, *alors :*

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)} \tag{1.18}$$

Démonstration :

$$\left| \int_\Omega fgdx \right| \leq \int_\Omega |fg|dx \leq \sup_{x \in \Omega} vrai|f(x)| \int_\Omega |g|dx \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)} \tag{1.19}$$

Théorème 1.6. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable, et* $0 < p \leq \infty, f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_q(\Omega)$ *,avec* $1/p + 1/q = 1$, *alors :*

i) *Si* $1 \leq p \leq \infty$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} \tag{1.20}$$

ii) *Si* $0 < p < 1, \forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\int_\Omega |fg|dx \geq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} \tag{1.21}$$

Pour la preuve de (1.16) *et* (1.17) *on utilise l'inégalité de Young* (1.11) *et* (1.12).

Corollaire 1.3. *Soit* $p > 0$, $p_1 \leq \infty, -\infty \leq p_2 \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, *alors :*

i) *Si* $p \leq p_1$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|g\|_{L_{p_2}(\Omega)} \tag{1.22}$$

ii) *Si* $p > p_1, \forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \geq \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|g\|_{Lp_2(\Omega)} \tag{1.23}$$

Pour la preuve de (1.18) *et* (1.19) *on applique respectivement* (1.16) *et* (1.17) *avec* $\frac{1}{p_1/p} + \frac{1}{p_2/p} = 1$.

Proposition 1.1. *Soit* $p_i \in]1, \infty[, i = 1, 2, \ldots, k,$ *et* $1 < r < \infty$ *tel que :*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$$

(les p_i *sont dits* r *conjugués),* $f_i \in L_{p_i}(\Omega),$ *alors :*

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L_r(\Omega)$$

et

$$\|f\|_{L_r(\Omega)} = \| \prod_{i=1}^{k} f_i \|_{L_r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L_{p_i(\Omega)}} .$$

Démonstration : Par récurrence.

1.2.2 Inégalités de Minkowski

Lemme 1.5. *Soit* $f, g \in L_\infty(\Omega),$ *alors on a l'inégalité suivante :*

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \tag{1.24}$$

Démonstration :

Soit e_1 et e_2 deux ensembles tels que $|e_1| = |e_2| = 0$, on pose $e = e_1 \cup e_2$ alors $\forall \epsilon > 0$, on a :

$$\sup_{\Omega/e_i} |f_i| \leq \|f_i\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2$$

et donc

$$\sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \sup_{\Omega/e} (|f_1| + |f_2|) \leq \sup_{\Omega/e} |f_1| + \sup_{\Omega/e} |f_2|$$

$$\leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \epsilon$$

$$\inf_{e} \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \epsilon$$

on fait tendre ϵ vers 0, d'où :

$$\inf_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}$$

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}$$

Théorème 1.7. ***(Inégalité de Minkowski)*** *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty, f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_p(\Omega)$, alors :*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.25}$$

Démonstration : Voir [3].

Corollaire 1.4. *Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L_p(\Omega)$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.26}$$

Démonstration : Par récurrence.

Corollaire 1.5. ***(Inégalité de Minkowski pour les sommes infinies)***
Soit $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$
alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.27}$$

Démonstration. On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{Lp}(\Omega) < \infty$.

A l'aide du critère de Cauchy pour les séries numériques et l'inégalité de Minkowski pour les sommes finies on montre que la somme $S_m = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$ est une suite de Cauchy et puisque L_p est complet, on déduit que :

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$$

on passe à la limite quand $m \to \infty$ et en vertu de la continuité des semi-normes $\sum_{k=1}^{m} f_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, lorsque $m \to \infty$, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$$

Théorème 1.8. *Soit* $0 < p < 1$*, et* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable, et* $f, g \in L_p(\Omega)$*, alors :*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{Lp(\Omega)}\right) \tag{1.28}$$

Démonstration : On utilise l'inégalité triviale $\forall a, b > 0$

$$(a+b)^p \leq c\,(a^p + b^p) \tag{1.29}$$

si $p \geq 1, c = 2^{p-1}$
et si $0 < p < 1$,
alors $c = 1$. On applique cette inégalité avec $a = |f|$ et $b = |g|$,
on obtient :

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx + \int_\Omega |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.30}$$

on applique l'inégalité (1.27), avec $c = \max\left(1, 2^{\frac{1}{p}-1}\right) = 2^{\frac{1}{p}-1}$, et donc

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L_p(\Omega)} &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

Lemme 1.6. *Soit* $a_i > 0, i = 1, \ldots, m,$ *alors on a l'inégalité suivante :*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_i\right)^p \leq c\left(\sum_{k=1}^{m} a_i^p\right) \tag{1.31}$$

avec $c = \max\left(1, m^{p-1}\right).$

Démonstration : Par récurrence à partir de l'inégalité (1.27).

Corollaire 1.6. *Soit* $0 < p < 1,$ *alors*

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq m^{\frac{1}{p}-1}\sum_{k=1}^{m}\|f_k\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.32}$$

Démonstration : A partir du Corollaire (1.1) et du Lemme (1.1)

Théorème 1.9. ***(Inégalité intégrale de Minkowski)***

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ *et* $F \subset \mathbb{R}^n$ *des ensembles mesurables, et* f *une fonction mesurable sur* $E * F$ *alors pour* $1 \leq p \leq \infty$ *on a :*

$$\|\int_F f(.,y)dy\|_{L_p(E)} \leq \int_F \|f(.,y\|_{L_p(E)})dy$$

Démonstration :$Voir[3]\ P:\ 316-317.$

Théorème 1.10. *Soient* $E \subset \mathbb{R}^m$ *et* $F \subset \mathbb{R}^n$*des ensemble , et* f *une fonction mesurable sur* $E * F$ *alors pour* $0 < q \leq p \leq \infty$ *on a*

$$\|\|f(x,y)\|_{L_y^q(F)}\|_{L_x^p(E)} \leq \|\|f(x,y)\|_{L_x^p(E)}\|_{L_y^q(F)} \tag{1.33}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\|\|f(x,y)\|_{L^q_y(F)}\|_{L^p_x(E)} &= \|(\int_F |f(x,y)^q dy|)^{\frac{1}{q}}\|_{L^p_x(E)} \\
&= \|\int_F |f(x,y)^q dy\|^{\frac{1}{q}}_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} \\
&\leq (\int_F \|\|f(x,y)|^q\|_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} dy)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq (\int_F \|f(x,y)\|^q_{L^p_x(E)} dy)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|\|f(x,y)\|_{L^p_x(E)}\|_{L^q_y(E)}
\end{aligned}$$

1.3 Propriétés des espaces de Lebesgue :

1.3.1 Dual de L_p

Définition 1.4. *On dit que $l : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur E si :*

(1) *$l(\alpha f + \beta f) = \alpha l(f) + \beta l(g)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $f, g \in E$.*

(2) *$|l(f)| \leq c\|f\|_E$ tels que $c \in \mathbb{R}$.*

Proposition 1.2. *l'application $l : L_p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \tag{1.34}$$

est une fonctionnelle linéaire continue. telles que : $g \in L_q(\Omega)$ et q le conjugue de p. L'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $L_p(\Omega)$est note par $(L_p(\Omega))^*$.

Démonstration :

1) La linéarité est évident .

2) La continuité :

$$|l(f)| = |\int_\Omega f(x)g(x)dx| \leq \int_\Omega |f(x)||g(x)|dx$$

par application de l'intégrale de Hölder, on obtient :

$$|l(f)| \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} \leq c\|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.35}$$

avec $c = \|g\|_{L_p(\Omega)}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarques 1.1. *L'espace dual $(L_p(\Omega))^*$est une espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ normé :*

$$\|l\| = sup\left\{|l(f)| : \|f\|_{L_p(\Omega)} \leq 1\right\} \tag{1.36}$$

1.3.2 Convergences dans L_p

Définition 1.5. *On dite qu'une suite de fonctions mesurable $f_n(x)$ converge on mesure vers une fonction $f(x)$ si pour tout $\sigma > 0$ on a :*

$$\lim_{n \mapsto \infty} |\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}| = 0 \tag{1.37}$$

Théorème 1.11. *Si une suite de fonction mesurable $f_n(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, elle converge vers la même fonction $f(x)$en mesure .*

Démonstration : voir [7] chapitre paragraphe 4 théorème 7.

Théorème 1.12. *Soit $f_n(x)$ une suite de fonction mesurable convergeant en mesure vers $f(x)$ .Alors ,de cette suite on peut extraire une sous suite $f_{n_k}(x)$ convergent vers $f(x)$ presque partout.*

Démonstration : voir [7] chapitre V paragraphe 4. théorème 8.

Définition 1.6. *Soit $(f_n)_n$une suite de fonction $L_p(\Omega)$ on dite que (f_n) converge faiblement vers f si :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} l(f_n) = l(f) \; pour \; tout \; l \in (L_p(\Omega))^* \tag{1.38}$$

Théorème 1.13. *Soit $f \in L_p(\Omega)$ telle que $l(f) = 0$ pour toute $l \in (L_p(\Omega))^*$ alors $f = 0$ p.p*

Théorème 1.14. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite des fonctions qui converge vers f dans $L_p(\Omega)$, alors :*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} inf \|f_n\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.39}$$

Théorème 1.15. *Soit $1 \leq p \leq \infty$,le dual de $(L_p(\Omega))$ et $(L_q(\Omega))$avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$et $l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ pour une certaine $g \in (L_q(\Omega))$ unique et de plus :*

$$\|l\| = \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.40}$$

Démonstration : voir [11] chapitre V paragraphe 4. théorème 2.14.

Définition 1.7. *On dite qu'une suite de fonctions $(f_n(x))$ de $L_p(\Omega)$ converge en moyenne vers $f(x) \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$ si l'égalité suivant est vérifie*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} = 0 \tag{1.41}$$

Proposition 1.3. *Si une suite de fonctions $(f_n(x))$ de L_p , $1 \leq p \leq \infty$ converge en moyenne de vers $f(x)$, alors elle converge faiblement vers la même fonction $f(x)$*

Démonstration : (A l'aide l'inégalité de Hölder) on a :

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)||g(x)|dx \leq \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}$$

par passage à la limite on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)||g(x)|dx \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}$$

et comme f_n converge en moyenne vers f , alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)||g(x)|dx = 0$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b (f_n(x)-f(x))(g(x))dx = 0$$

et donc f_n converge faiblement vers f.

Remarques 1.2. *Si $p=1$ alors la convergence faible est vérifie $\forall g(x)$ mesurable et bornée ,et donc la proposition* 1.3 *est aussi vérifiée.*

1.4 Inégalités multiplicatives

Soient $U \in \mathbb{R}^n$,U un ensemble mesurable, $0 < p_1 < p < p_2 < \infty$. Alors

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(U)}\|f\|^{\theta}_{L_{p_2}(U)}, \qquad (*)$$

et

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \left[\frac{p(p_2-p_1)}{(p-p_1)(p_2-p)}\right]^{\frac{1}{p}} \|f\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(U)}\|f\|^{\theta}_{L_{p_2}(U)}, \qquad (**)$$

où $\theta \in (0,1)$ est définie par l'égalité $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$.

Preuve : Soit $p_2 < \infty$, comme $\frac{p_1}{\alpha p} = 1 + \frac{p_1}{p2}, \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) > 1$ on applique l'inégalité de Holder les exposants $\frac{p_1}{\alpha p}$ et $\left(\frac{p_1}{\alpha p}\right)'$ et on obtient :

$$\int_E |f|^p dx \leq \int_E |f|^{\alpha p} \times |f|^{(1-\alpha)p} dx = \left(\int_E |f|^{p_1}\right)^{\frac{\alpha p}{p_1}} \times \left(\int_E |f|^{p_2} dx\right)^{\frac{(1-\alpha)p}{p_2}}$$

et elévant a la puissance $(\frac{1}{p})$ on a :

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_1}(E)} \times \|f\|^{\alpha}_{L_{p_2}(E)}, \qquad (*)$$

2) Soit $p_2 = \infty$. Alors d'aprés (2) on a $\theta = \dfrac{p_1}{p}$ et

$$\begin{aligned} \int_U |f|^p \, dx &= \int_U |f|^{\theta p} |f|^{(1-\theta)p} \, dx \\ &\leq (\int_U |f|^{\theta p} \, dx)(\int_U |f|^{p_2} \, dx)^{\frac{1}{p_2}(1-\theta)p} \\ &= \| \, |f|^{\theta p} \, \|_{L_1(U)} \| \, |f|^{(1-\theta)p} \, \|_{L_\infty(U)} \\ &= \|f\|^{\theta p}_{L_{p_1}(U)} \|f\|^{(1-\theta)p}_{L_\infty(U)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|^{\theta}_{L_{p_1}(U)} \|f\|^{(1-\theta)}_{L_\infty(U)}.$$

Chapitre 2

Fonctions de distribution et de réarrangement

2.1 Fonction de distribution

Définition 2.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable, tel que $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction mesurable. La fonction λ_f est dite une fonction de distribution de f,*
Si : $\forall\ \sigma \in [0, \infty)$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} \tag{2.1}$$

Remarques 2.1. *de la définition on peut déduire :*

(1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$

(2) *Si $f \sim g$ Alors :* $\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma)$ *sur* $[0, \infty)$

(3) *Si sur $[0, \infty)$* $|f| > |g|$ *p.p Alors :* $\lambda_f(\sigma) \geq \lambda_g(\sigma)$

Preuve :

(1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$ évidente

(2) Soient $E = (0, \infty)$, $\sigma \in [0, \infty[$ et $g \sim f$

$g \sim f \Leftrightarrow (g \neq f$ sur $E_1 \subset E$ Tels que : $mes\,\{E_1\} = 0)$

et $(g = f$ sur $E/E_1 = E_2)$

tel que $E = E_1 \cup E_2$

$$\begin{aligned}
\lambda_g(\sigma) &= mes\{x \in E : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_1 : |g(x)| > \sigma\} + mes\{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_1 : |f(x)| > \sigma\} + mes\{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} \\
&= \lambda_f(\sigma)
\end{aligned}$$

donc :

$$\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma)$$

(3) On pose :

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} = mes\{E_1\}$$

$$\lambda_g(\sigma) = mes\{x \in E : |g(x)| > \sigma\} = mes\{E_2\}$$

Donc

$$|g(x)| > \sigma \Rightarrow |f(x)| > \sigma$$

Alors Si

$$\begin{aligned}
x \in E_2 \Rightarrow x \in E_1 &\Rightarrow E_2 \subset E_1 \\
&\Rightarrow mes\ \{E_2\} \leq mes\ \{E_1\} \\
&\Rightarrow \lambda_g(\sigma) \leq \lambda_f(\sigma)
\end{aligned}$$

Lemme 2.1. *Pour σ_1, σ_2 positifs tels que $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, et pour f,g des fonctions mesurables, on a :*

$$\lambda_{f+g}(\sigma) = \lambda_f(\sigma_1) + \lambda_g(\sigma_2) \tag{2.2}$$

Proposition 2.1. *Soient* $n = 1, E = (0, \infty)$ *La fonction* f *est positive, continue, strictement décroissante sur* $(0, \infty)$ *et* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
alors :

1) $\lambda_f(0) = +\infty$.

2) $\forall\ \sigma \in [0, \infty[\,,\ \lambda_f(\sigma) = f^{-1}(\sigma)$

Preuve :

1) $\lambda_f(0) = mes\{x \in E : f(x) > 0\}$ *comme* f *est positive alors :*

$$\begin{aligned}\lambda_f(0) &= mes\,\{E\}\\ &= mes\,\{(0, \infty)\}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

2) *soit* $\sigma \in [0, \infty[$,

$$\begin{aligned}\lambda_f(\sigma) &= mes\{x \in E : f(x) > \sigma\}\\ &= mes\{x \in E : x < f^{-1}(\sigma)\}\\ &= mes\left\{(0, f^{-1}(\sigma))\right\}\\ &= f^{-1}(\sigma)\end{aligned}$$

Rappels : Si $\forall k \in \mathbb{N}$ les ensembles E_k sont mesurables et non nuls et $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ est aussi mesurable Alors :

$$mes\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} mes\,\{E_k\} \tag{2.3}$$

Si de plus les ensembles E_k sont disjoint deux a deux Alors :

$$mes\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} mes\,\{E_k\} \tag{2.4}$$

a) Si $E_k \subset E_{k+1}$ Alors :

$$mes\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\} = \lim_{k\longrightarrow\infty} mes\{\ E_k\} \tag{2.5}$$

b) Si $E_{k+1} \subset E_k$ et $mes\{E_k\} < \infty$ Alors :

$$mes\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right\} = \lim_{k\longrightarrow\infty} mes\{E_k\} \tag{2.6}$$

Lemme 2.2. *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$, Eun ensemble mesurable, $m \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m$, $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$ des ensembles mesurables non vides disjointes deux a deux (Des sous ensemble de E de mesure finie) ou*
$f = \sum_{k=1}^{m} a_k.\chi_k$ (ou χ_k sont des fonctions indicatrices des ensembles E_k) alors :

1) $\forall\sigma \in [a_m, \infty)$

$$\lambda_f(\sigma) = 0 \tag{2.7}$$

2) $\forall\sigma \in [a_{k-1}, a_k]$ *et* $\forall k \in [1, \ldots, m]$

$$\lambda_f(\sigma) = \sum_{k=1}^{m} mes\{E_k\} \tag{2.8}$$

Proposition 2.2. *Soit f une fonction qui vérifie les conditions de lemme (2.2) c.a.d :*

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k\chi_k$$

Si $0 < p < \infty$ on a :

$$\int_E |f|^p\, dx = \sum_{k=1}^{m} a_k\ mes\{E_k\} \tag{2.9}$$

Preuve : On a : $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ et $i, j = \overline{1, m}$

alors : $mes\{E\} = \sum_{k=1}^{m} mes\{E_k\}$ et $E = \bigcup_{k=0}^{m} E_k$

$$\begin{aligned}
\int_E |f|^p dx &= \int_{\cup_{k=0}^m E_k} |\sum_{k=1}^{m} a_k\chi_k|^p dx = \int_{\cup_{k=0}^m E_k} |a_1\chi_1|^p + |a_2\chi_2|^p + \cdots + |a_m\chi_m|^p dx \\
&= \int_{E_1} |a_1\chi_1|^p dx + \int_{E_2} |a_2\chi_2|^p dx + \cdots + \int_{E_m} |a_m\chi_m|^p dx \\
&= |a_1|^p \int_{E_1} dx + |a_2|^p \int_{E_2} dx + \cdots + |a_m|^p \int_{E_m} dx \\
&= |a_1|^p mes\{E_1\} + |a_2|^p mes\{E_2\} + \cdots + |a_m|^p mes\{E_m\} \\
&= \sum_{k=1}^{m} |a_k|^p mes\{E_k\}
\end{aligned}$$

Lemme 2.3. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable et $mes\{E\} < \infty$, $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$ fonction mesurable alors :*

1) $\lambda_f(0) = mes\{E_1\}$ *où* $E_1 = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$.

2) *La fonction $\lambda_f(\sigma)$ est décroissante sur $[\ 0,\ \infty)$.*

3) $\lim_{\sigma \longrightarrow \infty} \lambda_f(\sigma) = 0$.

4) ***a)*** $\forall \sigma \in \big[0,\ ||f||_{l\infty(E)}\big)$ $\quad \lambda_f(\sigma) > 0$;

b) *si* $||f||_{l\infty(E)} < \infty$ *alors :*

$\forall \sigma \in \big[||f||_{l\infty(E)}, \infty\big)$ $\quad \lambda_f(\sigma) = 0$.

5) *$\lambda_f(\sigma)$est continue à droite.*

Preuve :

1) Soit $\sigma \in [0, \infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_f(\sigma) &= mes\{x \in E, |f(x)| > \sigma\} \\
\lambda_f(0) &= mes\{x \in E, |f(x) > 0\} \\
&= mes\{x \in E, f(x) \neq 0\} \\
&= mes\{E_1\}
\end{aligned}$$

Par conséquence :

$$\lambda_f(0) = mes\{E_1\}$$

2) Montrons que $\lambda_f(\sigma)$ décroissante :

Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, \infty[$ tel que $\sigma_1 \leq \sigma_2$

$$\lambda_f(\sigma_1) = mes\{x \in E, |f(x)| > \sigma_1\} = mes\{E_1\}$$

$$\lambda_f(\sigma_2) = mes\{x \in E, |f(x)| > \sigma_2\} = mes\{E_2\}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad &\Longrightarrow \quad (|f(x)| > \sigma_2 \Longrightarrow |f(x)| > \sigma_1) \\ &\Longrightarrow \quad si\ x \in E_2 \quad \Longrightarrow x \in E_1 \\ &\Longrightarrow \quad donc\ E_2 \subset E_1 \\ &\Longrightarrow \quad mes\{E_2\} \leq mes\{E_1\} \end{aligned}$$

Par conséquence :

$$\lambda_f(\sigma_2) \leq \lambda_f(\sigma_1)$$

3) Montrons que $\lim\limits_{\sigma \longrightarrow \infty} \lambda_f(\sigma) = 0$

Soient $\{t_h\}$ une suite croissante de nombre réel no négative tel que :

$\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} t_k = \infty$ $\quad , \forall k \in \mathbb{N}$ et $\quad E_{t_{k+1}} \subset E_{t_k}$ $\quad$ et $\quad \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{t_k} = \varnothing$

En vertu de (2.6) , on peut écrire :

$$mes\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{t_k}\right\} = 0 \Rightarrow \lim_{k \longrightarrow \infty} mes\{E_{t_k}\} = 0$$

ie :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \lambda_f(\sigma) = 0$$

5) Montrons la continuité à droite :

$\lambda_f(\sigma)$ est une fonction décroissante de σ alors il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_f(\sigma + \frac{1}{n}) = \lambda_f(\sigma).$$

On a la suite d'ensemble $A_n = \{x \ : |f(x)| > \sigma + \frac{1}{n}\}$ est décroissante pour l'inclusion où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} mes \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right\} &= \lim_{n\to\infty} mes\,\{A_n\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda_f(\sigma + \frac{1}{n}) \\ &= \lambda_f(\sigma) \end{aligned}$$

alors $\lambda_f(\sigma)$ est continue à droite.

Lemme 2.4. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable , f et f_k des fonctions non négatives mesurables sur E, De plus pour presque tous les $x \in E$ on a :*

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \qquad\qquad \lim_{k\longrightarrow\infty} f_k(x) = f(x)$$

Alors : $\forall k \in [0, \infty)$

$$\lambda f_k(\sigma) \leq \lambda f_{k+1}(\sigma) \leq \lambda_f(\sigma). \tag{2.10}$$

Où :

$$\lambda_f(\sigma) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \lambda_{f_k}(\sigma)$$

Preuve : Soient : $\sigma \in [0, \infty], k \in \mathbb{N}$

$$E_\sigma = \{x \in : \ f(x) > \sigma\}$$

$$E_\sigma^k = \{x \in : \ f_k(x) > \sigma\}$$

$$E_\sigma^{k+1} = \{x \in : \ f_{k+1}(x) > \sigma\}$$

Montrons que :

$$E_\sigma^k \subset E_\sigma^{k+1} \subset E_\sigma$$

(i) $E_\sigma^k \subset E_\sigma^{k+1}$

On a :

$$f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$$

Donc :

$$|f_k(x)| > \sigma \;\Rightarrow\; |f_{k+1}(x)| > \sigma$$

Alors si

$$x \in E_\sigma^k \Rightarrow x \in E_\sigma^{k+1}$$

Par suite :

$$E_\sigma^k \subseteq E_\sigma^{k+1}$$

Par conséquence

$$mes\left\{E_\sigma^k\right\} \leqslant mes\left\{E_\sigma^{k+1}\right\}$$

Finalement :

$$\lambda f_k(\sigma) \leq \lambda f_{k+1}(\sigma)$$

(ii) $E_\sigma^{k+1} \subset E_\sigma$

On a :

$$f(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} f_{k+1}(x)$$

Alors on a :

$$f(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} f_{k+1}(x)$$

Comme $f_k(x)$ est une suite croissante alors :

$\forall x \in \mathbb{E}$

$$f_{k+1}(x) \leqslant f(x)$$

On a :

$$|f_{k+1}(x)| > \sigma \;\Rightarrow\; |f(x)| > \sigma$$

Alors

$$x \in E_\sigma^{k+1} \ \Rightarrow \ x \in E_\sigma$$

Donc

$$E_\sigma^{k+1} \subseteq E_\sigma$$

Par conséquente

$$\lambda f_{k+1}(\sigma) \leq \lambda_f(\sigma)$$

Théorème 2.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable ,f est une fonction mesurable sur E, alors si :*

i) $1 < p < \infty$ *on a :*

$$||f||_{L_{P(E)}} = \left(p\int_0^\infty \sigma^{p-1}\lambda_f(\sigma)d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} = \left(-\int_0^\infty \sigma^p d\lambda_f(\sigma)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.11}$$

ii) *si :* $p = \infty$ *on a :*

$$||f||_{L_\infty} = \inf\{\sigma : \ \lambda_f(\sigma) = 0\} \tag{2.12}$$

iii) *si :* $p = 1$ *on a :*

$$||f||_{L_{1(E)}} = ||\lambda_f(\sigma)||_{L_{1(E)}} \tag{2.13}$$

Preuve :

(***i***) pour $1 < p < \infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sigma^{p-1}\lambda_f(\sigma)\, d\sigma &= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\lambda_f(\sigma)\, d\sigma \\
&= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_{\{x\, :|f|>\sigma\}} d\mu\right) d\sigma \\
&= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_E 1_{\{x\, :|f|>\sigma\}}\, d\mu\right) d\sigma
\end{aligned}$$

d'aprés le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma} \int_{\mathbb{E}} 1_{\{x\,:|f|>\sigma\}}\, d\mu d\sigma &= \int_{\mathbb{E}} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\sigma^p}{\sigma}\, d\sigma \right) d\mu \\
&= \int_E \frac{1}{p} |f(x)|^p\, dx \\
&= \frac{1}{p} \int_E |f(x)|^p\, dx \\
&= \frac{1}{p} \|f\|_{L_p}^p
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|f\|_{L_p}^p &= \int_0^\infty \sigma^p \lambda_f(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma} \\
\|f\|_{L_p}^p &= p \int_0^\infty \sigma^p \lambda_f(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma} \\
\|f\|_{L_p} &= \left(p \int_0^\infty \sigma^p \lambda_f(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

(ii) Pour $p = \infty$ on a par défintion :

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf \left\{ \sigma \geq 0,\ mes\{x \in E :\ |f(x)| > \sigma\} = 0 \right\},$$

et d'aprés la définition de $\lambda_f(\sigma)$

$$\|f\|_{L_\infty} \ = \ \inf\{\sigma\ :\ \lambda_f(\sigma) = 0\}$$

(iii) pour $p = 1$ on remplace par 1 on obtient :

$$\|f\|_{L_{1(E)}} = \int_0^\infty \lambda_f(\sigma) d\sigma = \|\lambda_f(\sigma)\|_{L_{1(E)}}$$

2.2 Exemple

Soient $n = 1$ $\forall x \in E = [0, \infty[$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Calculer $\lambda_f(\sigma)$ pour tout α

$a)$ Pour $\alpha > 0$

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |x^\alpha| > \sigma\} = \infty$$

$b)$ Pour $\alpha = 0$

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : 1 > \sigma\}$$

$b.1)$ Pour $\sigma \in [0, 1[$ donc

$$\lambda_f(\sigma) = \infty$$

$b.2)$ Pour $\sigma \in [1, \infty[$ donc

$$\lambda_f(\sigma) = 0$$

$c)$ Pour $\alpha < 0$

$c.1)$ Pour $0 < \sigma < 1$

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : x^\alpha > \sigma\}$$

$$\begin{aligned} x^\alpha > \sigma \quad &\Leftrightarrow \quad x < \sigma^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[0, \sigma^{\frac{1}{\alpha}}\right] \end{aligned}$$

$$\lambda_f(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{\alpha}}$$

$c.2)$ Pour $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} x^\alpha > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [0, \infty) \end{aligned}$$

$$\lambda_f(\sigma) = \infty$$

$c.3)$ Pour $\sigma = 1$

si $t = 1$

$$\begin{aligned} x^{\alpha} > 1 &\Leftrightarrow x < 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [0, 1[\end{aligned}$$

$$\lambda_f(\sigma) = 1.$$

$c.4)$ Pour $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} x^{\alpha} > \sigma &\Leftrightarrow x < \sigma^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\Leftrightarrow x \in [0, \sigma^{\frac{1}{\alpha}}[\end{aligned}$$

$$\lambda_f(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{\alpha}}.$$

2.3 Fonctions de réarrangement

Définition 2.2. *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f : E \longrightarrow \mathbb{C}, f$ une fonction mesurable, on appelle réarrangement de f dans un ordre décroissant, la fonction f^* définie par :*

$$f^*(\sigma) = inf\left\{s \in [0, \infty) \quad : \lambda_f(s) \leq \sigma\right\}, \quad \forall \sigma \in [0, \infty) \tag{2.14}$$

Remarques 2.2. *De la définition on peut déduire :*

1) $|f|^* = f^*$.

2) Si : $\quad g \sim f \quad sur \quad [0, \infty) \quad$ alors $\quad g^* = f^*$.

3) Si $\lambda_f(\sigma)$ est positive, non nulle, continue et strictement décroissante alors :

$$f^*(\sigma) = \lambda_f^{-1}(\sigma). \tag{2.15}$$

Preuve :

1) $|f|^* = f^*$ évidente.

2) Soient $(g \sim f)$ sur $[0, \infty)$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ donc $\exists \ E_1 \subset E$ tq : $g \neq f$ sur E_1 et $\text{mes}\{E_1\} = 0$ on a :

$$g^*(\sigma) = inf\left\{s \in [0, \infty) : \lambda_g(s) \leqq \sigma\right\} \tag{2.16}$$

car$(g \sim f \Longrightarrow \lambda_g = \lambda_f)$ alors :

$$g^*(\sigma) = inf\left\{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) \leq \sigma\right\} \tag{2.17}$$

3) Montrons que : $f^*(\sigma) = \lambda_f^{-1}(\sigma)$
soit $\sigma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f^*(\sigma) = inf\left\{s \in [0, \infty) : \quad \lambda_f(s) \leq \sigma\right\} &= inf\left\{s \in [0, \infty), \quad s \geq \lambda_f^{-1}(\sigma)\right\} \\ &= inf[\lambda_f^{-1}(\sigma), \infty). \end{aligned}$$

Donc :

$$inf\left\{s\in[0,\infty)\quad:\quad\lambda_f(s)\leq\sigma\right\}=\lambda_f^{-1}(\sigma).$$

Alors :

$$f^*(\sigma)=\lambda_f^{-1}(\sigma).$$

Les propriétés de la fonction $f^\star$ sont comme suit :

1) $f^\star\geq0$, décroissante et continue à droite.

2) sur $[0,\infty)$

$$\lambda_{f^\star}(\sigma)=\lambda_f(\sigma)\tag{2.18}$$

3)

$$\sigma=f^\star(t)\Leftrightarrow t=\lambda_f(\sigma)\tag{2.19}$$

.

Lemme 2.5. *Soit f une fonction vérifiant les condition de lemme(2.2) du paragraphe précédant, $\forall t\in[c_k,\infty)$:*

$$f^*(t)=a_k\tag{2.20}$$

Où $\forall k\in\{1,...,m\}\,,c_{m,n}=0$

$$c_k=\sum_{l=k}^{m}mes\left\{E_k\right\},$$

Lemme 2.6. *Soient $E\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble , $f:E\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable, Alors :*

1) $f^*(0)=\|f\|_{L_\infty(E)},\quad\forall t\in(0,\infty),\quad0\leq f^*<\infty.$

2) *La fonction f^* est décroissent sur $[0,\infty)$.*

3) *Si $mes\left\{E\right\}<\infty$, où $E_1=\{x\in E:f(x)\neq0\}$*
a) Alors: $\forall t\in[0,mes\left\{E_1\right\})$

$$f^*(t)>0$$

b) $\forall t \in [mes\{E_1\}, +\infty)$

$$f^*(t) = 0.$$

4) $\forall t \in [0, \infty[$

$$\lambda_f(f^*(t)) \le t.$$

5) *La fonction f^* est continue à droite sur $[0, \infty)$.*

Preuve :

1) Montrons que $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}$

$$\begin{aligned} f^*(0) &= inf\{s \in \mathbb{R} : \lambda_f(s) \le 0\} \\ &= inf\{s \in \mathbb{R} : mes\{x \in E : f(x) > s\} = 0\} \\ &= \|f\|_{L_{\infty(E)}} \end{aligned}$$

2) Montrons que f^* est décroissante

soit $0 < \sigma_1 < \sigma_2$

on a :

$$\lambda_f(s) < t_1 \Rightarrow \lambda_f(s) < \sigma_1 \Rightarrow \lambda_f(s) < t_2 \Rightarrow \lambda_f(s) < \sigma_2$$

donc

$$\{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) < \sigma_1\} \subset \{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) < \sigma_2\}$$

par suite :

$$inf\{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) < \sigma_2\} < inf\{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) < \sigma_1\}$$

alors

$$f^*(\sigma_2) \le f^*(\sigma_1).$$

3) Comme la fonction λ_f est décroissante , alors la condition $f^*(\sigma) = 0$ est équivalente a la condition suivante : $\forall s > 0, \lambda_f(s) \le \sigma$ et donc $\lim\limits_{s \to +0} \lambda_f(s) \le \sigma$, il

reste a remarque que d'après le lemme (2.3) (sur les distributions)
$\lambda_f(0) = \lim_{s\to+0} \lambda_f(s) = mes\,\{E_1\}$.

Lemme 2.7. *On suppose que les conditions du lemme* (2.6) *sont vérifiées* $\forall t \in [0,\infty)$, *Alors :*

$$f_k^*(\sigma) \leq f_{k+1}^*(\sigma) \leq f^*(\sigma) = \lim_{k\mapsto\infty} f_k^*(\sigma)$$

*Dans le lemme (*2.4*) on a prouvé que*

$$\lambda_{f_k}(s) \leq \lambda_{f_k+1}(s) \leq \lambda_f(s)$$

Tels que

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_{f_k}(s) = \lambda_f(s)$$

On à :

$$\{s \in [0,\infty[: \lambda_f(s) \leq \sigma\} \subset \left\{s \in [0,\infty[: \lambda_{f_{k+1}}(s) \leq t\right\} \subset \{s \in [0,\infty[: \lambda_f(s) \leq \sigma\}$$

Par conséquence :

$$f^*(\sigma) \leq f_{(k+1)}^*(\sigma) \leq f^*(\sigma)$$

Conséquence :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable,* f *une fonction mesurable sur* E *et* g *une fonction continue croissante sur* $[0,\infty)$, *alors on a :*

$$(g|f|)^* = g(f^*) \tag{2.21}$$

en particulier $\forall p \in (0,\infty)$

$$|f^p|^* = (f^*)^p \tag{2.22}$$

Lemme 2.8. *Soient* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable et* $f : E \to \mathbb{C}$ *une fonction mesurable alors :* $\forall t \geq 0$

$$mes\,\{s \in [0,\infty) : f^*(s) > t\} = mes\,\{x \in E : |f(x)| > t\}$$

autrement

$$\lambda_{f^*} = \lambda_f \quad sur \quad [0, \infty)$$

Lemme 2.9. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables, $\forall\ t_1$,$t_2 \in [0, \infty)$*

$$(f + g)^\star(t_1 + t_2) \leq f^\star(t_1) + g^\star(t_2) \tag{2.23}$$

et

$$(fg)^\star(t_1 + t_2) \leq f^\star(t_1)g^\star(t_2) \tag{2.24}$$

Le théorème suivant est prouvé dans [2].

Théorème 2.2. *Soient $0 < p \leq \infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, f est une fonction mesurable sur E alors :*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f^*\|_{L_p(0,\infty)} = \|f^*\|_{L_p(0,mes\{E\})} \tag{2.25}$$

Chapitre 3

Applications sur les fonctions de distribution et réarrangement

3.1 Espaces de Marcinkiwiecz (Espaces faibles)

Définition 3.1. *Soient $0 < p \leq \infty$, U un ensemble mesurable $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $0 < p < \infty$, on dit que $f \in L_p^\star$ (espace de Marcinkiewicz ou espace faible) si :*

1) *f est mesurable sur U.*

2) $\|f\|_{L_p^\star}^{(1)} = \sup_{\sigma\in[0,\infty)} \sigma(\lambda_f(\sigma))^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Dans le cas $p = \infty$, on a : $L_\infty^\star = L_\infty$.

Définition 3.2. *Soit $\|.\|$ une application de X dans $\mathbb{R}$ où X un espace vectoriel. On dit que $\|.\|$ est une quasi-norme si :*

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, *pour tout α de $\mathbb{R}$ et x de X.*

(iii) *il existe $k > 1$ tel que $\|x + y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$, pour tout x et y de X.*

Proposition 3.1. *Pour $0 < p < \infty$, $\left(L_p^\star, \|.\|_{L_p^\star}\right)$ est un espace quasi-normé.*

Preuve.

i) Si $\|f\|_{L_p^\star} = 0$ alors pour tout $\sigma > 0$, $\lambda_f(\sigma) = 0$ et par définition de λ_f, on déduit que f est nulle presque partout.

ii) Pour tout réel α , on a :

$$\lambda_{\alpha f}(\sigma) = mes\{x : \ |f(x)| > \frac{\sigma}{|\alpha|}\},$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{L_p^\star} &= \sup_{\sigma\geq 0} \sigma(\lambda_{\alpha f}(\sigma))^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\sigma\geq 0} \sigma(\lambda_f(\frac{\sigma}{|\alpha|}))^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \sup_{\frac{\sigma}{|\alpha|}\geq 0} \frac{\sigma}{|\alpha|}(\lambda_f(\frac{\sigma}{|\alpha|}))^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \|f\|_{L_p^\star}
\end{aligned}$$

iii) D'aprés l'inégalité

$$(a+b)^{\frac{1}{p}} \leq a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

D'prés le Lemme (2.1) et pour $\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{\sigma}{2}$, on Obtient : $\forall \sigma \geq 0$

$$(\lambda_{f+g}(\sigma))^{\frac{1}{p}} \leq \left(\lambda_f(\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\lambda_g(\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda_{f+g}(\sigma))^{\frac{1}{p}} &\leq \sigma\left(\lambda_f(\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} + \sigma\left(\lambda_g(\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{2\sigma}{2}\left(\lambda_f(\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{2\sigma}{2}\left(\lambda_g(\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2\left(\frac{\sigma}{2}\lambda_f(\frac{\sigma}{2})^{\frac{1}{p}} + \frac{\sigma}{2}\lambda_g(\frac{\sigma}{2})^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

En passant à la borne supèrieure, on obtient :

$$\|f+g\|_{L_p^\star} \leq 2(\|f\|_{L_p^\star} + \|g\|_{L_p^\star})$$

Les espaces $L_p^\star$ sont en particulier des espaces de Lorentz L_{pr}.

Propriétés :

1) $\forall f \in L^\star_{p(U)}$, $0 < p \leq \infty$ on a :

$$\|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} = \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^\star(t) \tag{3.2}$$

2) $\forall f \in L^\star_{p(U)}$, on a :

$$\|f\|^{(1)}_{L_p^\star(U)} = \|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} \tag{3.3}$$

Preuve :

2) Si pour un σ donné, il y a un t tel que $f^\star(t) = \sigma$, D'aprés la proprité (4)(2.19), On a :

$$\lambda_f(\sigma) \leq t,$$

Ainsi

$$\sigma(\lambda_f(\sigma))^{\frac{1}{p}} \leq t^{\frac{1}{p}} f^\star(t),$$

D'où par passage au sup par rapport à σ ensuite par rapport à t, on obtient :

$$\|f\|^{(1)}_{L_p^\star(U)} \leq |f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} \tag{3.4}$$

D'autre part, pour $\varepsilon \geq 0$ et d'aprés la définition carctéristique du sup, on obtient :

$$\|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} \leq t^{\frac{1}{p}} f^\star(t) + \varepsilon$$

et d'aprés D'aprés la proprité (4)(2.19), on a :

$$\|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} \leq \sigma(\lambda_f(\sigma))^{\frac{1}{p}} + \varepsilon,$$

en passant à la borne supèrieure, on a :

$$\|f\|^{(2)}_{L^\star_p(U)} \leq \|f\|^{(1)}_{L^\star_p(U)} \tag{3.5}$$

alors d'aprés (3.4) et (3.5) on obtient

$$\|f\|^{(1)}_{L^\star_p(U)} = \|f\|^{(2)}_{L^\star_p(U)}.$$

3.2 Espaces de Lorentz

Définition 3.3. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Lorentz, noté L_{pr}, par :*

1) *si $1 \leq r < \infty$*

$$\|f\|_{L_{pr}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^\star(t))^r \,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty \tag{3.6}$$

2) *si $r = \infty$*

$$\|f\|_{L_{p\infty}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L^\star_p(U)} = \sup_{t\geq 0}(t^{\frac{1}{p}} f^\star(t)) < \infty \tag{3.7}$$

Proposition 3.2. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

1) $\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \|f\|_{L_p(0,\infty)}$,

2) $\|f\|_{L_{p\infty}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L^\star_p(U)} = \|f\|^{(1)}_{L^\star_p(U)}$.

Preuve.

1) Si $r = p$, alors

$$\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty (f^\star)^p(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^\star\|_{L_p(0,\infty)}$$

D'après le théorème (2.1) et la propriété (2)(2.18) on obtient :

$$\|f^\star\|_{L_p(0,\infty)} = (p\int_0^\infty \sigma^p \lambda^\star_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}},$$

alors
$$(p\int_0^\infty \sigma^p\lambda_f^\star(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}} = (p\int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}}, = \|f\|_{L_p(0,\infty)}$$
d'où
$$\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \|f\|_{L_p(0,\infty)}$$

2) Si $r = \infty$, voir la preuve du propriété précédant ((2)(3.3)).

Remarques 3.1. *En général, les espaces de Lorentz sont des espaces qausi-normeé mais dans le cas où $p > 1$, il est possible de remplacer la qausi-norme par une norme et donc les L_{pr} devient des espaces de Banach.*

Théorème 3.1 (**Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin**). *Soient p_0, q_0, p_1 et q_1 des réels tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. On considère l'opérateur linéaire borné T tel que :*
$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \longrightarrow L_{q_0}(V, d\nu),$$
de norme M_0, et
$$T : L_{P_1}(U, d\mu) \longrightarrow L_{q_1}(V, d\nu),$$
de norme M_1. Alors
$$T : L_p(U, d\mu) \longrightarrow L_q(V, d\nu),$$
de norme M, tel que :
$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$
où $0 < \theta < 1$ et
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Démonstration : Voir [2].

3.3 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz

On montre avec certaines suppositions supplémentaires relatives aux paramètres, que le théorème de Riesz-Thorin peut-être renforcé, c'est à dire que la bornétude de l'opérateur $T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{q(V)}$ peut-être établie avec des conditions plus faibles par rapport à l'opérateur

$$T : L_{p_k(U)} \longrightarrow L_{q_k(V)}, \quad (k = 1, 2);$$

c'est-à-dire qu'on peut considérer des opérateurs plus généraux et non seulement linéaires.

Définition 3.4. *L'opérateur $T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{q'(V)}$ est dit sub-additif :*
***1)** Si son domaine de définition contient les fonctions f, g et leur somme arithmétique $f + g$, de plus est vérifiée l'inégalité suivante :*

$$|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg|.$$

***2)** Si son domaine de définition contient f et αf $\forall \alpha \in (\mathbb{C} \vee \mathbb{R})$ et est vérifiée l'inégalité*

$$|T(\alpha f)| \leq |\alpha||Tf|.$$

Théorème 3.2. ***(Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz)*** *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ensembles mesurables,*

$$0 < p_1 \leq q_1 \leq \infty, \; 0 < p_2 \leq q_2 \leq \infty, \; q_1 \neq q_2 \tag{3.8}$$

un opérateur sub-additif défini sur $L_{p_1(U)} + L_{p_2(U)}$, tel que

$$T : L_{p_1(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_1(V)}, \; T : L_{p_2(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_2(V)}, \tag{3.9}$$

de plus

$$\|T\|_{L_{p_1(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_1(V)}} < \infty, \quad \|T\|_{L_{p_2(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_2(V)}} < \infty. \tag{3.10}$$

Alors quelque soit p et q tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \tag{3.11}$$

pour un certain $\theta \in (0,1)$,

$$T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{q(V)}, \tag{3.12}$$

existe la constante $C > 0$, dépendant seulement de p_1, p_2, q_1, q_2, p et q, telle que

$$\|T\|_{L_{p(U)} \longrightarrow L_{q(V)}} \leq C \|T\|^{1-\theta}_{L_{p_1(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_1(V)}} \|T\|^{\theta}_{L_{p_2(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_2(V)}}. \tag{3.13}$$

Le lemme suivant est prouvé dans [4].

Lemme 3.1. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, U un ensemble mesurable, f une fonction mesurable sur U. Alors $\forall \xi \in (0,\infty)$, il existe des fonctions $f_{1,\xi}$ et $f_{2,\xi}$ mesurables sur U , telles que $f = f_{1,\xi} + f_{2,\xi}$ sur U et $\forall p \in (0,\infty]$*

$$\|f_{1,\xi}\|_{L_p(U)} = \|f^{\star}\|_{L_p(0,\xi)} \quad , \quad \|f_{2,\xi}\|_{L_p(U)} = \|f^{\star}\|_{L_p(\xi,\infty)}. \tag{3.14}$$

Conséquence : Si $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, $f \in L_{p(U)}$, alors $\forall \xi \in (0,\infty)$

$$f_{1,\xi} \in L_{p_1(U)} \quad , \quad f_{2,\xi} \in L_{p_2(U)}.$$

Preuve. D'une part en vertu l'inégalité de Hölder on a :

$$\|f_{1,\xi}\|_{L_{p_1(U)}} = \|f^{\star}\|_{L_{p_1}(0,\xi)}.$$

En prenant comme paramètres $\dfrac{p}{p_1}$ et $\left(\dfrac{p}{p_1}\right)' = \dfrac{p}{p-p_1}$ dans l'inégalité de Hölder pour $(f^{\star})^{p_1}$, on obtient :

$$\|f^{\star}\|_{L_{p_1}(0,\xi)} = \left(\int_0^{\xi} (f^{\star})^{p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left[\|(f^{\star})^{p_1}\|_{L_{\frac{p}{p_1}}} |\xi|^{\frac{p-p_1}{p}} \right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \xi^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \|f^\star\|_{L_p(0,\xi)}$$
$$\leq \xi^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(0,\xi)} \ < \infty,$$

et d'autre part pour $p_2 < \infty$

$$\|f_{2,\xi}\|_{L_{p_2(U)}} = \|f^\star\|_{L_{p_2(\xi,\infty)}} = \left(\int_\xi^\infty |(f^\star)(t)|^{p_2}\, dt\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= f^\star(\xi)\left(\int_\xi^\infty \left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p_2} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} = I.$$

Comme $\left|\dfrac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right| < 1$, alors
$$\left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p_2} < \left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p},$$

d'où
$$I \leq f^\star(\xi)\left(\int_\xi^\infty \left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} = |f^\star(\xi)|^{1-\frac{p}{p_2}} \|f^\star\|_{L_p(\xi,\infty)}^{\frac{p}{p_2}}$$
$$\leq |f^\star(\xi)|^{1-\frac{p}{p_2}} \|f\|_{L_p(\xi,\infty)}^{\frac{p}{p_2}} \ < \infty.$$

Si $p = \infty$
$$\|f_{2,\xi}\|_{L_\infty(U)} = \|f^\star\|_{L_\infty(\xi,\infty)} = f^\star(\xi) \ < \infty.$$

On a pris en considération le fait que $\forall \xi \in (0,\infty)$, $f^\star(\xi) \ < \infty$ et $f^\star$ décroissante sur $(0,\infty)$.

Preuve. (Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz)

1) Soit $p_1 \neq p_2$. On prouve le théorème pour $p_1 = q_1$ et $p_2 = q_2$, pour la preuve dans le cas général on peut consulter [10] et [18].

Alors $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$, d'où $p = q$.

On pose
$$M_1 = T : L_{p_1(U)} \longrightarrow L^\star_{p_1(V)} \ , \ \ M_2 = T : L_{p_2(U)} \longrightarrow L^\star_{p_2(V)}$$

2) Au début on prouve que l'opérateur :

$$T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{p(V)} \text{ est borné.}$$

Soit $f \in L_{p(U)}$, $\forall \xi \in (0,\infty)$, $f_{1,\xi}$ et $f_{2,\xi}$ des fonctions du définies sur (3.4). Comme T est sub-additif, alors d'aprés le lemme (2.9) et la remarque 3 on a :

$$(Tf)^{\star}(2\xi) = |Tf|^{\star}(2\xi) \leq (|Tf_{1,\xi}| + |Tf_{2,\xi}|)^{\star}(2\xi)$$

$$\leq (Tf_{1,\xi})^{\star}(\xi) + (Tf_{2,\xi})^{\star}(\xi).$$

En vertu du théorème (3.3.1) et de l'ingalité de Minkowsky on obtient :

$$\|Tf\|_{L_{p(V)}} = \|(Tf)^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} = 2^{\frac{1}{p}}\|(Tf)^{\star}(2\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \; (on\ pose\ \xi = 2z)$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-1\right)_+}\left(\|(Tf_{1,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} + \|(Tf_{2,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)}\right),$$

on pose $a_+ = a = \left(\dfrac{1}{p} - 1\right)$ si $a \geq 0$, $a_+ = 0$ si $a < 0$.

D'aprés la conséquence du lemme (3.1) $f_{k,\xi} \in L_{p_k}$, $(k \in \{1,2\})$ et en vue des définitions (3.2.1) et (3.3.1) (Définition de l'espace de $L^{\star}_{p_k(U)}$) et en prenant en compte (3.9) et (3.10) $\forall t \in (0,\infty)$ et en particulier $t = \xi$ on a :

$$(Tf_{k,\xi})^{\star} \leq M_k t^{-\frac{1}{p_k}}\|f_{k,\xi}\|_{L_{p_k}(U)}, \; k \in \{1,2\}.$$

Par conséquence d'aprés l'inégalité (3.14) du lemme (3.1), on trouve :

$$\begin{aligned}
\|(Tf_{1,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} &\leq M_1 \left\|\xi^{-\frac{1}{p_1}}\|f_{1,\xi}\|_{L_{p_1}(U)}\right\|_{L_p(0,\infty)} \\
&= M_1 \left\|\xi^{-\frac{1}{p_1}}\|f^{\star}\|_{L_{p_1}(0,\infty)}\right\|_{L_p(0,\infty)} \\
&= M_1 \| \left(\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}(f^{\star}(t))^{p_1}dt\right)^{\frac{1}{p_1}} \|_{L_p(0,\infty)} \\
&= M_1 \left\|\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}(f^{\star}(t))^{p_1}\,dt\right\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

De la même manière pour $p_2 < \infty$, on a :

$$\|(Tf_{2,\xi})^\star(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq M_2 \left\| \frac{1}{\xi} \int_\xi^\infty (f^\star(t))^{p_2}\, dt \right\|_{L_{\frac{p}{p_2}}(0,\infty)}^{\frac{1}{p_2}}. \tag{3.16}$$

En appliquant l'inégalité de Hardy avec $\dfrac{p}{p_1} > 1$ et celle avec $\dfrac{p}{p_2} < 1$ respectivement à (3.15) et (3.16) à la fonction $f^\star$ qui est décroissante, on obtient :

$$\begin{aligned} \|(Tf_{1,\xi})^\star(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} &\leq C_1 M_1 \, \|(f^\star)^{p_1}\|_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}^{\frac{1}{p_1}} \\ &= C_1 M_1 \|f^\star\|_{L_p(0,\infty)} = C_1 M_1 \|f\|_{L_p(U)}, \end{aligned}$$

et d'une manière analogue pour $p_2 < \infty$ on obtient :

$$\|(Tf_{2,\xi})^\star(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_2 M_2 \|f\|_{L_p(U)},$$

où C_1 et C_2 dépendant seulement de p_1, p_2 et p.
Finalement, on a :

$$\|Tf\|_{L_p(V)} \leq C_3(M_1 + M_2)\|f\|_{L_p(U)}, \tag{3.17}$$

avec $C_3 = \max(C_1, C_2)$.
3) Pour la preuve de l'inégalité (6) on utilise le lemme (3.4.1) avec $a\xi$ à la place de ξ où $a > 0$. Alors (3.15) devient

$$\begin{aligned} \|(Tf_{1,a\xi})^\star(a\xi)\|_{L_p(0,\infty)} &\leq M_1 \left\| \frac{1}{a\xi} \int_0^{a\xi} (f^\star(t))^{p_1}\, dt \right\|_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq M_1 a^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} \left\| \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} (f^\star(t))^{p_1}\, dt \right\|_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}^{\frac{1}{p_1}}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue à la place (3.16) on obtient respectivement une inégalité analogue à la précèdente avec $a^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}}$ à la place de $a^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}}$

$$\|(Tf_{2,a\xi})^{\star}(a\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq M_2 a^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}} \left\| \frac{1}{\xi}\int_{\xi}^{\infty} (f^{\star}(t))^{p_2}\, dt \right\|^{\frac{1}{p_2}}_{L_{\frac{p}{p_2}}(0,\infty)}.$$

Par conséquent à la place de (3.17), on obtient :

$$\|Tf\|_{L_p(V)} \leq C_3 (M_1 a^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} + M_2 a^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}}) \|f\|_{L_p(U)}. \tag{3.18}$$

On recherche le minimum de la partie droite de $(1.3)'$ par rapport à $a > 0$, d'où le résultat :

$$\|Tf\|_{L_p(V)} \leq C_4 M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \|f\|_{L_p(U)},$$

où C_4 ne dépend que de p_1, p_2 et p.

3.4 Fonction maximal (Opérateur de Hardy-Littlewood)

Définition 3.5. *Soit f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^n$, Mf est dite fonction maximale si :*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \tag{3.19}$$

Lemme 3.2. *soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^n, \forall \alpha > 0$*
$E_\alpha = \{\alpha x : |g(x)| > \alpha\}$ et g intégrable,alors :

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{A}{\alpha} \tag{3.20}$$

tels que : ($A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$ et $\lambda(\alpha)$ désigne la mesure de E_α, appelée distribution de fonction g).

preuve :

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \geq \int_{E_\alpha} |g(y)| dy \geq \int_{E_\alpha} \alpha dy$$

$$\geq \alpha \int_{E_\alpha} dy = \alpha\lambda(\alpha)$$

Lemme 3.3. *Soit $g \in L_p(\Omega), 1 \leq p < \infty$,alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha) \tag{3.21}$$

Où $\lambda(\alpha)$ désigne la mesure de E_α comme définie dans le lemme (3.2), et si $g \in L_\infty(\Omega)$, alors :

$$\|g\|_{L_\infty(\Omega)} = \inf\{\alpha, \lambda(\alpha) = 0\} \tag{3.22}$$

Lemme 3.4. *Soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ qui est recouvert par une famille de boule (B_j), alors on peut extraire une sous suite $B_1, B_2, ..., B_k$, $(B_k \bigcap B_l = \varnothing$ si $k \neq l)$(finie ou infinie) telle que :*

$$\sum_k |B_k| \geq C|E|, \tag{3.23}$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de la dimension n, par exemple : $C = 5^{-n}$.

Théorème 3.3. ***(Hardy-Littlewood)***.*Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, alors :*

- ***a)*** *Si $f \in L_P(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$, la fonction Mf est p.p finie .*
- ***b)*** *Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, pour chaque $\alpha > 0$, alors :*

$$|\{x : (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{C_1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx, \tag{3.24}$$

où $C_1 = cste$ qui dépend de n .

- ***c)*** *Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$ et $(Mf) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ alors :*

$$||Mf||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.25}$$

où A_p dépendent de p.

Preuve :

b) Montrons que si $f \in L_1(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha \geq 0$

$$|\,\{x : (Mf)(x) > \alpha\}\,| \leq \frac{C}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy$$

$$E_\alpha = \{x : (Mf) > \alpha\}$$

Soit $x \in E_\alpha$, il existe une boule B_x de sorte que :

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \alpha \tag{3.26}$$

c'est à dire que

$$\int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \alpha|B_x|$$

$(B_x)_x \in E_\alpha$ forment un recouvrement de E_α, alors d'après le lemme (3.4) on peut extraire une sous suite $B_1, B_2, ..., B_k$, telle que :

$$\sum_k |B_k| \geq C|E_\alpha|$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy &\geq \int_{\bigcup B_k} |f(y)|dy \\ &= \sum_k \int_{B_k} |f(y)|dy \\ &\geq \sum_k \alpha|B_k| \\ &\geq \alpha C|E_\alpha|\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \geq \alpha C|E_\alpha|$$

d'où

$$\begin{aligned}|E_\alpha| &\leq \frac{1}{\alpha C}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy\\ &= \frac{C_1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy\end{aligned}$$

c) Nous montrons maintenant simultanément (a) et (c) :

Soit $f_1(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ alors :

(i) $|f(x)| \leq |f_1(x)| + \dfrac{\alpha}{2}$,

(ii) $Mf(x) \leq (Mf_1)(x) + \dfrac{\alpha}{2}$

Conclusions

$$A = \{x\,:\,(Mf)(x) > \alpha\} \subset \left\{x : (Mf_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

En effet, si $x \in A$, : alors

$$(Mf)(x) > \alpha$$

et donc

$$(Mf_1)(x) + \frac{\alpha}{2} > \alpha$$

d'où

$$(Mf_1)(x) > \frac{\alpha}{2}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha) &= |\{x : (Mf)(x) > \alpha\}|\\ &\leq |\left\{x : (Mf_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}|\\ &\leq \frac{C}{\alpha/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(y)|dy\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.3) on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Mf)^p dx = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha)$$

d'où

$$||Mf||^p_{L^p}(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p dx = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha)$$

Après intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Mf\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= -[\alpha^p\lambda(\alpha)]_0^\infty + \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\lambda(\alpha) \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)\lambda(\alpha) \\
&\leq p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{2A}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|dy\, d\lambda(\alpha) \\
&= 2Ap\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{|f|>\frac{\alpha}{2}} |f(y)|dy\, d\lambda(\alpha) \\
&\leq 2Ap\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\int_0^{2|f(y)|} \alpha^{p-2}d\lambda(\alpha)\, dy \\
&= \frac{2^pAp}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \\
&= \frac{2^pAp}{p-1}\|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

donc

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

où

$$A_p = \left(\frac{2^pAp}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3.5 Fonction maximale sur l'espace de Lorentz classique et l'inégalité de Hardy avec poids pour une fonction décroissante

Une certaine caractérisation concernant la bornitude de l'opérateur maximal est donnée pour une classe de fonction dans les espaces classiques de Lorentz. Ceci est obtenu en déterminant les fonctions de poids pour lesquelles l'inégalité de Hardy est vérifié pour des fonctions non décroissantes. Une caractérisation relative aux fonctions non décroissantes est aussi déduite.

Introduction : Les espaces de Lorentz classiques $\Lambda_q(W)$ considérés ici sont définis comme l'ensemble des fonctions g définie sur $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$\|g\|_{\Lambda_q(W)} = \left[\int_0^{\infty} [g^*(x)]^q \, W(x)dx\right]^{1/q} < \infty$$

où

$$g^*(y) = \inf\{s : \mu(\{t : |g(t)| > s\}) \leq y\}$$

g^* est une fonction de réarrangement décroissante de g définie sur $[0, \infty]$, μ est la mesure de Lebesgue, $W(x)$ est positive, et $1 \leq q < \infty$. Pour $W(x) = (q/p)x^{(q/p)-1}$, $\Lambda_q(W)$ est l'espace $L(p, q)$ étudie dans[22 et 16], on caractérise ici les fonctions W pour lesquelles une constante D existe, telles que :

$$\|Mg\|_{\Lambda_q(W)} \leq D\|g\|_{\Lambda_q(W)} \tag{3.27}$$

Où M est l'opérateur de Hardy Littlewood maximal, défini comme suit :

$$Mg(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y)|dy$$

et le sup est pris sur tous les cubes ϕ contenant x, Les auteurs montrent que ce problème est équivalent a déterminer les fonctions non négatives W pour lesquelles l'inégalité de Hardy :

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right|^q W(x)dx \leq C\int_0^\infty |f(x)|^q W(x)dx \tag{3.28}$$

est valable pour toutes les fonctions f positives décroissantes sur $[0,\infty]$.
Les principaux résultats de l'article sont comme suit :

Théorème 3.4. *Si* $1 \leq q < \infty$ *et* $W(x) \geq 0$*, alors (3.28) est valable pour toute fonction décroissante positive sur* $[0,\infty)$*, Ssi il existe une constante* B *telle que* $r > 0$,

$$\int_r^\infty \frac{W(x)}{x^q}dx \leq \frac{B}{r^q}\int_0^r W(x)dx. \tag{3.29}$$

Corollaire 3.1. *Si* $1 \leq q < \infty$ *et* $W(x) \geq 0$*, alors (3.27)est valable pour* g *définie sur* R^n *ssi il existe* B *telle que (3.29) est versifié pour* $r > 0$

Théorème 3.5. *si* $W(x) \geq 0, 1 \leq q < \infty$ *et*

$$\sup_{r>0}\frac{1}{r}\left[\int_0^r W(x)dx\right]^{1/q}\left[\int_0^r W(x)^{-q'/q}dx\right]^{1/q'} < \infty \tag{3.30}$$

Alors (3.28) est vérifié pour toute fonction positive décroissante ou d'une manière équivalant a (3.27) est vérifiée. L'inverse est aussi vraie pour W *non décroissante.*

Corollaire 3.2. *La condition (3.30) est plus forte par rapporte à celle de (3.29) et pour* W *non décroissante et non négative , elles sont équivalents*

Conclusion

Le présent manuscrit est une introduction à la théorie des fonctions de distribution et réarrangement et leurs applications.

La thématique est un sujet d'actualité, elle fait l'objet des recherche et en particulier ses applications aux différents domaines de mathématiques sont très important ; Plus particulièrement aux espaces fonctionnels (espaces faibles , espaces de lorentz)et à la théorie d'interpolation .

Ainsi elle apparait dans certains opérateurs tels que l'opérateur de Hardy-Littelwood.

Il y'a certains problèmes relatifs à ces notions qui sont encore ouverts.

Bibliographie

[1] Adams. R. A , Sobolev spaces. Academic Press, Inc, Boston, 1978.

[2] Bergh.J, Löfström.J, Interpolation Spaces An Introduction. Springer-Verlag, 1976.

[3] Burenkov.V.I, Functional spaces main integral inequalities. Masson, 1989.

[4] Brezis.H, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Édition Masson, 1983.

[5] Caldéron.A.P., Zygmund.A, A note on the interpolation of linear operators. Studia Math.-1951.- V. 12.

[6] Caldéron.A.P.,Zygmund.A, A note on the interpolation of sublinear operators. Amer. J.Math.-1956.- V. 78.-p.282-288.

[7] Kolmogorov.A, Fomine.S, Élément de la thórie des fonctions et d'analyse fonctionnelle. 2^{eme} édition. Édition Mir. Moscou, 1973.

[8] Kufner.A, Jhon.O, Puŏik .S, Function spaces. -Prague : Academia, 1977.

[9] Kufner.A, Jhon.O, Puŏik .S, Function spaces. Aota Math.- 1962.- v. 49.- p. 465-497.

[10] Krasnoclskü M.A, Zabreiko p.p, Poustiluik F.I. les opérateurs intégraux dans les espaces de fonctions sommables .

[11] Lieb.E, Loss.M, Analyses. Americain Mathematical Society. volume 14. 2000, Primary 28-1, 42-01, 46-01, 49-01.

[12] Lorentz.G.G, Some new funotional spaces. Ann.Math.- 1950.- v. 51.-p. 37-55.

[13] Marcinkiewicz.J, Sur l'interpolation d'opérateurs. C.r.aoad. soi.Paris.- 1939.- v.30.- P. 120-142.

[14] Muckenhoupt.B, Hardy's inequality With Weights, studia Math. .-44 (1972). p. 31-38.

[15] Riesz.M, Sur les maxima des formes bilinéaire et sur les fonctionelles linéaire. Aota Math.- 1926.- v. 49.- p. 465-497.

[16] Stein.E.M, Wreiss.G, An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its application. J.Math.Meoh.- 1959.- v. 8.

[17] Stein. E. M, Singular integrals and differentiability proprerties of functions.. Princeton university press, Princeton, Now Jersey, 1970.

[18] Stein E.M, Veiss G. Introduction en analyse harmonique dans les espaces Euclidiens . M- Mir, 1974.

[19] Talenti.G, Observazion sopra una classe di disugualianze. Rend.Semin.Math. e Fis.Milano.- 1969.- v 39.- p. 171-185.

[20] Tomaselli.G, A class of inequalities theorem . Bull.Union Mat.Ital. - 1969. -v. 2. N 6. -p. 622-631.

[21] Triebel.H, Théorie d'interpolation, espace fonctionels et opérateurs differentiels. M- Mir 1980. LIR.SS.

[22] R.A.HUNT, On L(p,q) space, enseign. math.. (2) 12(1966),249-276.