République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun Tiaret

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département de Mathématiques

Option : Mathématiques générales

Spécialité : Analyse fonctionnelle et applications

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

SUJET DU MÉMOIRE :

Quelques inégalités de Hardy dans $\mathbb{R}$

Présenté par :

AISSAT ZINEB

BENALI TINHINANE

BOUKHATEM AMINA

BRAIKI HOCINE MOHAMED

SOUTENU LE :27 JUIN 2018 . Devant Le Jury Composé de :

Mr B.HALIM	Université de Tiaret	Président
Mr B.BOUHARKET	Université de Tiaret	Examinateur
Pr A. SENOUCI	Université de Tiaret	Encadreur

Année Universitaire : 2017/2018

Table des matières

INTRODUCTION

Dans ce travail on considère les fonctions monotones et certaines de leurs applications. Elles sont appliquées aux inégalités de Hardy, à la bornitude de l'opérateur de Hardy-Littlewood, aux espaces fonctionnels tels que l'espace de Lebesgue faible, l'espace de Lorentz et autres.

Le mémoire comprend une introduction, 03 chapitres, une conclusion et une bibliographie assez récente.

Dans le 1^{er} chapitre, on rappelle quelques propriétés des fonctions monotones, ensuite on aborde un travail publié où il est question de donner des caractérisations pour lesquelles des inégalités inverses du type de Hölder sont satisfaites pour les fonctions monotones.

Au 2^{eme} chapitre, sont étudiées les inégalités de Hardy classiques pondérées pour les fonctions monotones puis viennent les inégalités modernes de Hardy où il est question de caractériser la fonction de poids pour les fonctions monotones décroissantes afin que cette inégalité soit vérifiée.

Le 3^{eme} chapitre, comprend quelques applications, on cite l'une d'elles : soit

$$T_f = \int_0^\infty k(x,t)f(t)dt$$

un opérateur intégral avec une fonction décroissante où on cherche les conditions de bornitude de cet opérateur entre les espaces $L^{p_0}_{dec,(w_0)}$ et $\Lambda^{p,\infty}_{(w_1)}$ avec $p_0 > 1$.

$L^{p_0}_{dec,(w_0)}$ désigne l'espace de Lebesgue pondéré avec des fonctions positives décroissante et $\Lambda^{p,\infty}_{(w_1)}$est l'espace de Lorentz pondéré.

Chapitre 1

Inégalités intégrales pour les fonctions monotones et les fonctions de poids

Dans ce chapitre on concéder quelques propriétés des fonctions monotones, ensuite nous donnons des caractérisations pour lesquelles les inégalités inverses du type de Hölder pour les fonctions monotones sont satisfaites ,

1.1 Introduction à la théorie des fonctions monotones

Définition 1.1. *Une fonction f est dite monotone no décroissante si :*

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

d'une manière analogue on définit les fonctions monotones non-croissante

Nous commencerons par l'étude des propriété de l'intégrale de Lebesgue

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1.1}$$

comme fonction de borne supérieure par la remarque évidente, mais importante, suivante : si la fonction f est non négative, alors $F(x)$ est une fonction monotone non décroissante. d'autre part, toute fonction sommable est différence de deux fonctions sommables non négatives :

$$f(t) = f_+(t) - f_-(rt) \tag{1.2}$$

de ce fait, l'intégrale 1.1 peut être décomposée en une différence de deux fonctions monotones non décroissantes. Par conséquent, l'étude de l'intégrale de Lebesgue comme fonction de sa borne supérieure peut être réduite à l'étude des fonctions monotones du même type,

Rappelons d'abord certaines notions. Lorsqu'il ne sera pas fait mention expresse du contraire, nous ne considérons que des fonctions données sur un segment. Une fonction f est dite monotone non décroissante si ,

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

de manière analogue on définit une fonction monotone non croissante
soit f une fonction arbitraire sure la droite.la limite [1]

$$\lim_{h \to 0+} f(x_0 + h)$$

lorsqu'elle existe s'appelle limite à droite de la fonction f au point x_0 et se note $f(x_0 + 0)$. de façon analogue on définit la limite à gauche de la fonction f au point x_0, notée $f(x_0 - 0)$. L'égalité $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ signifie, évidemment soit que la fonction f est continue au point x_0, soit qu'elle a en ce point une discontinuité non essentielle. le point où toutes ces deux limites existent, mais sont inégales, s'appelle point de discontinuité de première espèce ;
la différence $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ s'appelle saut de la fonction f en ce point
Si $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ (rsp : $f(x_0) = f(x_0 + 0)$) on dit que f est continue à gauche (rsp : à droite) au point x_0.

1.1.1 Propriétés des fonctions monotones

1 toute fonction f, monotone non décroissante sur $[a, b]$, est mesurable et bornée, donc sommable.

En effet, par définition on a

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \text{ sur } [a, b].$$

D'autre part. pour toute constante c. l'ensemble

$$A_c = \{x : f(x) < c\}$$

est soit un segment soit un intervalle semi-ouvert (soit un ensemble vide). en effet, supposons qu'il existe des points x tels que $f(x) < c$, et soit d la borne supérieure de ces points. Alors A_c représente soit le segment $[a, d]$ soit l'intervalle semi-ouvert $[a, d)$.

1. le symbole $h \to 0+$ signifie que h tend vers 0 en restant toujours positif.

2 Une fonction monotone ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

En effet, soit x_0 un point quelconque de $[a, b]$, et soit $x_n \to x_0$, où $xn < x_0$.Alors la suite $\{f(x_n)\}$ est bornée inférieurement et supérieurement (par exemple,par$f(a)$ et $f(b)$). par conséquent, elle a au moins un point d'accumulation. d'autre part, l'existence de plusieurs points pour une telle suite serait, évidement, en contradiction avec la monotonie de la fonction f. Ainsi, $f(x_0 + 0)$.

Une fonction monotone n'est pas nécessairement continue. Cependant en a la propriété suivante.

3 L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

en effet, la somme de tout nombre finie de sauts d'une fonction monotone f sur le segment $[a, b]$ ne dépasse pas $f(b)-f(a)$ par conséquent pour chaque n le nombre des sauts plus grands que $\frac{1}{n}$ est fini. en faisant leur somme pour tous les $n = 1, 2, 3, ...$, on trouve que le nombre totale de sauts est fini ou infini-dénombrable.

Parmi les fonctions monotone les plus simples sont celles que l'on appelle fonctions des sauts. Elles peuvent être construites de la manière suivante :

Supposons que sur le segment $[a, b]$ soit donnée une suite finie ou dénombrable de points

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

et qu'a chacun d'eux soit associé un nombre positif h_n de telle façon que $\sum_n h_n < \infty$ définissons une fonction f sur $[a, b]$, en posant

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n \tag{1.3}$$

Il est clair que cette fonction est monotone non décroissante. En outre elle est continue à gauche[2] en chaque point, l'ensemble de ses point de ses points de discontinuité n'est autre que $\{x_n\}$ et le saut en chaque point x_n vaut h_n[3] En effet,

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} f(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n$$

2. Si la fonction f était définie par la formule

$$f(x) = \sum_{x_n \leq x} h_n$$

elle serait continue à droite. dans la suite, sauf s'il y a mention explicite du contraire, toutes les fonctions seront supposées continue à gauche.

3. A condition qu'aucun des points x_n ne coïncide avec b, car $x_n = b$ n'intervient pas dans la somme (1.3) Pour tenir compte du saut au point b il faut, au lieu de $[a, b]$ considérer l'intervalle semi-ouvert $[a, b + \varepsilon), \varepsilon > 0$.

et, comme tout x_n vérifiant la condition $x_n < x$ vérifie également la condition $x_n < x - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la dernière limite est égale à

$$\sum_{x_n < x} h_n = f(x)$$

ainsi

$$f(x - 0) = f(x)$$

Si le point x avec l'un quelconque des points x_n, par exemple, avec $x = x_{n_0}$, alors

$$f(x_{n_0} + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} f(x_{n_0} + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \sum_{x_n < x_{n_0} + \varepsilon} h_n = \sum_{x_n \leq x_{n_0}} h_n,$$

c-à-d.

$$f(x_{n_0} + 0) - f(x_{n_0} - 0) = h_{n_0}.$$

Enfin, si x ne coïncide avec aucun des points x_n, la fonction des sauts est continue en ce point(démontrer !).

dans la suite, nous entendrons par fonction des sauts toute fonction qui peut être obtenue à l'aide de la construction décrite plus haut. Les fonctions des sauts les plus simples sont les fonctions en escalier dont les points de discontinuité peuvent être disposés sous la forme d'une suite monotone

$$x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$$

Dans le cas général, une fonction des sauts peut être douée d'une structure plus compliquée ; par exemple , si $\{x_n\}$ est l'ensemble des points rationnels du segment $[a, b]$ et $h_n = \frac{1}{2^n}$, la formule (1.3) définit une fonction des sauts, discontinue pour x rationnel et continue pour x irrationnel.

Une autre classe de fonctions monotones en quelque sorte opposées aux fonctions des sauts, est continuée par les fonctions continues monotones. on a la proposition suivante.

4 Toute fonction monotone continue à gauche peut être représentée de façon unique comme la somme d'une fonction continue monotone et d'une fonction de sauts (continue à gauche).

En effet, soit f une fonction non décroissante continue à gauche, $x_1, x_2, x_3, ...$ ses point de discontinuité et $h_1, h_2, h_3, ...$ ses sauts en ces points.
Posons

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

la différence

$$\varphi = f - H$$

est une fonction continue non décroissants. pour démontrer cela, considérons la différence

$$\varphi(x^{''}) - \varphi(x^{'}) = [f(x^{''}) - f(x^{'})] - [H(x^{''}) - H(x^{'})].$$

où $x^{'} < x^{''}$.Le seconde membre de cette égalité représente la différence entre la croisement totale de la fonction f sur le segment $[x^{'}, x^{''}]$ et la somme de ses sauts sur ce segment. Il est claire que cette différence est non négative, ce qui prouve que la fonction φ est non décroissante. d'autre part x^* étant un point arbitraire on peut écrire

$$\varphi(x^* - 0) = f(x^* - 0) - H(x^* - 0) = f(x^* - 0) - \sum_{x^n < x^*} h_n,$$

$$\varphi(x^* + 0) = f(x^* + 0) - H(x^* + 0) = f(x^* + 0) - \sum_{x^n \leq x^*} h_n,$$

d'où

$$\varphi(x^* + 0) - \varphi(x^* - 0) = f(x^* + 0) - f(x^* - 0) - h^* = 0$$

(h^* est le saut de la fonction H au point x^*) Il en résulte, compte tenu de la continuité à gauche de f et H, que φ est bien une fonction continue.

1.1.2 Dérivabilité des fonctions monotones

Théorème 1 (H.Lebesgue)**.** *Tout fonction monotone f définie sur un segment $[a, b]$ admet presque partout sur se segment une dérivée finit .*

Théorème 2. *Une série partout convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x)$$

où F_n sont des fonctions monotones non-décroissantes sur $[a, b]$ est presque partout dérivable terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) = F'(x).$$

Corollaire 1.1. *La fonction des sauts d'une fonction monotone a une dérivée nulle presque partout.*

Démonstration. En effet, une telle fonction est la somme d'une série convergente de fonctions non décroissantes de la forme

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leqslant x_n \\ h_n & \text{pour} \quad x > x_n \end{cases}$$

dont chacune a une dérivée presque partout nulle. □

1.1.3 Dérivée d'une intégrale par rapport à sa borne supérieure

Comme l'intégrale

$$\int_a^x \varphi(t)dt$$

de toute fonction sommable est différence de deux fonctions monotones du théorème 1 on déduit immédiatement le résultat suivant

Théorème 3. *Pour toute fonction sommable φ la dérivée*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)dt$$

existe presque pour tous les x.

1.2 Inégalités pondérées pour les fonctions monotones

Nous donnons des caractérisations pour lesquelles les inégalités inverses du type de Hölder pour les fonctions monotones sont satisfaites ,

Définition 1.2. *soit f une fonction monotone positive sur $(0, \infty)$, α un nombre réel, on note Q_{α_1} un ensemble des classes des fonctions f telle que la fonction $x^{-\alpha} f(x)$ est une fonction décroissante , et nous écrivons $f \in Q_{\alpha_1}$*

Définition 1.3. *soit f une fonction monotone positive sur $(0, \infty)$, α un nombre réel , on note Q^{α_0} un ensemble des classes des fonctions f telle que la fonction $x^{-\alpha} f(x)$ est une fonction croissante , et nous écrivons $f \in Q^{\alpha_0}$*

Remarque 1.1. *on dit que $f \in Q^{\alpha_0} \cap Q_{\alpha_1}$ si elle est croissante ou décroissante.*

Notation 1. *Soit w une fonction de poids (une fonction positive mesurable) sur $E = (0, \infty)$ pour $0 < p < \infty$ l'espace de Lebesgue pondéré $L_{p.w}(E)$ est l'espace des fonctions mesurables telle que : :*

$$\|f\|_{p.w}(E) := \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Le but est de trouver des conditions sur les fonctions de poids u et v telles que l'inégalité

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty f(x)^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (*)$$

soit valable pour toute fonction f positive de l'une des classes $Q_{\alpha_1}, Q^{\alpha_0} ou Q_{\alpha_1} \cap Q^{\alpha_0}$. L'essentiel ici et de prouver de telles inégalités avec des meilleures constantes.

Notre principale objectif et de prouver de telles inégalité avec les meilleures constantes, cela a été possible, pour tous les paramètres $0 < p \leq q < \infty$ certains résultat de ce type ont déjà été prouver par Lorentz-Hunt , Bergh , Bergh-Burenkov-Persson , Stepanov , Heinig-Stepanov , Pecarie-Persson , Heinig-Malingranda , et dernièrement par Gol'dman-Heinig-stepanov .

Lemme 1. *Soient w une fonction de poids et $0 < \gamma \leq 1$, $0 < r < \infty$*
Si $0 \leq \varphi \downarrow$, alors

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{\frac{1}{\gamma}} w(x)dx\right)^\gamma \leq \int_0^\infty \left[\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right]^\gamma dy \tag{1}$$

et

$$\int_{\varphi^{-1}(x)}^\infty \varphi(y)^r dy = \int_0^x \varphi^{-1}(s)d(s^r) - x^r\varphi^{-1}(x). \tag{2}$$

Si $0 \leq \varphi \uparrow$, alors

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{\frac{1}{\gamma}} w(x)dx\right)^\gamma \leq \int_0^\infty \left[\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dx\right]^\gamma dy \tag{3}$$

Pour $\gamma = 1$ on a égalités dans (1) et (3)

Démonstration. Premièrement on prouve le pour la fonction décroissante φon peut écrire formellement l'inégalité

$$\varphi^{-1}(x) \leq \int_0^\infty 1_[0, \varphi(y)](x)dx \tag{$**$}$$

en fait $\varphi^{-1}(0^+) = \infty$ et $\varphi^{-1}(\infty) = 0$ si $0 < y < \varphi^{-1}(x)$ alors $x \leq \varphi(y)$ on trouve

$$\varphi^{-1}(x) = \int_0^{\varphi^{-1}(x)} dy = \int_0^\infty 1_[0, \varphi^{-1}(x)](y)dy \leq \int_0^\infty 1_[0, \varphi(y)](x)dy.$$

Dans le cas où soit $\varphi^{-1}(0^+) < \infty$ ou $\varphi^{-1}(\infty) > 0$ on peut faire des modifications de cet argument pour voir que l'inégalité $(**)$ est également vraie dans ces cas. Ensuite, par l'inégalité de Minkowski avec la $L_{\frac{1}{\gamma},w}$-norme à $(**)$, nous constatons que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{\frac{1}{\gamma}} w(x)dx\right)^\gamma &= \|\varphi^{-1}(x)\|_{\frac{1}{\gamma},w} \\ &\leq \|\int_0^\infty 1_{[0,\varphi(y)]}(x)dy\|_{\frac{1}{\gamma},w} \leq \int_0^\infty \|1_{[0,\varphi(y)]}(x)\|_{\frac{1}{\gamma},w}dy \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right]^\gamma dy\end{aligned}$$

et l'inégalité (1) est prouvée.

L'égalité (2) découle de l'égalité évidente

$$\int_0^{x^r} \varphi^{-1}(t^{\frac{1}{r}})dt = \int_0^x \varphi^{-1}(s)d(s^r)$$

et l'égalité géométriquement claire

$$\int_0^{x^r} \varphi^{-1}(t^{\frac{1}{r}})dt = x^r\varphi^{-1}(x) + \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\infty} \varphi(y)^r dy.$$

Pour prouver l'inégalité (3)pour φ croissante nous observons tout d'abord que

$$\varphi^{-1}(x) \leq \int_0^\infty 1_{[\varphi(y),\infty)}(x)dy. \qquad (***)$$

En effet, si $\varphi^{-1}(0^+) = 0, \varphi^{-1}(\infty) = \infty$ et $0 < y < \varphi^{-1}(x)$ alors $\varphi(y) \leq x$ et

$$\varphi^{-1}(x) = \int_0^{\varphi^{-1}(x)} dy = \int_0^\infty 1_{[0,\varphi^{-1}(x)]}(y)dy \leq \int_0^\infty 1_{[\varphi(y),\infty]}(x)dy.$$

Les cas où soit $\varphi^{-1}(0^+) > 0$ ou $\varphi^{-1}(\infty) < \infty$ nécessite des modifications mineures à nouveau. Ensuite, de la même manière que ci-dessus, par l'inégalité de Minkowski avec $L_{\frac{1}{\gamma},w}$-norme utilisé à $(***)$ on trouve que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{\frac{1}{\gamma}}w(x)dx\right)^\gamma &= \|\varphi^{-1}(x)\|_{\frac{1}{\gamma},w} \\ &\leq \|\int_0^\infty 1_{[\varphi(y),\infty](x)dy}\|_{\frac{1}{\gamma},w} \leq \int_0^\infty \|\varphi^{-1}(x)\|_{\frac{1}{\gamma},w}dy \\ &\leq \int_0^\infty \left[\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dx\right]^\gamma dy,\end{aligned}$$

et l'inégalité (3) est prouvée.

Si $\gamma = 1$ alors l'ensemble $\{(x, y) : y = \varphi(x) \text{ ou } x = \varphi^{-1}(y)\}$ en tant que somme des graphes $\varphi(x)$ et $\varphi^{-1}(y)$ a une mesure à deux dimensions nulle (cf. [16]), le théorème de Fubini nous avons des égalités □

Remarque 1. *Si φ est unr fonction croissante et $\varphi(0^+) > 0$, alors l'égalité (3) suit de l'égalité (1), Nous ne devrions utilisés l'inégalité (1) que pour la fonction décroissante $\psi(x) = 1/\varphi(x)$ avec le poids $w_1(x) = w(1/x)/x_2$ et changer la variable x en $1/x$.*

Théorème 4. *Soient* $0 < p \leq q < \infty$ *et* $-\infty < a_0 < a_1 < \infty$.

*(**A**) L'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq A\left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{4}$$

est valable pour tout $0 \leq f \in Q_{\alpha_1}$, *si et seulement si*

$$A_{\alpha_1} := \sup_{t>0}\left(\int_0^t x^{q\alpha_1}u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t x^{p\alpha_1}v(x)dx\right)^{-1/p} < \infty. \tag{5}$$

de plus $A = A_{\alpha_1}$ *est la meilleure constante.*

*(**B**) L'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq B\left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{6}$$

est valable pour tout $0 \leq f \in Q^{\alpha_0}$ *si et seulement si*

$$B_{\alpha_0} := \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)^{-1/p} < \infty. \tag{7}$$

de plus $B = B_{\alpha_0}$ *est la meilleure constante.*

Démonstration. (**A**) (4) $\Leftrightarrow$ (5)

(4) $\Rightarrow$ (5) , on pose $f(x) = x^{\alpha_1}1_{[0,t]}(x)$ dans (4)

$$\left(\int_0^\infty x^{\alpha_1}1_{[0,t]}x^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq A\left(\int_0^\infty x^{\alpha_1}1_{[0,t]}x^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

nous donne

$$\left(\int_0^t x^{q\alpha_1}u(x)dx\right)^{1/q} \leq A\left(\int_0^t x^{p\alpha_1}v(x)dx\right)^{1/p}$$

on multiple les deux cotes par $\left(\int_0^t x^{p\alpha_1}v(x)dx\right)^{-1/p}$ on trouve

$$\left(\int_0^t x^{q\alpha_1}u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t x^{p\alpha_1}v(x)dx\right)^{-1/p} \leq A$$

ensuite

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t x^{q\alpha_1}u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t x^{p\alpha_1}v(x)dx\right)^{-1/p} \leq \sup_{t>0} A = A$$

donc

$$A_{\alpha_1} \leq A$$

(5) $\Rightarrow$ (4) ,
on a

$$A_{\alpha_1} := \sup_{t>0} \left(\int_0^t x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t x^{p\alpha_1} v(x)dx \right)^{-1/p} < \infty.$$

en multiple par

$$\left(\int_0^t x^{p\alpha_1} v(x)dx \right)^{1/p}$$

en trouve

$$\left(\int_0^t x^{p\alpha_1} v(x)dx \right)^{1/p} A_{\alpha_1} = \sup_{t>0} \left(\int_0^t x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{1/q}$$

donc

$$\left(\int_0^t x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{1/q} \leq A_{\alpha_1} \left(\int_0^t x^{p\alpha_1} v(x)dx \right)^{1/p} \qquad \forall t > 0.$$

Puis, en mettant les deux membres à la puissance p

$$\left(\int_0^t x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \left(\int_0^t x^{p\alpha_1} v(x)dx \right).$$

et en faisant le changement $t = \varphi(y)$ avec $0 \leq \varphi \downarrow$:

$$\left(\int_0^{\varphi(y)} x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \left(\int_0^{\varphi(y)} x^{p\alpha_1} v(x)dx \right).$$

ensuite en intégrant de 0 à ∞ par rapport à y :

$$\int_0^\infty \left(\int_0^{\varphi(y)} x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{p/q} dy \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty \left(\int_0^{\varphi(y)} x^{p\alpha_1} v(x)dx \right) dy.$$

par l'inégalité (1) avec $\gamma = p/q \leq 1$ et l'égalité (1) pour $\gamma = 1$, on a

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{q/p} x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty \varphi^{-1}(x) x^{p\alpha_1} v(x)dx.$$

on prend $\varphi^{-1}(x) = (x^{-\alpha_1} f(x))^p$, qui est une fonction décroissante

$$\left(\int_0^\infty (x^{-\alpha_1} f(x))^{pq/p} x^{q\alpha_1} u(x)dx \right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty (x^{-\alpha_1} f(x))^p x^{p\alpha_1} v(x)dx.$$

On trouve

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty f(x)^p v(x)dx.$$

Donc

$$A \leq A_{\alpha_1}$$

(**B**)

(6) $\Rightarrow$ (7)

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq B\left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

On prend : $f(x) = x^{\alpha_0} 1_{[t,\infty)}, \quad t > 0$ dans (6)

$$\left(\int_0^\infty (x^{\alpha_0} 1_{[t,\infty)})^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq B\left(\int_0^\infty (x^{\alpha_0} 1_{[t,\infty)})^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

Ce qui nous donne

$$\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0} u(x)dx\right)^{1/q} \leq B\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x)dx\right)^{1/p}$$

en multipliant par

$$\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x)dx\right)^{-1/p}$$

on trouve

$$\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0} u(x)dx\right)^{1/q} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x)dx\right)^{-1/p} \leq B$$

ensuite

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0} u(x)dx\right)^{1/q} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x)dx\right)^{-1/p} \leq \sup_{t>0} B = B$$

Donc

$$B_{\alpha_0} = B$$

(7) $\Rightarrow$ (6)

$$B_{\alpha_0} = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0} u(x)dx\right)^{1/q} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x)dx\right)^{-1/p} < \infty$$

en multipliant par

$$\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x)dx\right)^{1/p}$$

on a

$$\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)^{1/p} B_{\alpha_0} = \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{1/q}$$

Alors

$$\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{1/q} \leq B_{\alpha_0}\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)^{1/p} \quad \forall t<\infty$$

en élevant les deux membres à la puissance p

$$\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{p/q} \leq B_{\alpha_0}^p\left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)$$

puis en faisant le changement suivant $t=\varphi(y)\uparrow$:

$$\left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{p/q} \leq B_{\alpha_0}^p\left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)$$

en intégrant de 0 à ∞ par rapport à y

$$\int_0^\infty\left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{p/q}dy \leq B_{\alpha_0}^p\int_0^\infty\left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)dy$$

en appliquant l'inégalité (3) du lemme 1 :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{q/p}x^{q\alpha_0}u(x)\right)^{p/q}dx &\leq \int_0^\infty\left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{p/q}dy\\ &\leq B_{\alpha_0}^p\int_0^\infty\left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{p\alpha_0}v(x)dx\right)dy\\ &\leq B_{\alpha_0}^p\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)x^{q\alpha_0}v(x)dx\end{aligned}$$

on prend $0<\varphi^{-1}(x)=(x^{-\alpha_0}f(x))^p\uparrow$

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{q/p}x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{p/q} \leq B_{\alpha_0}^p\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)x^{p\alpha_0}v(x)dx$$

$$\left(\int_0^\infty (x^{-\alpha_0}f(x))^q x^{q\alpha_0}u(x)dx\right)^{p/q} \leq B_{\alpha_0}^p\int_0^\infty (x^{-\alpha_0}f(x))^p x^{p\alpha_0}v(x)dx$$

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} \leq B_{\alpha_0}\left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

donc

$$B_{\alpha_0}=B$$

$\square$

Remarque 2. *Le théorème* (1) *peut également être écrit comme suit : Si* $0 < p \leq q < \infty$ *,Alors*

$$\sup_{0 \leq f \in Q_{\alpha_1}} \frac{\|f\|_{q.u}}{\|f\|_{p.v}} = \sup_{t>0} \left(\int_0^t x^{q\alpha_1} u(x) dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t x^{p\alpha_1} v(x) dx \right)^{-1/p}$$

et

$$\sup_{0 \leq f \in Q^{\alpha_0}} \frac{\|f\|_{q.u}}{\|f\|_{p.v}} = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0} u(x) dx \right)^{1/q} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} v(x) dx \right)^{-1/p}$$

Exemple 1.1. *Soient* $0 < p \leq q < \infty$ *et* $u(x) = x^{\alpha q - 1}$ *,* $v(x) = x^{\alpha p - 1}$ *avec* $\alpha > -\alpha_1$*. Ensuite* $A_{\alpha_1} = p^{1/p} q^{-1/q} (\alpha + \alpha_1)^{1/p - 1/q}$ *et, par théorème 1(**A**) , nous concluons que*

$$\left(\int_0^\infty (x^\alpha f(x))^q \frac{dx}{x} \right)^{1/q} \leq p^{1/p} q^{-1/q} (\alpha + \alpha_1)^{1/p-1/q} \left(\int_0^\infty (x^\alpha f(x))^p \frac{dx}{x} \right)^{1/p} ,$$

pour tout $0 < f \in Q_{\alpha_1}$ *. Ce résultat , pour* $\alpha = 0$ *, est connu dans la théorie d'espace de Lorentz (cf [13, Théorème 3.11]) en tant qu'intégration* $L(1/\alpha.p) \subset L(1/\alpha.q)$ *d'espaces de Lorentz avec la norme égale à* 1 *, ou l'espace de Lorentz* $L(1/\alpha.p)$ *est l'espace générer par la fonctionnelle :*

$$\|f\|_{L(1/\alpha.p)} = \left[p\alpha \int_0^\infty (x^\alpha f^*(x))^p dx \right]^{1/p}$$

ou f^* *est le réarrangement de* f

Théorème 5. *Soient* $0 < p \leq q < \infty$ *, Supposons que* $0 \leq f \in Q^{\alpha_0} \cap Q_{\alpha_1}$ *avec* $-\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty$ *et* u, v *deux fonctions de poids satisfaisant les conditions* (5) *et* (7)*. Alors*

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x) dx \right)^{1/q} \leq C_{p,q} \left(\int_0^\infty f(x)^p v(x) dx \right)^{1/p}, \tag{8}$$

ou $C_{p,q} = \left(A^{1/(1/q-1/p)} + B^{1/(1/q-1/p)} \right)^{1/q-1/p}$ *pour* $p \neq q$
et $C_{p,q} = \max(A, B)$*. si* $p = q$ *.*

Démonstration. $\forall M > 0$ on choisit $\xi \in (0, \infty)$ de telle sorte que

$$\int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx = M \int_0^\xi f(x)^q u(x)dx. \tag{a}$$

ensuite

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} = \left(\int_0^\xi f(x)^q u(x)dx + \int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}$$

on utilise (a)

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} = (1+M)^{p/q} \left(\int_0^\xi f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} &= \left(\frac{1}{M}\int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx + \int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} \\ &= \left(\frac{1}{M}+1\right)^{p/q} \left(\int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}\end{aligned} \tag{b}$$

Alors : $\forall \lambda > 0$

$$\lambda\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} = \lambda\left(\frac{M+1}{M}\right)^{p/q} \left(\int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} \tag{c}$$

d'après (b) et (c) on a

$$\begin{aligned}(1+\lambda)\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} &= (1+M)^{p/q}\left[\left(\int_0^\xi f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}\right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{M^{p/q}}\left(\int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}\right]\end{aligned}$$

on divise par $(1+\lambda)$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q} &= \frac{(1+M)^{p/q}}{1+\lambda}\left[\left(\int_0^\xi f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}\right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{M^{p/q}}\left(\int_\xi^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{p/q}\right]\end{aligned}$$

d'après théorème (1) (a) et (b)et on choisit λ telle que $A^p = \frac{\lambda}{M^{p/q}} B^p$ on trouve que

$$\left(\int_0 \infty f(x)^q u(x) dx \right)^{p/q}$$
$$\leq \frac{(1+M)^{p/q}}{1+\lambda} \left[A^p \int_0 \xi f(x)^p v(x) dx + \frac{\lambda}{M^{p/q}} B^p \int_\xi \infty f(x)^p v(x) dx \right]$$
$$= \frac{(1+M)^{p/q}}{1+\lambda} A^p \int_0 \infty f(x)^p v(x) dx$$
$$= \frac{(1+M)^{p/q}}{B^p + A^p M^{p/q}} A^p B^p \int_0^\infty f(x)^p v(x) dx.$$

$M > 0$ est atteint à $M = M_0 = (A/B)^{pq/(q-p)}$
Alors on a :

$$\frac{(1+M)^{p/q}}{B^p + A^p M^{p/q}} A^p B^p = \frac{\left(1 + (A/B)^{pq/q-p}\right)^{p/q}}{B^p + A^p (A/B)^{(pq/q-p)p/q}} A^p B^p$$
$$= \frac{\frac{\left(B^{pq/q-p} + A^{pq/q-p}\right)^{p/q}}{B^{pq/(q-p).p/q}}}{\frac{B^{p+(p^2)/q-p} + A^{p+(p^2)/q-p}}{B^{p^2/q-p}}} A^p B^p$$
$$= \frac{\left(B^{pq/q-p} + A^{pq/q-p}\right)^{p/q}}{B^{pq/q-p} + A^{pq/q-p}} A^p B^p$$
$$= \left(B^{pq/q-p} + A^{pq/q-p}\right)^{p/q} \left(B^{pq/q-p} + A^{pq/q-p}\right)^{-1} A^p B^p$$
$$= [AB(A^{pq/(q-p)} + A^{pq/(q-p)})^{1/q-1/p}]^p = C_{p,q}^p$$

pour $p \neq q$, et dans le cas ou $p = q$ et il est égale $\max(A^p, B^p)$. $\square$

Exemple 1.2. *soient* $0 < p \leq q < \infty$ *et* $u(x) = x^{-\alpha q-1}, v(x) = x^{-\alpha p-1}$ *avec* $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ *les conditions (5) et (7) valable , respectivement avec* $A = p^{1/p} q^{-1/q} (\alpha_1 - \alpha)^{1/p-1/q}$ *et* $B = p^{1/p} q^{-1/q} (\alpha - \alpha_0)^{1/p-1/q}$ *avec le théorème (2) on obtient cette inégalité*

$$\left(\int_0^\infty \left(x^{-\alpha} f(x)\right)^q \frac{dx}{x} \right)^{1/q}$$
$$\leq p^{1/p} q^{-1/q} \left(\frac{(\alpha - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha)}{\alpha_1 - \alpha_0} \right)^{1/p-1/q}$$
$$\times \left(\int_0^\infty \left(x^{-\alpha} f(x)\right)^p \frac{dx}{x} \right)^{1/p}$$

valable pour tout $0 < f \in Q^{\alpha_0} \cap Q_{\alpha_1}$ $\forall f$ *satisfait*

$$0 \leq f(x) \leq \max\left((s/t)^{\alpha_0}, (s/t)^{\alpha_1}\right) f(t) \qquad \forall s, t > 0$$

Théorème 6. *Soient* $0 < p \leq q < \infty$ *et* $-\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty$

L'inégalité

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{9}$$

valable pour tout $0 < f \in Q^{\alpha_0} \cap Q_{\alpha_1}$ *si et seulement si (9) et vrais pour la fonction* $f_t(x) = \min(x^{\alpha_1}, t^{\alpha_1-\alpha_0}x^{\alpha_0})$ *avec* $t > 0$ *arbitraire , i.e.,*

$$\begin{aligned} D = \sup_{t>0}\Bigg\{&\left(\int_0^\infty [\min(x^{\alpha_1}, t^{\alpha_1-\alpha_0}x^{\alpha_0})]^q u(x)dx\right)^{1/q} \\ &\times\left(\int_0^\infty [\min(x^{\alpha_1}, t^{\alpha_1-\alpha_0}x^{\alpha_0})]^p v(x)dx\right)^{1/p}\Bigg\} \end{aligned} \tag{10}$$

Démonstration. Voire [6] □

Remarque 3. *Si on prend* u *et* v *comme l'exemple* (2) *alors :*

$$D = p^{1/p}q^{-1/q}\left(\frac{(\alpha-\alpha_0)(\alpha_1-\alpha)}{\alpha_1-\alpha_0}\right)^{1/p-1/q}$$

Corollaire 1.2. *Si* $0 < p \leq q < \infty$ *alors :*

$$\sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\|\int_0^\infty f\|_{q.u}}{\|\int_0^\infty f\|_{p.v}} = \sup_{t>0}\frac{\|\min(x,t)\|_{q.u}}{\|\min(x,t)\|_{p.v}}$$

Corollaire 1.3. *Si* $0 < p \leq q < \infty$ *alors :*

$$\sup_{0\leq f concave}\frac{\|\int_0^\infty f\|_{q.u}}{\|\int_0^\infty f\|_{p.v}} = \sup_{t>0}\frac{\|\min(x,t)\|_{q.u}}{\|\min(x,t)\|_{p.v}}$$

Corollaire 1.4. *Si* $0 < p \leq q < \infty$ *alors :*

$$\sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\|\frac{1}{x}\int_0^\infty f\|_{q.u}}{\|\frac{1}{x}\int_0^\infty f\|_{p.v}} = \sup_{t>0}\frac{\|\min(1,t/x)\|_{q.u}}{\|\min(1,t/x)\|_{p.v}}$$

Chapitre 2

Inégalités de Hardy pour les fonctions monotones

Dans ce chapitre, nous allons étudier les inégalités de Hardy avec poids , mais au lieu de travailler uniquement avec des fonctions positives, nous allons considérer des fonctions monotones positives.

Certains auteurs, comme G. H. Hardy, ont déjà envisagé l'étude des inégalités de Hardy quand on impose la restriction de la monotonie.Dans ce qui suit nous donnerons les premiers résultats concernant les fonctions monotones. Cependant, l'étude de l'inégalité de Hardy dans le cône des fonctions monotones a commencé à susciter un réel intérêt lorsque M. A. Arián et B. Muckenhoupt ont étudié, la bornitude de l'opérateur maximal de Hardy Littlewood,dans les espaces de Lorentz qui est vérifiée si et seulement si l'inégalité de Hardy pondérée est valable pour les fonctions positives et décroissantes. Ensuite, Il est intéressant d'étudier l'opérateur classique de Hardy dans le cône des fonctions monotones.

2.1 Premiers résultats pour les fonctions monotones

Comme il a été dit dans l'introduction du chapitre, les inégalités de Hardy dans le cône des fonctions monotones ont été examinées avant l'approche de M. A, Arino et B-Muckenhoupt. En particulier, nous avons un résultat similaire avec une estimation de ci-dessous pour les fonctions monotones

Si de plus dans le théorème (7), on suppose que $f \downarrow$ alors on obtient le résultat suivant

Théorème 7 (ce théorème est utilisé dans la remarque (2.1)). *Si f une fonction positive , $p \geq 1$ et $\alpha < p-1$ alors :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\alpha dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx$$

Démonstration. On suppose $(t = xs)$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\alpha dx\right)^{1/p} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)ds\right)^p x^\alpha dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)x^{\alpha/p}ds\right)^p dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

On applique l'inégalité intégral de Minkowski et par changement de variable $(y = xs)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)x^{\alpha/p}ds\right)^p dx\right)^{1/p} &\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(xs)x^\alpha dx\right)^{1/p} ds \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(y)\left(\frac{y}{s}\right)^\alpha \frac{dy}{s}\right)^{1/p} ds \\ &= \left(\int_0^1 s^{-1/p(\alpha+1)}ds\right)\left(\int_0^\infty f^p(y)y^\alpha dy\right)^{1/p} \\ &= \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^\infty f^p(y)y^\alpha dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

□

Théorème 8. *Si* $p \geq 1$, $\alpha < p-1$ *et* $0 < f \downarrow$ *Alors :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\alpha dx \geq \frac{p}{p-1-\alpha}\int_0^\infty f(x)^p x^\alpha dx.$$

Démonstration. On définit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et par le théorème de Lebesgue on a

$$\frac{d}{dt}(F(t))^p = pf(t)(F(t))^{p-1} \geq pf(t)\left(f(t)^{p-1}t^{p-1}\right) = pt^{p-1}f(t)^p$$

pour presque chaque t , nous intégrons de 0 à x , on a

$$F(x)^p \geq \int_0^x t^{p-1}f(t)^p dt.$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\alpha dx &= \int_0^\infty F(x)^p x^{\alpha-p}dx \\ &\geq \int_0^\infty \left(p\int_0^x t^{p-1}f(t)^p dt\right) x^{\alpha-p}dx \\ &= p\int_0^\infty \left(\int_t^\infty x^{\alpha-p}dx\right) t^{p-1}f(t)^p dt \\ &= p\int_0^\infty \frac{t^{\alpha+1-p}}{p-\alpha-1}t^{p-1}f(t)^p dt \\ &= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^\infty f(t)^p t^\alpha dt \quad .\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1. *Si on applique les deux théorèmes (8,7) avec $p > 1$ et $\alpha = 0$ pour $\forall 0 < f \downarrow$*

$$p' \int_0^\infty f(x)^p dx \leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq (p')^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

avec des conditions supplémentaire on peut trouver que les intégrales :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^\alpha dx$$

et

$$\int_0^\infty f(x)^p x^\alpha dx$$

sont comparables

Théorème 9. *Si $0 < p < 1$, $\alpha < p - 1$ et f une fonction monotone positive alors :*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^\alpha dx \approx \int_0^\infty f(x)^p x^\alpha dx$$

Démonstration. voir([3], page : 45)

□

2.2 Caractérisation de l'inégalité pondérée de Hardy pour les fonctions monotones

D'après la section précédente, on voit qu'il est nécessaire d'étudier des inégalités de Hardy dans le cône de fonctions monotones. Ce problème a été résolu par M. A. Arino et B. Muckenhoupt ($p > 1$) en 1990 et par E. Sawyer dans une situation la plus générale ($p, q \geq 1$), dans la même année.

Tout d'abord, considérons la bornitude de l'opérateur de Hardy classique : $\mathcal{H}$: $L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w)$ où $p > 1$.

Définition 2.1. *Soient $w \in \mathbb{R}^+$ une fonction de poids, et $0 < p < \infty$, on définit le cône des fonctions décroissantes comme suit :*

$$L^p_{\text{dec}}(w) := \left\{ 0 \leq f \downarrow : \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Remarque 4. *l'inégalité (B. Muckenhoupt)*

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, f \geq 0, f \downarrow \qquad (2.1)$$

est valable si et seulement si

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r w(x)^{\frac{-p'}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \qquad (2.2)$$

est satisfaite

Si la fonction de poids w satisfait (2.2), alors (2.1) est valable. Cependant,l'inverse n'est pas vrai,

Exemple 2.1. *on peut considérer la fonction de poids*

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{(1,2)^c}(x)$$

si $r < 1$ on a

$$\left(\int_r^1 x^{-\frac{1}{2}-p} dx + \int_2^\infty x^{-\frac{1}{2}-p} dx \right) \left(\int_0^r x^{\frac{p'}{2p}} dx \right)^{\frac{p}{p'}} = \left(\frac{r^{\frac{1}{2}-p}}{p - \frac{1}{2}} + C_p \right) \left(\frac{r^{\frac{p'}{2p}} + 1}{\frac{p'}{2p} + 1} \right)^{\frac{p}{p'}}$$
$$= C'_p \frac{1}{r} + C_p r^{\frac{1}{2}+\frac{p}{P}} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \infty$$

où C_p et C'_p sont des constantes qui ne dépendent que de p. Donc $B = \infty$ et (2.2) n'est pas vérifier. Cependant, lorsque $f \downarrow$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx\right)^{1/p} &\leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^{-1/2}dx\right)^{1/p} \\
&\leq C\left(\int_0^\infty f(x)^p x^{-1/2}dx\right)^{1/p} \\
&\leq C\left(2\int_0^1 f(x)^p x^{-1/2}dx + \int_2^\infty f(x)^p x^{-1/2}dx\right)^{1/p} \\
&\leq C'\left(\int_t^\infty f(x)^p w(x)dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

et (2.1) est valable .

Théorème 10. *Soient $(\mathcal{X}, \mu)$ un espace mesurable et w une fonction de poids. Alors, si $0 < p < \infty$:*

$$\int_0^\infty f^*(t)^p w(t)dt = p\int_0^\infty y^{p-1}\left(\int_0^{\lambda_f(y)} w(t)dt\right)dy \tag{2.3}$$

est valable

f^* désigne le réarrangement de la fonction f

pour la preuve voir ([3],page 51)

Théorème 11. *Soit $1 < p < \infty$ l'inégalité :*

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

est valable pour toutes les fonctions décroissantes positives si, et seulement si, il existe une constante $C' > 0$ tel que

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p}dx \leq C'\frac{1}{r^p}\int_0^r w(x)dx \qquad \forall r > 0 \tag{2.5}$$

Notation 2. *On note B_p la classe de poids qui satisfont (2.5).*

Lemme 2. *Soit f une fonction décroissante positive on considére $g(x) := f(A|y|^n), x \in \mathbb{R}^n$ quand $A = |B_1(0)|$, alors $g^*(t) = f(t)$*

Pour la démonstration du Lemme 2 voire [3]

Démonstration. Nous supposons d'abord que (2.4) est valable pour toutes les fonctions décroissantes positives , fixant $r > 0$ on choisit $f(x) = \chi_{(0,r)}(x)$, donc

$$\left(\int_0^r w(x)dx + r^p \int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou,

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p}dx \leq C' \frac{1}{r^p}\int_0^r w(x)dx$$

avec $C' = C^p - 1$ nous supposons que (2.5) est valable pour tout $r > 0$.
Observons que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p &= p\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds\right)^{p-1} f(t)dt \\ &= p\int_0^x \left(\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds\right)^{p-1} f(t)t^{p-1}dt\end{aligned}$$

On définit $g(t) := \left(\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds\right)^{p-1} f(t)$, alors :

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = p^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \int_0^x g(t)t^{p-1}dt\frac{w(x)}{x^p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Nous remarquons que, si $f \downarrow$, alors la fonction : $\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds \downarrow$ et donc $g \downarrow$ alors nous savons que, par le lemme 2, $g = h^*$ avec $h(x) := g\left(A|x|^n\right)$ En appliquant (2.2), nous obtenons :

$$\int_0^x g(t)t^{p-1}dt = \int_0^\infty \int_0^{\lambda_h(y)} t^{p-1}\chi_{(0,x)}(t)dtdy = \frac{1}{p}\int_0^\infty \min\left(\lambda_h(y), x\right)^p dy$$

En appliquant le théorème de Fubini, (2.5), (2.3) et inégalité de Hölder, nous concluons :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty \min\left(\lambda_h(y), x\right)^p dy \frac{w(x)}{x^p} dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^{\lambda_h(y)} w(x)dx + \lambda_h(y)^p \int_{\lambda_h(y)}^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx\right) dy \\
&\leq (1+C') \int_0^\infty \int_0^{\lambda_h(y)} w(x)dxdy \\
&= (1+C') \int_0^\infty g(x)w(x)dx \\
&= (1+C') \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^{p-1} f(x)w(x)dx \\
&\leq (1+C') \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $C = 1 + C'$ $\square$

Corollaire 2.1. *Soient $0 < p \leq 1$ et w un poids dans $\mathbb{R}^+$ alors l'opérateur de Hardy classique $\mathcal{H} : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w)$ est borné si et seulement si w satisfait la condition B_p .*

Pour la preuve voir ([3], page : 54)

Théorème 12. *On suppose que $1 < p < \infty$ et soient v, g deux fonctions mesurable positives sur $(0, \infty)$ telle que $0 < \int_0^t v(x)dx < \infty \quad \forall t > 0$ alors*

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x)dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}} &\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{g(t)}{\int_0^t v(s)ds} dt\right)^{p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g(t)dt\right)^{p'-1} \left(\int_0^x v(t)dt\right)^{1-p'} g(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g(t)dt\right)^{p'} \frac{v(x)}{\left(\int_0^x v(t)dt\right)^{p'}} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\quad + \frac{\int_0^\infty g(x)dx}{\left(\int_0^\infty v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

preuve voir ([3],page 55)

Chapitre 3

Applications

La caractérisation de l'inégalité pondérée de Hardy dans le classe des fonctions monotones a plusieurs applications, nous pouvons étudier la normabilité de l'espaces de Lorentz et l'espaces de Lorentz de type faible en termes d'inégalités de Hardy pour les fonctions positives monotones .

Définition 3.1. *Soient* $0 < p < \infty$ *et* v *est une fonction de poids, alors on définit l'espace de Lorentz pondéré,*

$$\Lambda^p(v) = \left\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+, \|f\|\Lambda^p(v)\right\} < \infty,$$

où

$$\|f\|\Lambda^p(v) = \left(\int_0^\infty f^*(x)^p v(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 3.2. *Soient* $0 < p < \infty$ *et* v *est une fonction de poids, alors on définit l'espace de Lorentz pondéré faible*

$$\Lambda^{p,\infty}(v) = \left\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+, \|f\|\Lambda^{p,\infty}(v)\right\} < \infty,$$

$$\|f\|\Lambda^{p,\infty}(v) = \sup_{t>0} \left(f^*(t) v^{1/p}(t)\right).$$

Définition 3.3. *L'opérateur de Hardy est défini par :*

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx, t > 0.$$

3.1 Normabilité des espaces de Lorentz

Définition 3.4. *Nous définissons l'espace*

$$\Gamma_p(v) := \left\{f \text{ measurable on } \mathbb{R}^n : \left(\int_0^\infty f^{**}(x)^p v(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$$

Théorème 13. *On suppose* $1 < p < \infty$, *et* $v(x)$ *et* f *une fonction mesurable positive sur* $(0, \infty)$

Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $\Lambda_p(v)$ *est un espace de Banach*

(ii) $\Lambda_p(v) = \Gamma_p(v)$ *et* $\|f\| \approx \left(\int_0^\infty f^*(x)^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$ *avec* $\|f\| := \left(\int_0^\infty f^{**}(x)^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$

(iii) L'inégalité

$$\left(\int_0^r v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r \left(\frac{1}{x}\int_0^x v(t)dt\right)^{1-p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq Cr$$

est valable pour tout $r > 0$.

(iv) L'inégalité

$$\left(\int_r^\infty \frac{v(x)}{x^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{B}{r}\left(\int_0^r v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

est valable pour tout $r > 0$, *c'est-à-dire que le poids* v *satisfait une condition* B_p.

Démonstration. voir ([3], page 61) □

Définition 3.5. *Nous disons qu'un poids* v *est dans* $B_{1,\infty}$, *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $0 < s \leq r < \infty$

$$\frac{1}{r}\int_0^r v(t)dt \leq C\frac{1}{s}\int_0^s v(t)dt.$$

Remarque 3.1. *Si on écrit* $V(x) = \int_0^x v(t)dt$ *et* $v \in B_{1,\infty}$ *est équivalent à dire que* V *est quasi-concave.*

Afin d'étudier la normabilité de $\Lambda^1(v)$, *on utilise les résultats suivants,*

Théorème 14. *Considérons l'opérateur intégral* $T_k f(x) := \int_0^\infty k(x,t)f(t)dt$ *ou* $k(x,t)$ *est un noyau positif et supposons que si* f *est décroissante, alors* $T_k f : L^{p_0}_{\text{dec}}(w_0) \longrightarrow \Lambda^{p_1,\infty}(w_1)$ *avec* $p_0 \geq 1$ *est borné si, et seulement si,*

$$\sup_{x>0}\sup_{r>0}\int_0^r k(x,t)dt\left(\int_0^r w_0(t)dt\right)^{-\frac{1}{p_0}}\left(\int_0^x w_1(t)dt\right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Théorème 15. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\Lambda^1(v)$ *est un espace de Banach.*
(ii) $v \in B_{1,\infty}$
(iii) $M : \Lambda^1(v) \longrightarrow \Lambda^{1,\infty}(v)$ *est bornée.*
(iv) $\mathcal{H} : L^1_{dec}(v) \longrightarrow L^{1,\infty}(v)$ *est bornée.*

Démonstration. voir ([3], pages :66-68) □

Théorème 16. *Soit* $T_k f(x) = \int_0^\infty k(x,t)f(t)dt$ *et on suppose que* $T_k f$ *est une fonction non-croissante , quand* f *est non-croissante , alors l'opérateur* $T_k : L^p_{\mathrm{dec}}(w) \longrightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$ *est bornée si et seulement si,*

$$\sup_{z>0}\left(\left(\int_0^\infty \left(\int_0^y k(z,t)dt\right)^{p'}\left(\int_0^y w(t)dt\right)^{-p'} w(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty k(z,t)dt\left(\int_0^\infty w(s)ds\right)^{\frac{-1}{p}}\right)\left(\int_0^z w(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3.2}$$

Théorème 17. *Ce qui suit est équivalent*

(i) $\Lambda^p(w)$ *est un espace de Banach.*
(ii) $\mathcal{H} : L^p_{dec}(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w)$
(iii) $M : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$

3.2 Normabilité des espaces de Lorentz faibles

Proposition 3.1. *Soit* $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ *et* v *une fonction de poids*

$$v_\alpha(t) := (1+\alpha)V(t)^\alpha v(t)$$

Alors $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)} = \|\cdot\|_{\Lambda^{p(\alpha+1),\infty}(v_\alpha)}$ *et donc* $\Lambda^{p,\infty}(v) = \Lambda^{p(\alpha+1),\infty}(v_\alpha)$

Remarque 3.2. *Si on prend* $\alpha = \frac{1}{p} - 1 > -1$ *dans la proposition 3.1 , on trouve que*

$$\Lambda^{p,\infty}(v) = \Lambda^{1,\infty}\left(v_{\frac{1}{p}-1}\right)$$

.

Démonstration.

$$\left(\int_0^t v_\alpha(r)dr\right)^{\frac{1}{p(\alpha+1)}} = \left(\int_0^t (1+\alpha)V(r)^\alpha v(r)dr\right)^{\frac{1}{p(\alpha+1)}} = \left(\left[v(r)^{\alpha+1}\right]_{r=0}^t\right)^{\frac{1}{p(\alpha+1)}}$$
$$= V(t)^{\frac{1}{p}}$$

on a

$$\|f\|_{\Lambda^{p(\alpha+1),\infty}(v_\alpha)} = \sup_{t>0} f^*(t)\left(\int_0^t v_\alpha(r)dr\right)^{\frac{1}{p(\alpha+1)}} = \sup_{t>0} f^*(t)V(t)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)}$$

□

Théorème 18. *soit* $0 < p < \infty$ *les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $v \in B_p$
(ii) $\int_0^r \frac{t^{p-1}}{V(t)}dt \leq C\frac{r^p}{V(r)}$
(iii) $\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{p+1}}dt \leq C\frac{V(r)}{r^p}$

Démonstration. poids $v \in B_p$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_r^\infty \frac{v(t)}{t^p}dt \leq C\frac{V(r)}{r^p}$$

pour tout $r > 0$

$$\int_r^s \frac{v(t)}{t^p}dt \leq C\frac{V(r)}{r^p} \tag{3.3}$$

en intégrant par partie

$$\int_r^s \frac{v(t)}{t^p}dt = \frac{V(s)}{s^p} - \frac{V(r)}{r^p} + C\int_r^s \frac{V(t)}{t^{p+1}}dt$$

et (3.3) équivalente à

$$\frac{V(s)}{s^p} \leq C\frac{V(r)}{r^p} \text{ and } \int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{p+1}}dt \leq C\frac{V(r)}{r^p}$$

mais

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{p+1}}dt \geq \int_s^\infty \frac{V(t)}{t^{p+1}}dt \geq V(s)\int_s^\infty \frac{1}{t^{p+1}}dt = \frac{V(s)}{s^p}$$

puis (3.3) équivalente à

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{p+1}}dt \leq C\frac{V(r)}{r^p}$$

c'est (iii). enfin, pour voir l'équivalence entre (ii) et (iii) on utilise le résulte dans [16] : si m est une fonction positive, $0 < r < \infty$, alors

$$\int_0^r m(s)\frac{ds}{s} \approx m(r)$$

si et seulement si

$$\int_r^\infty \frac{1}{m(s)}\frac{ds}{s} \approx \frac{1}{m(r)}$$

L'équivalence entre (ii) et (iii) est obtenue a partir de $m(r) = \frac{r^p}{V(r)}$ □

Définition 3.6. *Soit v une fonction de poids, on note $V(t) = \int_0^t v(s)ds$. pour $0 < p < \infty$*

on dit que V est une fonction p quasi-concave s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < s \leq r < \infty$

$$\frac{V(r)}{r^p} \leq C\frac{V(s)}{s^p}. \tag{3.4}$$

Proposition 3.2. *Soient $0 < p < \infty, \alpha > -1$ et $\epsilon > 0$, si V satisfait (3.4) alors $v_\alpha \in B_{p(\alpha+1)+\epsilon}$.*

Théorème 19. *Soit* $0 < p < \infty$ *alors*

(i) $\mathcal{H} : L^{p,\infty}_{\text{dec}}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v)$ *si et seulement si*

$$\int_0^r \frac{1}{V(t)^{\frac{1}{p}}} dt \leq C \frac{r}{V(r)^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall r > 0 \tag{3.5}$$

(ii) si v *satisfait (3.5), alors il existe* $q > p$ *telle que* $\mathcal{H} : L^{q,\infty}_{\text{dec}}(v) \longrightarrow L^{q,\infty}(v)$

Démonstration. pour prouver (i) on prend $T = \mathcal{H}$, $X = L^{p,\infty}(v)$ et $N = \|\cdot\|_{L^{p,\infty}(v)}$, alors

$$\left\| \mathcal{H}\left(V^{-\frac{1}{p}}\right) \right\|_{L^{p,\infty}(v)} = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \left(\int_0^t V(s)^{-\frac{1}{p}} ds \right) V(t)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

on prouve (ii) soit $f(t) = V(t)^{-\frac{1}{p}}$ telle que $\|f\|_{L^{p,\infty}(v)} = 1$. On définit

$$\mathcal{H}^k f(t) := \mathcal{H}\left(\mathcal{H}^{k-1} f\right)(t)$$

avec $\mathcal{H}^1 f(t) = (\mathcal{H} f)(t)$ on note que si v satisfait (3.5) et par (i) on a $\mathcal{H} : L^{p,\infty}_{\text{dec}}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v)$ et $\mathcal{H} f \in L^{p,\infty}_{\text{dec}}(v)$;

$$\mathcal{H}^k f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{f(r)}{(k-1)!} \log^{k-1}\left(\frac{t}{r}\right) dr$$

pour $k = 2$ on a , en intégrant par partie

$$\mathcal{H}^2 f = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r f(s) ds dr = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \log(t) - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{f(r)}{1!} \log^{2-1}\left(\frac{t}{r}\right) dr;$$

on outre on suppose que la formule est vraie pour k et on applique le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{k+1} f(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r \frac{f(s)}{(k-1)!} \log^{k-1}\left(\frac{r}{s}\right) ds dr \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t f(s) \int_s^t \frac{1}{r} \frac{1}{(k-1)!} \log^{k-1}\left(\frac{r}{s}\right) dr ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t f(s) \frac{1}{k!} \log^k\left(\frac{t}{s}\right) ds \end{aligned}$$

par (i), $\exists A > 0$ telle que $\left\|\mathcal{H}^k f\right\|_{L^{p,\infty}(v)} \leq A^k \|f\|_{L^{p,\infty}(v)} = A^k$ si on prend $0 < \epsilon < \frac{1}{A}$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\epsilon^k \mathcal{H}^k f\right\|_{L^{p,\infty}(v)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\epsilon A)^k < \infty$$

par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\epsilon^k \mathcal{H}^k f\right\|_{L^{p,\infty}(v)} \leq C$$

Pour $C > 0$ étant donnée $\alpha = \frac{2}{p} - 1$, $\|g\|_{L^{p,\infty}_{\text{dec}}(v)} = \|g\|_{L^{2,\infty}_{\text{dec}}(v_\alpha)}$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon^k\mathcal{H}^k f\right\|_{L^{p,\infty}_{\text{dec}}(v)} &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon^k\mathcal{H}^k f\right\|_{L^{2,\infty}_{\text{dec}}(v_\alpha)} \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\epsilon^k\mathcal{H}^k f\right\|_{L^{2,\infty}_{\text{dec}}(v_\alpha)} \\ &= C\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\epsilon^k\mathcal{H}^k f\right\|_{L^{p,\infty}_{\text{dec}}(v)} \leq C\end{aligned} \tag{3.6}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon^k\mathcal{H}^k f\right)(t) &= \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^{k+1}\int_0^t\frac{V(r)^{-\frac{1}{p}}}{k!}\log^k\left(\frac{t}{r}\right)dr \\ &= \frac{\epsilon}{t}\int_0^t V(r)^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\epsilon\log\left(\frac{t}{r}\right)\right)^k}{k!}dr \\ &= \frac{\epsilon}{t}\int_0^t V(r)^{-\frac{1}{p}}e^{\epsilon\log\frac{t}{r}}dr \\ &= \frac{\epsilon}{t}\int_0^t V(r)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{t}{r}\right)^{\epsilon}dr\end{aligned}$$

et (3.6) donne

$$\left(\frac{\epsilon}{t}\int_0^t V(r)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{t}{r}\right)^{\epsilon}dr\right)V(t)^{\frac{1}{p}} \leq C. \tag{3.7}$$

Pour tout $t > 0$, de 3.5 on a

$$\frac{s}{V(s)^{\frac{1}{p}}} \leq \int_0^t\frac{1}{V(r)^{\frac{1}{p}}}dr \leq C\frac{t}{V(t)^{\frac{1}{p}}}$$

pour tout $\infty > s > t > 0$ telle que p-quasi-concave on applique (3.7)

$$\frac{V(t)^{\frac{\epsilon}{p}}}{t}V(t)^{\frac{1}{p}}\int_0^t V(r)^{-\frac{1}{p}}V(r)^{-\frac{\varepsilon}{p}}dr \leq C$$

donc

$$\int_0^t V(r)^{-\frac{1+\epsilon}{p}}dr \leq C\frac{t}{V(t)^{\frac{1+\epsilon}{p}}}$$

Ce qui implique $\mathcal{H} : L^{q,\infty}_{\text{dec}}(v) \longrightarrow L^{q,\infty}(v)$ avec $q = \frac{p}{1+\epsilon}$. □

Théorème 20. *soient $0 < p < \infty$ et v une fonction de poids dans $\mathbb{R}^+$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $M : \Lambda^{p,\infty}(v) \longrightarrow \Lambda^{p,\infty}(v)$

(ii) v satisfait (3.5) telle que

$$\int_0^r \frac{1}{V(t)^{\frac{1}{p}}} dt \leq C \frac{r}{V(r)^{\frac{1}{p}}}$$

pour tout $r > 0$

(iii) $v \in B_p$

(iv) Si $\|f\|^*_{\Lambda^{p,\infty}(v)} := \sup_{t>0} (\mathcal{H}f^*)(t)V(t)^{\frac{1}{p}}$, alors $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)} \approx \|\cdot\|^*_{\Lambda^{p,\infty}(v)}$

(v) $\Lambda^{p,\infty}(v)$ est un espace de Banach.

Pour la preuve voir ([3], page : 75) .

CONCLUSION

Le thème est d'actualité. On peut appliquer les fonctions monotones à différents opérateurs dans différents espaces fonctionnels ce qui ouvre des perspectives de recherche.

Bibliographie

[1] S.Fomine A.Kolmogorov. *Eléments de la théorie des et de l'analyse fonctionnelle.* 1973.

[2] MIGUEL A. et B.MUCKENHOUPT. Maximal functions on classical lorentz spaces and hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. *AMERICAN MATHEMATICALS OCIETY*, 320(2) :727–135, August 1990.

[3] Sergie Arias Garcia. Weighted inequalities for the hardy operator. *unevercity of barselona*, 06/2019.

[4] G.H Hardy. Note on a theorem of hilbert. 6 :314–317, 1920.

[5] Littlewood J.E. et Polya G. Hardy, G.H. Inequalities. *Cambridge Univ.Press*, 1988.

[6] Lech Maligranda. Weighted inequalities for monotone functions. *Collectanea Mathematica*, 48(4) :687–700, 1997.