



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

DJAROUN Basma

HAOUACHE Kheira

Sujet du mémoire

**Contribution à l'étude du comportement mécanique
des poutres en matériaux à gradient de propriétés**

Soutenu publiquement le 30 /06/2022 devant le jury composé de :

Mr. TLIDJI Youcef	Président
Mr. DRAICHE Kada	Rapporteur
Mme. OUAZIR Khatima	Examinatrice
Mme. KHELIFA Zoubida	Examineur

PROMOTION : 2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

*La première personne que nous tenons à remercier est notre encadrant **Mr. DRAICHE Kada**, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.*

Nos remerciement s'adresse également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Enfin, je tiens à remercier mes amis et ma famille qui m'ont toujours soutenue au cours de la réalisation de ce mémoire et surtout ma mère Et mon père, qui m'ont encouragé à poursuivre mes études jusqu'à aujourd'hui

DEDICACE

Je dédie ce travail à la

A la mémoire de mon très cher père

J'espère qu'ils reposent en paix à jamais.

A ma très chère mère

Faible témoignage de ma reconnaissance infinie

A mes frères et mes sœurs

A toutes ma famille

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail

Résumé

Dans ce présent travail, un modèle analytique est développé pour l'analyse du comportement mécanique (flexion, flambement et vibration libre) des poutres en matériaux à gradient de propriétés (FGM) en utilisant une simple théorie de déformation de cisaillement parabolique (PSDT) à trois variables basée sur un nouveau champ de déplacement. La théorie proposée donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la poutre tout en remplissant la condition des contraintes nulles sur les bords supérieur et inférieur de la poutre. Les propriétés mécaniques des poutres sont supposées d'être variables en fonction d'une distribution de loi de puissance (P-FGM) et exponentielle (E-FGM) de la fraction volumique des constituants. Les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites des poutres FGM sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant l'approche de Navier pour le cas des poutres FG simplement appuyées. Les résultats numériques obtenus par le présent modèle sont comparés avec d'autres solutions proposées par des autres théories disponibles dans la littérature. On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour étudier la réponse statique et dynamique des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Mots-clés : poutres P-FGM et E-FGM, PSDT, flexion, flambement, vibration libre.

Abstract

In this present work, an analytical model is developed for the analysis of the mechanical behaviour (bending, buckling and free vibration) of beams made of functionally graded materials (FGM) using a simple three-variable parabolic shear deformation theory (PSDT) based on a new displacement field. The proposed theory gives a parabolic description of the transverse shear stress through the thickness of the beam, yet satisfies the condition of zero stresses at the upper and lower edges of the beam. The mechanical properties of the beams are assumed to be varying according to a power-law (P-FGM) and exponential (E-FGM) distribution of the volume fraction of the constituents. Differential equilibrium equations and boundary conditions for FGM beams are derived using Hamilton's principle. The solutions are obtained using Navier's approach for the case of simply supported FG beams. The numerical results obtained by this model are compared with other solutions proposed by other theories available in the literature. It can be concluded that the proposed theory is efficient to study the static and dynamic response of plates made of functionally graded materials.

Keywords: P-FGM and E-FGM beams, PSDT, bending, buckling, free vibration.

ملخص

في هذا العمل الحالي، تم تطوير نموذج تحليلي لدراسة السلوك الميكانيكي (الانحناء، الالتواء، والاهتزاز الحر) للعوارض المصنوعة من المواد المنترجة وظيفياً (FGM) باستخدام نظرية تشوه القص المكافئ البسيطة (PSDT) ذات المتغيرات الثلاثة التي تعتمد على حقل إزاحة جديد. تعطي النظرية المقترحة وصفاً مكافئاً لإجهاد القص المستعرض من خلال سماكة ال عريض مع تلبية حالة الضغوط الصفرية عند الحواف العلوية والسفلية لل عريض. يُفترض أن تكون الخواص الميكانيكية للعوارض متغيرة وفقاً لتوزيع قانون القوة (P-FGM) والتوزيع الأسي (E-FGM) لجزء الحجم من المكونات. تم اشتقاق معادلات التوازن التفاضلي وشروط الحدود ل عريض المواد المنترجة وظيفياً باستخدام مبدأ هاملتون. يتم الحصول على الحلول باستخدام نهج نافي في حالة عريض FG المدعومة ببساطة. تمت مقارنة النتائج العددية التي حصل عليها من خلال هذا النموذج مع تلك المقترحة من قبل النظريات الأخرى المتوفرة في الأدبيات. يمكن استنتاج أن النظرية المقترحة دقيقة وفعالة لدراسة الاستجابة الثابتة والديناميكية للعوارض المصنوعة من المواد المنترجة وظيفياً.

الكلمات المفتاحية: عوارض P-FGM و E-FGM، PSDT، الانحناء، الالتواء، الاهتزاز الحر.

Sommaire

Listes des figures	I
Listes des tableaux	III
Listes des notations	IV
Introduction générale.....	1
Chapitre I	
Généralité sur les matériaux à gradient de propriétés	5
I.1 Introduction.....	5
I.2 Etude bibliographique.....	6
I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés	7
I.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	11
I.4.1 Domaine aérospatial.....	12
I.4.2 Industrie automobile	13
I.4.3 Industrie d'énergie	14
I.4.4 Industrie biomédical.....	14
I.4.5 Industrie de la défense	15
I.4.6 Énergie nucléaire	15
I.4.7 Industrie optoélectronique	16
I.4.8 Marine	16
I.4.9 Application des FGM dans le domaine du Génie civil	16
I.5 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels.....	17
I.6.1 Avantages des FGM.....	18
I.6.2 Inconvénients des FGM	19
I.7 Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM).....	19
I.7.1 Procédé de poudre sèche.....	19
I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	20
I.7.3. Coulage centrifuge (centrifugat casting).....	21

Sommaire

I.7.4. Coulage en bande (Tape casting)	22
I.7.5. La projection plasma.....	23
I.7.6. Frittage	23
I.7.7. Processus d'infiltration	23
I.8 Les propriétés matérielles effectives des matériaux à gradient de propriétés.....	24
I.8.1. Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM	25
I.8.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	27
I.9 Développements récents et défis des FGM.....	27
I.10 Conclusion	28
Chapitre II	
Les différentes théories des poutres	29
II.1 Introduction	29
II.2 Historique	29
II.3 Définition d'une poutre	30
II.4 Les modèles monocouche équivalente (ESL)	30
II.4.1 la théorie d'Euler-Bernoulli (CBT)	30
II.4.2 La théorie de Timoshenko (FSDBT).....	32
II.4.3 La Théorie d'ordre élevé (HSDBT).....	34
II.5 Différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	38
II.6 Conclusion	40
Chapitre III	
Etude du comportement mécanique des poutres en FGM.....	41
III.1 Introduction	40
III.2 Modèle d'une poutre FGM.....	41
III.2.1 Présentation géométrique	41
III.2.2 Propriétés du matériau.....	41
III.2.3 Hypothèses de la présente théorie de poutre FGM	42

Sommaire

III.3 Formulation théorique	42
III.3.1 Champs de déplacement.....	42
III.3.2 Champs de déformation	43
III.3.3 Equations constitutives.....	44
III.3.4 Equations de mouvement	44
Chapitre IV	
Résultats numériques et discussions	
IV.4.1 Analyse de flexion des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées	54
IV.4.2 Analyse de flambement des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées	61
IV.4.3 Analyse de la vibration libre des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées	63
Conclusion générale	69
Références bibliographiques	72
Webographie	77

Listes des figures

Chapitre I

Figure I.1 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.

Figure I.2 : (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés

Figure I.3 : Variation continue la microstructure

Figure I.4 : Variation continue la microstructure (photo)

Figure I.5 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

Figure I.6 : Les différents domaines d'application des FGMs.

Figure I.7 : Utilisation dans le domaine aérospatial

Figure I.8 : Utilisation dans l'industrie automobile

Figure I.9 : Utilisation dans l'industrie d'énergie

Figure I.10 : Utilisation des FGM dans les implants dentaires

Figure I.11 : Utilisation dans l'industrie de la défense

Figure I.12 : la distribution des composantes des matériaux

Figure I.13 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM.

Figure I.14 : Représentation schématique

Figure I.15 : Installation du coulage centrifuge verticale

Figure I.16 : Géométrie d'une poutre en FGM

Figure I.17 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM

Figure I.18 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM)

Figure I.19 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM)

Chapitre II

Figure II.1 : Schéma d'un élément de poutre.

Figure II.2 : Cinématique de la poutre d'Euler-Bernoulli.

Figure II.3 : Cinématique de la poutre de Timoshenko

Figure II.4 : Cinématique de la poutre d'ordre élevé.

Figure II.5 : Variation de la fonction de cisaillement $f(z)$ des différents modèles d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la poutre.

Figure II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de cisaillement $g(z)$ des différents modèles d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la poutre.

Chapitre III

Figure III.1: Configuration géométrique et coordonnées d'une poutre FGM.

Figure III.2: Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la poutre en matériau à gradient de propriétés (FGM).

Chapitre IV

Figure IV.1 : Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale

Figure IV.2 : Variation du déplacement transversal adimensionnel à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale

Figure IV.3 : Variation de la contrainte normale axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale

Figure IV.4: Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale

Figure IV.5: Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle dans une poutre P-FGM simplement supportée en fonction du rapport longueur sur épaisseur

Figure IV.6 : Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle dans une poutre E-FGM simplement supportée en fonction du rapport longueur sur

Figure IV.7: Variation des fréquences naturelles adimensionnelles dans une poutre à gradient fonctionnel (P-FGM) simplement appuyée en fonction du rapport longueur sur épaisseur

Figure IV.8 : Variation des fréquences naturelles adimensionnelles dans une poutre à gradient fonctionnel (P-FGM) simplement appuyée, en fonction de l'indice de loi de puissance

Figure IV.9: Variation des fréquences naturelles adimensionnelles dans une poutre à gradient fonctionnel (E-FGM) simplement appuyée en fonction du rapport longueur sur épaisseur

Listes des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

Chapitre II

Tableau II.2 : Les différentes fonctions de cisaillement transversal utilisées dans les théories des poutres d'ordre élevé

Chapitre IV

Tableau IV.1 : Propriétés matérielles utilisées dans les poutres FGM

Tableau IV.2 : Comparaison des déplacements adimensionnels pour une poutre à gradient de propriétés P-FGM soumise à une charge sinusoïdale et uniforme.

Tableau IV.3 : Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés P-FGM soumise à une charge sinusoïdale.

Tableau IV.4 : Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés P-FGM soumise à une charge uniforme.

Tableau IV.5 : Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des poutres à gradient exponentiel E-FGM.

Tableau IV.6: Comparaison de la charge critique de flambement adimensionnelle des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées (P-FGM).

Tableau IV.7: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées P-FGM.

Tableau IV.8: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées P-FGM

Tableau IV.9: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées E-FGM.

Listes des notations

P	Exposant de la loi de puissance
$E(z)$	Module de Young en fonction de z
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de z
G_c	Module de cisaillement de la céramique
G_m	Module de cisaillement de métal
$V(z)$	La variation de la fraction volumique
$\rho(z)$	La densité du matériau
ρ_c	La densité du matériau de la céramique
ρ_m	La densité du matériau de métal
L	La longueur de la poutre ou la coque
b	La largeur de la poutre ou de la coque
h	L'épaisseur de la poutre ou de la coque.
$U(M)$	Champ de déplacement d'un point M
$u(x, z)$	Déplacement suivant l'axe X
$v(x, z)$	Déplacement suivant l'axe Y
$w(x, z)$	Déplacement suivant l'axe Z
$u_0(x, t)$	Composantes de déplacement suivant l'axe X
$w_0(x, t)$	Composantes de déplacement suivant l'axe Z
$\varphi_0(x)$	Distorsion mesurée sur la ligne moyenne de la poutre
$\Psi_0(x, t)$	Rotation totale mesurée sur la ligne moyenne de la poutre
$P(z)$	La propriété effective du matériau
τ_{xz}	La contrainte de cisaillement
$f(z)$	La fonction de cisaillement
σ_x	La contrainte normale
$u_0, w_0, \theta(x)$	Déplacements inconnus du plan médian de la poutre
γ_{xz}	La déformation de cisaillement

Liste des notations

ε_x	La déformation normale
A', k_1	Coefficients de la géométrie de la poutre
Q_{ij}	Les constantes de rigidité élastique
δU	La variation de l'énergie de déformation
δV	La variation de l'énergie potentielle
δK	La variation de l'énergie cinétique
$\delta \varepsilon_x$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x	Effort Normal
M_x^b	Moment de flexion
M_x^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
q_0	L'intensité maximale de la charge
$A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}, A_{11}^s$	Composantes de rigidité de la poutre
U_m, W_m, Φ_m	Variables inconnues
N^0	Force de compression axiale
$[K_{ij}]$	Matrice de rigidité
$[M_{ij}]$	Matrice masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice

Introduction générale

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est formé en faisant varier la microstructure d'un matériau à un autre avec un gradient spécifique. Le concept de matériau à gradient fonctionnel a été développé pour la première fois par les scientifiques japonais en 1984. Les matériaux FGM sont préférés en raison de leur capacité à éviter les problèmes de délaminage et de concentration de contraintes qui sont souvent observés dans les stratifiés composites fibreux. Les matériaux fonctionnellement gradués (FG) ont des propriétés attrayantes telles qu'une résistance thermique élevée et une résistance élevée aux chocs, augmentent la force de liaison et réduisent les contraintes thermiques. Le matériau FG est développé pour des applications spécifiques dans les avions spatiaux, les structures spatiales, les structures civiles, les réacteurs nucléaires...etc. [Koizumi 1993, 1997], [Muller *et al.* 2003], [Pompe *et al.* 2003].

De nos jours, les poutres et les structures de plaques fonctionnellement graduées sont largement utilisées dans de nombreuses industries, y compris l'ingénierie nucléaire. Par conséquent, une analyse structurelle précise des poutres FG est nécessaire pour prédire leur comportement correct en flexion, flambement et vibration. Peu d'articles de recherche sont disponibles dans la littérature sur les solutions d'élasticité pour l'analyse des poutres à gradient exponentiel. [Sankar 2001] a développé une solution d'élasticité pour des poutres à gradient fonctionnel simplement appuyées soumises à un chargement transversal sinusoïdal. [Daouadjiet *al.* 2013] ont développé des solutions d'élasticité pour analyser les poutres cantilevers en FGM soumises à différentes charges en utilisant la méthode semi-inverse. [Ding *et al.* 2007] ont obtenu des solutions d'élasticité pour des poutres anisotropes à gradient fonctionnel en utilisant la fonction de contrainte d'Airy. [Ying *et al.* 2008] ont obtenu des solutions d'élasticité exactes pour la flexion et la vibration libre de poutres FG reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. [Chu *et al.* 2015] ont obtenu une solution d'élasticité bidimensionnelle (2D) de poutres en matériaux à gradient fonctionnel sous traction et flexion en utilisant la fonction de contrainte d'Airy.

En réalité, les solutions d'élasticité 2D sont analytiquement très difficiles et lourdes en termes de calcul. Par conséquent, diverses théories de poutres approximatives ont été développées par les chercheurs pour l'analyse des poutres en FGM. Pour obtenir des solutions

pour ces théories, plusieurs méthodes analytiques et numériques ont été développées par les chercheurs au cours des dernières décennies. Récemment, [Sayyad et Ghugal 2017] ont passé en revue toutes les méthodes numériques et analytiques disponibles dans la littérature pour l'analyse des poutres et plaques composites.

La théorie des poutres la plus simple disponible dans la littérature pour l'analyse des poutres isotropes et anisotropes est la théorie classique (CBT) développée par [Bernoulli 1694] et [Euler 1744]. Cependant, puisque cette théorie ne tient pas compte de l'effet de la déformation de cisaillement transversal, elle n'est pas précise pour l'analyse de poutres épaisses en matériaux composites avancés, tels que le FGM. L'effet de la déformation de cisaillement transversal a été considéré pour la première fois par [Timoshenko 1921] dans sa théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Cependant, cette théorie souffre également des inconvénients d'une contrainte de cisaillement constante à travers l'épaisseur, ce qui rend nécessaire l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement. Toutes ces limitations sont surmontées par des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé qui tiennent compte correctement de l'effet de la déformation de cisaillement et satisfont les conditions de déformation de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre. L'une des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) bien connues est développée par [Reddy 1984]. Plusieurs chercheurs ont développé différentes théories d'ordre élevé pour l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations libres de la poutre FG. [Aydogdu et Taskin 2007] ont présenté une analyse de vibration libre de poutres FG simplement appuyées en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement et ont obtenu une solution analytique de type Navier. [Li *et al.* 2010] ont développé une nouvelle approche unifiée pour analyser les comportements statiques et dynamiques des poutres FG en tenant compte de l'inertie de rotation et de la déformation de cisaillement. [Giunta *et al.* 2011] ont proposé plusieurs théories raffinées d'ordre élevé basées sur la formulation unifiée pour l'analyse des poutres FG. [Simsek 2010] a obtenu des fréquences fondamentales de poutres à gradient fonctionnel de différentes conditions aux limites en utilisant la théorie de poutre de déformation de cisaillement du premier ordre et les différentes théories d'ordre élevé. [Thai et Vo 2012] ont obtenu une solution analytique de type Navier pour la flexion et la vibration des poutres FG sur la base de diverses théories de poutre de déformation de cisaillement d'ordre élevé. [Nguyen *et al.* 2013] ont appliqué la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre pour l'analyse statique et vibration libre de poutres FG et ont obtenu une solution analytique selon la procédure de résolution de Navier. [Bourada *et al.* 2015] ont développé une nouvelle théorie trigonométrique de déformation de cisaillement en tenant

compte des effets du cisaillement transversal et des déformations normales pour les poutres FG. [Alshorbagy *et al.* 2011] ont étudié les caractéristiques de vibration libre d'une poutre en FGM par une méthode d'éléments finis basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. [Vo *et al.* 2014a] ont développé un modèle par éléments finis basé sur une théorie raffinée de la déformation de cisaillement pour étudier le comportement statique et vibratoire des poutres FG avec diverses conditions aux limites. [Vo *et al.* 2014b] ont également développé une théorie quasi-3D pour la vibration et le flambement des poutres sandwichs à gradient fonctionnel. [Nguyen *et al.* 2015] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la vibration libre et le flambement des poutres sandwichs FG. [Sayyad et Ghugal 2017] ont développé une théorie unifiée de déformation de cisaillement pour l'étude de la flexion de poutres et de plaques FG. Récemment, [Kahya et Turan 2017] ont développé une formulation par éléments finis pour l'analyse du flambement et la vibration des poutres FG basées sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.

L'examen susmentionné reflète le fait que des recherches importantes sont disponibles sur la distribution des lois de puissance des propriétés des matériaux, mais l'utilisation d'une loi exponentielle pour la distribution des propriétés des matériaux n'est pas entièrement explorée par les chercheurs. De plus, les solutions analytiques pour les poutres à gradient exponentiel sont rarement trouvées dans la littérature. Par conséquent, dans la présente étude, une simple théorie de déformation de cisaillement parabolique d'ordre élevé (PSDT) est développée et appliquée pour la flexion, le flambement et la vibration de poutres à gradient fonctionnel simplement appuyées faites de matériaux Al/Al₂O₃. Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur selon les distributions de la loi de puissance (P-FGM) et de la loi exponentielle (E-FGM). La présente théorie est différente des théories existantes, car dans la théorie développée, le champ de déplacement est caractérisé par une composante d'intégral indéterminée qui tient en compte de la variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre FGM. Les équations de mouvement et les conditions aux limites associées sont dérivées du principe d'Hamilton. Ces équations ont été résolues en utilisant la technique de Navier. Les déplacements, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles obtenues en utilisant la présente théorie pour la poutre FG dans laquelle les propriétés des matériaux varient selon la loi de puissance (P-FGM) et sont comparées à celles disponibles dans la littérature. Cependant, les résultats numériques pour la poutre FG dans laquelle les propriétés des matériaux varient selon la loi exponentielle (E-FGM) utilisés dans la présente étude sont

comparées uniquement par les travaux effectués par [Sayyad et Ghugal 2018, car l'analyse des poutres E-FGM n'est pas entièrement disponible dans la littérature.

L'objectif de notre travail s'articulera autour de quatre chapitres :

Après une introduction générale sur la problématique des FGMs, le premier chapitre sera consacré à la recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, leur comparaison aux matériaux composites, ainsi qu'à leurs domaines d'application.

Le second chapitre sera dédié à un rappel sur les différentes théories des poutres existantes, que soit la théorie classique des poutres minces (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et les différentes théories d'ordre élevé (HSDT) développées par les chercheurs pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur et pour la modélisation et l'analyse des poutres en FGM.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation du modèle analytique développé sur la base d'un nouveau champ de déplacement et la théorie de déformation de cisaillement parabolique PSDT pour l'analyse du comportement mécanique des poutres en FGM. Dans cette étude, le principe d'énergie d'Hamilton est appliqué pour obtenir le système d'équations différentielles est résolu à partir de la méthode analytique de Navier.

Le dernier chapitre sera consacré à la validation du modèle proposé à travers des études paramétriques connus de la littérature ainsi qu'à la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement mécanique des poutres P-FGM et E-FGM tout en les comparant avec les résultats obtenus à l'aide des théories disponibles dans la littérature. Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à l'étude effectuée incluant des perspectives pour des futurs travaux.

Chapitre I

Généralité sur les matériaux à gradient de propriétés

Chapitre I

Généralité sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1 Introduction

Les matériaux composites légers, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été Généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance Mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique.

Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées dues à leur faible dureté. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière. Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Hirai 1999, Chan 2001, Uemura 2003]. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.1 [Yin 2004] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope. En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (Functionally Graded Material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des

propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

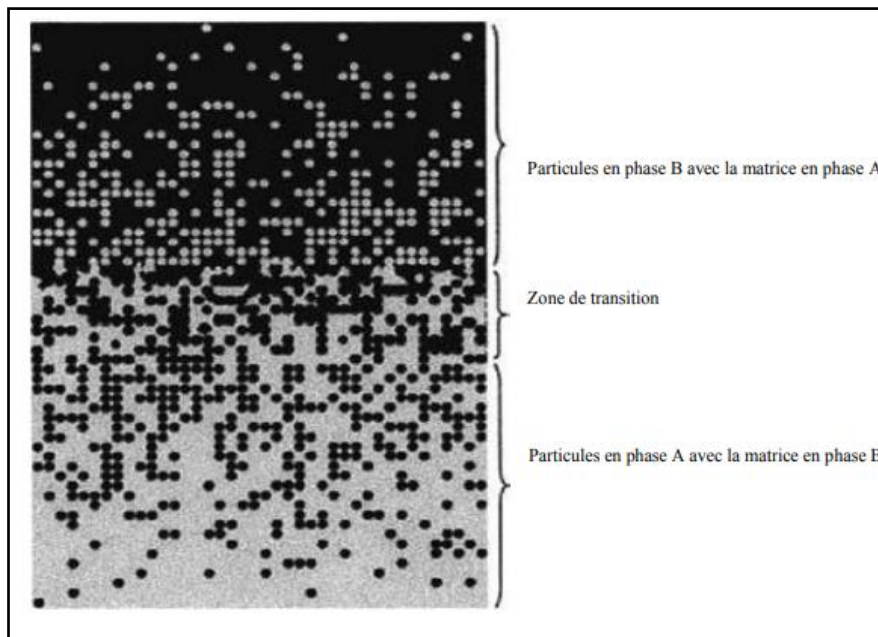


Figure I.1 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [Yin 2004].

I.2 Etude bibliographique

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? À l'environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'un avion spatial hypersonique. Le problème principal à résoudre est le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors

de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un choc thermique (une température extérieure de 2000°K et une température intérieure de 1000°K dans moins de 10 mm d'épaisseur, la vitesse de vol de plus de 25 Mach, La température des gaz de combustion de la chambre de combustion peut être supérieure à 2000°k). Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel. En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup des travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en ce concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations des plaques en FGM.

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à l'étude des contraintes résiduelles, Le comportement thermomécanique (flambement), le comportement thermo élastique statique, en revanche peu d'études ont été dédiés aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à s'intéresser à leur comportement dynamique.

I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés

L'invention du matériau à gradient de fonction (FGM) est attribuée à M. Niino et ses collègues à Sendai en 1984 dans le cadre de son travail sur les barrières thermiques [Yamanouchi *et al.* 1990]. Il s'agit d'une classe de composites constitués de deux matériaux ou plus avec des propriétés physico-chimiques différentes. Un FGM est caractérisé par un changement graduel et continu des propriétés du matériau [Bohidar *et al.* 2014]. Ils présentent donc une microstructure hétérogène et contrôlée, modulée par un gradient de composition, de porosité, de distribution de phase ou de texture qui induit des différences de propriétés (densité, dureté, conductivité thermique, conductivité électrique...). Dans l'absolu, un FGM peut être fabriqué avec n'importe quelle combinaison de matériaux adaptée à l'application

visée. Les FGM sont classés en deux catégories : les FGM continus (Figure I.2.a) et les FGM discontinus sous forme de multicouche (Figures I.2.b).

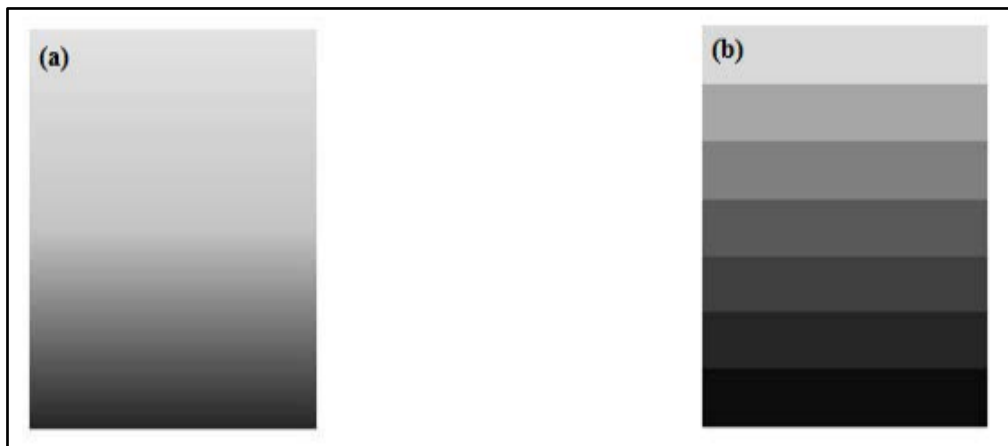
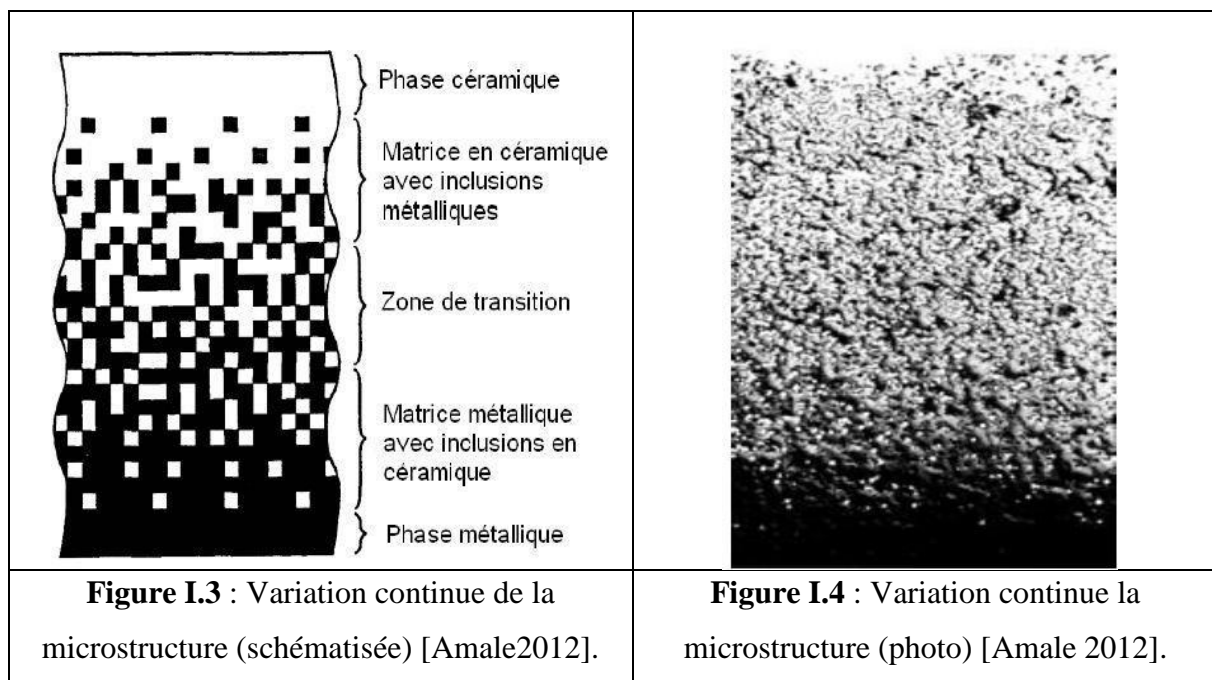


Figure I.2 : (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés.

La variation continue des propriétés (figures I.3 et I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.



La loi de distribution de puissance [Chiet *al.* 2006], [Jin *et al.* 2001] et les fonctions exponentielles [Guet *al.* 1997], [Nejad *et al.* 2013], [Helal *et al.* 2014] sont fréquemment utilisées pour décrire l'évolution des propriétés dans le FGM. Dans la pratique, les FGM trouvent leurs applications dans de nombreux domaines : les biomatériaux (par exemple Ti-Co pour les implants dentaires), l'ingénierie, l'optique (matériau à indice de réfraction graduel), l'aérospatial, l'électronique, les outils de coupe (WC-Co) [Bohidar *et al.* 2014], [Udupa *et al.* 2014], [Kieback *et al.* 2003]. En prenant l'exemple des navettes spatiales ou des avions supersoniques dans le domaine aérospatial, leurs composants sont soumis à des températures élevées, sur les parties les plus exposées tel le cône d'entrée, où les matériaux doivent supporter une température de 1800°C en atmosphère sur une face, et résister à un gradient thermique d'environ 1300°C pour une épaisseur d'une dizaine de millimètres. A ce jour il n'y a aucuns matériaux monolithiques pouvant supporter une telle contrainte thermique [Koizumi 1993].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal. Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces. Vient alors le concept de matériau à gradient de fonction. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la (Figure 04). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés du FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch *et al.* 1986].

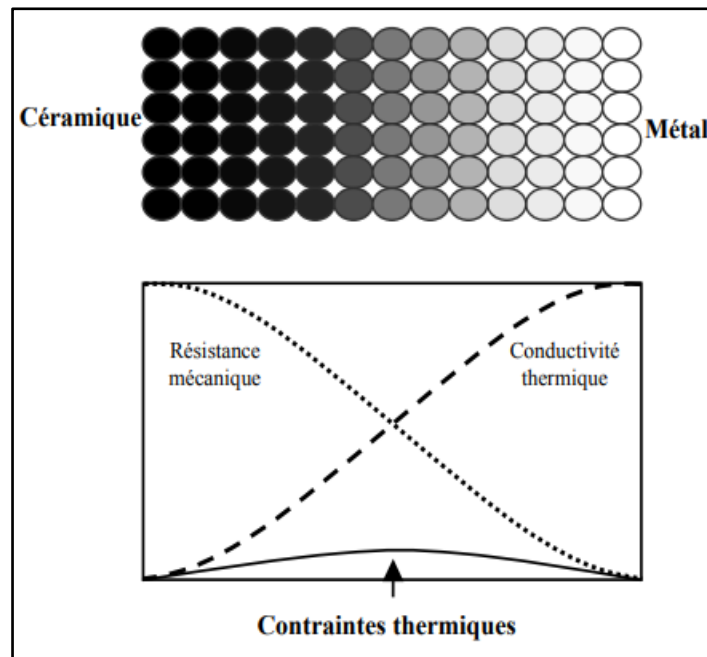


Figure I.5 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- ❖ Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion)
- ❖ Haute température de fusion ou de décomposition
- ❖ Haut module d'élasticité haute dureté
- ❖ Charge à la rupture élevée
- ❖ Bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure)
- ❖ Conservation des propriétés à haute température
- ❖ Faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques)
- ❖ Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température)

Cependant les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- ❖ Bonne résistance mécanique ;
- ❖ Conductivité thermique élevée,
- ❖ Très bonne ténacité.

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre « Couches intermédiaires »	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
Métal	La face à basse température	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautique que set spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée dévie des revêtements pare-feu [Jianet *al.* 1995], [Kawasak et Watanabe 1997].

I.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.6. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

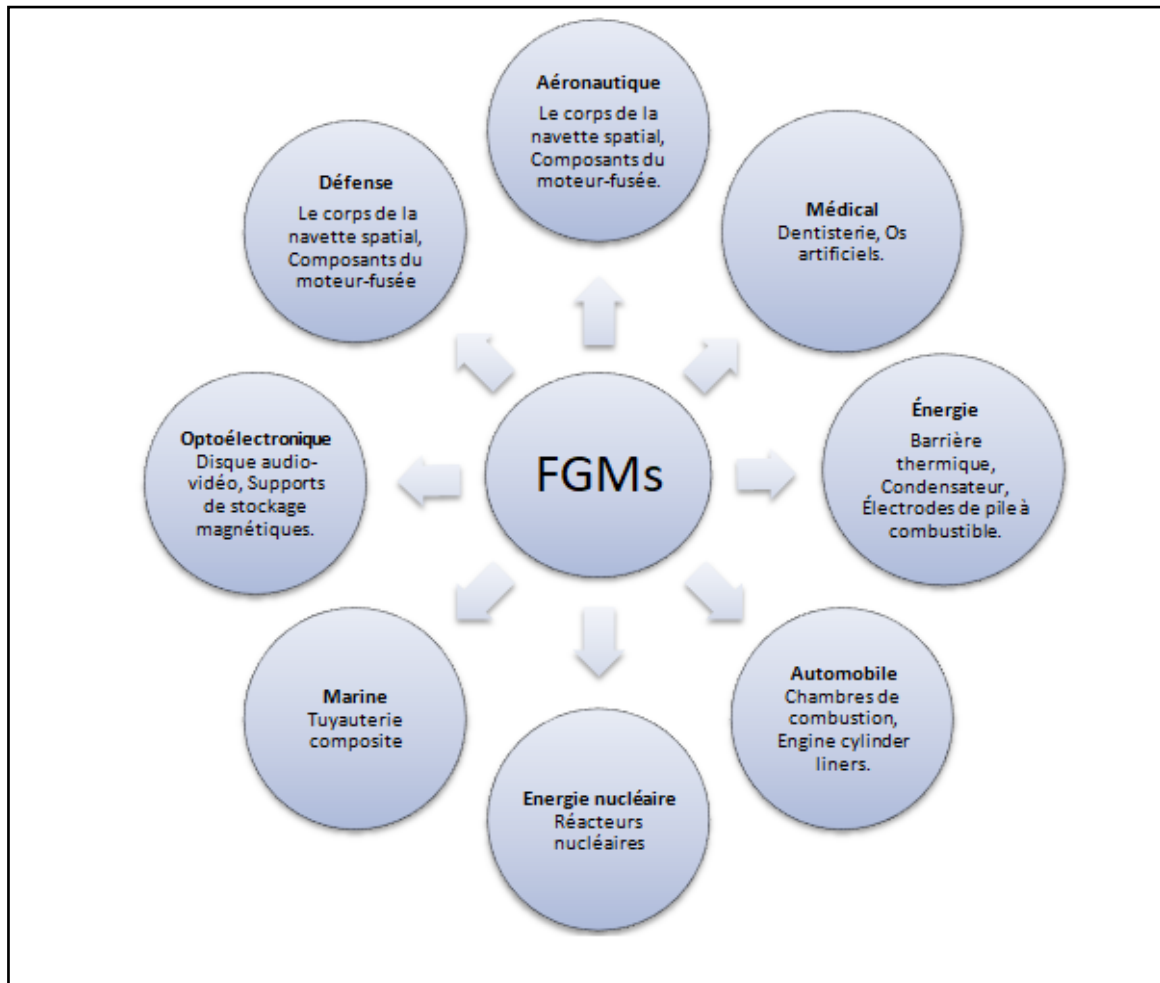


Figure I.6 : Les différents domaines d'application des FGMs.

I.4.1 Domaine aérospatial

Etant le premier domaine d'application des matériaux FGM, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de la mède turbine, les cas qu'et testerez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales (Figure I.7). Les matériels FGM sont aussi utilisés pour les murs structure les qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.

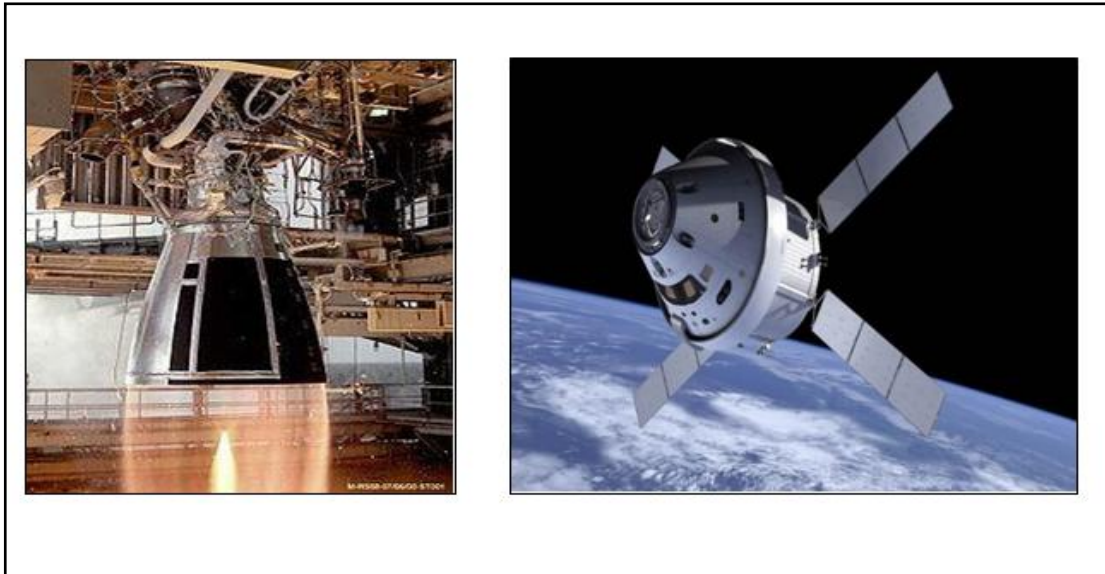


Figure I.7 : Utilisation dans le domaine aérospatial [1], [2]

I.4.2 Industrie automobile

L'utilisation de matériaux FG dans l'industrie automobile est toujours limitée à l'heure actuelle, à cause du coût élevé de production. Cependant, le matériau est utilisé dans les parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé présent justifie son utilisation. Les applications présentes incluent les pochettes de cylindre de moteur pour des pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour les bougies, les chambres de combustion, les puits d'énergie, les amortisseurs, les volants, quelques parties du corps de la voiture, le verre de fenêtre et des freins de voiture de course (Figure I.8). Aussi, les matériaux FG sont utilisés dans des revêtements des corps améliorés pour des voitures et cela inclut les revêtements gradués avec des particules, comme le dioxyde/mica.



Figure I.8 : Utilisation dans l'industrie automobile [3]

I.4.3 Industrie d'énergie

Les industries d'énergie ont constamment besoin de différents types de FGM, afin d'améliorer l'efficacité de leurs équipements. Certaines applications des matériaux FG dans l'industrie d'énergie incluent le mur intérieur des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les stubs et les équipements sous pression, les électrodes graduées pour la production de carburant

solided'oxyde,lepiézoélectriqueFGMpourlecapteurultrasonique,lediélectrique,lapileàcombustible, les revêtements des lames de turbine ainsi que les revêtements des barrières thermiques (Figure I.9).

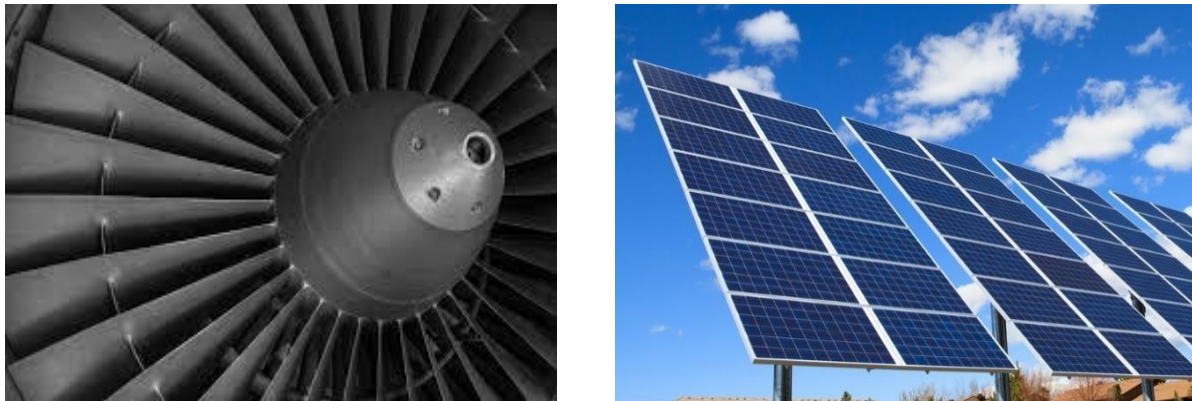


Figure I.9 : Utilisation dans l'industrie d'énergie [4], [5]

I.4.4 Industrie biomédical

Le corps humain est composé d'un certain nombre de matériaux FG notamment les os et les dents. Ces derniers sont les parties du corps humain les plus remplacées suite à l'endommagement de ces parties ou bien à cause du processus de vieillissement naturel. C'est pourquoi la majorité de matériaux FG utilisés dans l'industrie biomédicale sont des implants, tels que : Dans les implants pour remplacement squelettique permanent, la porosité graduée aide à minimiser la protection de stress. Les implants dentaires de titane poreux graduellement aident à améliorer les propriétés d'osseo-intégration de l'implant (Figure I.10). Hydrox apatite poreux gradué (HA) imite la structure bimodale de l'os humain, ce qui aide à promouvoir la nouvelle croissance tissulaire et leurs propriétés mécaniques.

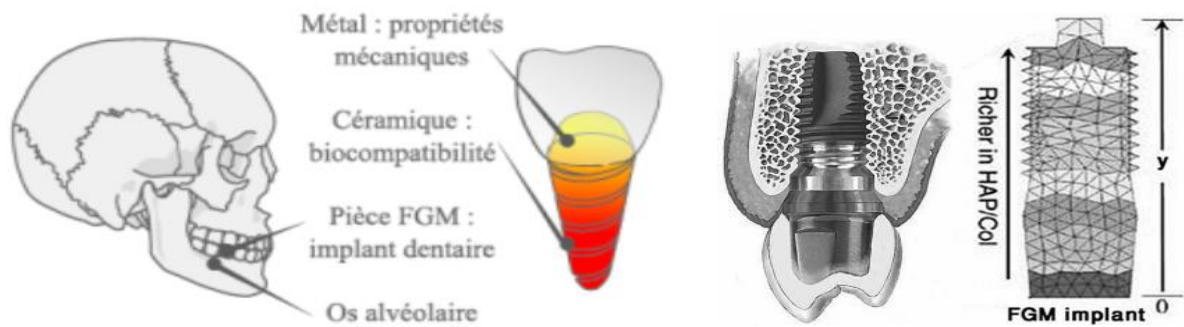


Figure I.10. Utilisation des FGM dans les implants dentaires [Sadollah *et al.* 2013]

I.4.5 Industrie de la défense

La capacité du FGM d'offrir des propriétés résistant à la pénétration en évitant la propagation des fissures est une propriété attirante qui favorise le matériau dans l'industrie de défense. Les matériaux FG sont utilisés dans l'industrie de défense dans des applications, comme des gilets pare-balles l'épée japonaise traditionnelle et dans des blindages ainsi que le corps de véhicules pare-balles (Figure I.11).



Figure I.11 : Utilisation dans l'industrie de la défense [6]

I.4.6 Énergie nucléaire

Les FGMs sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

I.4.7 Industrie optoélectronique

Les matériaux à gradient de propriétés peuvent être utilisés dans l'industrie optoélectronique pour la production de fibres optiques, la lentille, les lasers GRINSH, les détecteurs de photo à haute performance, les cellules solaires, les photos détecteurs ajustables, les médias de stockage magnétiques et lors de la production de semi-conducteurs avec un indice de réfraction variable.

I.4.8 Marine

Les matériaux à gradient fonctionnel trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression.

I.4.9 Application des FGM dans le domaine du Génie civil

➤ **Les joints dans la charpente métallique**

Lors de l'assemblage des éléments en charpente métallique, on est obligé de réaliser des soudures entre deux éléments de nature/nuance différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires est optimale.

➤ **Les grands vitrages dans les zones chaudes**

L'utilisation des vitres en FGM a pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout et le poids des structures.

➤ **Les grands vitrages dans les zones chaudes**

L'utilisation des vitres en FGM a pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout et le poids des structures.

➤ **Les chaussées rigides (FG Concrete Materials for Rigid Pavements)**

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins

rigide sur la couche de fondation.

➤ **Les chaussées souples (FG Concrete Materials for Flexible Pavements)**

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux pour éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs tout en obtenant un comportement optimisé, augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

➤ **Les tunnels (FG concrete segment in tunnel)**

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches.

I.5 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels

Le modèle le plus simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels sont représentés dans la figure I.12. Le matériau plan (figure I.12a) composé à une caractéristique plane, et le matériau relié (figure I.12b) a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en matière de leur application dans les domaines industriels puis qu'ils sont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'indice FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté céramique.

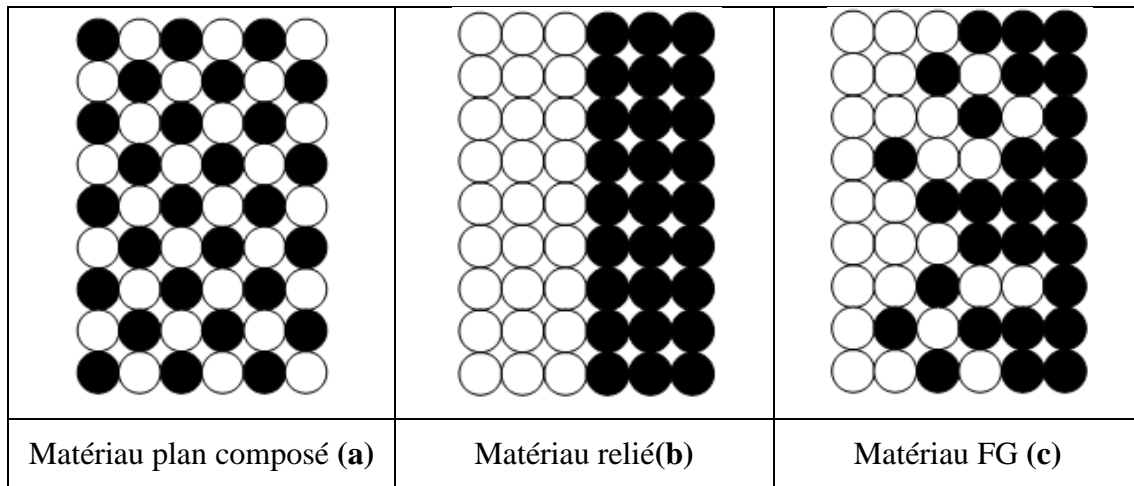


Figure I.12 : La distribution des composantes des matériaux.

I.6 Avantages et Inconvénients des FGMS

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients

I.6.1 Avantages des FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement ; [Narottam *et al.* 2011] et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- Suppression de délaminage ;
- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.6.2 Inconvénients des FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam *et al.* 2011].

I.7 Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basées une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Plusieurs techniques de fabrications sont disponibles pour produire des matériaux fonctionnalisés. Les procédés existants et les plus à jour pour la fabrication des FGM seront expliqués ci-après :

I.7.1 Procédé de poudre sèche

Pour la fabrication des matériaux à gradient de propriété utilisant des matériaux solides on fait appel à la technique de PM (métallurgie des poudres)

Ce procédé de fabrication se présente sous trois phases qui sont structurées de la manière suivante : premièrement le panachage de poudre et ceci en fonction de la répartition spatiale de telle façon à respecter l'exigence appropriée, en second l'empilage et damage des poudres pré-mélangées et finalement le frittage (figure I.13).

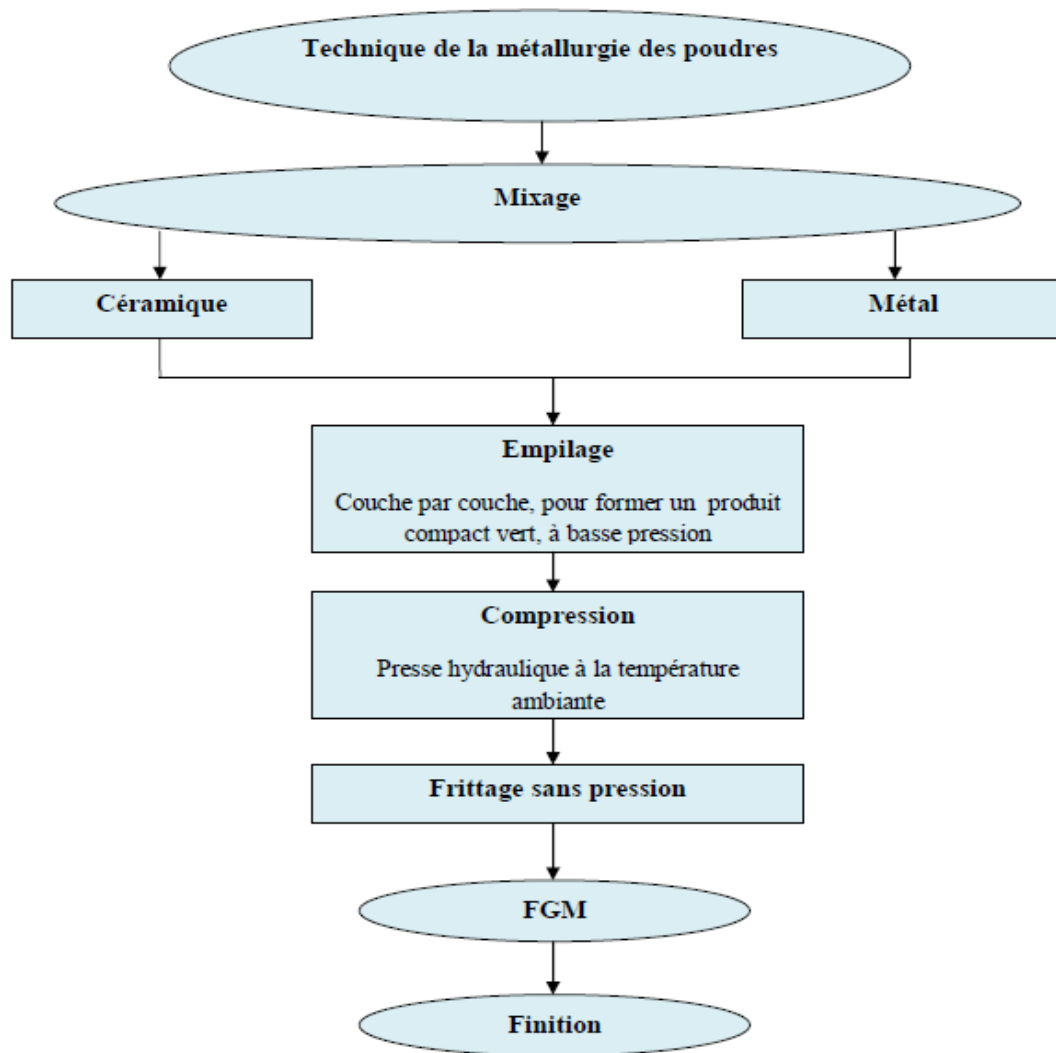


Figure I.13 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM [Saiyathibrahim *et al.* 2015].

Cette méthode fait partie des procédés les plus utilisés est cela grâce à son contrôle dans le concept de la composition [El-Wazery *et al.* 2012, Saiyathibrahim *et al.* 2015].

I.7.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- formation du tesson ou "prise" ;
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

I.7.3. Coulage centrifuge (centrifugat casting)

La méthode de centrifugation qui consiste à la fabrication de gradient est divisée en deux catégories est cela en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Dans la première catégorie la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification, à la particule et à la matrice dans le cas où la température de traitement est plus élevée par rapport au point de la particule de renfort de fusion, par contre dans la deuxième catégorie la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide dans le cas où la température de traitement est significativement inférieure par rapport au point de fusion. Cette méthode est baptisée CSPM qui signifie la méthode de particule-solide centrifuge, elle permet un renforcement électif de la surface du composant obtenue des résultats qui sont un maintien d'une haute ténacité en vrac et une résistance à l'usure plus élevée à la surface extérieure [Katayama *et al.* 2011].

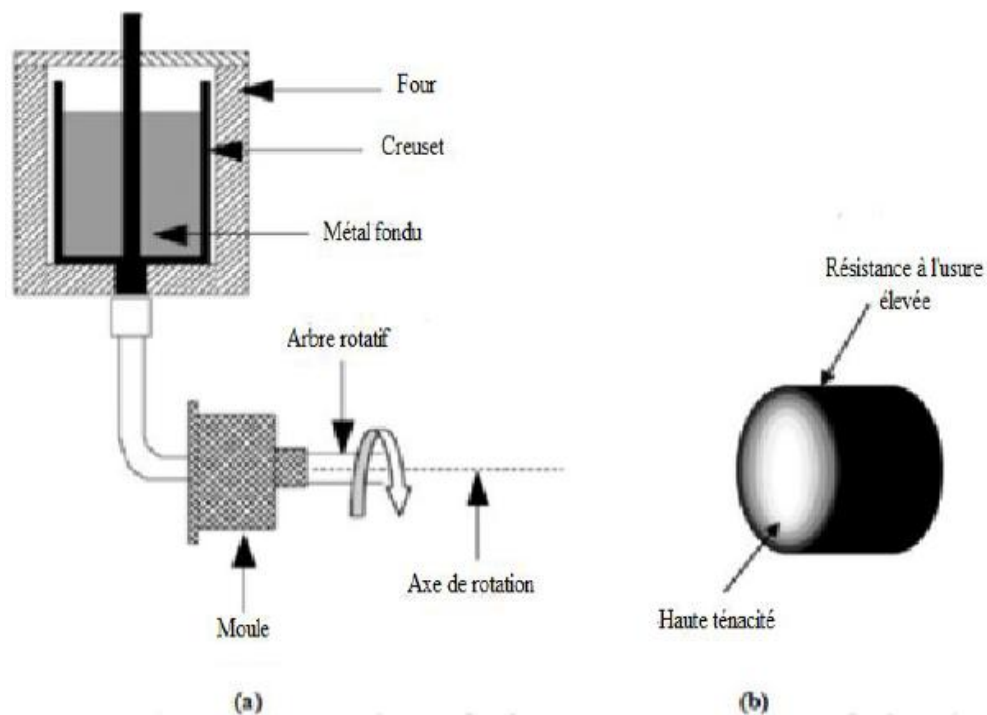


Figure I.14 : Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC: résistance à l'usure élevée) [Saiyathibrahim *et al.* 2015].

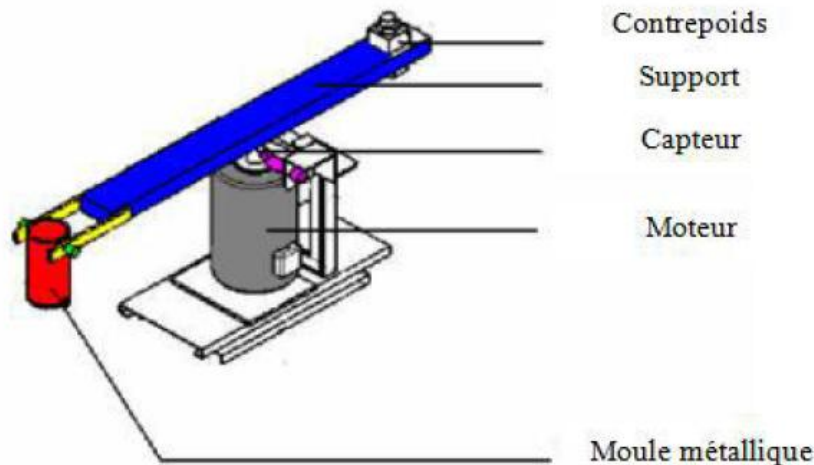


Figure I.15 : Installation du coulage centrifuge verticale [Saiyathibrahim *et al.* 2015].

I.7.4. Coulage en bande (Tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique.

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes : tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour SiC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en SiC pour B4C (problème d'usure) ; ensuite, un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit ; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant 4 heures environ pour obtenir une répartition uniforme ; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation.

Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film Mylar siliconé afin de faciliter le décollement de la bande sur un banc de coulage à l'aide d'un sabot constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μm). Des disques (20mm de diamètre) et des carrés (50mm de côté) sont découpés dans les bandes puis empilés. Ainsi on obtient des matériaux soit monolithiques (empilement de couches identiques) soit alternés (empilement symétrique de couches denses et poreuses) après thermo-compression sous 60 MPa.

I.7.5. La projection plasma

Cette méthode se consiste à soumettre un gaz à une forte température ce qui le transforme en état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens *et al.* 1990].

I.7.6. Frittage

Cette méthode est basée sur deux étapes la première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité, la seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahash *et al.* 1990]. Cette technique convient à la fabrication d'un composite fonctionnellement gradué composé de matériaux qui sont chimiquement inertes avec des températures de fusion très différentes.

I.7.7. Processus d'infiltration

L'infiltration est un terme qui signifie chez les scientifiques l'hydrologie et qui est défini comme la précipitation du fluide présent sur la surface dans le sol. Il est régi par la force d'action capillaire ou la gravité par contre le taux d'entrisme est en corrélation aux caractéristiques du sol, tel que le taux de transmission à travers le sol, la facilité d'entrée et l'aptitude de stockage. La capacité et le taux d'infiltration dépendent de plusieurs paramètres qui sont les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la texture du sol, la température du sol et enfin l'intensité des précipitations.

À la suite de plusieurs travaux énumérés dans la littérature, le processus d'infiltration était germé, il y a de cela plusieurs années, dans le but de traiter les matériaux fonctionnellement gradués, en utilisant la méthode d'infiltration sans aucune pression. De ce fait, un gradient de composition Al/SiCp a été réalisé avec une conductivité thermique non linéaire et une fraction volumique de la céramique en diminution [Cho *et al.* 2004, Jamaludin *et al.* 2013].

I.8 Les propriétés matérielles effectives des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance ou polynômiale (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire les fractions de volume.

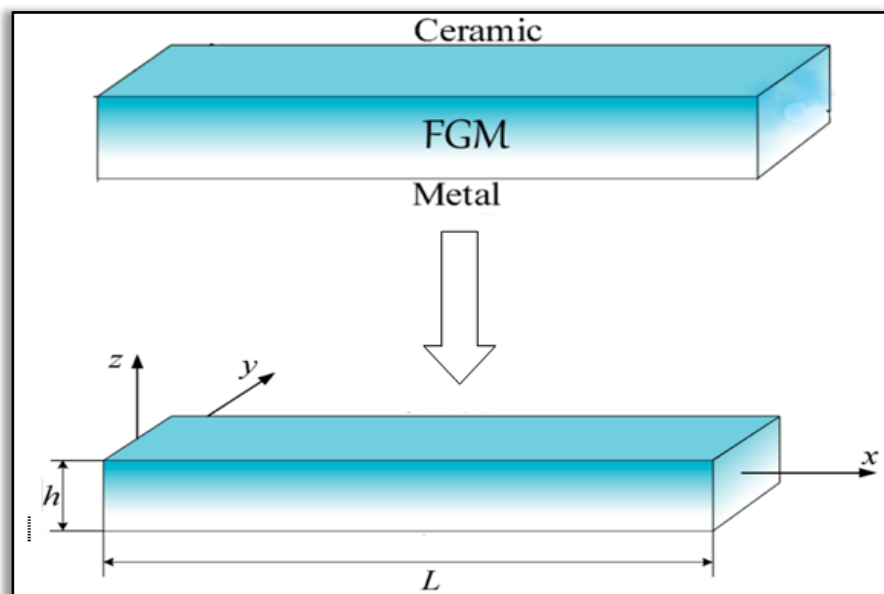


Figure I.16 : Géométrie d'une poutre en FGM.

La coordonnée x définit la longueur de la poutre, tandis que l'axe z perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les besoins.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur de la poutre. Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont généralement à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi des mélanges (loi de Voigt) se réduit par la relation suivante :

$$P = P_m V_m + P_c V_c, \quad V_m + V_c = 1 \tag{I.1}$$

Où $P(z)$ désigne une propriété typique du matériau, à savoir, le module d'élasticité de Young E , le module de cisaillement transversal G , le coefficient de Poisson ν , la densité matériau ρ , ...etc.

I.8.1. Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM

La fraction volumique de la propriété du matériau P-FGM en fonction de l'épaisseur obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \tag{I.2}$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V_c(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \tag{I.3}$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure $z = +h/2$ et de la surface inférieure $z = -h/2$ de la poutre FGM.

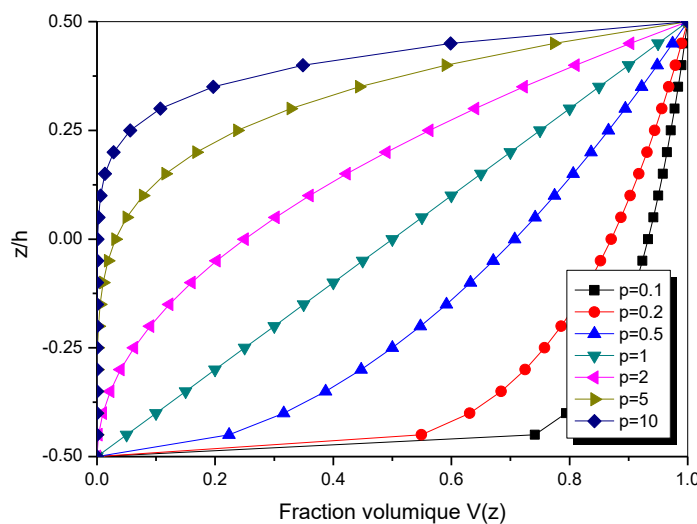


Figure I.17: Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.

La variation de $V(z)$ dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la Figure I.17. Il apparaît clairement que cette dernière change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$

I.8.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Chung and Chi [Chung and Chi 2001] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les 02 fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$v_{c1}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$v_{c2}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = v_{c1}(z)E_c + [1 - v_{c1}(z)]E_m \quad \text{pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5a})$$

$$E(z) = v_{c2}(z)E_c + [1 - v_{c2}(z)]E_m \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5b})$$

La (Figure I.18) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.3) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM).

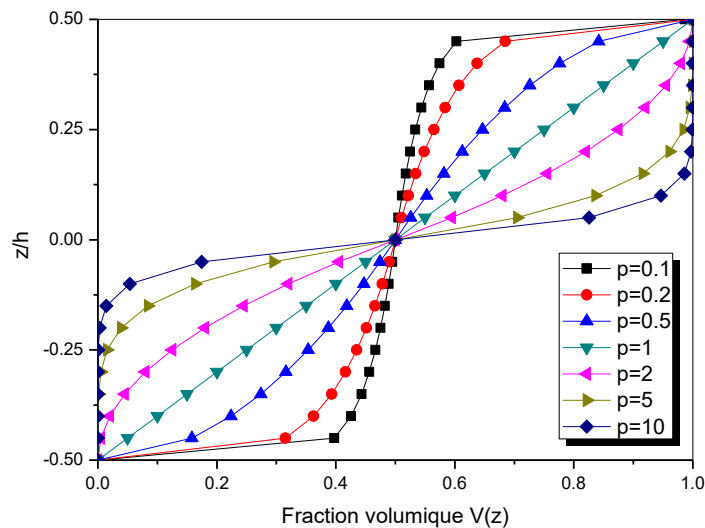


Figure I.18: Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur S-FGM.

I.8.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Plusieurs chercheurs ont adopté la fonction exponentielle pour prédire le comportement statique et dynamique des structures en FGM. Pour une structure en FGM d'épaisseur uniforme h , les propriétés typiques du matériau en tout point situé à une distance z de la surface de référence sont données sous la forme :

$$E(z) = E_m e^{B\left(z+\frac{h}{2}\right)} \quad (\text{I.6a})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (\text{I.6b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la (Figure I.19).

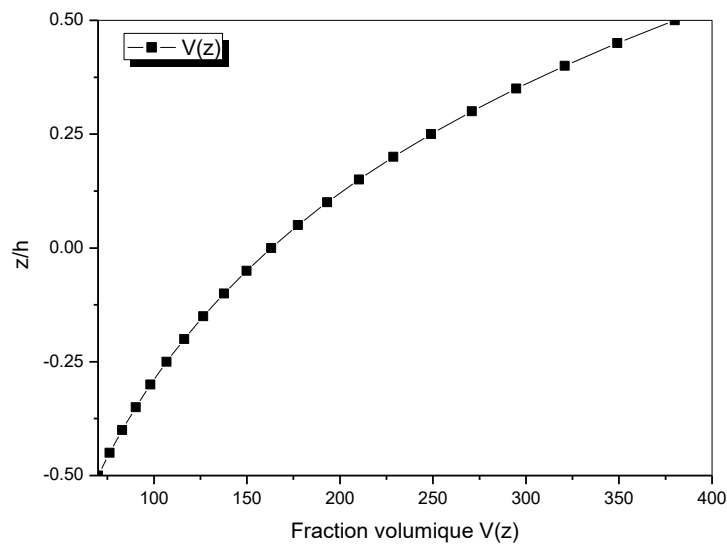


Figure I.19: Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur E-FGM.

I.9 Développements récents et défis des FGM

Dans le cas de la plupart des FGM, une propriété matérielle varie dans le sens de l'épaisseur. Cependant, les applications modernes peuvent exiger des matériaux FGM dans lesquels les propriétés du matériau varient à la fois dans l'épaisseur et dans les directions axiales. Récemment, un matériau à gradient dont les propriétés varient dans les deux sens a également été développé et étudié de manière approfondie. Ces matériaux intelligents sont connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel bidirectionnel (2-D-FGM). La technique AM basée sur le dépôt de métal par laser est la plus appropriée pour produire de

tels 2-D-FGM. Bien que des progrès technologiques substantiels aient été réalisés dans le domaine des FGM, peu de problèmes critiques doivent encore être résolus. Une base de données appropriée des FGM en termes de paramètres et de tests n'est toujours pas disponible. Les méthodes de test et de mesure conventionnelles peuvent ne pas convenir pour évaluer les performances des FGM modernes, de sorte que le développement de méthodes de test avancées est nécessaire.

La plupart des techniques de traitement des FGM étant très coûteuses, la technique de traitement à faible coût qui peut produire en masse des FGM de grande taille et de forme complexe reste un défi. La sélection du matériau approprié adapté à l'application prévue est le défi immédiat et direct du développement technologique futur dans le domaine de la recherche sur les FGM.

I.10 Conclusion

Ce chapitre était dédié à une généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués ou appelés aussi les matériaux à gradient de propriété, nous avons essayé dans cette partie de présenter en amont une introduction sur ces matériaux intelligents, qui sont l'innovation du siècle, en débutant par une étude bibliographique ainsi d'une conceptualisation de ces matériaux à gradient de propriété, étant donné que dans chaque matériau il y a toujours un élément déclencheur qui a permis son apparition, elle est subséquentement articulée par un aperçu sur les méthodes qui existent pour l'élaboration de ces matériaux, que soit le procédé de (poudre sèche, frittage, infiltration), le coulage (séquentiel, centrifuge, en bande), pressage à chaud et enfin la projection thermique.

Et afin d'éviter de se contenter des informations stériles on s'est penché sur des informations distinctives sur ces matériaux dans la diversification qui existe avec les matériaux composites traditionnels, et vu que ces matériaux fonctionnellement gradués montrent des avantages et des inconvénients de plusieurs phénomènes, en conséquence nous avons jugé nécessaire de présenter cette partie et de l'articuler par une présentation sur leurs domaines d'exploitations puisque ces matériaux sont actuellement introduits dans des champs d'applications vastes et sensibles, à titre d'exemple le domaine médical qui est en relation directe avec la survivance de l'humanité.

Et en dernier lieu, nous avons mentionné les propriétés effectives de ces matériaux ; dans le Prochain chapitre nous allons entamer les différentes théories des poutres.

Chapitre II

Les différentes théories des poutres

Chapitre II

Les différentes théories des poutres

II.1 Introduction

La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise deux modèles : la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ; la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.

Il est également utile pour identifier des solutions analytiques pour des modèles mécaniques simples. L'avantage des solutions analytiques par rapport aux prédictions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres (érosion de forme, taille, comportement du matériau). Cela permet de mieux comprendre le système mécanique ou d'améliorer son architecture, dans le cadre d'une première approche d'un problème de conception ou de compréhension.

II.2 Historique

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Ce dernier avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.3 Définition d'une poutre

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

II.4 Les modèles monocouche équivalente (ESL)

Dans les modèles monocouches équivalente, qui sont l'une des approches la plus adopté Par les chercheurs, la poutre multicouche hétérogène est considérée comme une seule Couche homogène équivalente ayant le comportement de l'ensemble des couches. Les théories du modèle ESL fournissent une description suffisamment précise de la Réponse (i.e. la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant) d'après [Reddy 1993].

L'avantage le plus important d'ESL réside dans son faible coût en termes de temps de Calcul et sa simplicité ainsi que les variables sont introduites pour toute la poutre, cela va Conduire à un nombre de degrés de libertés indépendant par rapport au nombre de couches [Belarbi 2015]. Dans cette section nous exposons les trois catégories de théories qui sont les plus Connus dans la littérature en adoptant les modèles de monocouche équivalente, il s'agit De :

- 1) Théorie classique des poutres (CBT) ;
- 2) Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDBT) ;
- 3) Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDBT).

II.4.1 la théorie d'Euler-Bernoulli(CBT)

La théorie de Bernoulli néglige l'effet cisaillement dans le cas de la flexion des poutres. Cette théorie n'est pas valable pour les poutres courtes. Ainsi que même la poutre possède Plusieurs couches on les considère comme une seule couche (homogénéité). Les critères de cette Théorie sont :

- Après la déformation, le cisaillement transversal est négligé.
- La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.

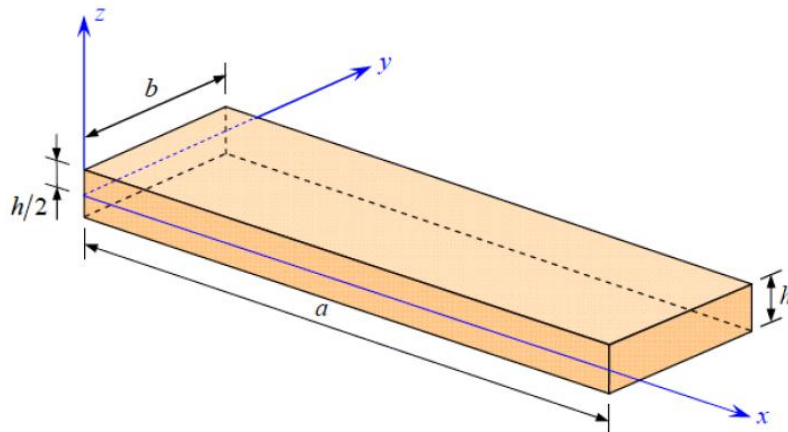


Figure II.1: Schéma d'un élément de poutre.

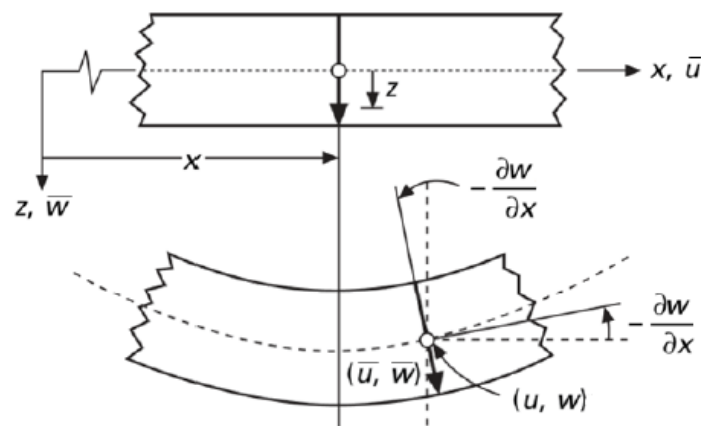


Figure II.2: Cinématique de la poutre d'Euler-Bernoulli [Euler-Bernoulli 1744].

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est

$$f(z) = 0 \tag{II.1}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \tag{II.2}$$

Tel que :

$u(x, z, t)$: Le déplacement suivant l'axe x .

$w(x, z, t)$: Le déplacement suivant l'axe z (la flèche).

$u_0(x, t)$ et $w_0(x, t)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes « x » et « z ».

Par définition, la distorsion est définie par la relation suivante :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Puisque γ_{xz} , cela veut dire que la distorsion est nulle et par conséquent la contrainte de cisaillement est nulle :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} \quad (\text{II.4})$$

Dans la théorie classique des poutres, la négligence de la déformation transversale, ne peut plus résoudre les différents problèmes comme la vibration des poutres épaisses ou le flambage même aussi la flèche.

Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les poutres épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier. Les analyses du comportement des poutres fonctionnellement graduées (FGBs) à l'aide du modèle de poutre classique d'Euler- Bernoulli (CBT) ont été étudiées par He et *al.*2001.

II.4.2 La théorie de Timoshenko (FSDBT)

Le modèle de Timoshenko est plus riche et plus général que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois, ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.3). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko en 1921, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses [Timoshenko1921].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z . Il existe un Cisaillement uniforme

et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier Ordre (FSDBT).

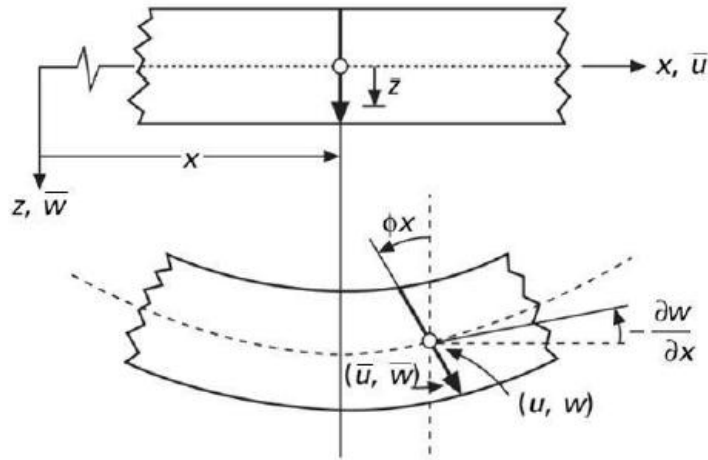


Figure II.3: Cinématique de la poutre de Timoshenko [Timoshenko 1921].

Le déplacement d'après Timoshenko [Timoshenko 1921] s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi_x(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z\gamma_{xz}(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

$\gamma_{xz}(x, t)$: C'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}(x, t) = \phi_x(x, t) - w_{0,x}(x, t) \quad (\text{II.7})$$

$\phi_x(x, t)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = \gamma_{xz}(x, t) \quad (\text{II.8})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}(x, t) \quad (\text{II.9})$$

G_{xz} : représente le module de cisaillement transversal qui est supposé constant pour une poutre isotrope.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction (k) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par Mindlin. « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient (k) pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie de déformation de cisaillement des poutres d'ordre élevé HSDBT".

II.4.3 La Théorie d'ordre élevé (HSDBT)

Pour franchir les limites des théories de déformation de cisaillement du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement. Dans ces théories la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elles sont plus précises que la théorie du premier ordre puisqu'elles introduisent une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (Figure II.4). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans les travaux de [Naghdi 1957, Reissner 1975, Reddy 1984].

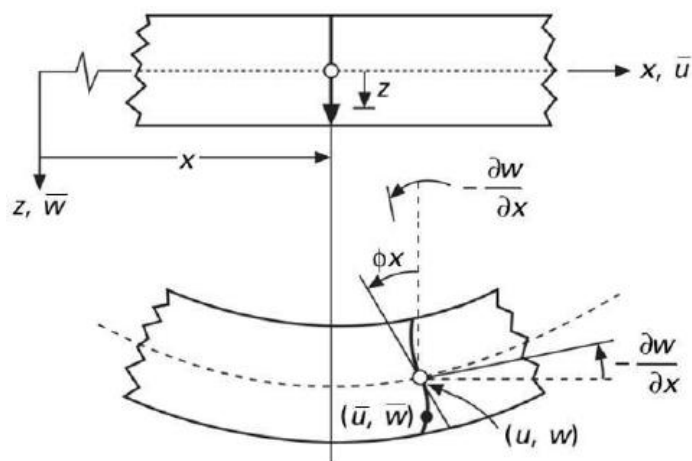


Figure II.4 : Cinématique de la poutre d'ordre élevé.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen 2004], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [Lo et Christensen 1977] :

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z\psi(x) + z^2\zeta(x) + z^3\varphi(x) \quad (\text{II.10})$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction (z).

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\gamma_{xz}(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = f'(z)\gamma_{xz}(x, t) \quad (\text{II.12})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f'(z)|_{z=\pm h/2}=0 \quad (\text{II.13})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (II.13).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons par ordre chronologique :

L'approche de Reissner [Reissner 1945] :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.15})$$

L'approche de Levinson [Levinson 1980] et Reddy [Reddy 1984] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.16})$$

Dans ce modèle polynomiale, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [Touratier 1991] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.17})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est

donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right)^{2n+1} \quad (\text{II.18})$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

L'approche de Soldatos [Soldatos 1993] :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.19})$$

L'approche de Karama [Karama 2003] :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.20})$$

Aydogdu [Aydogdu2009] propose un nouveau modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln \alpha}}, \alpha > 0 \quad (\text{II.21})$$

L'approche de Mantari [Mantari et al. 2012] :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} z \quad (\text{II.22})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) développée par Ait Atmane [Ait Atmane et al. 2010] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cos(\pi/2)}{[\cos(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh(\pi z/h)}{[\cos(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.23})$$

L'approche de Nguyen [Nguyen et al. 2015] :

$$f(z) = \cot^{-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{16z^3}{15h^3} \quad (\text{II.24})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable "z" alors que la fonction "sinus" ne permet qu'un développement en puissances impaires.

II.5 Différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Nous regroupons dans le tableau II.1 ci-dessous les différentes fonctions de cisaillement transversal ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles. Les modèles d'ordre élevé et leurs dérivées sont également représentés par les figures II.5 et II.6.

Tableau II.2 : Les différentes fonctions de cisaillement transversal utilisées dans les théories des poutres d'ordre élevé.

Théorie	Modèle	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de τ_{xz}	k	Domaine de validité
[Euler-Bernoulli 1744]	CBT	$f(z) = 0$	-		Poutre élancée
[Timoshenko 1921]	FSDT	$f(z) = z$	Constant	Requis	Poutre courte et élancée
[Ambartsumian 1969]	PSDT	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Parabolique	Non Requis	poutres minces et m/épaisses
[Reissner 1975]	PSDT	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	poutres minces et épaisses
[Reddy1984]	HSDT	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	poutres épaisses
[Touratier 1991]	SSDT	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right)$	Trigonométrie	Non Requis	poutres minces et épaisses
[Karama 2003]	ESDT	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	Exponentielle	Non Requis	Poutre courte et élancée
[Aydogdu 2009]	HSDT	$f(z) = z^3 \frac{-2(z/h)^2}{\ln 3}$	Parabolique	Non Requis	poutres minces et épaisses
[Zenkour 2015]	TSDT	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Trigonométrie	Non Requis	poutres épaisses
Présente théorie	PSDT	$f(z) = z \left(1 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{2}{5} z^4 \right)$	Parabolique	Non Requis	poutres épaisses

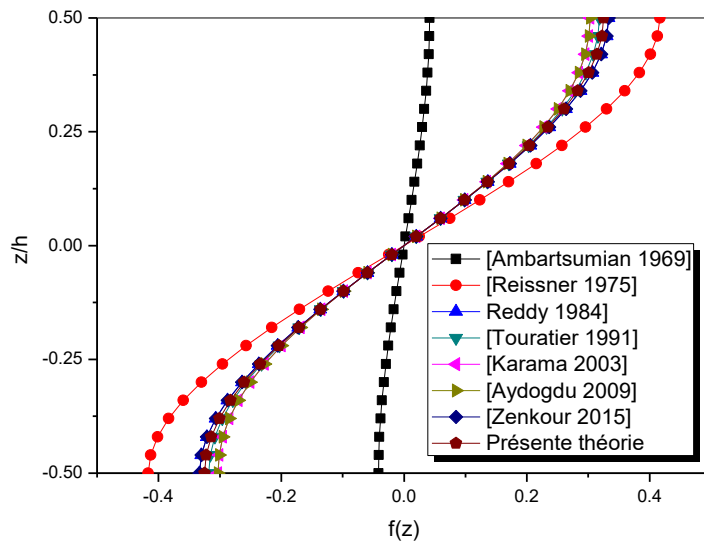


Figure II.5 : Variation de la fonction de cisaillement $f(z)$ des différents modèles d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la poutre.

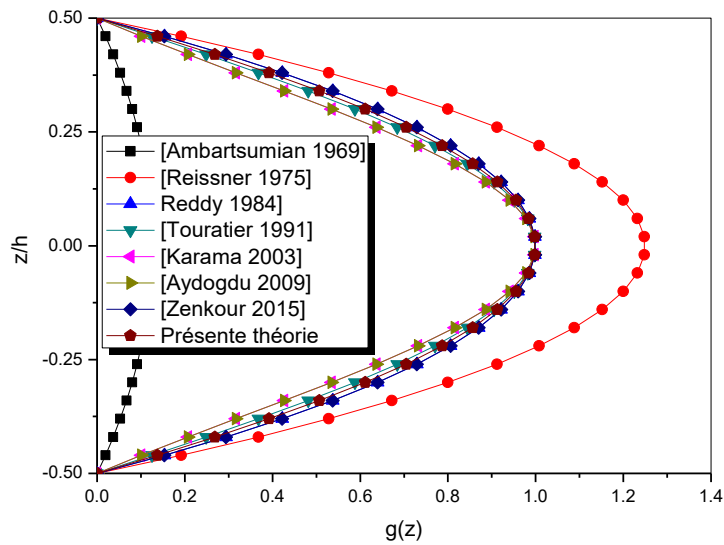


Figure II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de cisaillement $g(z)$ des différents modèles d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la poutre.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les théories des poutres en commençant par l'historique de la théorie des poutres puis nous avons défini les différentes théories proposés dans la littérature, à savoir la théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (Timoshenko) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé, avec une approche monocouche équivalente ESL qui est mieux adaptée pour notre matériau d'étude (FGM) car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Chapitre III

Etude du comportement mécanique des poutres en FGM

Chapitre III

Etude du comportement mécanique des poutres en matériaux à gradient de propriétés

III.1 Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ou les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [Miyamoto *et al.* 1999, Suresh et Mortensen 1998]. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Dans le présent chapitre, une étude analytique du comportement mécanique des poutres en matériaux à gradient de propriétés (FGM) a été présentée. Cette approche analytique est basée sur une nouvelle théorie de la déformation en cisaillement parabolique d'ordre élevé (PHSDT) pour étudier le comportement statique (flexion et flambement) et vibratoire des poutres en matériau fonctionnellement gradué. Cette théorie prend en compte l'effet de la déformation en cisaillement transversal tout en respectant les conditions aux limites aux niveaux des faces supérieures et inférieures de la poutre sans l'utilisation de coefficient de correction de cisaillement. Contrairement aux autres théories conventionnelles de la déformation en cisaillement, le présent travail inclut un nouveau champ de déplacement en introduisant des variables intégrales indéterminées.

III.2 Modèle d'une poutre FGM

III.2.1 Présentation géométrique

Considérons une plaque fonctionnellement graduée avec une épaisseur uniforme h , une longueur L et une largeur b comme indiqué sur la Figure III.1e ci-dessous. Généralement, Cette poutre est constituée d'une combinaison de matériaux métalliques et céramiques et occupe la région $0 \leq x \leq L, -b/2 \leq y \leq b/2, -h/2 \leq z \leq h/2$ dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

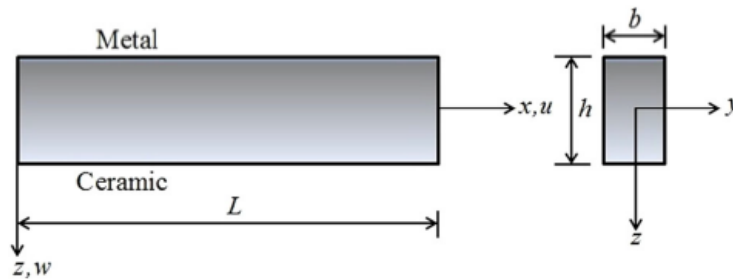


Figure III.1 : Configuration géométrique et coordonnées d'une poutre FGM.

III.2.2 Propriétés du matériau

Dans cette étude, le coefficient de Poisson ν varie très légèrement, pour cela il est supposé constant. Tandis que les propriétés effectives du matériau varient de manière continue dans le sens de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants et selon les deux règles de mélange : (1) la distribution de la loi de puissance "P-FGM" telle que donnée par [Reddy 2000] et, (2) la loi de distribution exponentielle "E-FGM" telle que rapportée par [Mantari et Guedes Soares 2012] dans les équations suivantes :

$$P(z) = \begin{cases} (P_c - P_m)V(z) + P_m, & V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p & \text{pour une poutre P - FGM} \\ P_m V(z), & V(z) = \exp\left[\log\left(\frac{E_c}{E_m}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)\right] & \text{pour une poutre E - FGM} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où $P(z)$ désigne la propriété effective du matériau, comme le module de Young $E(z)$ et la densité du matériau $\rho(z)$. Les indices "m" et "c" représentent les constituants métalliques et céramiques, respectivement. Tandis que p est l'exposant de la loi de puissance qui contrôle le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM.

La variation de la fraction volumique $V(z)$ à travers l'épaisseur de la poutre z/h pour les deux règles de mélange est illustrée dans les figures I.17 et I.19.

III.2.3 Hypothèses de la présente théorie de poutre FGM

La théorie de déformation en cisaillement proposée joue un rôle très important dans l'étude du comportement mécanique des poutres en matériau à gradient de propriétés. Par conséquent, la formulation mathématique de la présente théorie d'ordre élevé est basée sur les hypothèses cinématiques suivantes :

1. Le déplacement est très petit par rapport à l'épaisseur h de la poutre, par conséquent, la déformation est infinitésimale.
2. Le déplacement u dans la direction x se compose d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement.
3. Le déplacement transversal dans la direction z est constitué d'une seule composante de déformation en flexion.
4. La composante dû au cisaillement donne lieu, à une variation parabolique de contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre, de plus la présente théorie satisfait les conditions aux limites de telle sorte que la contrainte de cisaillement est nulle aux facettes (supérieure et inférieure) de la poutre.
5. La théorie comprend seulement trois variables inconnues indépendantes.
6. Les effets de déformation normale transversale ($\varepsilon_z = 0$) sont négligés.
7. Comme il n'y a pas de mouvement relatif dans la direction y en tout point de la section transversale de la poutre, la loi de Hooke unidimensionnelle est utilisée pour obtenir les contraintes.

III.3 Formulation théorique

III.3.1 Champs de déplacement

Sur la base des hypothèses modifiées de la théorie des poutres d'ordre élevé avec la prise en compte de l'effet de cisaillement transversal qui est assuré par une fonction de forme parabolique, Le champ de déplacement du modèle proposé pour l'étude du comportement mécanique des poutres FGM, s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= w_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f(z)\phi(x, t) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Où u_0, w_0 et $\theta(x)$ sont les déplacements inconnus du plan médian de la poutre et $f(z)$ est la fonction de cisaillement définissant la variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur. Dans cette étude, nous adoptons la fonction de forme de cisaillement polynomiale sous la forme :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{2}{5} z^4 \right), \quad g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{III.3})$$

Cette fonction satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans avoir besoin d'un coefficient de correction de cisaillement. En considérant que la composante du déplacement dû au cisaillement $\phi(x, t) = k_1 \int \theta(x, t) dx$, la cinématique de la théorie proposée peut s'exprimer sous une forme simple comme :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= w_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

III.3.2 Champs de déformation

Les relations de déformations associées au champ de déplacement données par l'Equation (III.4) sont acquises dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire comme :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{III.5})$$

Où ε_x et γ_{xz} représentent les composantes de la déformation normal et la déformation en cisaillement transversal, respectivement. En substituant les formules des déplacements considérés par l'équation (III.4) dans les relations données par l'équation (III.5), on obtient les équations de déformation-déplacement en tout point du système de poutre, à savoir :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2 \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_x^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x^2 = k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz}^0 &= k_1 \int \theta dx\end{aligned}\quad (\text{III.7})$$

Le terme d'intégrale indéterminé utilisé dans l'équation ci-dessus doit être résolu par une procédure de type de Navier et peut être exprimé comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.8})$$

Où A' et k_1 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la poutre FGM et sont définis en fonction du type de solution employée, dans ce cas à travers la solution de Navier. Par conséquent, ils sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad k_1 = \lambda^2 \quad (\text{III.9})$$

Avec λ est donnée comme :

$$\lambda = \frac{m\pi}{L} \quad (\text{III.10})$$

III.3.3 Equations constitutives

Etant donnée que la poutre FGM, est élastique et isotrope, possède un plan de symétrie xz , les relations contrainte déformation peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante (loi de Hooke généralisée) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 \\ 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Avec σ_x, τ_{xz} et $\varepsilon_x, \gamma_{xz}$ sont respectivement les contraintes et les déformations. Les constantes de rigidité élastique Q_{ij} (dépend uniquement de la direction z) peuvent être exprimées par :

$$Q_{11}(z) = E(z), \quad Q_{55}(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.12})$$

III.3.4 Equations de mouvement

Le principe d'énergie d'Hamilton est appliqué dans le but d'élaborer les équations du mouvement et les conditions aux limites d'une poutre à gradient fonctionnel. Le principe d'Hamilton est exprimé sous une forme analytique suivante :

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle de la poutre, δV est la variation de l'énergie potentielle due à un chargement extérieur et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est définie par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dy dx = \int_0^L (N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0) dx \\ &= \int_0^L \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + k_1 A' Q_{xz} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Les exposants (b) et (s) sont les résultantes de moment analogues à la théorie classique des poutres et les résultantes de moment dues à la déformation de cisaillement, respectivement. Tandis que $N_x, M_x^b, M_x^s, Q_{xz}$ sont les résultantes de contrainte liées à la présente théorie des poutres qui peuvent être obtenues par les intégrations suivantes :

$$\begin{aligned} N_x &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, & M_x^b &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \\ M_x^s &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x f(z) dz, & Q_{xz} &= b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

En substituant les équations (III.6) et (III.11) dans l'équation. (III.15), les résultantes de contraintes de la théorie proposée peuvent être obtenues en termes de déformations par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \varepsilon_x^0 + B_{11} \varepsilon_x^1 + E_{11} \varepsilon_x^2, \\ M_x^b &= B_{11} \varepsilon_x^0 + D_{11} \varepsilon_x^1 + F_{11} \varepsilon_x^2, \\ M_x^s &= E_{11} \varepsilon_x^0 + F_{11} \varepsilon_x^1 + H_{11} \varepsilon_x^2, \\ Q_{xz} &= A_{55}^s \gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où $A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}$, et A_{55}^s , sont les composantes de rigidité de la poutre données par :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}) = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad (III.17)$$

$$A_{55}^s = b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g^2(z) dz$$

La variation de l'énergie potentielle due à un chargement extérieur est donnée comme suit :

$$\delta V = - \int_0^L \left(q \delta w + N_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dx \quad (III.18)$$

La variation de l'énergie cinétique de la poutre est exprimé par:

$$\delta K = \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dz \right] dx dy$$

$$= \int_0^L \left(\begin{aligned} & I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) - I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) \\ & + I_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + I_3 k_1 A' \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) \\ & - I_4 k_1 A' \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} \right) + I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} \end{aligned} \right) dx \quad (III.19)$$

Où $\rho(z)$ est la densité du matériau donnée par l'équation (III.1) et $(I_i, i = 0, \dots, 5)$ sont les inerties de masse exprimées par les relations suivantes :

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (III.20)$$

En substituant les expressions (III.14), (III.18) et (III.19) dans l'équation (III.13), ensuite en intégrant par parties tout en mettant les coefficients δu_0 , δw_0 et $\delta \theta$ égal à zéro. Les équations du mouvement obtenues sont données sous la forme suivante

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2} \quad (III.21)$$

$$\delta \theta : -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + k_1 A' \frac{\partial Q_x}{\partial x} = -I_3 k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} - I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2}$$

Ces dernières expressions représentent les équations différentielles du mouvement d'une poutre FGM simplement appuyée obtenues par la nouvelle théorie de déformation en cisaillement parabolique avec seulement trois variables. Ces équations sont développées pour analyser le comportement statique et vibration des poutres FGM. En substituant l'équation (III.7) et (III.16) dans l'équation (III.21), les équations peuvent être exprimées en termes des composantes de déplacements sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \\
 \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \\
 & - I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2} \\
 \delta \theta : & -k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - k_1 A' H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -I_3 k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \\
 & + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} - I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

III.3.5 Méthode de Navier pour l'étude du comportement mécanique des poutres FGM

Le but de l'utilisation des méthodes numériques est de fournir des algorithmes informatiques appropriés pour obtenir les solutions numériques approximatives aux problèmes difficiles. Les techniques numériques présentées sont des méthodes discrètes. C'est-à-dire, le volume de la plaque ou de sa frontière est discrétisé mathématiquement ou physiquement. Les méthodes numériques sont :

- La méthode des différences finies (FDM) ;
- Les méthodes d'approximation intégrale et variationnelle ;
- La méthode des éléments finie (FEM) ;
- La méthode des éléments de frontière (BEM).

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales: Les méthodes de résidus pondérés (ou méthodes intégrales) et les méthodes variationnelles (méthodes à extremum).

Le principe général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction sur le domaine d'intégration de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. La solution est écrite sous forme d'une série polynomiale ou

trigonométrique à termes finis. Des paramètres généralisés sont introduits et des fonctions de base sont alors construites. Le principe de la méthode consiste à rechercher les paramètres qui donnent la meilleure approximation construite à l'aide de fonctions de base.

Dans d'autres cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est à dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle comme c'est le cas de l'énergie totale par exemple en mécanique des structures. La méthode adaptée à ce type de formulation est la méthode de Ritz et Navier, qui aboutit plus tard à la méthode des éléments finis en mécanique des structures.

La méthode de Navier est une méthode qui approxime les déplacements par des séries finies. Elle ne peut être appliquée qu'aux plaques sur appuis simples car les conditions aux limites correspondantes sont automatiquement satisfaites.

Dans cette étude, les conditions aux limites prises en charge pour les poutres simplement appuyées sur les bords, sont données par :

$$w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ Sur les bords } x = 0 \text{ et } x = L \quad (\text{III.23})$$

Nous notons ici que pour le cas de l'étude du flambement, l'effort résultant N_x est différent à zéro. Les variables inconnus de déplacement qui satisfont automatiquement aux conditions aux limites de l'équation(III.22) peuvent être exprimés sous la forme trigonométrique de la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) \\ W_m \sin(\alpha x) \\ \Theta_m \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Où U_m, W_m et Θ_m sont les variables inconnus qu'il faut déterminer pour chaque valeur m . La fréquence des vibrations libres de la plaque est ω , tandis que l'unité imaginaire est $\sqrt{i} = -1$. La charge transversale appliquée sur la surface supérieure de la poutre est toujours exprimée en fonction de la série de Fourier sous la forme suivante :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin(\lambda x) \quad (\text{III.25})$$

Le coefficient de Fourier pour les deux cas de chargement peut être exprimé comme suit :

$$q_m = \begin{cases} q_0 & (m = 1) \quad \text{pour le cas d'un chargement sinusoidal} \\ \frac{4q_0}{m\pi} & (m = 1,3,5) \quad \text{pour le cas d'un chargement uniforme} \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Où q_0 est l'intensité maximale de la charge au centre de la longueur. La poutre est soumise à une force de compression axiale N^0 . En substituant les Eqs. (III.24) et (III.25) dans l'équation. (III.22), la solution analytique peut être obtenue à partir des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} - N^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Dans cette étude, la solution de l'équation (III.27) permet de calculer les déplacements et les contraintes, la solution de l'équation (III.28) permet de calculer les charges critiques de flambement et la solution de l'équation (III.29) permet de calculer les fréquences propres de vibration libre des poutres sandwich FG simplement appuyées. Toutefois, $[K_{ij}]$ et $[M_{ij}]$ sont les éléments de la matrice de rigidité et les éléments de la matrice masse, respectivement, définis comme suit :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha^2 A_{11}, & K_{12} &= -\alpha^3 B_{11}, & K_{13} &= k_1 A' \alpha^3 E_{11}, \\ K_{22} &= \alpha^4 D_{11}, & K_{23} &= -k_1 A' \alpha^4 F_{11}, \\ K_{33} &= k_1^2 A'^2 \alpha^2 (\alpha^2 H_{11} + A_{55}^s) \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}M_{11} &= I_0, & M_{13} &= -\alpha I_1, & M_{13} &= k_1 A' \alpha I_3, \\M_{22} &= I_0 + I_2 \alpha^2, & M_{23} &= -k_1 A' \alpha^2 I_4, \\M_{33} &= k_1^2 A'^2 \alpha^2 I_5\end{aligned}\tag{III.31}$$

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement mécanique des poutres simplement appuyées en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation en cisaillement avec une fonction de forme polynomiale. Deux types de poutres ont été considérés dans cette étude, P-FGM et S-FGM. Le nombre d'inconnus dans la présente théorie est seulement trois par rapport à plus dans le cas des autres théories déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) présentées dans la littérature.

La théorie considère la déformation du cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode de Navier, les contraintes sont déterminées et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant. Elles permettent de comprendre clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats trouvés dans la littérature à savoir les résultats obtenus par les autres théories d'ordre élevé avec ou sans prise en compte de l'effet de la déformation de cisaillement transversal (cas de la théorie classique d'Euler- Bernoulli).

Chapitre IV

Résultats numériques et discussions

Chapitre IV

Résultats numériques et discussions

IV.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'étude de la flexion, du flambement et de la vibration libre des poutres en matériaux à gradient de propriétés (FGM), en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement parabolique d'ordre élevé (PSDT). D'où le nombre de variables inconnues est seulement trois, tandis que quatre ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie présentée a une forte similitude avec la CBT dans de nombreux aspects, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant les conditions de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la poutre. Dans cette étude, on suppose que les propriétés matérielles des poutres FGM, tels que le module d'Young et la densité du matériau varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants selon deux types de distributions, la loi de puissance (P-FGM) et la loi exponentielle (E-FGM).

Nous allons élaborer un programme informatique qui calcule les déplacements, les contraintes, la charge critique de flambement et les fréquences des poutres en FGM sous appuis simples en tenant en compte plusieurs paramètres, comme par exemple l'indice de la fraction volumique, le rapport d'élanement (longueur/épaisseur) et le type de poutre FGM. Nous commencerons par validation de nos résultats, en les comparant avec ceux déjà publiés dans la littérature, nous présenterons enfin des tableaux et des graphes pour discuter l'influence des différents paramètres sur la variation des contraintes, la charge critique de flambement et les fréquences naturelles de la vibration libre des poutres en FGM.

IV.2 Présentation de logiciel Maple

Maple est un logiciel de mathématiques développé par des chercheurs de l'université de Waterloo au Canada et de l'université ETH de Zurich. La première version publique a été apparait en 1985. Il se distingue par la puissance de son calcul symbolique, numérique et par la représentation graphique des résultats. C'est un logiciel destiné aux scientifiques et

ingénieurs et étudiants. Maple offre un ensemble d'outils qui se déclinent en trois composants principaux, la feuille de travail, l'interpréteur de commandes et le langage de programmation. Ce logiciel est spécialisé dans le calcul à très haute précision, la résolution de systèmes d'équations réelles, imaginaires, différentielles, dérivations, intégrations, inversions de matrices, développements asymptotiques et résolutions d'équations linéaires. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en arithmétique des nombres et en combinatoire.

IV.3 Description du programme

Dans cette partie, nous nous proposons de mettre en œuvre les outils informatiques nécessaires à l'exploitation numérique de la présente théorie des poutres. Nous allons d'abord présenter les caractéristiques géométriques de la poutre FGM, ensuite nous calculons les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de la direction de l'épaisseur, puis nous calculons les constantes de rigidités élastiques $Q_{11}(z)$. Par la suite, nous allons construire les matrices élémentaires de rigidité et de masse, en passant par le calcul des inerties et des composantes de rigidité d'une poutre FGM sous forme des intégrales constantes. Enfin, dans un but de validation des algorithmes et des matrices développés, nous faisons quelques applications numériques et nous les comparons avec les résultats de la référence pour deux types de charges ; uniformes et sinusoïdales appliquées.

IV.4 Résultats numériques et discussions

Dans cette section, les problèmes de flexion, du flambement et de la vibration libre des poutres sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie. La poutre à gradient fonctionnel est supposée être constituée de deux matériaux différents, à savoir le métal (aluminium, Al) et le céramique (alumine, Al_2O_3) ayant les propriétés matérielles comme indiquées dans les Tableau IV.1 ci-dessous.

Tableau IV.1: Propriétés matérielles utilisées dans les poutres FGM.

Matériaux	Propriétés		
	E (GPa)	ρ (Kg/m ³)	ν
Métal : Aluminium (Al)	70	2702	0.3
Céramique : Alumine (Al_2O_3)	380	3800	0.3

Les propriétés matérielles des poutres FGM varient d'une façon continue et sans interruption dans le sens de l'épaisseur selon la distribution de loi puissance (P-FGM) et la distribution de loi exponentielle (E-FGM). Les problèmes suivants sont abordés pour valider l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie :

1. Analyse de la flexion des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées,
2. Analyse de flambement des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées,
3. Analyse de la vibration libre des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées.

Pour des simplifications, le calcul numérique des déplacements, contraintes, charges critiques de flambement et les fréquences propres sont présentés sous forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \frac{100E_m h^3}{qL^4} \left(x = 0, z = -\frac{h}{2} \right), & \bar{w} &= w \frac{100E_m h^3}{qL^4} \left(x = \frac{L}{2}, z = 0 \right), \\ \bar{\sigma}_x(z) &= \sigma_x \frac{h}{qL} \left(x = \frac{L}{2}, z = \frac{h}{2} \right), & \bar{\tau}_{xz}(z) &= \tau_{xz} \frac{h}{qL} (x = 0, z = 0), \\ \bar{F}_{cr} &= F_0 \frac{12L^2}{E_m h^3}, & \bar{\omega} &= \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \end{aligned} \quad (IV.1)$$

IV.4.1 Analyse de flexion des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées

Dans ce problème, la réponse en flexion d'une poutre à gradient fonctionnel simplement appuyée est étudiée en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (PSDT). La poutre est constituée d'un matériau FGM et ses propriétés varient dans la direction de l'épaisseur selon l'équation III.1 indiquée dans le troisième chapitre. La surface supérieure de la poutre est entièrement en métal (aluminium, Al), tandis que la surface inférieure de la poutre est entièrement en céramique (alumine, Al_2O_3). La poutre est soumise à des charges transversales uniformes et sinusoïdales appliquées dans la direction z . Le déplacement axial, et transversal, la contrainte axiale, la contrainte de cisaillement et la fréquence naturelle sont exprimés par des formes adimensionnelles à l'aide de l'équation (IV.1). Comme indiqué précédemment, à l'aide des équations constitutives de la présente théorie on peut facilement calculer les composantes des contraintes normales et de cisaillement dans les poutres en FGM.

Le tableau IV.2 montre les composantes du déplacement transversal adimensionnel (flèche maximale : \bar{w}) dû à la flexion des poutres à gradient fonctionnel (P-FGM) soumises à deux types de chargement différents, uniforme et sinusoïdale, respectivement. Comme prévu, le déplacement transversal calculé par la présente théorie est étroitement liée à la théorie de déformation de cisaillement exponentielle modifiée (ESDT) développée par [Sayyad et

Ghugal 2018]. Ce tableau montre également que, la flèche maximale augmente avec l'augmentation de la valeur du paramètre de matériau p . Toutefois, pour la valeur du rapport ($L/h = 100$), c'est-à-dire une poutre mince, la composante du déplacement transversal a une valeur très faible, ce qui montre que l'effet de la déformation de cisaillement transversal est plus prononcé dans une poutre épaisse que dans une poutre mince.

Tableau IV.2:Déplacement transversal adimensionnel \bar{w} pour une poutre à gradient de propriétés P-FGM soumise à une charge sinusoïdale et à une charge uniforme.

L/h	p	Charge uniforme		Charge sinusoïdale	
		Présente théorie	Réf. ^(a)	Présente théorie	Réf. ^(a)
5	0 (Céramique)	3.1652	3.1635	2.5018	2.5004
	1	6.2591	6.2563	4.9455	4.9432
	2	8.0683	8.0666	6.3759	6.3745
	5	9.8334	9.8414	7.7765	7.7830
	10	10.941	10.940	8.6552	8.6547
	∞ (Métal)	17.182	17.173	13.5814	13.574
10	0 (Céramique)	2.9500	2.9496	2.3275	2.3271
	1	5.8958	5.8951	4.6511	4.6506
	2	7.5674	7.5671	5.9700	5.9698
	5	9.0217	9.0238	7.1189	7.1207
	10	9.9410	9.9411	7.8451	7.8452
	∞ (Métal)	16.017	16.012	12.635	12.633
100	0 (Céramique)	2.8790	2.8790	2.2699	2.2699
	1	5.7758	5.7758	4.5538	4.5538
	2	7.4019	7.4020	5.8359	5.8359
	5	8.7534	8.7535	6.9015	6.9016
	10	9.6105	9.6105	7.5772	7.5773
	∞ (Métal)	15.628	15.628	12.322	12.322

Réf. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal[Sayyad et Ghugal 2018]

Dans les tableaux IV.3 et IV.4, les déplacements maximaux et les contraintes adimensionnelles de la poutre P-FGM sont présentés pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport longueur sur épaisseur ($L/h = 5, 10, 100$). À des fins de comparaison, les résultats numériques calculés pour une poutre FGM simplement appuyé sont comparés aux solutions analytiques présentées par [Sayyad et Ghugal 2018] sur la base de la théorie modifiée de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) ; ainsi, avec les solutions générées par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

développée par [Reddy 1984], la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) de [Timoshenko 1921] et la théorie classique (CBT) d'Euler –Bernoulli (1744). On peut observer que les résultats calculés sont en excellent accord avec les solutions de la théorie d'ordre élevé, en particulier celles de [Reddy 1984].

Tableau IV.3: Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés P-FGM soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 5$).

p	Théorie	Modèle	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Présente	PSDT	0.7255	2.5018	3.0934	0.4852
	Réf. ^(a)	ESDT	0.7266	2.5004	3.0979	0.5072
	[Reddy 1984]	HSDT	0.7251	2.5020	3.0916	0.4769
	[Timoshenko 1921]	FSDT	0.7129	2.5023	3.0396	0.3183
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	0.7129	2.2693	3.0396	–
1	Présente	PSDT	1.7800	4.9455	4.7887	0.4852
	Réf. ^(a)	ESDT	1.7819	4.9432	4.7964	0.5430
	[Reddy 1984]	HSDT	1.7793	4.9458	4.7856	0.5243
	[Timoshenko 1921]	FSDT	1.7588	4.8807	4.6979	0.5376
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	1.7588	4.5528	4.6979	–
2	Présente	PSDT	2.4056	6.3758	5.6046	0.4455
	Réf. ^(a)	ESDT	2.4078	6.3745	5.6149	0.5553
	[Reddy 1984]	HSDT	2.4048	6.3754	5.6004	0.5521
	[Timoshenko 1921]	FSDT	2.3794	6.2601	5.4856	0.6978
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	2.3794	5.8346	5.4856	–
5	Présente	PSDT	2.8659	7.7765	6.6122	0.3952
	Réf. ^(a)	ESDT	2.8697	7.7830	6.6281	0.5024
	[Reddy 1984]	HSDT	2.8644	7.7723	6.6057	0.5314
	[Timoshenko 1921]	FSDT	2.8250	7.5056	6.4382	0.9942
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	2.8250	6.8994	6.4382	–
10	Présente	PSDT	3.0070	8.6552	7.9145	0.4317
	Réf. ^(a)	ESDT	3.0054	8.6547	7.9300	0.4560
	[Reddy 1984]	HSDT	2.9989	8.6530	7.9080	0.4224
	[Timoshenko 1921]	FSDT	2.9488	8.3259	7.7189	1.2320
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	2.9488	7.5746	7.7189	–
∞	Présente	PSDT	3.9386	13.581	3.0934	0.4852
	Réf. ^(a)	ESDT	3.9444	13.574	3.0980	0.5072
	[Reddy 1984]	HSDT	3.9363	13.582	3.0916	0.4769
	[Timoshenko 1921]	FSDT	3.8702	12.552	3.0396	0.3183
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	3.8702	12.319	3.0396	–

Réf. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [Sayyad et Ghugal 2018]

On observe également que la valeur du déplacement transversal est maximale lorsque ($p = \infty$) alors qu'elle est minimale lorsque ($p = 0$). Ceci est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de loi de puissance augmente la flexibilité des poutres FGM. La théorie des poutres d'Euler– Bernoulli montre de faibles valeurs de déplacements par rapport aux autres théories en raison de la négligence de la déformation de cisaillement transversal.

Tableau IV.4: Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des poutres à gradient de propriétés P-FGM soumise à une charge uniforme ($L/h = 5$).

p	Théorie	Modèle	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Présente	PSDT	0.9404	3.1652	3.8038	0.7453
	Réf. ^(a)	ESDT	0.9420	3.1635	3.8084	0.7764
	[Reddy 1984]	HSDT	0.9397	3.1654	3.8028	0.7305
	[Timoshenko 1921]	FSDT	0.9210	3.1657	3.7501	0.4922
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	0.9210	2.8783	3.7501	–
1	Présente	PSDT	0.3043	6.2591	5.8868	0.7452
	Réf. ^(a)	ESDT	2.3074	6.2563	5.8957	0.8288
	[Reddy 1984]	HSDT	2.3037	6.2594	5.8850	0.8031
	[Timoshenko 1921]	FSDT	2.2722	6.1790	5.7960	0.8313
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	2.2722	5.7746	5.7960	–
2	Présente	PSDT	3.1142	8.0682	6.8868	0.6832
	Réf. ^(a)	ESDT	3.1174	8.0666	6.8971	0.8485
	[Reddy 1984]	HSDT	3.1128	8.0677	6.8842	0.8446
	[Timoshenko 1921]	FSDT	3.0739	7.9253	6.7678	1.0791
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	3.0739	7.4003	6.7678	–
5	Présente	PSDT	3.7123	9.8333	8.1171	0.6043
	Réf. ^(a)	ESDT	3.7178	9.8414	8.1331	0.7654
	[Reddy 1984]	HSDT	3.7098	9.8281	8.1127	0.8114
	[Timoshenko 1921]	FSDT	3.6496	9.4987	7.9430	1.5373
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	3.6496	8.7508	7.9430	–
10	Présente	PSDT	3.8891	10.940	9.7188	0.6601
	Réf. ^(a)	ESDT	3.8958	10.940	9.7345	0.6947
	[Reddy 1984]	HSDT	3.8861	10.938	9.7141	0.6448
	[Timoshenko 1921]	FSDT	3.8096	10.534	9.5231	1.9050
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	3.8096	9.6072	9.5231	–
∞	Présente	PSDT	5.1051	17.182	3.8038	0.7452
	Réf. ^(a)	ESDT	5.1133	17.173	3.8084	0.7741
	[Reddy 1984]	HSDT	5.1012	17.183	3.8028	0.7305
	[Timoshenko 1921]	FSDT	5.0000	15.912	3.7501	0.4922
	[Euler– Bernoulli 1744]	CBT	5.0000	15.625	3.7501	–

Ref. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [Sayyad et Ghugal 2018]

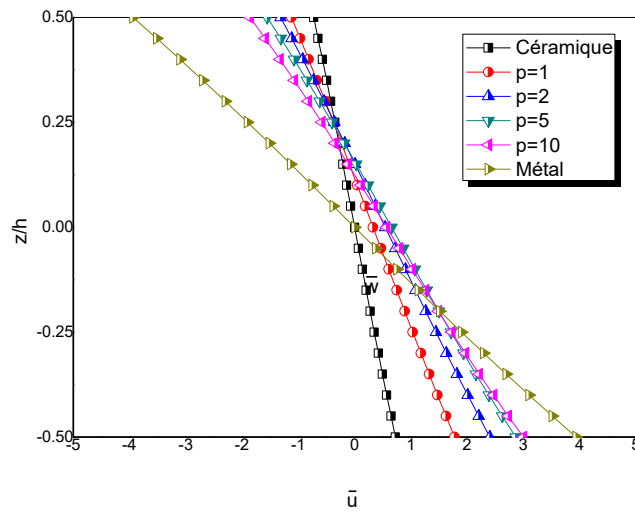


Figure IV.1 : Variation du déplacement axial adimensionnel (\bar{u}) à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 5$).

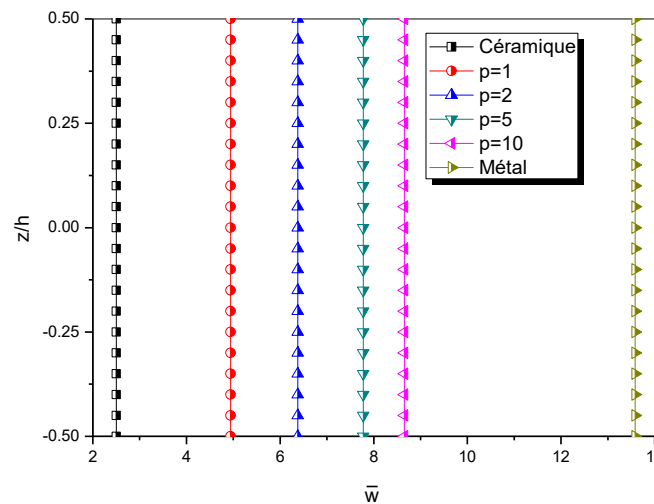


Figure IV.2 : Variation du déplacement transversal adimensionnel (\bar{w}) à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 5$).

Les Figures IV.1 et IV.2 montrent la variation des déplacements axial et transversal à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM épaisse ($L/h = 5$) sous condition de chargement sinusoïdal pour les différentes valeurs de l'indice de loi de puissance. Il apparaît sur les deux figures que la valeur des déplacements axial et transversal est maximale lorsque la poutre est entièrement métallique et minimale lorsque la poutre est entièrement en céramique. Les Figures IV.3 et IV.4 montrent la variation des contraintes normale axiale et transversale à

travers l'épaisseur de la poutre P-FGM pour les différentes valeurs de l'indice de puissance. On peut constater que l'augmentation de l'indice de loi de puissance a un effet significatif sur l'augmentation de la contrainte axiale. On observe également que la variation des contraintes axiales est non linéaire lorsque ($p = 1, 2, 5, 10$), alors que linéaire et de mêmes valeurs pour les poutres entièrement en aluminium ($p = \infty$) et entièrement en alumine ($p = 0$). De plus, l'amplitude des contraintes de traction est supérieure à l'amplitude des contraintes de compression dans les poutres FGM. En raison des propriétés variables dans la direction de l'épaisseur, la contrainte axiale de la poutre FGM n'est pas nulle au niveau de l'axe neutre.

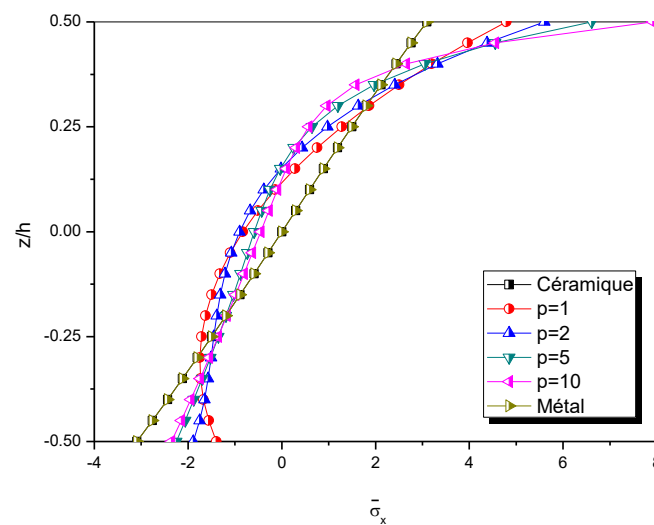


Figure IV.3 : Variation de la contrainte normale axiale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 5$).

La Figure IV.4 montre que la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé donne une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre. Les contraintes de cisaillement des poutres homogènes (entièrement métalliques et entièrement céramiques) coïncident. Dans l'ensemble, on constate que les résultats actuels sont très proches de ceux obtenus en utilisant les autres théories d'ordre élevé.

Tableau IV.5: Comparaison des déplacements et contraintes adimensionnelles des poutres à gradient exponentiel E-FGM ($L/h = 5$).

L/h	z/h	Théorie	Charge uniforme				Charge sinusoïdale			
			\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
5	-0.5	Présente	2.820	7.4702	-2.1061	0	2.1484	5.9034	-1.7109	0
		Réf. ^(a)	2.824	7.4687	-2.1084	0	2.1809	5.9021	-1.7129	0
	-0.4	Présente	2.3443	7.4702	-2.0819	0.1180	1.8144	5.9034	-1.6877	0.0769
		Réf. ^(a)	2.3459	7.4687	-2.0831	0.0972	1.8155	5.9021	-1.6887	0.0638
	-0.3	Présente	1.8872	7.4702	-1.9911	0.2580	1.4629	5.9034	-1.6116	0.1682
		Réf. ^(a)	1.8855	7.4687	-1.9898	0.2354	1.4618	5.9021	-1.6103	0.1544
	-0.2	Présente	1.4456	7.4702	-1.8093	0.4115	1.1215	5.9034	-1.4632	0.2683
		Réf. ^(a)	1.4421	7.4687	-1.8062	0.4045	1.1192	5.9021	-1.4602	0.2653
	-0.1	Présente	1.0149	7.4702	-1.503	0.5655	0.7872	5.9034	-1.2163	0.3687
		Réf. ^(a)	1.0123	7.4687	-1.501	0.5813	0.7855	5.9021	-1.2136	0.3813
	0.0	Présente	0.5896	7.4702	-1.030	0.7012	0.4565	5.9034	-0.8553	0.4572
		Réf. ^(a)	0.5898	7.4687	-1.031	0.7316	0.4566	5.9021	-0.8356	0.4799
	0.1	Présente	0.1644	7.4702	-0.3322	0.7932	0.1257	5.9034	-0.2726	0.5172
		Réf. ^(a)	0.1674	7.4687	-0.3368	0.8153	0.1278	5.9021	-0.2769	0.5348
	0.2	Présente	-0.2662	7.4702	-0.668	0.8079	-0.208	5.9034	-0.5352	0.5278
		Réf. ^(a)	-0.2625	7.4687	0.661	0.7957	-0.206	5.9021	-0.5286	0.5219
	0.3	Présente	-0.7078	7.4702	2.0700	0.7116	-0.5499	5.9034	1.6717	0.4641
		Réf. ^(a)	-0.7059	7.4687	2.0654	0.6497	-0.5485	5.9021	1.6675	0.4261
	0.4	Présente	-1.1649	7.4702	4.0023	0.4569	-0.9014	5.9034	3.2451	0.2978
		Réf. ^(a)	-1.1663	7.4687	4.0057	0.3762	-0.9023	5.9021	3.2483	0.2468
0.5	Présente	-1.6412	7.4702	6.6302	0	-1.2654	5.9034	5.3953	0	
	Réf. ^(a)	-1.6443	7.4687	6.6412	0	-1.2677	5.9021	5.4048	0	
10	-0.5	Présente	1.3956	7.0032	-4.1820	0	1.0796	5.5249	-3.3914	0
		Réf. ^(a)	1.3962	7.0032	-4.1838	0	1.08	5.525	-3.393	0
	-0.4	Présente	1.1717	7.0032	-4.162	0.1195	0.9069	5.5249	-3.3743	0.0770
		Réf. ^(a)	1.172	7.0032	-4.164	0.0983	0.9072	5.525	-3.3752	0.0639
	-0.3	Présente	0.9502	7.0032	-4.0012	0.2613	0.7357	5.5249	-3.4221	0.1684
		Réf. ^(a)	0.9501	7.0032	-4.0012	0.2381	0.7357	5.525	-3.2419	0.1547
	-0.2	Présente	0.7306	7.0032	-3.6455	0.4168	0.5659	5.5249	-2.9532	0.2686
		Réf. ^(a)	0.7303	7.0032	-3.6444	0.4091	0.5657	5.525	-2.9521	0.2657
	-0.1	Présente	0.5125	7.0032	-3.0280	0.5728	0.3969	5.5249	-2.4531	0.3691
		Réf. ^(a)	0.5122	7.0032	-3.0271	0.5879	0.3968	5.525	-2.4522	0.3819
	0.0	Présente	0.2950	7.0032	-2.0623	0.7102	0.2283	5.5249	-1.6713	0.4577
		Réf. ^(a)	0.2951	7.0032	-2.0631	0.7399	0.2284	5.525	-1.6722	0.4806
	0.1	Présente	0.0775	7.0032	-0.6378	0.8034	0.0598	5.5249	-0.5186	0.5178
		Réf. ^(a)	0.078	7.0032	-0.6408	0.8246	0.0601	5.525	-0.5213	0.5356
	0.2	Présente	-0.1406	7.0032	1.3865	0.8200	-0.1091	5.5249	1.1207	0.5284
		Réf. ^(a)	-0.1401	7.0032	1.3823	0.8047	-0.1088	5.525	1.117	0.5227
	0.3	Présente	-0.3601	7.0032	4.1859	0.7210	-2.2790	5.5249	3.3928	0.4647
		Réf. ^(a)	-0.3598	7.0032	4.1867	0.657	-0.2788	5.525	3.3903	0.4268
	0.4	Présente	-0.5816	7.0032	7.9969	0.4627	-0.4501	5.5249	6.4828	0.2982
		Réf. ^(a)	-0.5818	7.0032	7.9948	0.3805	-0.4503	5.525	6.4838	0.2472
0.5	Présente	-0.8055	7.0032	13.0983	0	-0.6228	5.5249	10.6228	0	
	Réf. ^(a)	-0.8059	7.0032	13.0983	0	-0.6231	5.525	10.6274	0	

Ref. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal [Sayyad et Ghugal 2018]

Tableau IV.5 ci-dessus montre le calcul de la variation des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur des poutres à gradient exponentiel (E-FGM) soumises à des charges uniformes et sinusoïdales avec un rapport longueur sur épaisseur ($L/h = 5,10$). A partir de ce tableau, On peut observer que les résultats numériques obtenus par la présente théorie d'ordre élevé sont en excellent accord avec ceux obtenus par [Sayyad et Ghugal 2018], néanmoins, les résultats pour ce type de problème ne sont pas disponibles dans la littérature. Cependant, on observe que les déplacements et les contraintes des poutres E-FGM sont plus ou moins similaires à la poutre P-FGM pour la valeur de ($p = 1$).

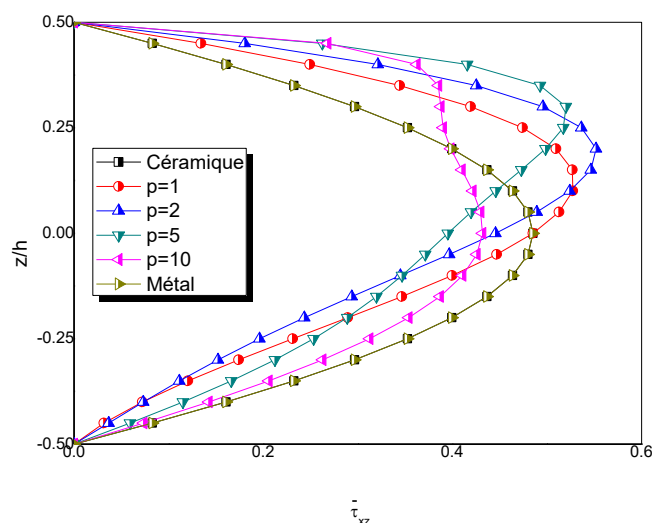


Figure IV.4 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle ($\bar{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 5$).

IV.4.2 Analyse de flambement des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées

Dans le deuxième problème, l'efficacité de la présente théorie d'ordre élevé est vérifiée pour les réponses de flambement des poutres à gradient fonctionnel simplement appuyées. La poutre est soumise à une force axiale (F_0). Les valeurs numériques de la charge critique de flambement adimensionnelle (\bar{F}_{cr}) de la poutre P-FGM sont présentées dans le tableau IV.6 pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et des rapports d'élancement ($L/h = 5,10$). Encore une fois, on constate que les résultats obtenus et comparés sont en excellent accord avec ceux calculés à l'aide des théories de déformation de cisaillement présentés par [Li et Batra 2013], [Nguyen *et al.* 2013] et [Vo *et al.* 2014a]. Il ressort du tableau IV.6 que la valeur de la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation

de l'indice de loi de puissance (p). Il est également souligné que la charge critique de flambement adimensionnelle est plus élevée pour les poutres moyennement épaisses ($L/h=10$) et moins pour les poutres épaisses ($L/h=5$). Cependant, la charge critique de flambement dimensionnelle est plus élevée pour les poutres entièrement en céramique et moins pour les poutres entièrement en métal.

Tableau IV.6: Comparaison de la charge critique de flambement adimensionnelle \bar{F}_{cr} des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées (P-FGM).

L/h	Théorie	Model	P					
			0	1	2	5	10	∞
5	Present	PSDT	48.5985	24.5849	19.0695	15.6349	14.0475	8.9523
	Réf. ^(a)	ESDT	48.6260	24.5966	19.0738	15.6220	14.0485	8.9573
	[Li and Batra 2013]	FSDT	48.8350	24.6870	19.2450	16.0240	14.4270	–
	[Nguyen et al. 2013]	FSDT	48.8350	24.6870	19.2450	16.0240	14.4270	–
	[Vo et al. 2014a]	FSDT	48.8372	24.6898	19.2479	16.0263	14.4286	–
	[Vo et al. 2014a]	HSDT	48.8401	24.6911	19.1605	15.7400	14.1468	–
	10	Present	PSDT	52.2384	26.1411	20.3657	17.0790	15.4981
Réf. ^(a)		ESDT	52.2463	26.1443	20.3669	17.0750	15.4982	9.6242
[Li and Batra 2013]		FSDT	52.3090	26.1710	20.4160	17.1920	15.6120	–
[Nguyen et al. 2013]		FSDT	52.3090	26.1710	20.4160	17.1940	15.6120	–
[Vo et al. 2014a]		FSDT	52.3085	26.1728	20.4187	17.1959	15.6134	–
[Vo et al. 2014a]		HSDT	52.3082	26.1727	20.3936	17.1113	15.5291	–

Réf. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal 2018 [Sayyad et Ghugal 2018]

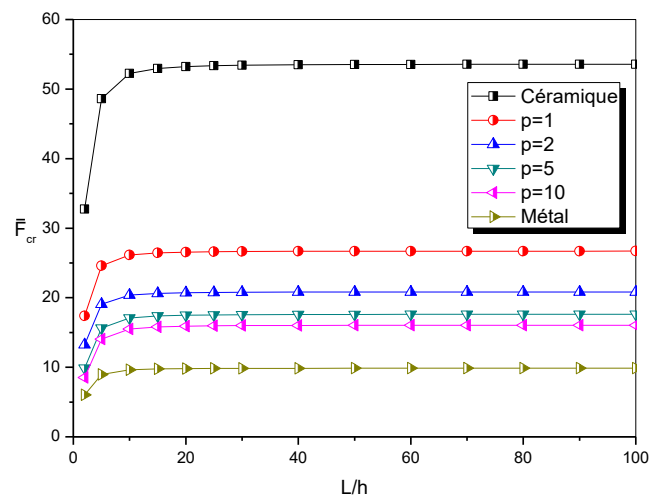


Figure IV.5 : Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle (\bar{F}_{cr}) dans une poutre P-FGM simplement supportée en fonction du rapport longueur sur épaisseur (L/h).

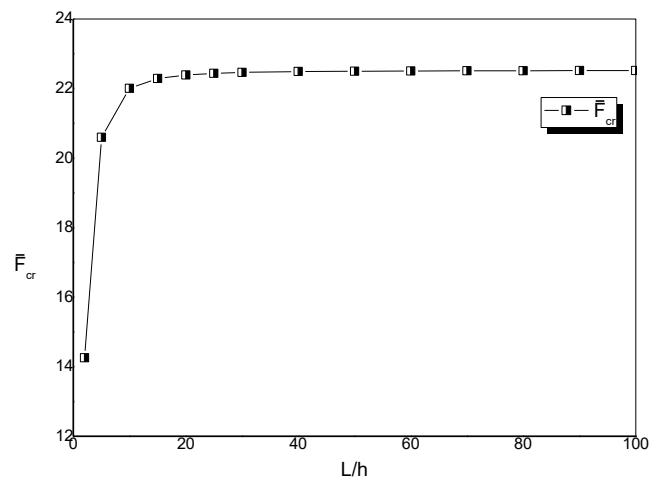


Figure IV.6 : Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle (\bar{F}_{cr}) dans une poutre E-FGM simplement supportée en fonction du rapport longueur sur épaisseur (L/h).

La Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle des poutres à gradient fonctionnel P-FGM et E-FGM en fonction des rapports d'élancement (L/h) sont également représentés sur les Figures IV.5 et IV.6, respectivement. Les examens des Figures IV.5 et IV.6 révèlent que la charge critique de flambement est presque constante après ($L/h = 20$). Il est important d'indiquer que les résultats numériques pour les charges critiques de flambement des poutres E-FGM ne sont pas disponibles dans la littérature.

IV.4.3 Analyse de la vibration libre des poutres P-FGM et E-FGM simplement appuyées

Dans cette section, la validité de la présente théorie est également vérifiée pour étudier les fréquences naturelles de vibration libre des poutres à gradient fonctionnel de type P-FGM et E-FGM simplement appuyées. Les fréquences propres des poutres P-FGM pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et les deux rapports d'élancement ($L/h = 5, 20$) sont données dans les tableaux IV.7 et IV.8. Les fréquences propres sont calculées pour les trois premiers modes de vibration. Les résultats obtenus à partir de la présente théorie sont comparés à ceux présentés par [Sayyad et Ghugal 2018], [Vo *et al.* 2014b], [Thai et Vo 2012], [Simsek 2010], [Reddy 1984] en utilisant les différentes théories des poutres d'ordre élevé HSDT, l'approche de [Timoshenko 1921] développée sur la base de la théorie des poutres du premier ordre et la théorie classique [d'Euler– Bernoulli 1744].

Tableau IV.7: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées P-FGM ($L/h = 5$).

Mode	Théorie	Modèle	p					
			0	1	2	5	10	∞
1	Présente	PSDT	5.15288	3.99050	3.62632	3.40034	3.28122	2.67739
	Réf. ^(a)	ESDT	5.15423	3.99140	3.62671	3.40000	3.28135	2.67810
	[Reddy 1984]	HSDT	5.15274	3.99042	3.62643	3.40120	3.28160	2.67732
	[Simsek 2010]	FSDT	5.15247	3.99023	3.63438	3.43119	3.31343	2.67718
	[Simsek 2010]	HSDT	5.15274	3.99042	3.62643	3.40120	3.28160	2.67732
	[Thai and Vo 2012]	HSDT	5.15275	3.99042	3.62644	3.40120	3.28160	2.67732
	[Vo et al. 2014b]	FSDT	5.15260	3.97108	3.60495	3.40253	3.29625	2.67725
	[Vo et al. 2014b]	HSDT	5.15275	3.97160	3.59791	3.37429	3.26534	2.67732
	[Timoshenko 1921]	FSDT	5.15247	3.99023	3.63438	3.43119	3.31343	2.67718
	[Euler–Bernoulli 1744]	CBT	5.39530	4.14840	3.77930	3.59490	3.49210	2.80336
2	Present	PSDT	17.8834	14.0114	12.6402	11.5363	11.0217	9.29209
	Réf. ^(a)	ESDT	17.8996	14.0224	12.6466	11.5281	11.0264	9.03573
	[Thai and Vo 2012]	HSDT	178810	14.0098	12.6407	11.5444	11.0246	–
	[Euler–Bernoulli 1744]	CBT	20.6187	15.7982	14.3260	13.5876	13.2376	–
3	Present		34.2207	27.1056	24.6880	21.7015	20.5546	17.7808
	Réf. ^(a)	ESDT	33.3835	27.2496	24.6889	21.3661	20.5815	17.3457
	[Thai and Vo 2012]	HSDT	34.2085	27.0971	24.3151	21.7187	20.5569	–
	[Euler–Bernoulli 1744]	CBT	43.3483	33.0278	29.7458	28.0850	27.4752	–

Réf. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal 2018 [Sayyad et Ghugal 2018]

L'examen des tableaux IV.7 et IV.8 révèle que les fréquences propres de vibration obtenues par la présente méthode analytique sont en bon accord avec celles présentées par d'autres chercheurs pour les différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et aussi pour tous les modes de vibration. On remarque que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. Cela est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de la loi de puissance rend les poutres FGM plus flexibles.

Tableau IV.8: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées P-FGM ($L/h = 20$).

Mode	Théorie	Modèle	P					
			0	1	2	5	10	∞
1	Présente	PSDT	5.46032	4.20505	3.83612	3.64841	3.53895	2.83714
	Réf. ^(a)	ESDT	5.46043	4.20513	3.83614	3.64830	3.53895	2.83720
	[Reddy 1984]	HSDT	5.46030	4.20503	3.83611	3.64850	3.53896	2.83716
	[Simsek 2010]	FSDT	5.46032	4.20505	3.83676	3.65088	3.54156	2.83713
	[Simsek 2010]	HSDT	5.46030	4.20503	3.83611	3.64850	3.53896	2.83716
	[Thai and Vo 2012]	HSDT	5.46032	4.20505	3.83613	3.64849	3.53899	2.83714
	[Vo et al. 2014b]	FSDT	5.46033	4.20387	3.83491	3.64903	3.54045	2.83714
	[Vo et al. 2014b]	HSDT	5.46032	4.20387	3.83428	3.64663	3.53787	2.83714
	[Timoshenko 1921]	FSDT	5.46032	4.20505	3.83676	3.65088	3.54156	2.83713
	[Euler–Bernoulli 1744]	CBT	5.47770	4.21630	3.34720	3.66280	3.55470	2.84618
2	Present	PSDT	21.5733	16.6344	15.1617	14.3734	13.9257	11.2093
	Réf. ^(a)	ESDT	21.5738	16.6342	15.1620	14.3670	13.9147	11.2096
	[Thai and Vo 2012]	HSDT	21.5732	16.6344	15.1619	14.3748	13.9264	–
	[Euler–Bernoulli 1744]	CBT	21.8438	16.8100	15.3334	14.5959	14.1676	–
3	Present	PSDT	47.5936	36.7683	33.4681	31.5730	30.5345	24.7292
	Réf. ^(a)	ESDT	47.5913	36.8705	33.6304	31.5655	30.5349	27.5383
	[Thai and Vo 2012]	HSDT	47.5930	36.7679	33.4691	31.5789	30.5373	–
	[Euler–Bernoulli 1744]	CBT	48.8999	37.6173	34.2954	32.6357	31.6883	–

Réf. ^(a) : Résultats tirés de la référence de Sayyad et Ghugal 2018 [Sayyad et Ghugal 2018]

Dans le tableau IV.9, les fréquences propres des poutres E-FGM sont présentées et comparées pour la première fois dans cette étude avec la seule théorie de [Sayyad et Ghugal 2018] qui est disponible dans la littérature et qui peut servir comme des résultats de référence pour les futures recherches. La petite différence entre les résultats actuels de la théorie de la déformation de cisaillement proposée et la théorie de déformation de cisaillement exponentiel ESDT de [Sayyad et Ghugal 2018] est due à la différence dans la cinématique du champ de déplacement et la fonction de forme. Les variations des fréquences propres des poutres P-FGM en fonction de différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p et en fonction du mode de vibration sont tracées sur les Figures IV.7 et IV.8, respectivement. La figure IV.9 montre également la variation des fréquences naturelles dans une poutre à gradient fonctionnel E-FGM simplement appuyée en fonction du rapport (L/h).

Tableau IV.9: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres à gradient de propriétés simplement appuyées E-FGM.

L/h	Théorie	$\bar{\omega}$		
		Mode 1	Mode2	Mode3
5	Présente	3.672	12.815	24.714
	[Sayyad et Ghugal 2018]	3.673	11.432	24.853
10	Présente	3.838	14.691	31.032
	[Sayyad et Ghugal 2018]	3.838	14.469	31.389
20	Présente	3.883	15.352	33.893
	[Sayyad et Ghugal 2018]	3.883	15.351	34.026
50	Présente	3.897	15.558	34.893
	[Sayyad et Ghugal 2018]	3.897	15.562	35.038
100	Présente	3.899	15.588	35.046
	[Sayyad et Ghugal 2018]	3.898	15.589	35.082

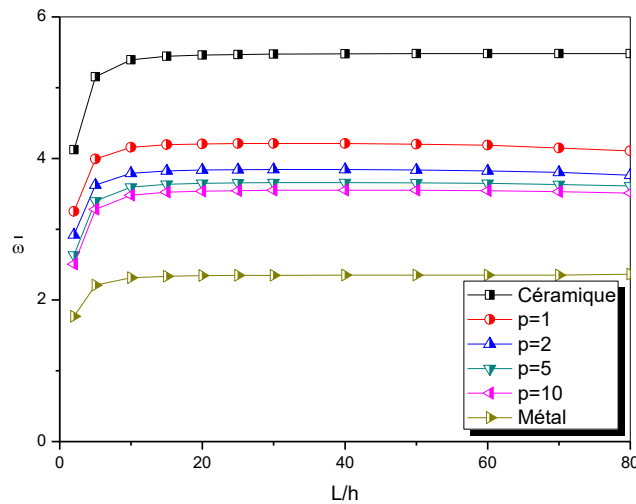


Figure IV.7 : Variation des fréquences naturelles adimensionnelles ($\bar{\omega}$) dans une poutre à gradient fonctionnel (P-FGM) simplement appuyée en fonction du rapport longueur sur épaisseur (L/h).

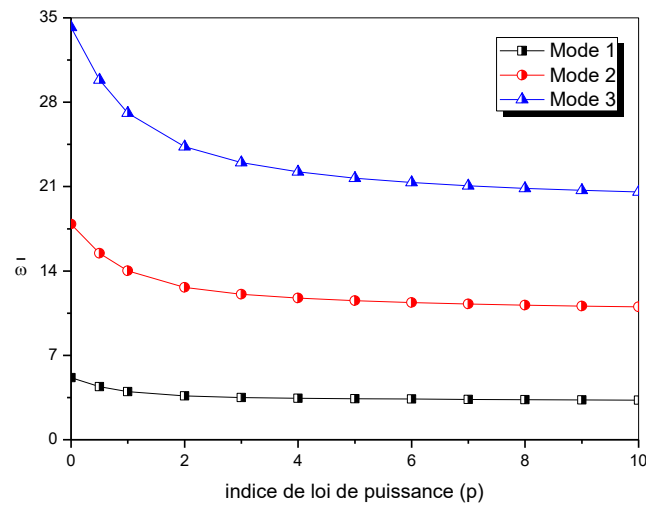


Figure IV.8 : Variation des fréquences naturelles adimensionnelles ($\bar{\omega}$) dans une poutre à gradient fonctionnel (P-FGM) simplement appuyée, en fonction de l'indice de loi de puissance ($L/h = 5$).

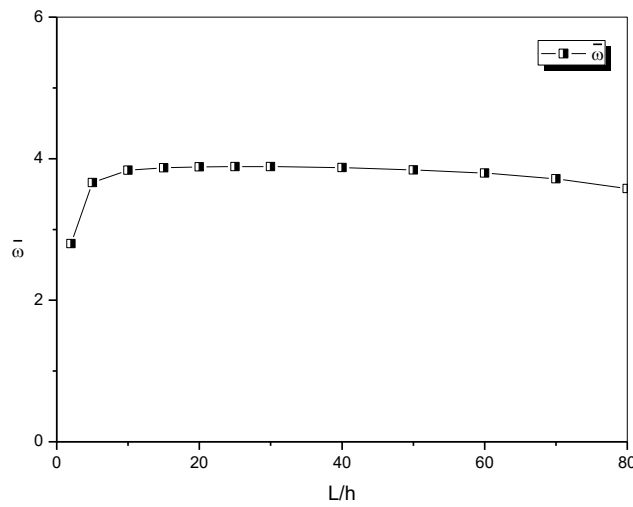


Figure IV.9 : Variation des fréquences naturelles adimensionnelles ($\bar{\omega}$) dans une poutre à gradient fonctionnel (E-FGM) simplement appuyée en fonction du rapport longueur sur épaisseur (L/h).

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la flexion du flambement et de la vibration libre des poutres FGM simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la poutre. Deux types de poutres FGM sont considérés selon leurs distributions à travers l'épaisseur : la loi de puissance (P-FGM) et la loi exponentielle (E-FGM). Plusieurs exemples numériques sont résolus pour des poutres FGM afin d'étudier les déplacements, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences propres pour différentes valeurs de l'indice matériel et le rapport d'élanement L/h . L'effet de cisaillement dans les poutres est également analysé et discuté. La présente théorie donne une forte similitude avec les autres théories de déformation de cisaillement. On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour prédire le comportement mécanique des poutres FGM.

Conclusion générale

Conclusion générale

Cette étude présente une étude numérique sur l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations libres de poutres à gradient de propriétés en utilisant une simple théorie de déformation de cisaillement parabolique (PSDT). Les propriétés d'un matériau à gradient fonctionnel sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur selon la loi de puissance (P-FGM) et la loi exponentielle (E-FGM). La présente théorie tient en compte de l'effet de cisaillement transversal en introduisant dans la cinématique de déplacement axial une composante d'intégral indéterminée. La théorie satisfait les conditions sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Des solutions analytiques pour la flexion, le flambement et la vibration des poutres avec des conditions d'appui simple sont obtenues. Les conclusions suivantes peuvent être tirées de l'étude numérique :

1. La présente théorie fournit d'excellents résultats pour les déplacements et les contraintes lorsque la poutre P-FGM est soumise à un chargement statique. Le déplacement transversal augmente avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance du fait qu'une augmentation de l'indice de loi de puissance rend la poutre FG plus flexible.
2. Il est conclu que la contrainte axiale et la contrainte de cisaillement transversale pour les poutres entièrement métalliques et entièrement céramiques coïncident.
3. La valeur de la charge critique de flambement est diminuée avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. On remarque également que cette charge est plus élevée pour les poutres minces et élancées et moindre pour les poutres épaisses. Cela conduit à la conclusion que la charge de flambement adimensionnelle est plus élevée pour les poutres épaisses et plus faible pour les poutres minces.
4. Les fréquences naturelles de vibration diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance due à la réduction de la rigidité de la poutre P-FGM. Les fréquences naturelles sont présentées et comparées pour la première fois dans cette étude pour le cas des poutres E-FGM.

5. Les déplacements, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles présentées pour les poutres E-FGM peuvent servir de résultats de référence pour les futures recherches.

Enfin, nous pouvons dire que les présentes théories d'ordre élevé, est adéquate pour résoudre les problèmes de la flexion, le flambement et la vibration libre des poutres isotropes, orthotropes et en matériaux à gradient de propriétés.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer la présente théorie pour analyser les cas suivants :

- L'effet de la variation des propriétés matérielles en utilisant d'autre type de la fraction volumique.
- L'effet du chargement thermique et hygrothermique sur le comportement mécanique des poutres FGM.
- Analyser le comportement mécanique des poutres FGM sous diverses conditions aux limites.
- Prendre en considération l'influence de la porosité sur les structures FGM.
- Il serait intéressant d'élargir le modèle analytique développé par un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis permettant de résoudre des formes de structure FGM plus complexes.

Références bibliographiques

- Ait Atmane, H, Tounsi, A. Mechab,I., Adda ,B. E. A “Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement”, *Int. J. Mech and Mater in Design*. 6 (2), 113-121, 2010.
- Alshorbagy, A. E., Eltahir, M. A., & Mahmoud, F. F. “Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method”, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 412–425, 2011.
- Amale, M. “Analyse et étude des plaques composites en vibrations libres”, Blida, 2012.
- Ambartsumyan, S. A. “Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression”, *MTT*, 3, 51-61, 1969.
- Aydogdu, M., et Taskin, V. “Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges”, *Materials and Design*, 28, 1651–1656, 2007.
- [Aydogdu, M. “A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending buckling and vibration”, *Physica E*, 41, 1651–1655, 2009.
- Belarbi, M. O. “Éléments finis pour l’analyse des Structures Sandwichs”, Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie, 2015.
- Bernoulli, J. “Curvatura laminae elasticae”, *Acta Eruditorum Lipsiae*, 3(6), 262–276, 1694.
- Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M; “Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites”, *J. Am. Ceram. Soc*, 69 (8), 191-192, 1986.
- Bohidar, S. K., Sharma, R. & Mishra, P. R. “Functionally Graded Materials: A Critical Review”, *International Journal of Research*, 1, 289-301, 2014.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409–423, 2015.
- Chan, S.H. “Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine”, *International Journal of Thermal Science*”, 40, 255– 261, 2001.
- Chi, S.H. & Chung, Y.L. “Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis”, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 3657-3674, 2006.

- Cho, K.M., Choi, I.D., Park, I. “Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials”, Mater. Sci. Forum, 449, 621-624, 2004.
- Chung, Y.L., Chi, S.H., “The residual stress of functionally graded materials”, J. Chin. Inst. Civ. Hydraul. Eng., 13, 1–9, 2001.
- Daouadji, T. H., Henni, A. H., Tounsi, A., et al. “Elasticity solution of a cantilever functionally graded beam”, Applied Composite Materials, 20, 1–15, 2013.
- Ding, J. H., Huang, D. J., & Chen, W. Q. “Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams”, Int. J. of Solids and Struct., 44(1), 176–196, 2007.
- El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed, A. H. “Preparation and Mechanical Properties of Zirconia/Nickel Functionally Graded materials”, Arab J. of Nuclear Sciences and Applications, 45(2), 435-446, 2012.
- Euler, L. “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimivebproprietate gaudentes”, Lausanne and Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socio, pp. 1–322, 1744.
- Gu, P. &Asaro, R. J. “Crack deflection in functionally graded materials”, International Journal of Solids and Structures, 34, 3085-3098, 1997.
- Giunta, G., Crisafulli, D., Belouettar, S., & Carrera, E. “Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams”, Composite Structures, 94(1), 68–74, 2011.
- Helal, W. M. K. & Shi, D. “Optimum Material Gradient for Functionally Graded Rectangular Plate with the Finite Element Method”, Indian Journal of Materials Science, Article ID 501935, 7 pages, 2014.
- Hirai, T.& Chen, L. “Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan”,Materials Science Forum, 308–311, 509–514, 1999.
- Jamaludin, S.N.S.,Mustapha, F., Nuruzzaman, D.M. and NorBasri, S.“A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites”, Scientific Research and Essays, 8(21), 828-840, 2013.
- Jian, C.Y., Hashida, T., Takahashi, H. and Saito, M. “Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method”, Composites Engineering, 879–889, 1995.
- Jin, Z. H. &Paulino, G. “Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material”, International Journal of Fracture, 107, 73-98, 2001.
- Kahya, V., & Turan, M. “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the firstorder shear deformation theory”, Composites Part B Engineering, 109, 108–115, 2017.

- Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int J of solids and struct*, 40(6), 1525-1546, 2003.
- Katayama, T. Sukenaga, S. Saito, N., Kagata, H. and Nakashima, K. “Fabricated of Al₂O₃-W functionally graded materials by slip casting method”, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 18, 2011.
- Kawasaki, A. and Watanabe, R. (1997), “Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials”, *Composites Part B, Engineering*, 29–35, 1997.
- Kieback, B., Neubrand, A. & Riedel, H. “Processing techniques for functionally graded materials”, *Materials Science and Engineering: A*, 362, 81-106, 2003.
- Koizumi, M. “The concept of FGM”, *Ceramic Trans.*, 34, 3–10, 1993.
- “FGM activities in Japan”, *Compos. Part B Eng.*, 28, 1–4, 1997.
- Levinson, M. “An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, *Mechanics Research Communications*, 7(6), 343-350, 1980.
- Li, X.F., Wang, B.L., & Han, J.C. “A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams”, *Archives of Applied Mechanics*, 80, 1197–1212, 2010.
- Li, S. R., & Batra, R. C. “Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler– Bernoulli beams”, *Composite Structures*, 95, 5–9, 2013.
- Lo, K. H., Christensen, R.M. and Wu, E.M. “A High-Order Theory of Plate Deformation— Part 1: Homogeneous Plates”, *Journal of Applied Mechanics* 44 (4), 663, 1977
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., & Soares, C.G. “A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates”, *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499, 2012.
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C. “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”, *Compos Struct*, 94(6), 1991–2000, 2012.
- Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. “Functionally Graded Materials Design”, *Processing and Applications*, 1999.
- Muller, E., Drasar, C., Schilz, J., Kaysser, W. A. “Functionally graded materials for sensor and energy applications”, *J. Mater. Sci. and Eng.: A*, 362, 17–39, 2003.
- Naghdi, P.M. “On the theory of thin elastic shells”, *Quarterly Appl. Math*, 14, 369-380, 1957.

- Narottam, P.B., Jitendra, P.S., Jacques, L., Sung, R.C. “Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions”, John Wiley & Sons, 110, 2011.
- Nejad, M., Abedi, M., Lotfian, M. & Ghannad, M. “Elastic analysis of exponential FGM disks subjected to internal and external pressure”, *cent.eur.j.eng* 3, 459-465, 2013.
- Nguyen, T. K., Vo, T. P., & Thai, H. T. “Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory”, *Composites Part B Engineering*, 55, 147–157, 2013.
- Nguyen, T.K., Nguyen, T, Vo, T.P., & Thai, H.T. “Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory”, *Composites Part B : Engineering*, 76, 273-285, 2015.
- Nguyen, V.T. “Modélisation Globale Et Locale Des Structures Multicouches Par Éléments Finis Des Plaques”, Doctoral dissertation, Ecole des PontsParisTech, 2004.
- Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., et al. “Functionally graded materials for biomedical applications”, *Mater. Sci. and Eng.: A*, 362 (1), 40–60, 2003.
- Reissner, E. “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, 12, 69–77, 1945.
- Reissner, E. “On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation”, *Int. J. Solids Structures*, 25(5), 495-502, 1975.
- Reddy, J. N. “A simple higher order theory for laminated composite plates”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 51, 745–752, 1984.
- Reddy J.N., “An evaluation of equivalent-single-layer and layer-wise theories of composite laminates”, *Composite Structures*, 25, 21–35, 1993.
- Reddy, J.N. “Analysis of functionally graded plates”, *Int J Numer Methods Eng*, 47(1–3), 663–684, 2000.
- Sadollah, A. et al. “Optimum Material Gradient for Functionally Graded Dental Implant Using Particle Swarm Optimization”, *Advanced Materials Research*, 647, 30-36, 2013.
- Saiyathibrahim, A. Nazirudeen, M.et al.“Processing Techniques of Functionally Graded Materials – A Review”, *Int. Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology, ICSSCCET*, 2015.
- Sankar, B.V. “An elasticity solution for functionally graded beams”, *Composites Science and Technology*, 61(5), 689–696, 2001.

- Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. “Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature”, *Composite Structures*, 171, 486–504, 2017.
- Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M., “Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams”, *Asian Journal of Civil Engineering*, 2018.
- Simsek, M. “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories”, *Nuclear Engineering and Design*, 240, 697–705, 2010.
- Soldatos, K. P., & Timarci, T. “A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories”, *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171, 1993.
- Steffens, H.D., Dvorak, M. Wewel, M. “Plasma sprayed functionally gradient materials processing and applications”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM’90-Sendai-Japan*, 139-43, 1990.
- Suresh, S., Mortensen, A. “Fundamentals of Functionally Graded Materials”, IOM Communications Ltd., London, 1998.
- Takahashi, M. Itoh, Y. Kashiwaya, H. “Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique”, in *Proceeding of The First Int. Symposium on FG. Materials-FGM’90-Sendai-Japan*, 129-34, 1990.
- Thai, H.T., & Vo, T.P. “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62, 57–66, 2012.
- Timoshenko, S.P. “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”, *Philosophical Magazine*, 41, 742–746, 1921.
- Touratier, M. “An efficient standard plate theory”, *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916, 1991.
- Udupa, G., Rao, S.S. & Gangadharan, K.V. “Functionally Graded Composite Materials: An Overview”, *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299, 2014.
- Uemura, S. “The activities of FGM on new applications”, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10, 2003.
- , T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., & Inam, F. “Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory”, *Meccanica*, 49, 155–168, 2014.

Références bibliographiques

Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Maheri, A., & Lee, J. “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory”, *Engineering Structures*, 64, 12–22, 2014.

Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. & Shiota, I. “On the design of functionally gradient materials”, in *First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, 1990.

Yin, H.M., Sun, L.Z. and Paulino, G.H. “Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions”, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543, 2004.

Zenkour, A. “Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory”, *Composite Structures*, 122, 260–27, 2015.

Webographie

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/RS-68#cite_note-AIAA_RS-68-4

[2] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Orion_\(v%C3%A9hicule_spatial\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Orion_(v%C3%A9hicule_spatial))

[3] <https://cdn-1.motorsport.com/images/mgl/0JBpJLN0/s1200/2021-concept-rendering-1.webp>

[4] <https://www.fastconnect.fr/quel-prix-pour-un-panneau-solaire/>

[5] <https://www.avsafeanalysis.com/>

[6] <https://it.cleanpng.com/png-6tatyv/preview.html>