

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun Tiaret



Faculté des Sciences appliquées
Département de Génie Civil

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil
Option : Structure

Présenté par :

**SENOUCI ABDELKARIM
BENSAOUD ABDELKADER**

Sujet du mémoire

**Etude statique et dynamique des poutres
FGM avec un nouveau champ de
déplacement**

Soutenu publiquement le 15 juillet 2021 devant le jury composé de :

Mr Y. TLIDJI	Président
Mme Z. KHELIFA	Rapporteur
Mr K. Draiche	Examineur
Mme K. OUAZIR	Examineur

Promotion 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nous voudrions exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur M^{me}KHELIFA ZOUBIDA, pour les orientations et les conseils qu'il a su nous prodiguer durant l'évolution de notre projet.

Nous voudrions aussi remercier tous les professeurs qui ont contribué à notre formation et remercions spécialement M^r BOUAKAAZKHALED le chef département de GC

Que tous les membres du jury trouvent ici l'expression de nos profonds Respects pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.

Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Dédicace

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de finir ce travail.

À cet agréable moment je dédie ce modeste travail à ma chère mère qui a été à mon côté durant toute ma vie, à mon cher père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis.

Je dédie aussi ce mémoire :

À toute ma famille

À tous mes amis

À tout ceux qui m'ont encouragé de proche et de loin de finir ce travail.

À toute la promotion de 2^{ème} année master GC.

*SENOUCI ABDELKARIM
BENSAOUD ABDELKADER*

Sommaire :

Résumé :.....	1
:الملخص.....	2
Abstract:.....	3
Introduction générale :	8
CHAPITRE 1	11
Les matériaux fonctionnellement gradués	11
I.1. Introduction :.....	9
I.2.Définition de matériaux fonctionnellement gradués :.....	9
I.3. Historique des matériaux fonctionnellement gradués :.....	9
I.4.Concept des matériaux fonctionnellement gradués :.....	10
I.5. L'intérêt d'utilisation des FGM :.....	12
I.6. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués :.....	12
I.6.1. Procédé de poudre sèche :.....	12
I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :	13
I.6.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting) :	14
I.6.4. Coulage en bande :.....	15
I.6.5. Pressage à chaud :.....	16
I.6.6. Processus de frittage :	16
I.6.7. Processus d'infiltration :	16
I.6.8. Projection thermique :.....	17
I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :	17
I.7.1. Propriétés physiques de l'aluminium :	17
I.8.Domains d'application des matériaux à gradients FGM :	19
I.9. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :.....	19
I.10. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :	19
I.11. Propriétés matérielles des poutres FGM :.....	20
I.11.1. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :	21
I.11.2. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :	22
I.11.3. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :	22
I.12. Conclusion :	23
CHAPITRE 2	24
Théorie des poutres	24
II.1 Introduction :	25
II.2 Historique des théories des poutres :.....	25
II.3 Comportement des poutres composites :.....	25
II.4. Conditions aux limites d'une poutre :	26
II-5. Les différentes théories des poutres [Sallai 2011] :	26
II-5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :.....	27
II.5.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT) :	28
II.5.3. Théorie d'Ordre Elevé (HSDBT) :	29
II.6. Conclusion :.....	34
CHAPITRE 3	35
Analyse du comportement statique et dynamique des poutres FGM.....	35
III.1 Introduction.....	37
III.2-Description du problème :	37
III.3-Formulation du problème :	38
III.3.1-Le champ de déplacement :	38

III.3.2 Solution analytique de Navier :	41
a. En dynamique :	42
b. En statique :	43
a. Flambement :	43
III.4. Conclusion :	44
CHAPITRE 4	45
Résultats et discussions	45
IV.1. Introduction :	46
IV.2. Résultats numériques et discussion :	46
• Flexions de la poutre FGM :	46
• Flambement de la poutre FGM :	46
• Vibration de la poutre FGM :	46
IV.3. Flambage d'une poutre FGM :	52
IV.4. Les vibrations libres des poutres FGM :	53
IV.5. Conclusion :	56
Conclusion Generale :	57
Références	58
Program:	60

Résumé :

Ce travail a pour objectif d'analyser les réponses en flexion en flambement et en vibration libre et le comportement statique et dynamique des poutre simplement appuyées en matériaux fonctionnellement gradués FGM en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (1D) qui se base sur un nouveau modèle du champ de déplacement avec des termes entiers indéterminés. Dans ce type de poutre, les propriétés des matériaux varient en fonction de la fraction volumique. La théorie proposée implique que trois variables et explique la variation des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions aux limites de la nullité des contraintes sur les bords libres de la poutre sans avoirs besoin d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont dérivées en employant le principe d'Hamilton, ensuite les solutions des poutre en FGM simplement appuyées ont été obtenues à l'aide de la procédure de Navier. Afin de confirmer la précision et l'efficacité de la présente théorie, plusieurs résultats numériques sont présentés et comparés avec d'autres théories HSDT existantes dans la littérature.

Mots-clés : Théorie de déformation en cisaillement, FGM poutre, flexion, flambement, vibration libre.

المخلص:

يهدف هذا العمل إلى تحليل السلوك الثابت والديناميكي في الانحناء، الالتواء، وفي الاهتزاز الحر للروافد المدعومة ببساطة والمتكونة من مواد متدرجة وظيفيًا باستخدام نظرية إجهاد القص عالية المستوى (ID) استنادًا إلى نموذج جديد لحقل الإزاحة بشروط عدد صحيح غير محدد في هذا النوع من الروافد، تختلف خصائص المادة اعتمادًا على جزء الحجم. تشير النظرية المقترحة إلى ثلاث متغيرات وتشرح تباين إجهادات القص المستعرض من خلال السماكة من خلال تلبية الشروط في حدود فراغ الضغوط على الحواف الحرة للحمزة دون الحاجة إلى عامل تصحيح القص. تم اشتقاق المعادلات في شروط الحركة والحدود باستخدام مبدأ هاملتون، ثم تم الحصول على الحلول المدعومة ببساطة باستخدام إجراء Navier. من أجل تأكيد دقة وكفاءة النظرية الحالية، تم تقديم العديد من النتائج العددية ومقارنتها بنظريات HSDT الأخرى الموجودة في الأدبيات.

الكلمات المفتاحية: نظرية التشويه، روافد FGM، الانحناء، الالتواء، الاهتزاز.

Abstract:

This work aims to analyze the responses in bending, buckling and free vibration and the static and dynamic behavior of beams simply supported in functionally graduated materials FGM using a theory of shear strain in high order (1D) which follows base on a new model of the field of displacement with indeterminate whole terms. In this type of beam, the properties of the materials vary according to the volume fraction. The proposed theory implies that three variables and explains the variation of the transverse shear stresses through the thickness by satisfying the conditions s at the limits of the nullity of the stresses on the free edges of the beam without needing a correction factor of shear. The equations of motion and the boundary conditions are derived using the Hamilton principle, then the solutions of the simply supported FGM beams were obtained using the Navier procedure. In order to confirm the accuracy and efficiency of the present theory, several numerical results are presented and compared with other existing HSDT theories in the literature.

Keywords: Shear deformation theory, FGM, beam, Bending, Buckling, free vibration.

Listes des figures :

Fig I-1-1 Variation continue des propriétés.	10
Fig I-1-2 Variation discrète des propriétés.....	10
Fig I-2-1 : Variation continue la microstructure (shématisée).....	11
Fig I-2-2 : Variation continue la microstructure (photo)	11
Figure I.3: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM.....	13
Figure I.4: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée).	14
Figure I.5: Installation du coulage centrifuge verticale.	15
Figure I.6: Système de processus de coulage en bande	16
Figure I.7: La distribution composante des matériaux.....	20
Figure I.8: Géométrie d'une poutre en FGM.	20
Figure I.9: La variation du module de Young dans une poutre P-FGM	21
Figure I. 10: La variation du module de Young dans une poutre E-FGM	22
Figure I.11: La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.	23
Figure II. 1. Cinématique d'Euler Bernoulli.....	27
Figure II. 2 . Cinématique de Timoshenko (Dufort 2001)	28
Figure II. 3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.	30
Figure II-4: Répartition à travers l'épaisseur de la fonction de contrainte de cisaillement transverse.	32
Figure II-5 : À travers l'épaisseur distribution de la dérivée de la fonction de déformation de cisaillement transverse.	33
Figure : II-6 : Variation du module de Young $E(z)$ à travers l'épaisseur de la poutre FG pour différentes valeurs de l'exposant à la loi de puissance (P).....	33
Figure III.1 : Géométrie de la poutre FGM.....	37
Figure IV.1 : Variation du déplacement transversal sans dimension (w) le long de la longueur de la poutre soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h=5$).	47
Figure IV.2: Variation du déplacement axial sans dimension (u) le long de la longueur de la poutre soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h=5$).	49
Figure IV.3: Variation du déplacement axial sans dimension (u) dans l'épaisseur d'une poutre FG soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 5$).	50
Figure IV.4: Variation de la contrainte axiale sans dimension à travers l'épaisseur de la poutre FG soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 5$).	51
Figure IV .5: Variation de la contrainte de cisaillement transverse sans dimension à travers l'épaisseur de la poutre FG soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 5$).	52
Figure IV.6: Variation des charges critiques de flambement sans dimension (B) et des fréquences naturelles (A) par rapport aux exposants de la loi de puissance des exposants des poutres FGM simplement supportées.	56

List des tableaux :

Tableau II-1. Principales conditions aux limites pour les poutres.	26
Tableau IV-2. Comparaison des déplacements adimensionnels et des contraintes des poutres FG soumise à des charges uniformes avec différentes valeurs d'exposant de la loi de puissance.	48
Tableau IV-3 : Comparaison des charges critiques de flambement sans dimension (N_{cr}) des poutres FG soumise à des efforts axiaux en fonction de diverses valeurs d'exposant de la loi de puissance.	53
Tableau IV-4 : Comparaison des premières fréquences fondamentales sans dimension des faisceaux FG par rapport à diverses valeurs d'exposant de loi de puissance.	54

Liste des symboles et Abréviations :

E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de (z)
$E(z)$	Module de Young en fonction de (z)
μ	Coefficient de poisson
U	Les déplacements suivant les directions x
W	Les déplacements suivant les directions z
u_0	Les composantes de déplacement de surface médiane suivant x
w_0	Les composantes de déplacement de surface médiane suivant z
$f_{(z)}$	Fonction de cisaillement transversal
$f'_{(z)}$	La première dérivée de la fonction de cisaillement par rapport à z
$f'_{(x)}$	Dérivée de la fonction de cisaillement par rapport à x
σ_x	Contraintes normales
σ_{xz}	Contrainte normal transversale
G_{xz}	Le module de cisaillement transversal
ε_0	Déformation normale
k_1	Paramètre du matériau
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
ε_x	Déformation dans la direction x
δU	La variation de l'énergie de déformation
δV	La variation de l'énergie potentielle
δK	La variation de l'énergie cinétique
$I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$	Les coefficients d'inertie
N_x	Efforts normaux
$u_m w_m \varphi_m$	Les coefficients inconnus
M^c	Moment de flexion due au cisaillement
M^b	Moment de flexion
Q	La force de cisaillement
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
q_0	L'intensité maximale de la charge au centre de poutre
{ }	Vecteur colonne
i,j	Sont des nombre naturel
[k]	La matrice symétrique
[]	La matrice
a	Larguer de la poutre
h	Hauteur de la poutre
L	Longueur de la poutre

Introduction générale :

Au cours des dernières décennies, une nouvelle classe de matériaux composites a émergé d'un groupe de chercheurs du National laboratoire aérospatial (STA) au Japon, où ils ont développé des matériaux gradués fonctionnellement avec des caractéristiques résister aux contraintes thermiques et mécaniques [Niino et al 1987], puisque les matériaux classiques, malgré leurs avantages de haute rigidité, résistance mécanique élevée et faible, ne répondent pas toujours aux exigences requises, ces matériaux ont une microstructure qui varie progressivement et constamment dans l'épaisseur afin d'optimiser leur performances qu'elles soient mécaniques ou thermiques ou les deux à la fois.

Aujourd'hui, les structures en matériaux composites avancés attirent plusieurs chercheurs plongés dans ce vaste domaine de recherche où ils ont développé plusieurs modèles afin d'étudier le comportement des poutres, des plaques et des coques dans différents applications telles que [M. Koizumi 1997], [Karama et al 2003] et [Aydogdu et al 2007] où ils ont utilisé une parabole du premier ordre et la théorie de la déformation exponentielle pour étudier le comportement vibratoire libre d'un matériau gradué fonctionnellement et simplement supporté poutre matérielle. [J. Bernoulli 1964] et [Euler 1744] ont développé une théorie classique (CBT) pour l'analyse des isotropes et poutres anisotropes mais malheureusement, cette théorie ne prend pas en compte l'effet de la déformation de cisaillement transverse. A fin de surmonter ces limitations, plusieurs chercheurs ont introduit la théorie de la déformation par cisaillement qui prend en compte de l'effet du cisaillement transverse pour la théorie du premier ordre et d'ordre supérieur (HSDT). [Timochenko 1921] introduit dans sa théorie du premier ordre l'effet de la déformation de cisaillement mais reste toujours qu'il doit ajouter un facteur de correction et c'est en raison de la contrainte de cisaillement qui est constante à travers l'épaisseur. Ces difficultés sont éliminées par l'introduction de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur par les chercheurs [Reddy 1984] et [Touratier 1991] ils ont proposé des travaux en flexion, flambage et vibrations libres. [Matsunaga 2008] a étudié le flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant une théorie de déformation bidimensionnelle. [Vidal et al 2009] a effectué une évaluation du modèle sinus pour l'analyse non linéaire de poutres mixtes. [Şimşek 2010] a utilisé les différentes théories d'ordre supérieur pour étudier les réponses dynamiques des poutres dans matériaux classés fonctionnellement. Talha et al. [16] étudié la réponse statique et dynamique des plaques FGM en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. [Hosseini-Hashemi et al 2010] ont étudié la vibration libre des plaques FGM de type rectangulaire en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. [Hosseini-Hashemi et al 2011a] ont proposé une nouvelle approche analytique pour étudier la vibration libre des plaques rectangulaires [Xiang. S 2011] ont fourni une théorie de la déformation en cisaillement pour le but d'étudier la vibration libre des plaques sandwich. [Thai et Vo 2012] ont travaillé sur l'analyse de flambement et vibration des poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour une poutres. [Reddy et al 2011] ont proposé une théorie de la contrainte de couple dépendant de la microstructure des poutres graduées fonctionnellement. [Eltaher et al 2013] ont déterminé la position de l'axe neutre et son effet sur les fréquences propres des macros/nano-faisceaux. [Li et Batra 2013] ont proposé une analyse relationnelle entre les charges critiques de flambement d'un Timoshenko théorie des poutres et Euler-Bernoulli pour différentes conditions aux limites. [Nguyen et al 2013] ont utilisé la théorie du premier ordre déformation par cisaillement pour analyser la vibration des poutres dans des matériaux fonctionnels gradués pour obtenir une solution analytique selon la solution de Navier. [Hadji et al 2016] ont développé un nouveau modèle de cisaillement de premier ordre et d'ordre supérieur déformation pour analyser la vibration des poutres graduées fonctionnellement. [Yaghoobi et al 2014] ont développé une étude analytique sur l'analyse des vibrations libres non linéaires après flambement de poutre dans des matériaux à gradation

fonctionnelle reposant sur une fondation élastique non linéaire sous chargement thermomécanique à l'aide de [Rahmani.O 2014] ils ont analysé en modélisant l'effet de taille sur la vibration de nano-faisceaux gradués fonctionnellement basés sur la théorie des faisceaux non locaux de Timoshenko. [Al Khateeb et Zenkour 2014] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'analyse de la flexion des plaques d'appui sur fondations en milieu hygrothermique.. [Vo et al 2014b] ont développé un modèle d'éléments finis basé sur une théorie raffinée de déformation de cisaillement afin d'étudier le comportement statique et dynamique des poutres dans différentes conditions aux limites.. [Meradjah et al 2015] ont proposé une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement pour l'étude des poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle en tenant compte de l'effet d'étirement.. [Vo et al 2015] ont développé une théorie quasi-3D pour l'étude du flambement et vibration des poutres sandwich.. [Zemri, A et al 2015] ont proposé une théorie théorique non raffinée pour l'analyse statique, le flambement et vibration libre des poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle nanométrique.. [Al-Basyouni et al 2015] ont analysé la flexion et vibration en fonction de la taille des micro-poutres à gradation fonctionnelle basée sur la théorie modifiée de la contrainte de couple et position de surface neutre. [Ebrahimi et Dashti 2015] ont exploré les effets des distributions linéaires et non linéaires de température sur la vibration de nano-faisceaux dans des matériaux à grades fonctionnels. [Kar et Panda 2015] ont étudié la vibration et la flexion par cisaillement non linéaire d'un panneau de coque de forme sphérique est constituée de matériaux à gradation fonctionnelle.. [Bourada et al 2015] a présenté une nouvelle théorie trigonométrique d'ordre supérieur simple et raffinée pour l'analyse de la flexion libre et des vibrations depoutres en matériaux fonctionnellement gradués en tenant compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur.. [Celebi et al 2015] a proposé une méthode unifiée pour étudier les contraintes dans une sphère de matériaux gradués fonctionnellement avec des propriétés qui varient de façon exponentielle.. [Boukhari et al 2016] ont proposé une étude thermique sur la propagation des ondes dans les FGM fonctionnellement graduées plaques de matériaux en fonction de la position de la surface neutre. Ebrahimi et Barati ont étudié l'influence de l'environnement sur l'amortissement des vibrations des nano-poutres dans des matériaux à grades fonctionnels.. [Ahouel et al 2016] ont enquêté sur le comportement mécanique dépendant de la taille des nano-poutres fonctionnelles à cisaillement trigonométrique et à cisaillement trigonométrique, y compris le concept de la position de surface neutre.. [Shafiei et al 2016] ont étudié les vibrations non linéaires de micro-poutres coniques dans les matériaux imparfaits et poreux classés fonctionnellement sur la base de contraintes de couple modifiées et des théories d'Euler-Bernoulli.

. [Raminnea et al 2016] ont utilisé la théorie de Reddy non linéaire d'ordre supérieur pour l'étude de la vibration et de l'instabilité de conduites noyées transportant un fluide en fonction de la température. [Ghumare et Sayyad 2017] ont développé une nouvelle théorie pour l'étude de la déformation de cisaillement du cinquième ordre et de la déformation normale pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres FGM.. [Benadouda et al 2017] ont proposé une théorie de la déformation par cisaillement pour l'étude de la propagation des ondes dans les poutres en matériaux classés fonctionnellement avec des porosités.. [Bellifa et al 2016] ont utilisé une théorie de déformation de cisaillement simple ainsi que le concept de la position de la surface neutre pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques constituées en matériaux fonctionnellement classés. [Akbaş.S 2016] a étudié la réponse vibratoire de poutres viscoélastiques et la propagation des ondes dans une poutre fait de matériaux fonctionnellement classés dans des environnements thermiques.. [Bellifa et al 2017b] ont utilisé la théorie de l'ordre zéro non local déformation de cisaillement pour le post-flambage non linéaire de nano-poutres.. [Li et al 2018] ont étudié l'effet de l'épaisseur sur la résistance mécanique comportement des nano-faisceaux. [Sayyad et Ghugal 2017b] ont développé une théorie de déformation de cisaillement unifiée pour l'étude de pliage de poutres et de plaques dans des matériaux à gradation fonctionnelle.

[Aldousari 2017] a étudié l'analyse de flexion de différentes distributions de matériaux dans une poutre fonctionnellement graduée.. [Bouafia et al 2017] ont développé une théorie quasi-3D non locale pour étudier le comportement de la flexion libre des nano-poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle.. [Zidi et al 2017] ont proposé un nouveau théorie à deux inconnues pour l'étude de la déformation par cisaillement hyperbolique des poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle.. [Fouda et al 2017] ont proposé un modèle de porosité pour étudier la déformation de cisaillement dans le cas statique, le flambement et la vibration libre des poutres poreuses dans des matériaux à gradation fonctionnelle basés sur la méthode d'Euler Bernoulli et les éléments finis. Une étude sur la vibration libre de poutres en matériaux gradués fonctionnellement est présentée par. [Zaoui.F et al 2017] où ils ont utilisé une théorie du cisaillement d'ordre supérieur déformation.. [Moufoki et al 2017] ont étudié l'analyse de la vibration libre de nano-poutres sous un chargement hygro-thermique en utilisant une nouvelle théorie des faisceaux trigonométriques à deux inconnues. Récemment, [Sayyad et Ghugal 2018] ont étudié la flexion, flambement et réponses vibratoires libres de la déformation de cisaillement hyperbolique des poutres FGM.. [Kaci. A. et al 2018] ont étudié l'analyse post-flambement de poutres composites déformables par cisaillement à l'aide d'une nouvelle théorie simple à deux inconnues. . [Dragan et al 2018] ont développé une nouvelle fonction dans le but d'analyser la flexion des plaques dans des matériaux à gradation fonctionnelle. L'effet de la déformation par cisaillement des structures dans les matériaux à gradation fonctionnelle nécessite plus d'investigations. Dans notre étude, la théorie de la déformation de cisaillement à trois variables 2D et quasi-3D pour l'analyse des poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle est présentée. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Les solutions Navier sont également présentées. Déplacements, contraintes, charges critiques de flambement et fréquences obtenues en utilisant la théorie actuelle des poutres de les matériaux classés dans lesquels les propriétés des matériaux varient avec la loi de puissance (P-FGM) sont comparés à d'autres résultats afin de démontrer l'efficacité de la théorie proposée. Des exemples numériques seront présentés pour l'étude de la déformation par cisaillement des poutres dans des matériaux à gradation fonctionnelle en cas de flexion, de flambement et de vibration.

CHAPITRE 1

Les matériaux fonctionnellement gradués

I.1. Introduction :

L'étude ou l'analyse des vibrations n'est pas une science récente et pourtant elle connaît depuis quelques années un regain d'intérêt pour des besoins de conception et de dimensionnement des structures répondant aux meilleures *conditions* de fonctionnement, de sécurité, d'économie, et d'isolation acoustique.

Face à ces exigences, les matériaux FGM paraissent une solution idéale grâce à leur multifonctionnalité intégrée.

Les poutres sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et surtout aérospatiales. Cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique, ce qui a rendu nécessaire l'étude de leur comportement statique/dynamique.

Donc le comportement vibratoire non linéaire et statique des poutres mérite bien d'être étudié puisqu'aucune des solutions exactes obtenues ne considère tous les états frontières possibles, les facteurs géométriques, les différents types de matériaux, les effets de déformation dus au cisaillement et l'effet thermique. Par conséquent, cette insuffisance d'informations nous poussé d'investir dans ce domaine.

I.2. Définition de matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux FGM sont des matériaux composites, microscopiquement non homogènes. Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de céramiques.

I.3. Historique des matériaux fonctionnellement gradués :

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique [Bachir2015]. En 1987, En le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermo mécaniques [Koizumi1992].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau coté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Abdizadeh1997].

I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue figure (I-1-1) ou discrète figure (I-1-2) à travers l'épaisseur [Hirai, T. 1996]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques de la structure. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

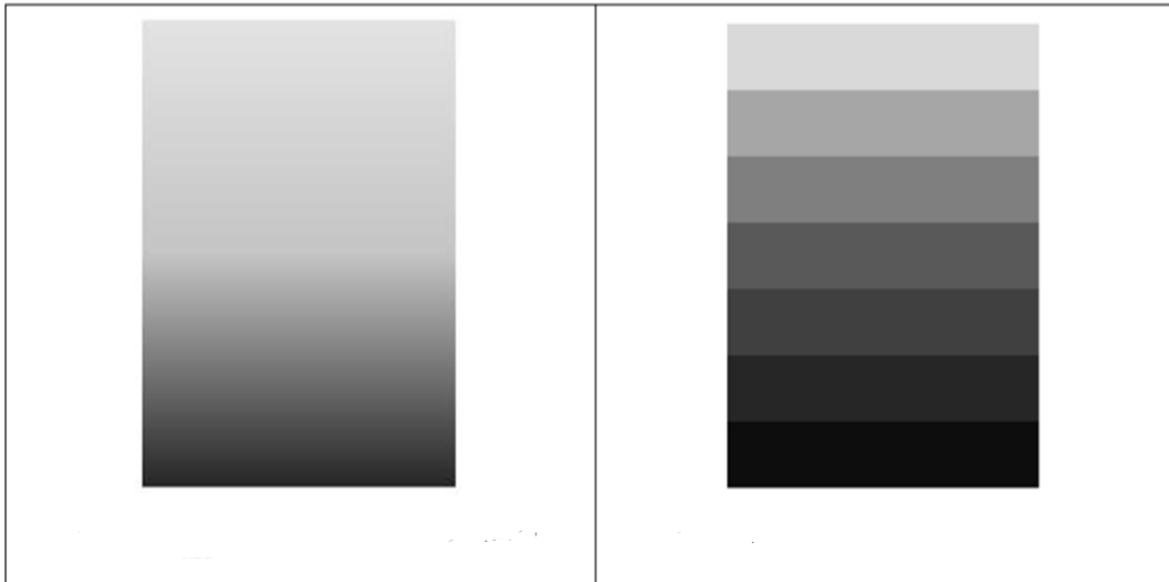


Fig (I-1-1) : Variation continue des propriétés. **Fig (I-1-2) :** Variation discrète des propriétés.

La variation continue des propriétés figures (I-2) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

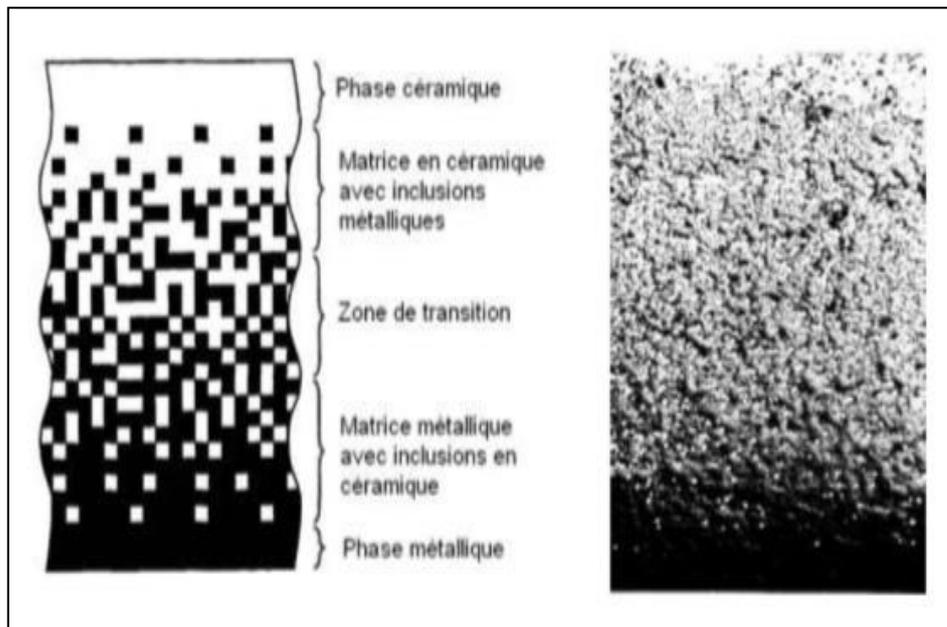


Fig (I-2-1) : (a) Variation continue la microstructure (shématisée)

Fig (I-2-2) : Variation continue la microstructure (photo) [A.MAHI 2012]

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion).
- Haute température de fusion ou de décomposition.
- Haut module d'élasticité et haute dureté.
- Charge à la rupture élevée.
- Bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure).
- Conservation des propriétés à haute température.
- Faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques).
- Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique.
- Conductivité thermique élevée.
- Très bonne ténacité.

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu

[Jian.C.Y 1995] [Kawasaki.A 1997].

I.5. L'intérêt d'utilisation des FGM :

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions Fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit.

Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat.

Les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

I.6. Techniques de fabrication des matériaux fonctionnellement gradués :

I.6.1. Procédé de poudre sèche :

PM (Powder métallurgie) est une technologie apparente pour la fabrication du FGM et elle est de plus en plus utilisée pour créer des gradients sur les matériaux. Cette méthode est appropriée pour la fabrication du FGM utilisant des matériaux solides.

Ici la technique est utilisée pour produire des matériaux à gradient de propriétés en trois étapes de base à savoir : le pesage et le mélange de poudre en fonction de la répartition spatiale de préconçue comme dictée par l'exigence fonctionnelle, d'empilage et de damage des poudres pré-mélangées, et enfin, le frittage comme illustré à la figure (I.3)

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [Saiyath.I 2015].

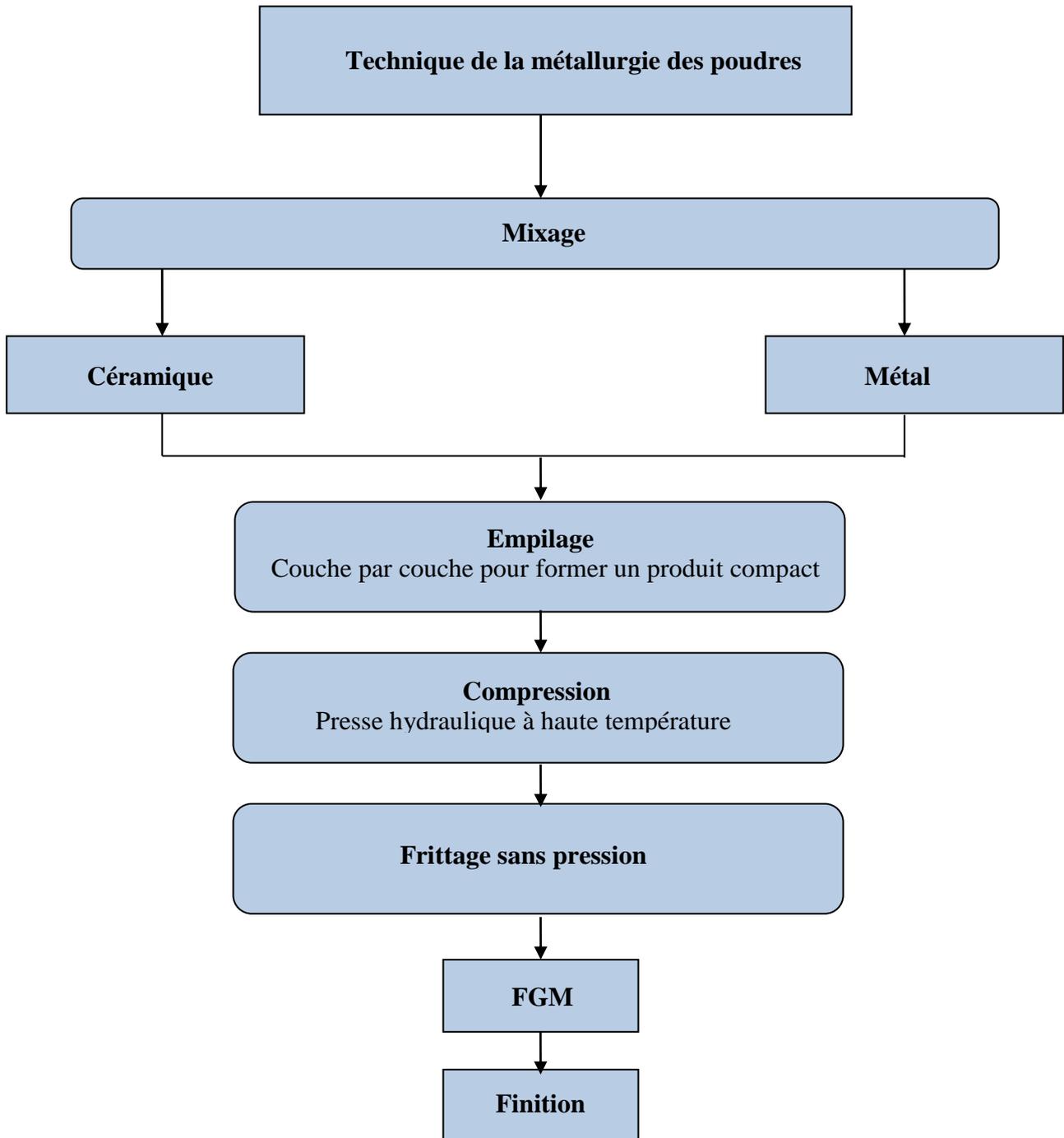


Figure I.3: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM

I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine est une poudre basée sur une méthode de mise en forme traditionnelle appliquée dans l'industrie céramique. En général le coulage en barbotine est un procédé de filtration où la poudre suspendue est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes le liquide élimine la suspension et les particules de poudre sont forcées vers les parois.

Le gradient sera formé en changeant la composition ou la taille des grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Cette technique nécessite également l'étape ultérieure de consolidation, où la poudre est densifiée (frittée) et une structure de gradient de propriétés FGM sera produite. [Katayama 2011].

I.6.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting) :

La force centrifuge peut être utilisée pour créer une composition de gradient dans une masse fondue métallique qui contient une autre phase solide. En général, la fabrication du FGM par le procédé de centrifugation est classée en deux catégories en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Si le point de fusion est significativement plus élevé que la température de traitement, la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide.

Cette méthode est appelée la méthode particule-solide centrifuge (CSPM). Le renforcement sélectif de la surface du composant obtenu par les résultats CSPM une résistance à l'usure plus élevée dans la surface extérieure ainsi que le maintien de haute ténacité en vrac. D'un autre côté, si le point de la particule de renfort de fusion est inférieur à la température de traitement, la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification à la fois à la particule de renfort et à la matrice.

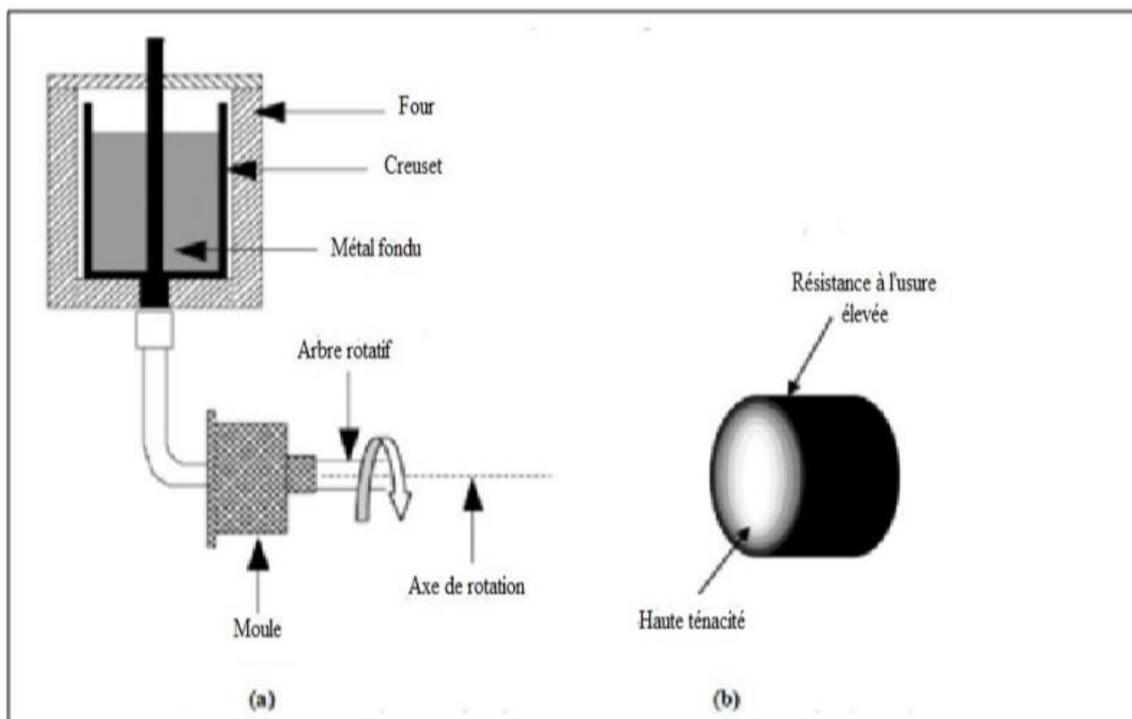


Figure I.4: Représentation schématique du :

(a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale

(b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée)

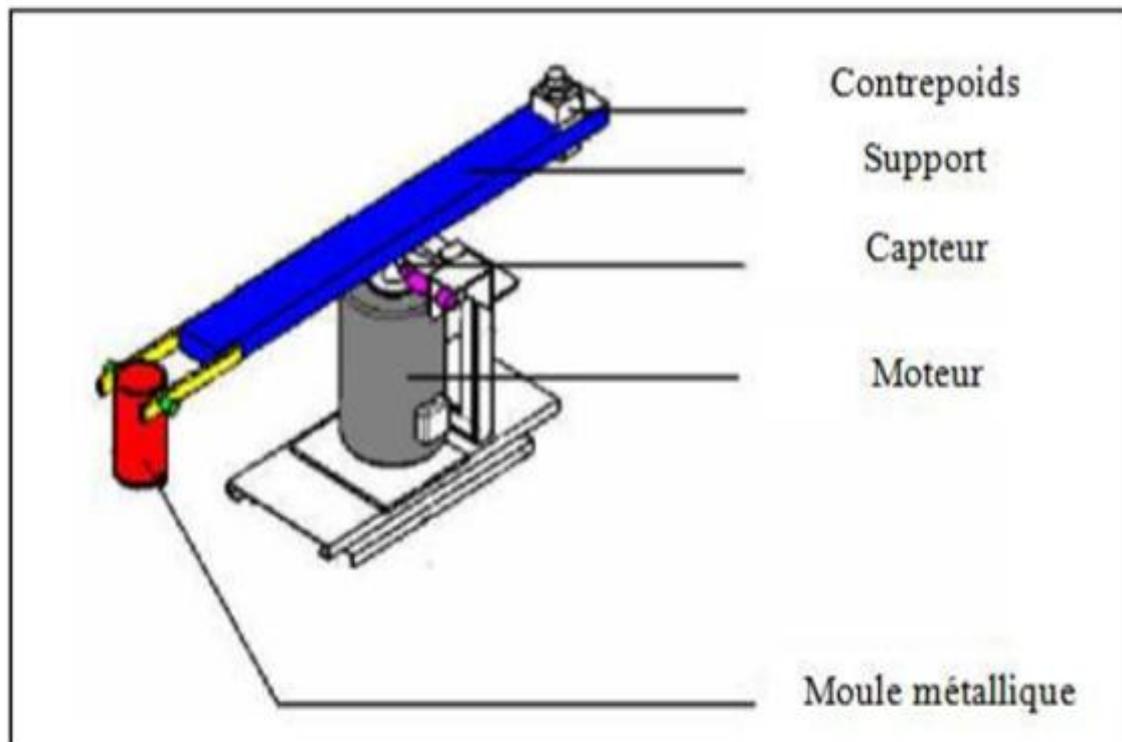


Figure I.5: Installation du coulage centrifuge verticale.

I.6.4. Coulage en bande :

Le procédé de coulé de bande est représenté sur la figure (I.6)

L'épaisseur de la bande coulée est généralement comprise dans l'intervalle de 25 μ m et 1mm. Les bandes minimales inférieures à 1 μ m pourraient être produites.

Les différentes étapes de coulage en bande sont :

1. élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant.
2. le séchage du corps vert ou de la bande.
3. la consolidation de la matière dense de bande.

Afin d'obtenir un FGM des bandes ou des différents composites ont été préparés ; des unités carrées ont été coupées à partir des bandes vertes qui ont ensuite été placés les uns sur les autres.

Les bandes d'épaisseur appliquée est de l'ordre de 200 μ m. La densification de la bande est obtenue par frittage. Gradients superposés des matériaux en métal-céramique et céramique sont produits par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent.

[Dumont 2001] ont fabriqué un FGM en MoSi₂/Al₂O₃ avec des teneurs en alumine variant de 20 à 80% mole en utilisant une combinaison de coulage en bande et la réaction autoentretenue à haute température (SHS). Après délainage, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible pour améliorer la densification de composition progressive des composites

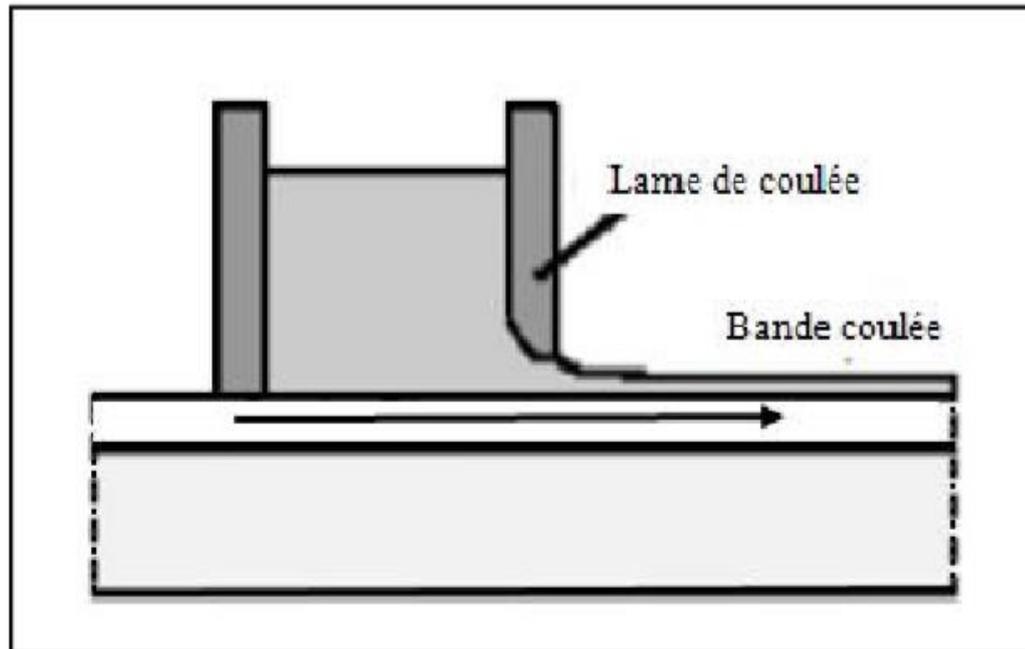


Figure I.6 : Système de processus de coulage en bande

I.6.5. Pressage à chaud :

La zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et le nickel 20 chrome (NiCr) sont les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche via la méthode de pressage à chaud [Li 2003]. À l'étape initiale du traitement, la poudre YSZ et NiCr ont été mélangés dans la boule fraiseuse pendant 12 h avant d'être empilés couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. Cette étude applique le concept de dégradation progressive en disposant la composition de chaque couche pour être en pourcentage désiré.

Le pré-compactage de chaque couche a été réalisé sous une pression inférieure avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure (10 MPa) pour assurer la distribution de composition exacte dans les couches. La jonction de YSZ-NiCr qui a été effectuée à 1200°C pour 1h présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000 °C avant d'initier la fissure [Jamaludin 2013].

I.6.6. Processus de frittage :

La gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certaines des poudres métalliques légères, tels que le magnésium et l'aluminium aura tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent. Le procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le FGM est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactés

I.6.7. Processus d'infiltration :

Infiltration est le processus pour lequel le fluide sur la surface précipite dans le sol. Ce processus est dirigé soit par la gravité ou la force d'action capillaire. Le taux d'infiltration dépend des caractéristiques du sol tels que la capacité de stockage, le taux de transmission à travers le sol et la facilité d'entrée. Le taux et la capacité du processus d'infiltration peuvent être contrôlés en

ajustant certains paramètres, y compris la texture du sol, les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la température du sol et de l'intensité des précipitations. Comme le processus commun pour la mise en forme du moule est le chauffage de la poudre à une température qui est supérieure à la phase liquide.

D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en œuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses années auparavant. Un gradient de composition Al-SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue [Jamaludin 2013].

I.6.8. Projection thermique :

La projection thermique est une technique pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondues seront les matériaux à gradient variés qu'ont construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20 μm to mm). En 2002, trois types de revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique (TBCs) ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM [Jamaludin 2013].

I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

I.7.1. Propriétés physiques de l'aluminium :

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

- **Propriétés physiques** : L'Aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.
- **Propriétés mécaniques** : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :
 - Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
 - ❖ Résistance à la traction.
 - ❖ Résistance à la pénétration (dureté).
 - Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :
 - ❖ La malléabilité (mises en feuilles).
 - ❖ La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium :

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.

- Bon rapport force/poids.

Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.

- ✓ Bonne conductivité thermique.
- ✓ Conductivité électrique élevée.
- ✓ Bonnes caractéristiques de finition.
- ✓ Entièrement recyclable.

➤ **Résistance à la corrosion** : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

➤ **I.7.2. Propriétés physiques de la céramique :**

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

➤ **Propriétés physiques** : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design,

L'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

➤ **Propriétés mécaniques** : Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- ✓ Matières première employées.
- ✓ Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Parmi les propriétés de la céramique :

- ✓ Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- ✓ Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- ✓ Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients FGM :

Grace aux récentes recherches, aussi bien publiques que privées, des matériaux à gradient FGM ont trouvé une application plus large dans les secteurs industriels de l'aéronautique, de l'automobile, du sport et loisir, du génie civil et de la marine. Ces matériaux présentent des avantages de légèreté, de résistance mécanique, et de résistance à la corrosion. Ils permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application. Les principaux domaines d'application des FGM sont [Bouafia2014]:

- ✓ **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de poutre peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- ✓ **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- ✓ **Chimie** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- ✓ **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- ✓ **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- ✓ **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- ✓ **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- ✓ **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- ✓ **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- ✓ **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

I.9. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

I.10. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels :

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés

(FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la figure (I.7) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

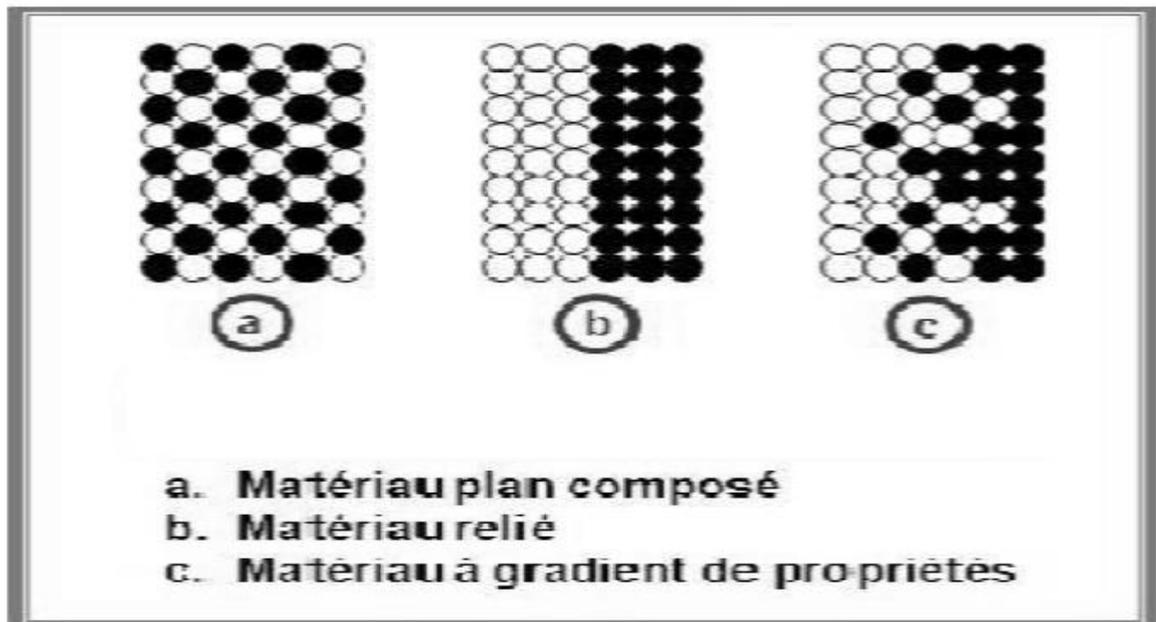


Figure I.7: La distribution composante des matériaux.

I.11. Propriétés matérielles des poutres FGM :

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les propriétés matérielles, le module de Young, la densité et le coefficient de poisson, sont variés de façon continue dans le sens de l'épaisseur « h » de la poutre.

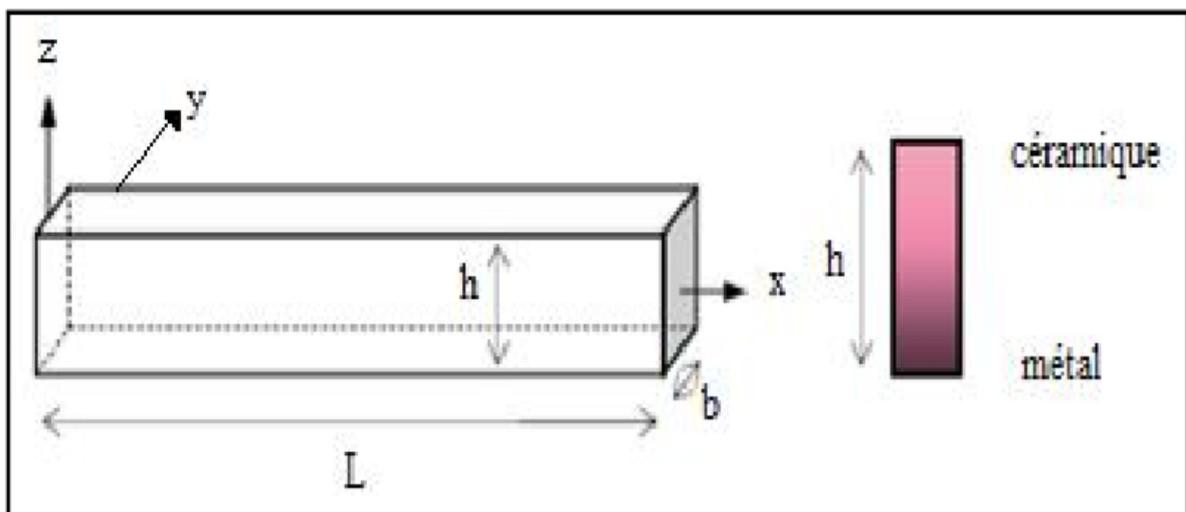


Figure I.8: Géométrie d'une poutre en FGM.

I.11.1. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :

La fraction volumique P-FGM est assurée par une loi de fonction puissance sous la forme [Chi et Chung 2006].

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (I.1)$$

Où

$g(z)$: Fraction volumique.

p : indice de fraction volumique.

h : épaisseur de la poutre.

z : la coordonnée suivant l'épaisseur.

Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang 1995] :

$$E(z) = g(z)E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (I.2)$$

Où : E_2 et E_1 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ; densité ou coefficient de poisson) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la poutre FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I.11, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change et diminue rapidement près de la surface inférieure pour « $p > 1$ », et augmente rapidement près de la surface supérieure pour « $p < 1$ ».

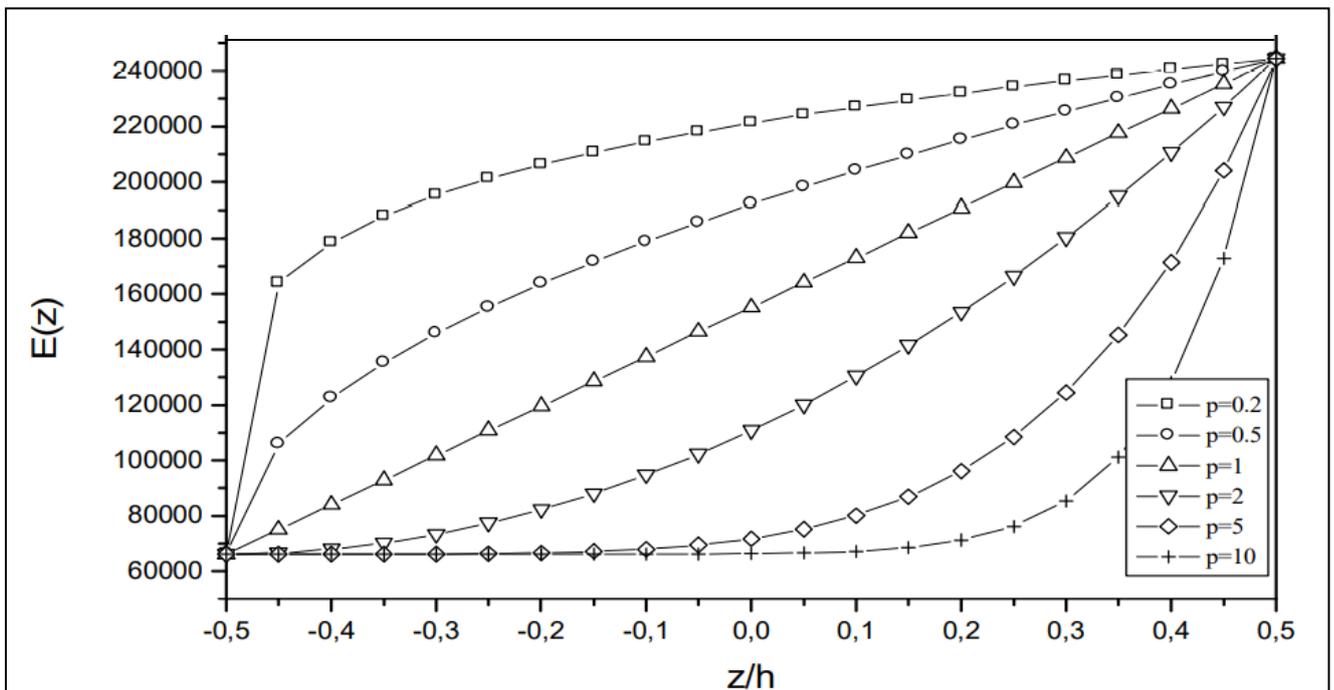


Figure I.9: La variation du module de Young dans une poutre P-FGM

I.11.2. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale et Erdogan 1983]

$$E(z) = Ae^{B\left(z+\frac{h}{2}\right)} \quad (I.3)$$

Avec : $A = E_2$ et $B = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2}$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la figure I.12.

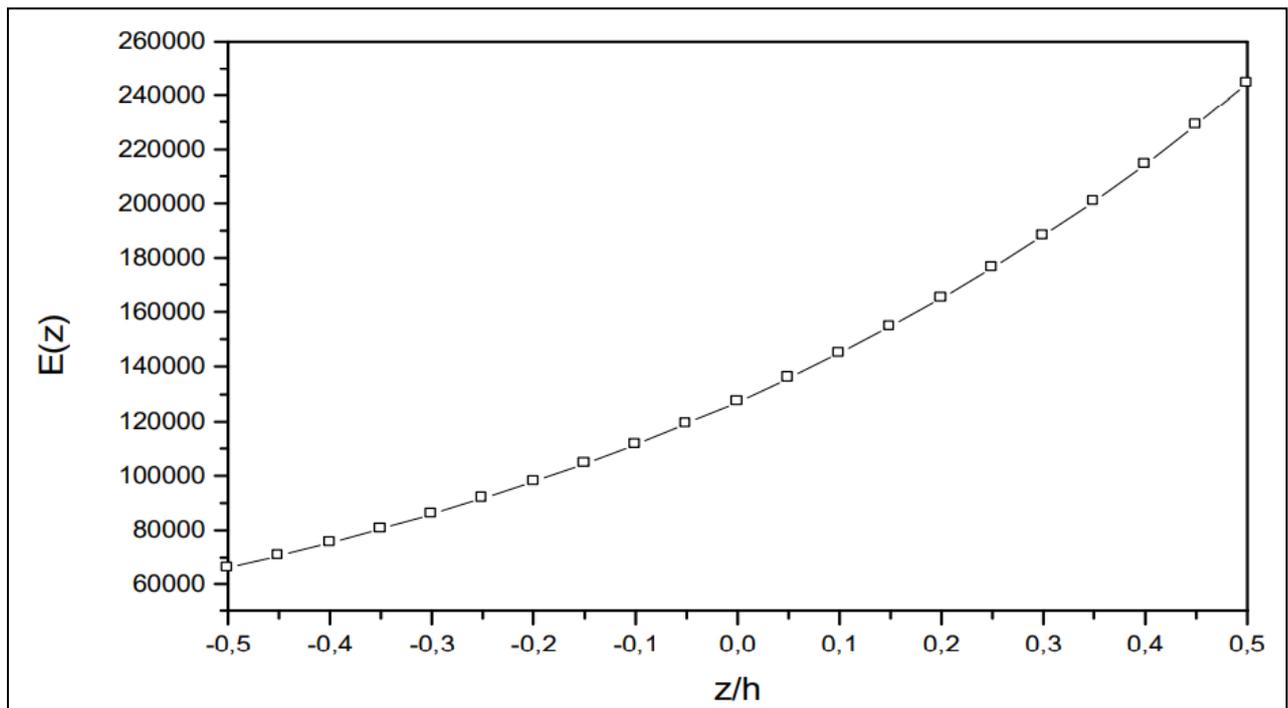


Figure I. 10: La variation du module de Young dans une poutre E-FGM

La variation du module de Young se fait à l'aide d'une seule fonction qui domine la distribution du matériau dans la poutre E-FGM.

I.11.3. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :

Si l'on rajoute une poutre FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, [Chi et Chung 2006] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-z}{\frac{h}{2}} \right)^P \quad \text{Pour} \quad 0 \leq Z \leq +\frac{h}{2} \quad (I.4)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (I.5)$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = g_1(z)E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (I.6)$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (I.7)$$

La figure I.13 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

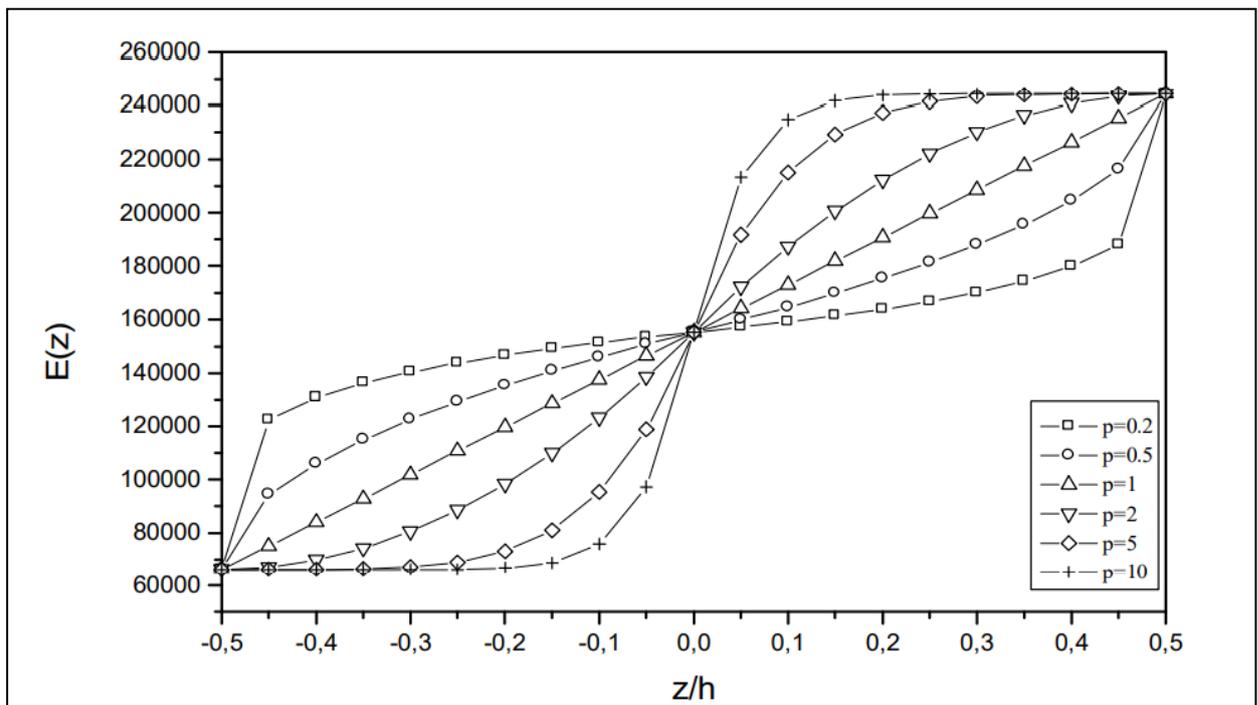


Figure I.11: La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.

I.12. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d'application, est technique de fabrication de matériaux (FGM) (procédé de poudre sèche, coulage Séquentiel.....projection thermique).

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d'application.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance.

CHAPITRE 2

Théorie des poutres

II.1 Introduction :

Le terme « Poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication des machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. [Sallai 2011]

II.2 Historique des théories des poutres :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.3 Comportement des poutres composites :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple [Elomari 2011]. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

II.4. Conditions aux limites d'une poutre :

Elles sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion qui représenté dans le tableau ci-dessous :

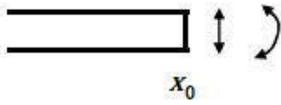
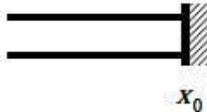
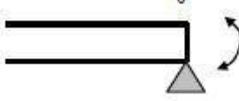
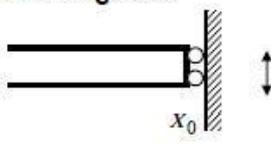
<p>extrémité libre</p> 	<p>pas de contraintes sur le déplacement et la rotation \Rightarrow le moment de flexion et la force de cisaillement s'annulent en x_0</p>	$M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité encastree</p> 	<p>les déplacements transversal et angulaires sont nuls en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité simplement supportée</p> 	<p>le déplacement transversal est bloqué mais la rotation est libre \Rightarrow le moment de flexion est donc nul en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité guidée</p> 	<p>le déplacement transversal est libre et la rotation est bloquée \Rightarrow la force de cisaillement est donc nulle en x_0</p>	$\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$

Tableau II-1 : Principales conditions aux limites pour les poutres.

II-5. Les différentes théories des poutres [Sallai 2011] :

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

- ✓ L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres [Coffignal 2001] est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- ✓ L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".

- ✓ L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.
- ✓ L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

II-5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

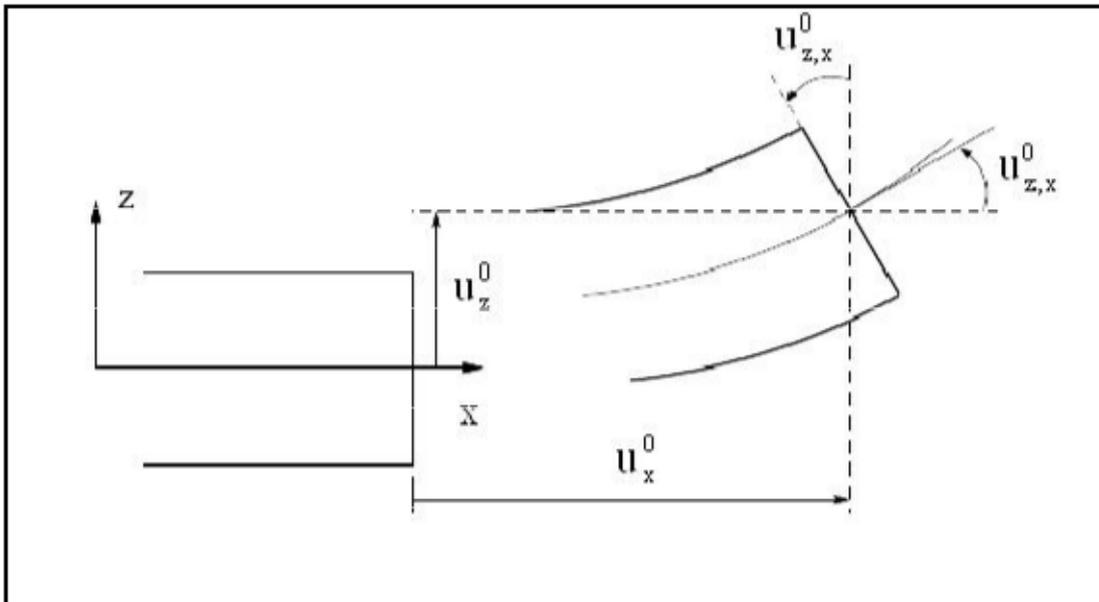


Figure II. 1. Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z)=0 \tag{II.1}$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CLBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M)=\begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_x^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \tag{II.2}$$

$u(x, z)$:C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$w_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{II.3}$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

II.5.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT) :

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko 1972].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction (f) est égale à Z. Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

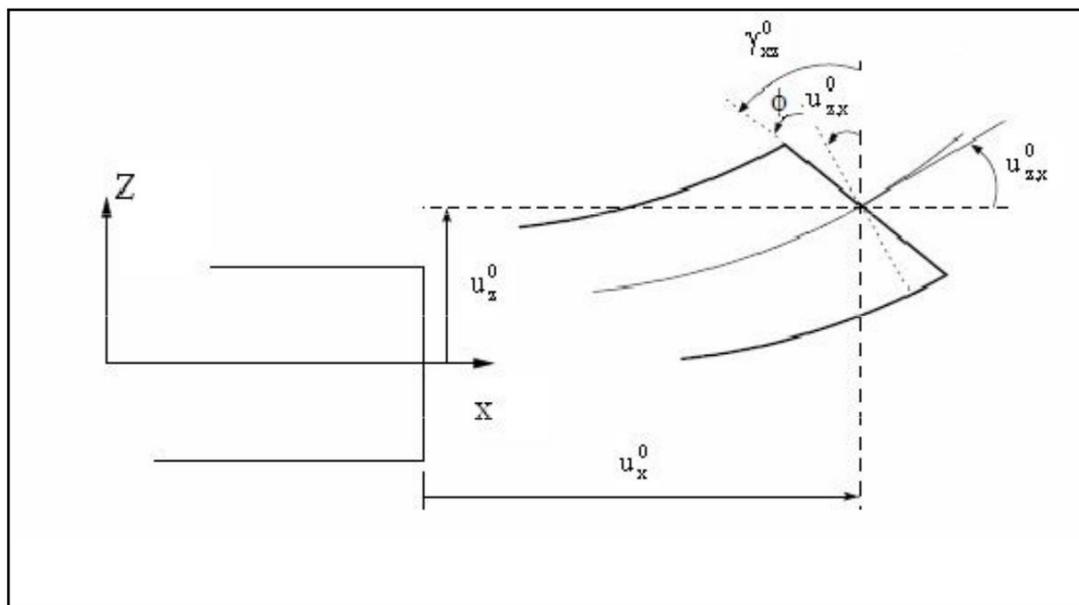


Figure II. 2 .Cinématique de Timoshenko (Dufort 2001)

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit :

$$U(M)=\begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_x^0(x) + z\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.4)$$

$$U(M)=\begin{cases} u(x, z) = u^0(x) + z \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.5)$$

$\gamma_{xz}^0(x)$: C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

$$\text{Tel que : } \gamma_{xz}^0(x) = \varphi^0(x) - w_x^0(x) \quad (II.6)$$

$\varphi^0(x)$: C'est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + \varphi^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (II.7)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_x = G_{xz} \varphi^0(x) \quad (II.8)$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y'a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ($k = 5/6$) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.5.3. Théorie d'Ordre Elevé (HSDT) :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité Figure (II.3).

La fonction (z) représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

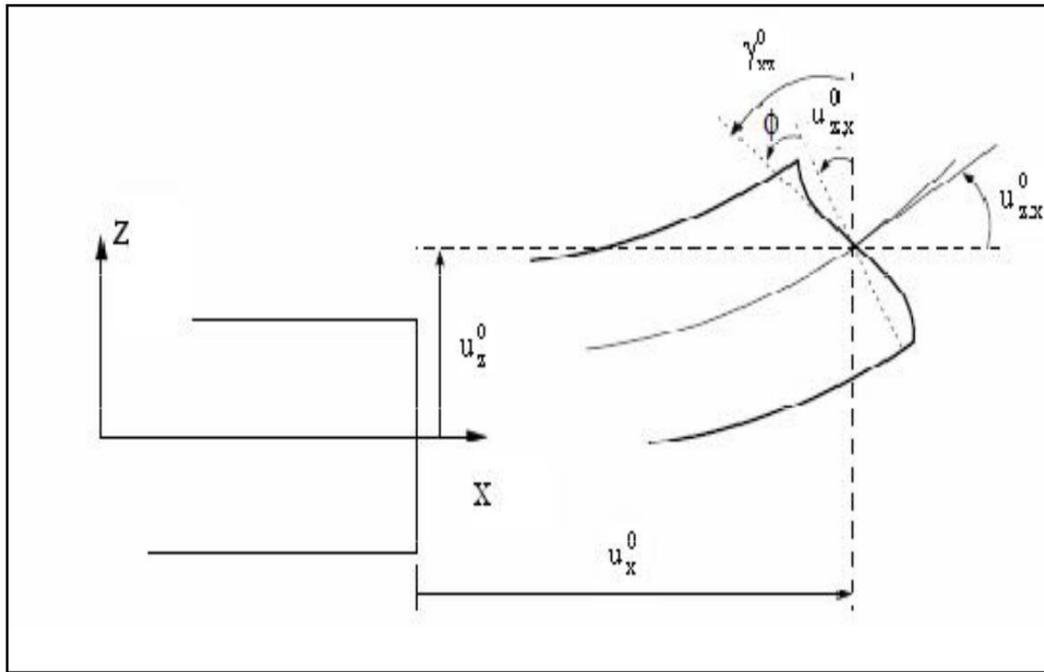


Figure II. 3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen 2004], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [Lo 1977]:

$$u_0(x,z) = u_0(x) + z\Psi(x) + z^2\zeta(x) + z^3\varphi(x) \quad (II.9)$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction (z). Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x,z) = u^0(x) - z w_x^0(x) + f(z)\varphi^0(x) \\ w(x,z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + f'(z)\varphi^0(x) + w_x^0(x) \quad (II.11)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\varphi^0(x) \quad (II.12)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f'(z)|_{z=\pm h} = 0 \quad (II.13)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (II.13).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- ❖ L'approche de [Ambartsumyan 1969] :

$$f(z) = \frac{1}{2} z \left(\frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \quad (II.14)$$

- ❖ L'approche de [Reissner 1945] :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \quad (II.15)$$

- ❖ L'approche de [Aydogdu 2005] :

$$f(z) = z \alpha^{-\frac{2z^2}{h^2 \ln \alpha}} \quad (II.16)$$

- ❖ L'approche de [Levinson 1980], [Murthy 1981] et [Reddy 1984] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.17)$$

Dans le modèle de [Reddy 1984], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- ❖ L'approche de [Touratier 1991] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad (II.18)$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (II.19)$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Récemment, [Afaq 2003] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-\frac{2z^2}{h^2}} \quad (II.20)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de (Touratier 1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

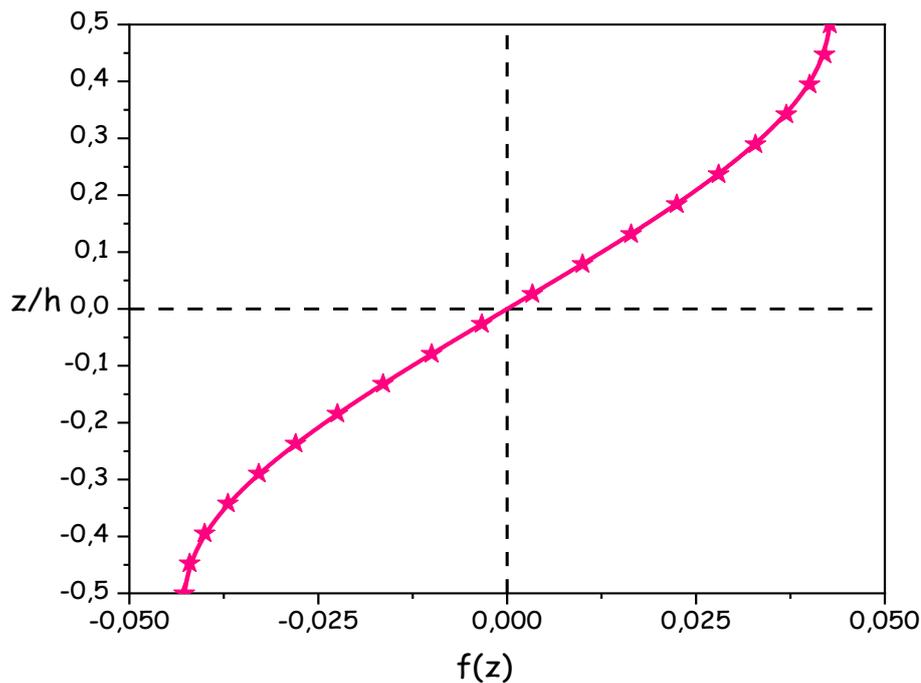
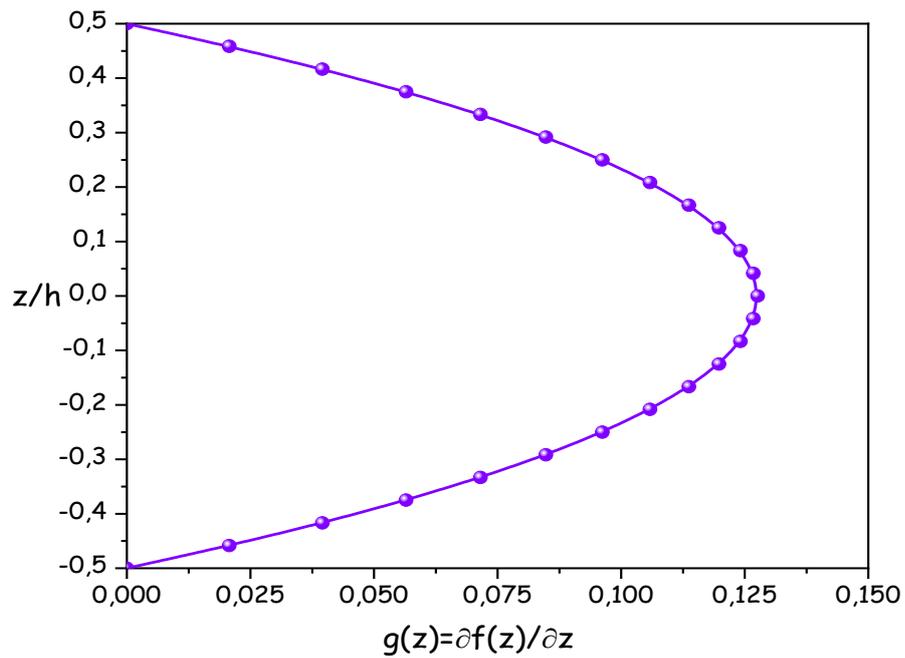


Figure II-4: Répartition à travers l'épaisseur de la fonction de contrainte de cisaillement transverse.



+

Figure II-5 : À travers l'épaisseur distribution de la dérivée de la fonction de déformation de cisaillement transverse.

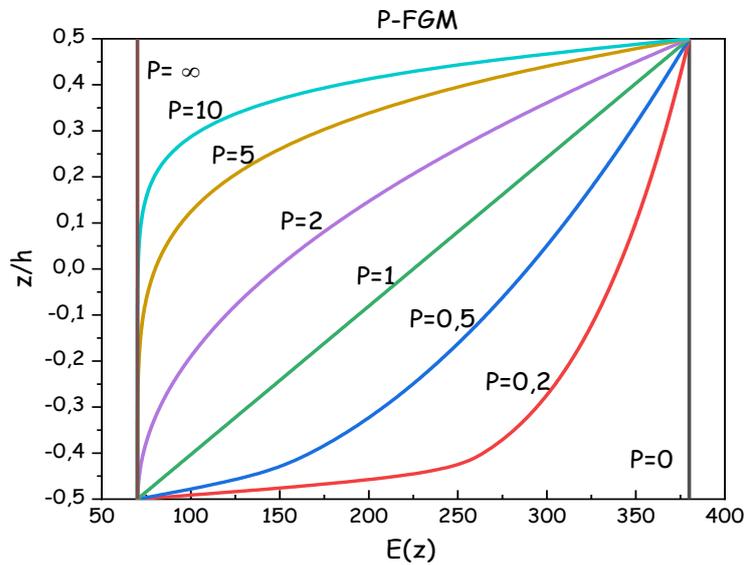


Figure : II-6 : Variation du module de Young $E(z)$ à travers l'épaisseur de la poutre FG pour différentes valeurs de l'exposant à la loi de puissance (P).

II.6. Conclusion :

Dans cette partie de mémoire ; nous avons présenté des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT.

On a présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

CHAPITRE 3

Analyse du comportement statique et dynamique des poutres FGM

III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire une modélisation analytique du comportement statique et dynamique des poutres en FGM. En utilisant les model d'ordre élevée et d'autre modelés trouvés dans littératures.

À l'aide de principe d'Hamilton et la solution de Navier on a pu arriver aux équations d'équilibre de la poutre en FGM.

III.2-Description du problème :

Considérons une poutre isotrope simplement appuyée voir la figure (III.1) de longueur a, de hauteur h et par unité de largeur. Les faces supérieure et inférieure de la poutre se situent à $z = +h/2$ et $z = -h/2$ respectivement.

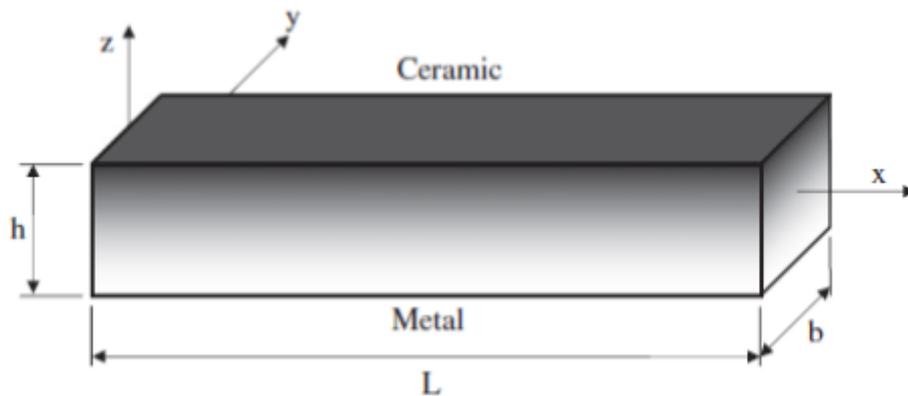


Figure III.1 : Géométrie de la poutre FGM.

Les caractéristiques du matériau peuvent changer en fonction de l'épaisseur et de la fonction donnée dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{z}{h} \right) \right]^p \\ \rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{z}{h} \right) \right]^p \\ G(z) = G_m + (G_c - G_m) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{z}{h} \right) \right]^p \end{cases} \quad (III.1)$$

Où :

E : Représente le module de Young.

G : Représente le module de cisaillement.

μ : Représente le coefficient de poisson.

ρ : La masse volumique.

Les indices **m** et **c** représentent les constituants métalliques et céramiques, respectivement, et **p** est l'exposant de la loi de puissance. La relation contrainte-déformation au point angulaire de la poutre est donnée par la loi de Hooke unidimensionnelles comme suite :

$$\sigma_{xx} = E(z)\epsilon_x = Q_{11}\epsilon_{xx} \quad \tau_{zx} = G(z)\gamma_{zx} = Q_{55}\gamma_{zx} \quad (III.2)$$

III.3-Formulation du problème :**III.3.1-Le champ de déplacement :**

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est donné par :

$$\begin{cases} U(x, z, t) = u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (III.3)$$

$$\begin{cases} V(x, z, t) = 0 \end{cases} \quad (III.4)$$

$$\begin{cases} W(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (III.5)$$

Avec u_0 , w_0 et θ représentent les composantes de déplacement de surface médiane suivant x et z respectivement, ainsi que θ représente l'effet de la déformation en cisaillement transversal sur la surface médiane de la poutre, et $f(z)$ représente la fonction de forme de distribution des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

$$f(z) = 2z\pi \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (III.6)$$

$$g(z) = f'(z) = 2\pi \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{4}{3}z^2\pi$$

Les déformations associées avec les déplacements dans les équations (III.3) ;(III.4) (III.5) sont donnée par les formules suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_1 A_1 f(z) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz} = k_1 A_1 f'(z) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (III.7)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) \quad (III.8)$$

$$\varepsilon_{22} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{13} = k_1 A_1 g(z) \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) \quad (III.9)$$

$$\sigma_{ij} = K \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) \\ k_1 A_1 g(z) \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (III.10)$$

$$K = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 \\ 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) \left(\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \right) \right) \\ Q_{55}(z) \left(k_1 A_1 g(z) \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) \right) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = Q_{11}(z) \left\{ \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) \right\}$$

$$\tau_{13} = Q_{55}(z) k_1 A_1 g(z) \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right)$$

Le principe de Hamilton est utilisé dans cette étude pour dériver les équations du mouvement, il peut être donné dans ce qui suit :

Forme analytique :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (III.11)$$

Avec :

δU : La variation de l'énergie de déformation.

δV : La variation de l'énergie potentielle.

δK : La variation de l'énergie cinétique.

t_1 : Sont les limites inférieures.

t_2 : Sont les limites supérieures de la période souhaitée.

La variation de l'énergie de déformation (δU) peut être définie comme sui

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx}) dz dy dx \quad (III.12)$$

$$= \int_0^L \left(N_{11} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{11}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + M_{11}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} Q \delta \theta \right) dx \quad (III.13)$$

Où :

N_{11} , M_{11}^b , M_{11}^s et Q sont la force axiale, le moment de flexion, le moment d'ordre le plus élevé et les résultantes de la force de cisaillement, respectivement.

$$N_{11}(x, t) = \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) \left(\int Q_{11}(z) dz \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) \left(\int Q_{11}(z) z dz \right) + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) \left(\int Q_{11}(z) f(z) dz \right) \quad (III.14)$$

$$M_{11}^b(x, t) = \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) \left(\int Q_{11}(z) z dz \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) \left(\int Q_{11}(z) z^2 dz \right) + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) \left(\int Q_{11}(z) z f(z) dz \right) \quad (III.15)$$

$$\text{Donc : } M_{11}^s(x, t) = \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) \left(\int Q_{11}(z) f(z) dz \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) \left(\int Q_{11}(z) z f(z) dz \right) + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) \left(\int Q_{11}(z) f(z)^2 dz \right) \quad (III.16)$$

$$\begin{aligned} Q_{13}(x, t) &= k_1 A_1 \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) \left(\int g(z)^2 Q_{55}(z) dz \right) \\ N_{11}(x, t) &= \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) A_{11} - \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) B_{11} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) E_{11} \\ M_{11}^b(x, t) &= \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) B_{11} - \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) D a_{11} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) H_{11} \\ M_{11}^s(x, t) &= \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right) E_{11} - \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) H_{11} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) D S_{11} \\ Q_{13}(x, t) &= k_1 A_1 \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) A S_{55} \end{aligned}$$

Avec :

$$A_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) dz$$

$$B_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) z dz$$

$$D a_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) z^2 dz$$

$$H_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) z f(z) dz$$

$$D S_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) [f(z)]^2 dz$$

$$E_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) f(z) dz$$

$$A S_{55} = b \int_{-h/2}^{h/2} g(z)^2 Q_{55}(z) dz$$

La variation de l'énergie potentielle (δV) due aux charges transversales et axiales peut s'écrire comme suite :

$$\delta V = - \int_0^L (q \delta w) dx \quad (III.17)$$

La variation de l'énergie cinétique (δK) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\delta K = \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dz dx \quad (III.18)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} \right) A_{11} + \left(\frac{\partial^3 w_0(x, t)}{\partial x^3} \right) B_{11} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial x^3} \right) E_{11} + I_0 \left(\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} \right) \\ & - I_1 \left(\frac{\partial^3 w_0(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right) + I_3 k_1 A_1 \left(\frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x^3} \right) B_{11} + \left(\frac{\partial^4 w_0(x, t)}{\partial x^4} \right) D a_{11} - k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4 \theta(x, t)}{\partial x^4} \right) H_{11} + I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right) \\
 & \quad - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + I_4 k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4 \theta(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + I_0 \left(\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \\
 k_1 A_1 & \left(\left(\frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x^3} \right) E_{11} - \left(\frac{\partial^4 w_0(x, t)}{\partial x^4} \right) H_{11} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4 \theta(x, t)}{\partial x^4} \right) D s_{11} \right) - k_1^2 A_1^2 \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) A s_{55} \\
 & \quad - I_3 k_1 A_1 \left(\frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right) + I_4 k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4 w_0(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - I_5 k_1^2 A_1^2 \left(\frac{\partial^4 \theta(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Où : $\rho(z)$ est la masse volumique et $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ c'est -à- dire si sont les coefficients d'inertie.

$$I_0 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz$$

$$I_1 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz$$

$$I_2 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) dz$$

$$I_3 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz$$

$$I_4 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) z dz$$

$$I_5 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z)^2 dz$$

En substituant les équations(12),(17) et (18) aux équations(11) , en effectuant les intégrations de δu_0 , δw_0 , et $\delta \theta$ sur zéro, les équations de mouvement suivantes sont obtenues.

$$\begin{cases}
 \delta_{u_0} : \frac{dN_x}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\dot{w}_0}{dx} + I_2 \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \\
 \delta_{w_0} : \frac{d^2 M^b}{dx^2} = -q + N_0 \left(\frac{d^2 \ddot{u}_0}{dx^2} \right) + I_1 \left(\frac{d\ddot{u}_0}{dx} \right) - I_2 \left(\frac{d^2 \ddot{w}_0}{dx^2} \right) + I_0 w_0'' + I_4 \frac{d\ddot{\theta}}{dx} \\
 \delta_Q : k_1 A' \frac{dM_s}{dx} - \frac{dQ_{xz}}{dx} - N_z = K_1^2 I_2 \ddot{u}_0 + k_1 I_4 \frac{d\dot{w}_0}{dx} - k_2 \ddot{\theta}
 \end{cases} \quad (III. 19)$$

III.3.2 Solution analytique de Navier :

Considérez une poutre FGM simplement appuyée prisent charge avec une longueur -L- et une section transversale rectangulaire ($b \times h$). Pour des conditions aux limites simplement prises en charge, selon, la solution de Navier, les variables de déplacement inconnues. Sont développées dans une série de Fourier comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases} u_0(x, t) = U_{mn} \cos(\alpha x) e^{-i\omega t} \\ w_0(x, t) = W_{mn} \sin(\alpha x) e^{-i\omega t} \\ \theta(x, t) = \theta_{mn} \sin(\alpha x) e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $a = m\pi/L$, et (u_m, w_m, ϕ_m) sont les coefficients inconnus et ω est la fréquence naturelle. La charge transversale uniforme (q) agissant sur la surface supérieure de la poutre a également été étendue dans la série de Fourier en tant que :

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4q_0}{m\pi} \sin \alpha x \quad (III.20)$$

$$q1 = U_{mn} \alpha^2 A_{11} - W_{mn} \alpha^3 B_{11} + k_1 A_1 \theta_{mn} \alpha^3 E_{11} - I_0 U_{mn} \omega^2 + I_1 W_{mn} \alpha \omega^2 - I_3 k_1 A_1 \theta_{mn} \alpha \omega^2 = 0$$

$$q2 = -U_{mn} \alpha^3 B_{11} + W_{mn} \alpha^4 D a_{11} - k_1 A_1 \theta_{mn} \alpha^4 H_{11} + I_1 U_{mn} \alpha \omega^2 - I_2 W_{mn} \alpha^2 \omega^2 + I_4 k_1 A_1 \theta_{mn} \alpha^2 \omega^2 - I_0 W_{mn} \omega^2 = 0$$

$$q3 = k_1 A_1 (U_{mn} \alpha^3 E_{11} - W_{mn} \alpha^4 H_{11} + k_1 A_1 \theta_{mn} \alpha^4 D S_{11}) + k_1^2 A_1^2 \theta_{mn} \alpha^2 A S_{55} - I_3 k_1 A_1 U_{mn} \alpha \omega^2 + I_4 k_1 A_1 W_{mn} \alpha^2 \omega^2 - I_5 k_1^2 A_1^2 \theta_{mn} \alpha^2 \omega^2 = 0$$

$$q1 = (-I_0 \omega^2 + \alpha^2 A_{11}) U_{mn} + (I_1 \alpha \omega^2 - \alpha^3 B_{11}) W_{mn} + (k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} - I_3 k_1 A_1 \alpha \omega^2) \theta_{mn} = 0$$

$$q2 = (I_1 \alpha \omega^2 - \alpha^3 B_{11}) U_{mn} + (-I_2 \alpha^2 \omega^2 + \alpha^4 D a_{11} - I_0 \omega^2) W_{mn} + (-k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} + I_4 k_1 A_1 \alpha^2 \omega^2) \theta_{mn} = 0$$

$$q3 = (k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} - I_3 k_1 A_1 \alpha \omega^2) U_{mn} + (-k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} + I_4 k_1 A_1 \alpha^2 \omega^2) W_{mn} + (k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D S_{11} - I_5 k_1^2 A_1^2 \alpha^2 \omega^2 + k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A S_{55}) \theta_{mn} = 0$$

Ceci conduit à un système de résolution des problèmes :

a. En dynamique :

$$\{[K] - \omega^2[M]\}\{\Delta\} = \{0\} \quad (III.21)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha^2 A_{11} \\ k_{12} &= -\alpha^3 B_{11} \\ k_{13} &= k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21} &= -\alpha^3 B_{11} \\ k_{22} &= \alpha^4 D a_{11} \\ k_{23} &= -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{31} &= k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} \\ k_{32} &= -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} \\ k_{33} &= k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D S_{11} + k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A S_{55} \end{aligned}$$

$[K]$: Est la matrice de rigidité exprimée par :

$$K = \begin{bmatrix} \alpha^2 A_{11} & -\alpha^3 B_{11} & k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} \\ -\alpha^3 B_{11} & \alpha^4 D a_{11} & -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} \\ k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} & -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} & k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D S_{11} + k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A S_{55} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_0 \\ M_{12} &= -I_1\alpha \\ M_{13} &= I_3k_1A_1\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= -I_1\alpha \\ M_{22} &= I_2\alpha^2 + I_0 \\ M_{23} &= -I_4k_1A_1\alpha^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{31} &= I_3k_1A_1\alpha \\ M_{32} &= -I_4k_1A_1\alpha^2 \\ M_{33} &= I_5k_1^2A_1^2\alpha^2 \end{aligned}$$

[M]: C'est la matrice des masses d'inerties donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} I_0 & -I_1\alpha & I_3k_1A_1\alpha \\ -I_1\alpha & I_2\alpha^2 + I_0 & -I_4k_1A_1\alpha^2 \\ I_3k_1A_1\alpha & -I_4k_1A_1\alpha^2 & I_5k_1^2A_1^2\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 A_{11} & -\alpha^3 B_{11} & k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} \\ -\alpha^3 B_{11} & \alpha^4 D a_{11} & -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} \\ k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} & -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} & k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D s_{11} + k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & -I_1\alpha & I_3k_1A_1\alpha \\ -I_1\alpha & I_2\alpha^2 + I_0 & -I_4k_1A_1\alpha^2 \\ I_3k_1A_1\alpha & -I_4k_1A_1\alpha^2 & I_5k_1^2A_1^2\alpha^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III. 22)$$

b. En statique :

a. Flambement :

$$\left\{ \left[\begin{bmatrix} -\alpha^2 A_{11} & \alpha^3 B_{11} & -k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} \\ \alpha^3 B_{11} & -\alpha^4 D a_{11} - N_x^0 \alpha^2 & k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} \\ -k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} & k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} & -k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D s_{11} - k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A s_{55} \end{bmatrix} - N_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \times \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \phi_m \end{Bmatrix} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III. 23)$$

b. Flexion :

$$\left[\begin{bmatrix} -\alpha^2 A_{11} & \alpha^3 B_{11} & -k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} \\ \alpha^3 B_{11} & -\alpha^4 D a_{11} & k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} \\ -k_1 A_1 \alpha^3 E_{11} & k_1 A_1 \alpha^4 H_{11} & -k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D s_{11} - k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A s_{55} \end{bmatrix} \right] \times \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{4q_0}{m\pi} \quad (III. 24)$$

III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, L'analyse de la vibration libre, flexion et flambement des poutres simplement appuyées en matériau fonctionnellement graduées (FGM) sont examinées par une nouvelle théorie de cisaillement raffinée des poutres. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young est supposé varie dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM en fonction d'une simple loi de puissance. Les équations de mouvement ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème aux valeurs propres. Une validation des résultats de cette nouvelle théorie des poutres raffinées ainsi qu'une étude paramétrique seront fait ultérieurement.

CHAPITRE 4

Résultats et discussions

IV.1. Introduction :

Dans cette étude les solutions analytiques obtenues dans le chapitre précédent pour le comportement statique et dynamique ont été obtenues par la solution de Navier. Les résultats numériques obtenus par les nouveaux champs de déplacements sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature pour voir l'influence de la variation matérielle sur le comportement statique et dynamique des poutres FGM.

IV.2. Résultats numériques et discussion :

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la théorie présentée dans le but de prédire les réponses de flexion, de flambement et de vibration d'une poutre FG simplement supportée.

Les propriétés des matériaux changent à travers l'épaisseur de la poutre selon une loi de puissance. La surface inférieure du faisceau est riche en aluminium et la surface supérieure du faisceau est riche en alumine. Pour plus de commodité, la forme sans dimension suivante est utilisée :

Pour la céramique : ($E_c = 380GPa$, $\rho_c = 3960Kg/m^3$, $\nu = 0.3$)

Et d'Al pour le métal : ($E_m = 70GPa$, $\rho_m = 2702Kg/m^3$, $\nu = 0.3$)

- **Flexions de la poutre FGM :**

La réponse de flexion de la poutre de FGM sous une charge transversale uniforme a été étudiée. Les déplacements et les contraintes sont présentés sous la forme non dimensionnelle suivante :

Déplacement axial (u) :

$$\bar{u} = \frac{u \cdot 100 \cdot E_m \cdot h^3}{q_0 \cdot L^4}$$

Déplacement transversal (w) :

$$\bar{w} = \frac{w \cdot 100 \cdot E_m \cdot h^3}{q_0 \cdot L^4}$$

Contrainte axiale (σ_x) :

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x \cdot h}{q_0 \cdot L}$$

Contrainte de cisaillement transverse (σ_{xz}) :

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz} \cdot h}{q_0 \cdot L}$$

- **Flambement de la poutre FGM :** La charge critique non dimensionnelle est donnée par :

$$\bar{N}_{cr} = \frac{12 N_0 a^2}{E_m h^3}$$

- **Vibration de la poutre FGM :** La fréquence non dimensionnelle est donnée par :

$$\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{(\rho_m/E_m)}$$

Tableau IV-2 présente une comparaison des déplacements et des contraintes sans dimension de poutres en matériaux gradués fonctionnellement Al/Al₂O₃, simplement supportées et soumises à des charges uniformément réparties avec différentes valeurs d'exposant de la loi de puissance p et pour des rapports $L/h = 5$ et 20 . On voit à travers les résultats obtenus que les déplacements et les contraintes augmentent lorsque l'indice de loi de puissance augmente et prend une valeur maximale lorsque p prend la valeur de un et une valeur minimale dans le cas où p prend la valeur de zéro, cette interprétation est due à la ductilité de la poutre puisque plus l'indice de matière augmente, plus la poutre devient ductile. Les résultats obtenus sont comparés à d'autres résultats de la littérature tels que HSDT de [Reddy1984], HSDT de [Hadji et al2016], et HSDT de [A.S. Sayyad et Y.M. Ghugal2018]. On peut également noter que la théorie de déformation en cisaillement bidimensionnelle (2D) est en bon accord avec les autres théories de déformation en cisaillement,

La figure IV 1 montre la variation du déplacement transversal sur la longueur de la poutre constituée de matériaux à grade fonctionnel Al/Al₂O₃, soumise à une charge uniformément répartie. On constate que le déplacement transversal augmente avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance p et atteint une valeur maximale. La courbe tracée prend une forme parabolique.

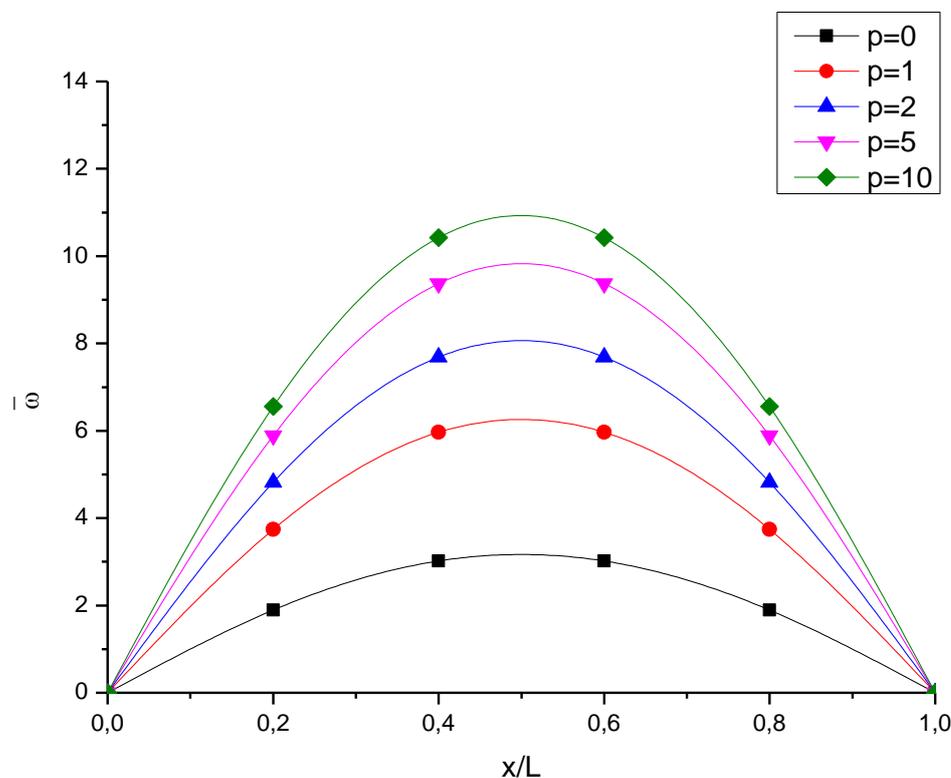


Figure IV.1 : Variation du déplacement transversal sans dimension (w) le long de la longueur de la poutre soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h=5$).

La figure IV 2 montre la variation du déplacement axial sur la longueur de la poutre dans des matériaux à grades fonctionnels Al/Al₂O₃, soumise à une charge uniformément répartie, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p . On voit que le déplacement axial est maximal lorsque l'indice de la loi de puissance prend la valeur de un et il est minimal dans le cas où l'indice de la loi de puissance prend la valeur de zéro.

La figure IV 3 montre la variation du déplacement axial d'une poutre en matériaux à grades fonctionnels Al/Al₂O₃, soumise à une charge uniformément répartie, pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p qui prend les valeurs 0, 1, 2, 5 et 10 avec un rapport de (L/h = 5). On voit à travers ces courbes que le déplacement axial est influencé par l'indice de la loi de puissance p puisque le déplacement sans dimension augmente lorsque l'indice de la loi de puissance augmente et précisément dans les deux parties supérieure et inférieure de la poutre.

En savoir plus sur ce texte source

Tableau IV-2. Comparaison des déplacements adimensionnels et des contraintes des poutres FG soumises à des charges uniformes avec différentes valeurs d'exposant de la loi de puissance.

P	Théorie	L/h=5				L/h=20			
		\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{zx}$	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{zx}$
0	Présente	0.9397	3.1653	3.8019	0.7332	0.2305	2.8962	15.0129	0.7456
	Hadji et al. [25]	0.9400	3.1654	3.8019	0.7330	0.2305	2.8962	15.0129	0.7437
	A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	0.9274	3.1224	3.7529	0.7259	0.2275	2.8585	14.8179	0.7259
	Reddy [11]	0.9397	3.1654	3.8019	0.7330	0.2306	2.8962	15.0129	0.7437
1	Présente	2.3038	6.2594	5.8836	0.7333	0.5685	5.8049	23.2053	0.7456
	Hadji et al. [25]	2.3038	6.2594	5.8835	0.7330	0.5685	5.8049	23.2051	0.7437
	A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	2.2735	6.2586	5.8077	0.7187	0.5611	5.7292	22.9038	0.7259
	Reddy [11]	2.3036	6.2594	5.8836	0.7330	0.5686	5.5685	23.2051	0.7432
2	Présente	3.1129	8.0676	6.8826	0.6706	0.7691	7.4420	27.0991	0.6829
	Hadji et al. [25]	3.1129	8.0677	6.8824	0.6704	0.7366	7.2558	27.0989	0.6812
	A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	3.0720	7.9627	6.7938	0.6573	0.7591	7.3450	26.7470	0.6648
	Reddy [11]	3.1127	8.0677	6.8824	0.6704	0.7691	7.4421	27.0989	0.6812
5	Présente	3.7100	9.8280	8.1106	0.5905	0.9133	8.8181	31.8130	0.6026
	Hadji et al. [25]	3.7100	9.8281	8.1104	0.5904	0.9134	8.8182	32.8127	0.6013
	A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	3.6612	9.6986	8.0059	0.5786	0.9014	8.7031	31.3997	0.5863
	Reddy [11]	3.7097	9.8281	8.1104	0.5904	0.9134	8.8182	31.8127	0.6013
10	Présente	3.8863	10.9381	9.7122	0.6467	0.9536	9.6905	38.1386	0.6600
	Hadji et al. [25]	3.8863	10.8680	9.9878	0.7064	0.9262	9.5513	38.1382	0.6586

A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	3.8351	10.7949	9.5870	0.6412	0.9412	9.5641	37.6432	0.6426
Reddy [11]	3.8859	10.9381	9.7119	0.6465	0.9536	9.6905	38.1382	0.6586

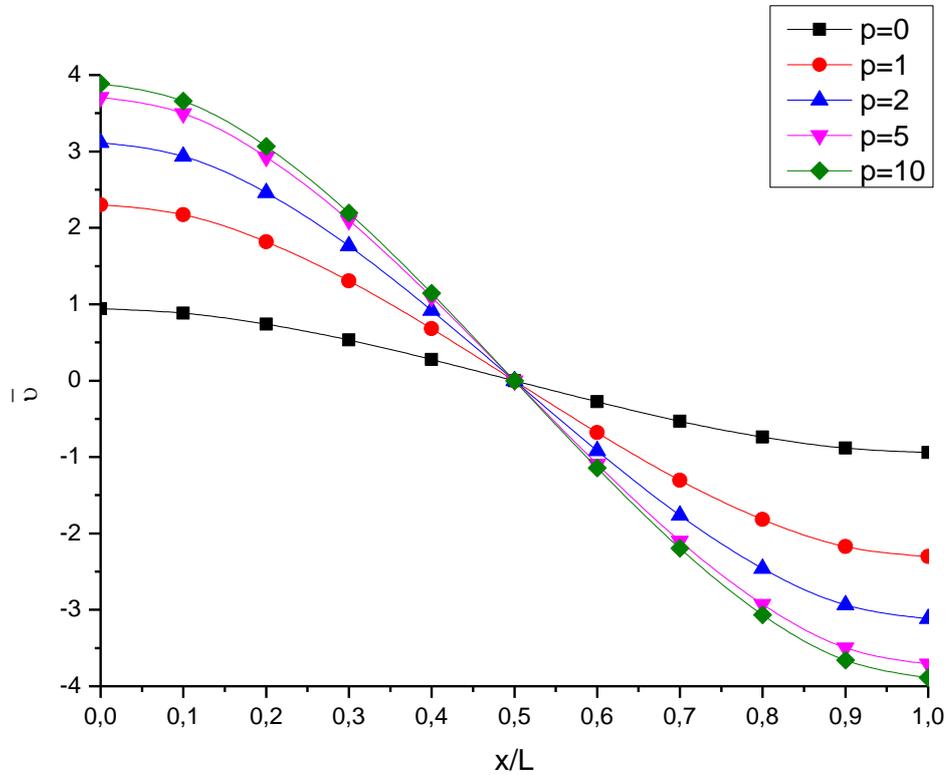


Figure IV.2: Variation du déplacement axial sans dimension (u) le long de la longueur de la poutre soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h=5$).

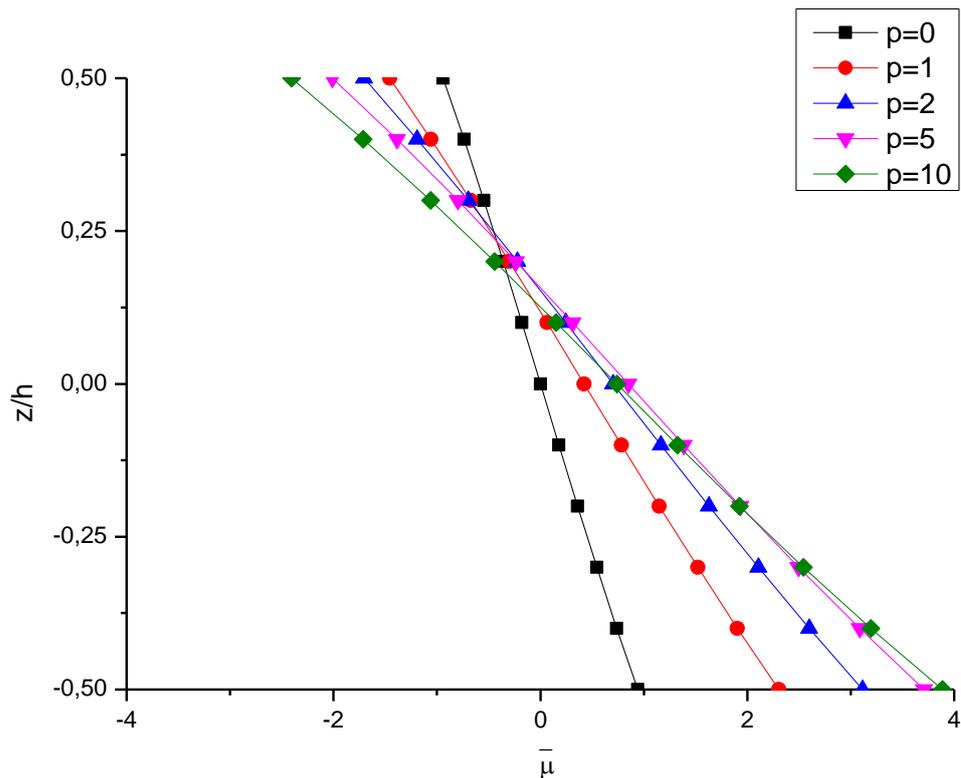


Figure IV.3: Variation du déplacement axial sans dimension (u) dans l'épaisseur d'une poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 5$).

La Fig. IV 4 illustre la variation de la contrainte axiale d'une poutre en matériaux à grades fonctionnels Al/Al₂O₃, soumise à une charge uniformément répartie, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p qui prend les valeurs 0, 1, 2, 5 et 10 avec un rapport de ($L/h = 5$). On peut en déduire que la partie supérieure est tractée et la partie inférieure est comprimée et entre ces deux parties la courbe prend une forme parabolique.

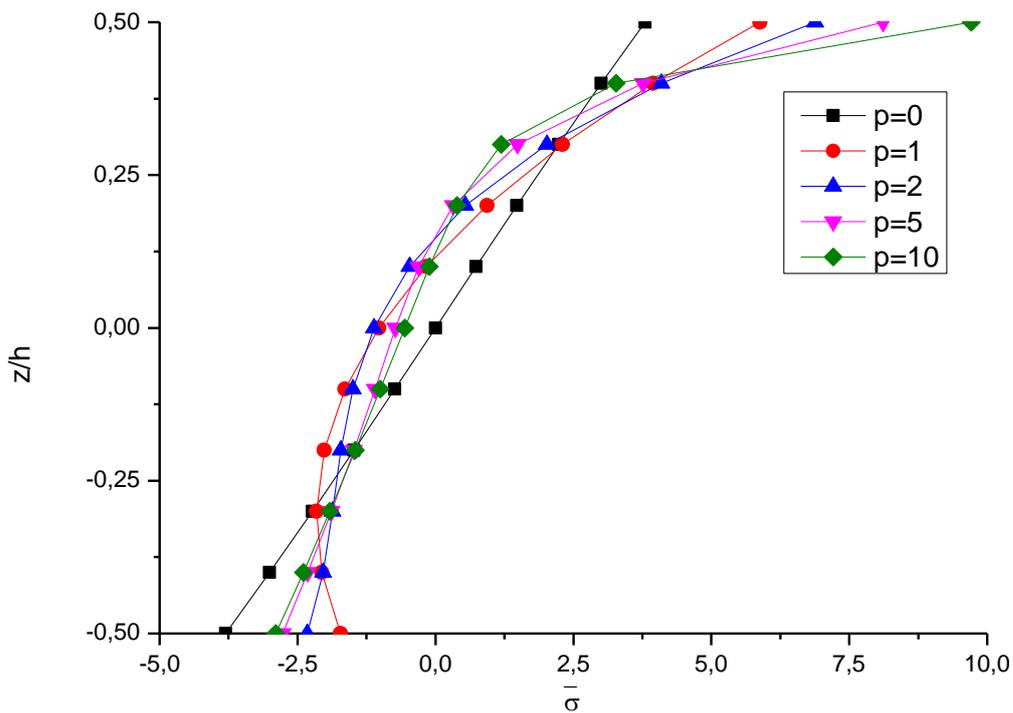


Figure IV.4: Variation de la contrainte axiale sans dimension à travers l'épaisseur de la poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 5$).

La Fig. IV 5 montre la variation de la contrainte de cisaillement transverse d'une poutre en matériaux à grades fonctionnels Al/Al₂O₃, soumise à une charge uniformément répartie pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance p qui prend les valeurs de 0, 1, 2, 5 et 10 avec un rapport de ($L/h = 5$). On observe que le tracé de la contrainte de cisaillement transverse ne prend pas une forme parabolique comme dans le cas de poutres homogènes en métal et en céramique, on peut également noter que l'axe neutre est excentré vers la partie supérieure.

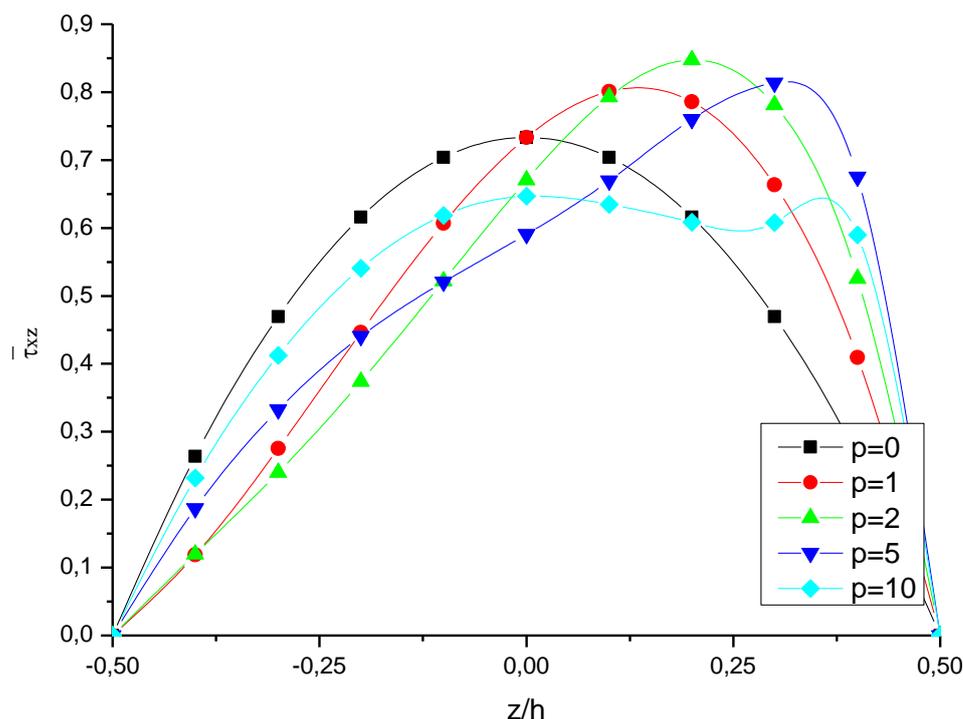


Figure IV.5: Variation de la contrainte de cisaillement transverse sans dimension à travers l'épaisseur de la poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie avec un rapport ($L/h = 5$).

IV.3. Flambage d'une poutre FGM :

Dans cette partie nous avons étudié la comparaison des charges critiques de flambement sans dimension (N_{cr}) pour des poutres de type Al/Al₂O₃ fonctionnellement graduées, simplement appuyées et soumises à des efforts axiaux (N_0) par rapport à différentes valeurs de l'exposant de la loi de puissance p pour les rapports $L/h= 5$ et 10. On observe que la charge critique de flambement sans dimension diminue avec la croissance de l'indice de la loi de puissance p et il augmente avec l'augmentation du rapport (L/h). Les résultats de la charge critique de flambement obtenus dans le Tableau 3, sont comparés à d'autres résultats de la littérature tels que HSDT de [Reddy1984], FSDT de [Touratier1991], HSDT d'[A.S. Sayyad et Y.M. Ghugal2018], FSDT de [Li et Batra2013], et HSDT de [Vo et al2014b]. On peut également noter que la théorie de la déformation en cisaillement est en bon accord avec les autres théories de la déformation en cisaillement,

L/h	Théorie	P				
		0	1	2	5	10
5	Présente	48.595	24.583	19.070	15.643	14.051
	A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	48.596	24.584	19.071	15.645	14.052
	Reddy [11]	48.596	24.584	19.071	15.643	14.051
	Touratier [12]	48.835	24.687	19.245	16.024	14.427
	Li and Batra [38]	48.835	24.687	19.245	16.024	14.427
	Vo et al. [30]	48.840	24.691	19.160	16.740	14.146
10	Présente	52.237	26.140	20.366	17.081	15.499
	A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	52.238	26.141	20.366	17.082	15.500

	Reddy [11]	52.238	26.141	20.366	17.082	15.499
	Touratier [12]	52.309	26.171	20.416	17.192	15.612
	Li and Batra [38]	52.309	26.171	20.416	17.194	15.612
	Vo et al. [30]	52.308	26.172	20.393	17.111	15.529

Tableau IV-3 : Comparaison des charges critiques de flambement sans dimension (Ncr) des poutres FGM soumises à des efforts axiaux en fonction de diverses valeurs d'exposant de la loi de puissance.

IV.4. Les vibrations libres des poutres FGM :

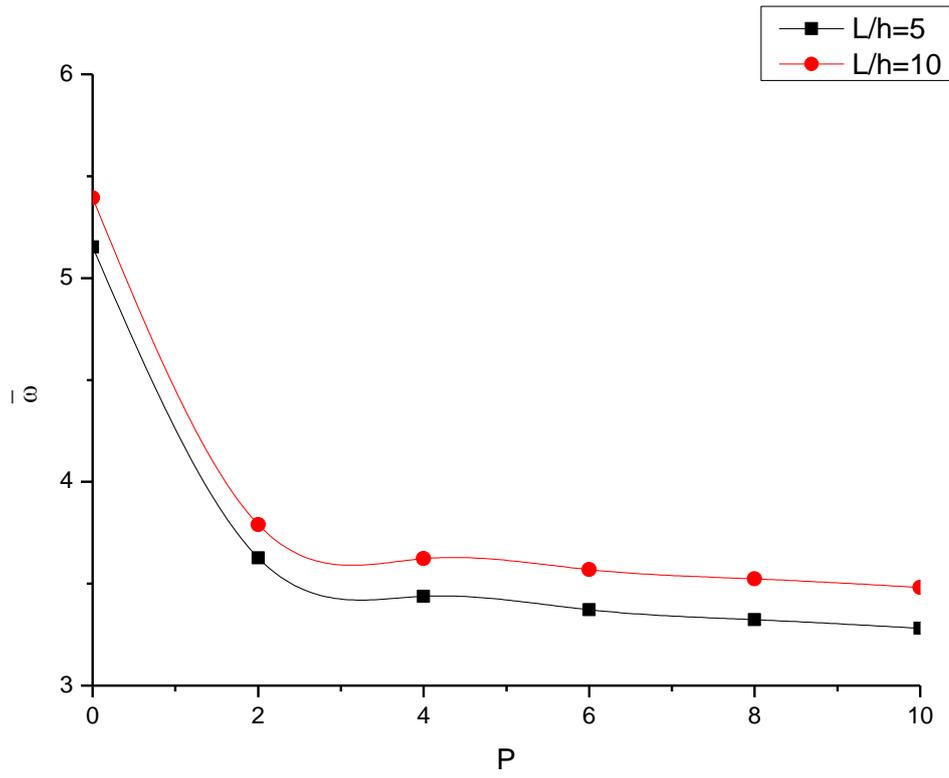
Dans cette troisième partie de notre travail, nous avons étudié les trois premières fréquences fondamentales sans dimension de faisceaux de matériaux à grades fonctionnels de type Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs d'exposant de la loi de puissance p et du rapport (L/h).

L/h	Mode	Théorie	P					
			0	1	2	5	10	
5	1	Present	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	5.1527	3.9904	3.6264	3.4014	3.2816	
		Reddy [11]	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		Touratier [12]	5.1531	3.9906	3.6263	3.3977	3.2811	
		Simsek [15]	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		Thai and Vo [20]	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		Vo et al. [29]	5.1526	3.9711	3.6050	3.4012	3.2962	
		Vo et al. [30]	5.1527	3.9716	3.5979	3.3742	3.2643	
		Timoshenko [10]	5.1524	3.9902	3.6343	3.4311	3.3134	
		Bernouli-Euler [9]	5.3953	4.1484	3.7793	3.5949	3.4921	
	2	Present	17.881	14.009	12.640	11.543	11.024	
		A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	17.881	14.010	12.640	11.544	11.024	
		Reddy [11]	17.881	14.009	12.640	11.543	11.025	
		Touratier [12]	17.887	14.014	12.641	11.532	11.021	
		Thai and Vo [20]	17.881	14.009	12.640	11.544	11.024	
		Bernouli-Euler [9]	20.618	15.798	14.326	13.587	13.237	
	3	Present	34.209	27.097	24.315	21.715	20.556	
		A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	34.202	27.098	24.316	21.720	20.556	
		Reddy [11]	34.209	27.098	24.315	21.716	20.556	
		Touratier [12]	34.234	27.115	24.324	21.694	20.558	
		Thai and Vo [20]	34.208	27.097	24.315	21.718	20.556	
		Bernouli-Euler [9]	43.348	33.027	29.745	28.085	27.475	
	20	1	Present	5.4603	4.2050	3.8361	3.6484	3.5389
			A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	5.4603	4.2050	3.8361	3.6485	3.5390

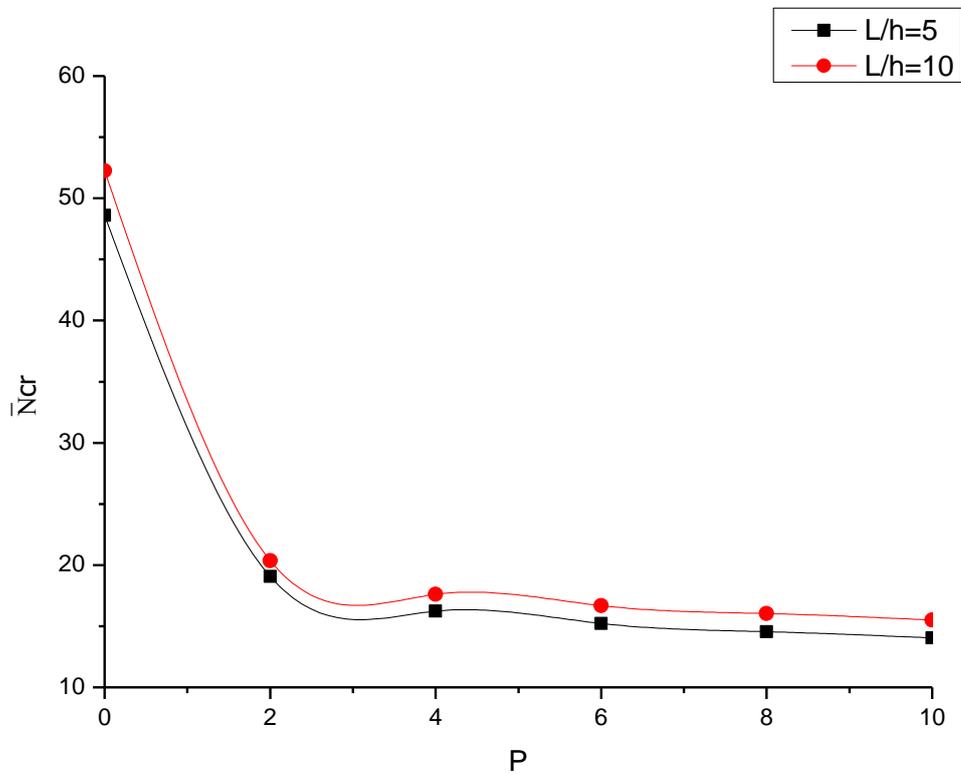
		Reddy [11]	5.4603	4.2050	3.8361	3.6485	3.5389
		Touratier [12]	5.4603	4.2051	3.8361	3.6484	3.5390
		Simsek [15]	5.4603	4.2050	3.8361	3.6485	3.5390
		Thai and Vo [20]	5.4603	4.2050	3.8361	3.6484	3.5389
		Vo et al. [29]	5.4603	4.2038	3.8349	3.6490	3.5405
		Vo et al. [30]	5.4603	4.2038	3.8342	3.6466	3.5378
		Timoshenko [10]	5.4603	4.2050	3.8367	3.6508	3.5415
		Bernouli-Euler [9]	5.4777	4.2163	3.8372	3.6628	3.5547
	2	Present	21.573	16.634	15.161	14.374	13.926
		A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	21.573	16.634	15.162	14.374	13.926
		Reddy [11]	21.573	16.634	15.161	14.374	13.926
		Touratier [12]	21.574	16.635	15.162	14.373	13.925
		Thai and Vo [20]	21.573	16.634	15.161	14.374	13.926
		Bernouli-Euler [9]	21.843	16.810	15.333	14.595	14.167
	3	Present	47.592	36.767	33.468	31.578	30.536
		A.S/ Sayyad and Y.M.Ghugal [58]	47.593	36.768	33.469	31.579	30.095
		Reddy [11]	47.593	36.768	33.469	31.578	30.537
		Touratier [12]	47.595	36.769	33.468	31.570	30.534
		Thai and Vo [20]	47.593	36.767	33.469	31.5789	30.537
		Bernouli-Euler [9]	48.899	37.617	34.295	32.6357	31.688

Tableau IV-4 : Comparaison des premières fréquences fondamentales sans dimension des faisceaux FGM par rapport à diverses valeurs d'exposant de loi de puissance.

Observez que les fréquences fondamentales non dimensionnelles pour les trois premiers modes diminuent avec la croissance de l'indice de loi de puissance et elles augmentent avec l'augmentation du rapport (L/h), c'est à cause d'une augmentation de l'indice de loi de puissance p rend le faisceau plus flexible. Les résultats des fréquences fondamentales obtenus dans le Tableau. 4 sont comparés à d'autres résultats tels que HSDT de [Reddy1984], HSDT de [A.S. Sayyad et Y.M. Ghugal2018], FSDT de [Touratier1991], HSDT de [Simsek2010], HSDT de [Thai et Vo2012], FSDT de [Vo et al2014a], HSDT de [Vo et al2014b], FSDT de [Timoshenko1921], et CBT de [Bernoulli-Euler1744]. On peut également noter que la théorie de la déformation en cisaillement est en bon accord avec celle de la littérature, La figure 9 illustre la variation de la charge critique de flambement et de la fréquence naturelle fondamentale sans dimension par rapport à l'indice de la loi de puissance p pour différentes valeurs du rapport (L/h) en utilisant la théorie de déformation cisaillement. On voit à travers ces tracés que la charge critique et la fréquence diminuent avec la croissance de l'indice de la loi de puissance p , elle est maximale lorsque la loi de puissance p prend la valeur de zéro dans ce cas, le faisceau est entièrement céramique et est minimale dans le cas où l'indice de la loi de puissance p prend la valeur de un, dans ce cas, la poutre est entièrement métallique, ceci est dû à l'augmentation de la valeur de l'indice de la loi de puissance qui provoque une diminution de la valeur du module d'élasticité. On peut également voir que le rapport (L/h) a un effet considérable sur la charge critique de flambement et la fréquence fondamentale sans dimension fondamentale lorsqu'elle est réduite, la valeur du rapport (L/h) diminue. Cette dépendance est liée à l'effet de la déformation de cisaillement.



(A)



(B)

Figure IV.6: Variation des charges critiques de flambement sans dimension (B) et des fréquences naturelles (A) par rapport aux exposants de la loi de puissance des exposants des poutres FGM simplement supportées.

IV.5. Conclusion :

Dans ce chapitre une approche analytique a été développée pour l'étude de la stabilité vis-à-vis de la vibration libre, flexion et flambement des poutres FGM.

Pour valider cette approche analytique une comparaison numérique était présentée dans ce chapitre pour une poutre FGM simplement appuyée.

Les théories des poutres proposées satisfont les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre et ne nécessitent pas d'utiliser un facteur de correction de cisaillement.

Le principe d'Hamilton est utilisé pour obtenir les équations différentielles qui régissent la variation et les conditions aux limites de la théorie présentée et d'une solution analytique pour les conditions aux limites ont été obtenues à l'aide de technique de solution de Navier. Les déplacements adimensionnels, les contraintes, fréquences naturelles et charges critiques de flambement des poutres FGM ont été obtenus pour différentes valeurs de l'exposant de la loi de puissance. Les résultats numériques ont ensuite été comparés aux résultats publiés précédemment et ont été en excellent accord avec ceux-ci.

Conclusion Générale :

Les structures en FGM représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur géométrie pour obtenir des propriétés optimales. Dans ce travail, nous avons présenté une recherche théorique sur la vibration libre, flexion et flambement des poutres fonctionnellement graduées « FGM » à base d'Al/AL₂O₃, en utilisant les modèles d'Euler Bernoulli et de Timoshenko. Les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de cette poutre selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Plusieurs paramètres physiques et géométriques sont traités pour analyser le comportement dynamique et la stabilité des poutres.

Une solution analytique de Navier a été développée pour la poutre considérée uniformément chargée, en utilisant une fonction d'ordre élevé (HSDBT). A la fin de cette modélisation on est arrivé à un système d'équation contient les trois fonctions inconnues de déplacement et qui est simple à résoudre.

Les résultats des déflexions, flambements et des fréquences fondamentales dans la poutre sont obtenues par la présente théorie (HSDBT) et de les comparer avec ceux données par différentes théories (CBT, FSDBT), en plus de la théorie exacte d'élasticité.

L'augmentation des valeurs des exposants aux lois de puissance réduisait la rigidité des poutres FGM et entraînait par conséquent une augmentation des déplacements et une réduction des fréquences et des charges de flambement.

A partir de cette analyse réalisée, il est important de tirer les conclusions suivantes :

- La variation des paramètres de rigidité influe directement sur le comportement de la poutre d'une façon lorsque ces rigidités augmentent les déflexions diminuent et par conséquent les fréquences augmentent.
- Étude de vibration des poutres est basée sur la théorie d'élasticité.
- Le changement des fréquences propres dépend de la combinaison des fractions volumiques des matériaux céramique-métal.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre université dans le domaine de recherches des matériaux composites.

Références bibliographiques :

- Niino, M.**, Hirai, T., Watanabe, R. (1987). The functionally gradient materials, J.Jpn. Soc. Compos. Mater. 13, 257– 264.
- Hashmi, S.**, Gilmar, F.B., Van Tyne, C.J., Yilbas, B.S. (2014). Comprehensive materials processing livre électronique, Oxford, Walltham, MA. Elsevier.
- Koizumi M. (1993).** The concept of FGM. Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials. 34(1):3–10.
- Koizumi, M., Niino, M. (1995).** Overview of FGM research in Japan. MRS Bull. 20, 19–24.
- Koizumi M. 1997.** FGM activities in Japan. Composites Part B. 28, pp. 1–4.
- Karama, M.**, Afaq, K.S., Mistou, S. (2003). Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multilayered laminated Composite Structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Struct. 40(6), 1525–1546. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00647-9.
- Ayadoglu. M and Tashkin V.** (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Materials and design. 28, 1681-1656. DOI: 10.1016/j.matdes.2006.02.007.
- Bachir 2015,**«Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques», Thèse de Doctorat de l'université Mohamed Boudiaf d'Oran, 2015.
- Koizumi 1992** Koizumi M. «The concept of FGM ceramic transaction» functionally graded materials (1992)34, 3-10.
- Abdizadeh 1997** Abdizadeh. H, « Composites laminaires tri-couches a base d'Alumine », Thèse Docteur de l'Université Claude Bernard Lyon i-France, p 212. 1997.
- Hirai, T. (1996),** « Functional gradient materials", Processing of ceramics Part 2, Weinheim, Germany : VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers ;293–341.
- Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995),** « Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", Composites Engineering, (1995),879–889.
- Kawasaki. A and Watanabe. R (1997),** "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", Composites Part B, Engineering,29–35.
- Amale MAHI** "ANALYSE ET ETUDE DES PLAQUES COMPOSITES FGM EN VIBRATIONS LIBRES". thèse de doctorat, Blida, 05 Avril 2012.
- Ramachandran, T.** Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. 2015. Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication, Engineering and Technology, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.
- EL-Wazery, M. S. 2013.** "Electrical And Mechanical Performance Of Zirconia-Nickel Functionally Graded Materials". International Journal Of Engineering 26 (4 (A). Doi : 10.5829/idosi.ije.2013.26.04a.06.
- Saiyathibrahim, A.,** Mohamed, N. S. S., and Dhanapal, P. (2015). Processing techniques of functionally graded materials—a review. In International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology (pp. 98-105).
- Katayama, T.,** Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H., and Nakashima, K. (2011). Fabrication of Al₂O₃W functionally graded materials by slipcasting method. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 18, No. 20, p. 202023). IOP Publishing.
- Dumont, Anne-Laure,** Jean-Pierre Bonnet, Thierry Chartier, and José M.F. Ferreira. 2001. "Mosi₂/Al₂O₃ FGM : Elaboration By Tape Casting And SHS". Journal Of The European Ceramic Society 21 (13) : 2353-2360. doi :10.1016/s0955-2219(01)00198-4.
- Jamaludin, S. N. S.,** Mustapha, F., Nuruzzaman, D. M., Basri, S. N. (2013). "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". Scientific Research and Essays, 8(21), 828-840.

Watari, Fumio, H. Kondo, Shingo Matsuo, Rika Miyao, Atsuro Yokoyama, Mamoru Omori, and Toshio Hirai et al. 2003. "Development Of Functionally Graded Implant And Dental Post For BioMedical Application". *Materials Science Forum* 423-425 : 321-326. doi: 10.4028/www.scientific.net/msf.423-425.321.

Wu, A.H., W.B. Cao, C.C. Ge, J.F. Li, and A. Kawasaki. 2005. "Fabrication And Characteristics Of Plasma Facing Sic/C Functionally Graded Composite Material". *Materials Chemistry And Physics* ,91(2-3) : 545-550. doi : 10.1016/j.matchemphys.2004.12.038.

Cho, K. M., Choi, I. D., and Park, I. M. 2004. Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. In *Materials Science Forum* (Vol. 449, pp. 621-624). Trans Tech Publications.

Bouafia 2014 Bouafia. K, Maachoul. M, Benzair. A, Tounsi. A « Etude des contraintes résiduelles dans le matériau FGM », CNMI, UMAB, 09-10 Décembre, 2014.

Chi, Shyang-Ho, and Yen-Ling Chung. 2006. "Mechanical Behavior Of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load—Part I : Analysis". *International Journal Of Solids And Structures* 43 (13) : 3657-3674. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011.

Sallai ; 2011 : Sallai Benoumrane « Étude et analyse des structures en FGM : comparaison entre E-FGM et S-FGM ». Thèse de doctorat de l'université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abess ; 2011.

Bao, G. and Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), pp.2853-2871. doi :10.1016/00207683(94)00267-z.

Delale, F., and F. Erdogan. 1983. "The Crack Problem For A Nonhomogeneous Plane". *Journal Of Applied Mechanics* 50 (3) : 609. doi :10.1115/1.3167098.

Elomari 2010.Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. Thèse Master en génie civil de l'université Djilali Laibas sidi bel- Abas.

Sallai ; 2011.Sallai Benoumrane « Étude et analyse des structures en FGM : comparaison entre E-FGM et S-FGM ». Thèse de doctorat de l'université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abess ; 2011.

Coffignal, Gérard. "Mécanique non-linéaire et éléments finis." Version Electronique e.1.0, 2001. <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>.

Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1972). *Mechanics of Materials*. Van Nordstrand Reinhold Company. New York.

Nguyen, Viet Tung. 2004. "Modélisation Globale Et Locale Des Structures Multicouches Par Éléments Finis Des Plaques". Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech

Lo, K. H., R. M. Christensen, and E. M. Wu. 1977. "A High-Order Theory Of Plate Deformation— Part 1 : Homogeneous Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 44 (4) : 663. doi :10.1115/1.3424154.

Ambartsumyan, S. A. 1969. "Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression". *Inzh. Zhur. MTT*, 3, 51-61.

Reissner, E. 1945. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ". *Journal Of Applied Mechanics*, A69-A77.

Aydogdu, M. 2005. "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method". *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(11), 1740-1755. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2005.06.010.

Levinson, M. 1980. "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". *Mechanics Research Communications*. 7(6), 343-350. doi :10.1016/0093-6413(80)90049-x.

Murthy, M. V. V. 1981. "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates".

Reddy, J. N. 1984. "A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates". Journal Of Applied Mechanics 51 (4) : 745. doi :10.1115/1.3167719.

Touratier, M. 1991. "An Efficient Standard Plate Theory". International Journal Of Engineering Science 29(8) : 901-916. doi :10.1016/0020-7225(91)90165-y.

Afaq K.S., Karama M. and Mistou S. 2003. "Un nouveau modèle raffiné pour le structures multicouches". In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites. Pages 289292. Strasbourg.

Reddy J.N. (1984). A simple higher order theory for laminated composite plates. J of Applied Mechanics. 51, pp. 745–752.DOI : 10.1115/1.3167719.

Hadji, L., Daouadji, T. H., Meziane, M. A. A., Tlidji, Y. et Bedia, E. A. A. (2016). Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory. Structural Engineering and Mechanics. 57, pp. 315–325. DOI : 10.12989/sem.2016.57.2.315.

Sayyad, A. S. et Ghugal, Y. M. (2018). Bending, buckling and free vibration responses of hyperbolic shear deformation FGM beams. Mechanics of advanced composite structures. 5, pp. 13-24.

Touratier M. (1991). An efficient standard plate theory. Int J Engineering Science. 29, pp. 901-916.DOI :10.1016/00207225(91)90165-Y.

Li, S. R. et Batra, R. C. 2013. Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler– Bernoulli beams. Composite Structures. 95, pp. 5-9. DOI : 10.1016/j.compstruct.2012.07.027.

Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Maheri, A. and Lee, J. (2014b). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. Engineering Structures. 64, pp. 12-22. DOI : 10.1016/j.engstruct.2014.01.029.

Şimşek M. (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher order beam theories, Nuclear Engineering and Design. 240(4), pp. 697.705. DOI : 10.1016/j.nucengdes.2009.12.013.

Thai, H. T. et Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. International Journal of Mechanical Sciences. 62, pp. 57–66.DOI : 10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014

Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K. et Inam, F. (2014a). Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. Meccanica. 49, pp. 155-168.

Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine. 41, 742–746. DOI: 10.1080/14786442108636264.

Euler, L. (1744). Method usin venien diline ascurvas maximum inimive proprietate gaudentes.Lausanne and Geneva.

Program:

Bending, buckling, and **free vibration** of FG beams by using a new higher-order shear deformation theory

18/04/2021

```
>restart ;
> with(linalg) ;
[BlockDiagonal , GramSchmidt, JordanBlock , LUdecomp,
QRdecomp, Wronskian , addcol , addrow , adj , adjoint , angle ,
augment , backsub , band , basis , bezout , blockmatrix , charmat ,
charpoly , cholesky , col , coldim , colspace , colspan , companion ,
concat , cond , copyinto , crossprod , curl , definite , delcols ,
delrows , det , diag , diverge , dotprod , eigenvals , eigenvalues ,
eigenvectors , eigenvects , entermatrix , equal , exponential ,
extend , ffgausselim , fibonacci , forwardsub , frobenius ,
gausselim , gaussjord , geneqns , genmatrix , grad , hadamard ,
hermite , hessian , hilbert , htranspose , ihermite , indexfunc ,
innerprod , intbasis , inverse , ismith , issimilar , iszero , jacobian ,
jordan , kernel , laplacian , leastsqrs , linsolve , matadd , matrix ,
minor , minpoly , mulcol , mulrow , multiply , norm , normalize ,
nullspace , orthog , permanent , pivot , potential , randmatrix ,
randvector , rank , ratform , row , rowdim , rowspace , rowspan ,
rref , scalarmul , singularvals , smith , stackmatrix , submatrix ,
subvector , subbasis , swapcol , swaprow , sylvester , toeplitz , trace ,
transpose , vandermonde , vecpotent , vectdim , vector , wronskian ]
```

```
>#---Displacement field---
```

```
u(x,z,t) := u0(x,t) -
z*(diff(w0(x,t),x)) + k1*A1*f(z)*diff(theta(x,t),x) ;
v(x,z,t) := 0 ;
w(x,z,t) := w0(x,t) ;
```

$$u(x, z, t) := u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial}{\partial x} w_0(x, t) \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right)$$

$$v(x, z, t) := 0$$

$$w(x, z, t) := w_0(x, t)$$

```
>#---Strains---
```

```
epsilon11 := diff(u(x,z,t),x) ;
epsilon22 := diff(v(x,z,t),y) ;
epsilon33 := diff(w(x,z,t),z) ;
epsilon12 := diff(u(x,z,t),y) + diff(v(x,z,t),x) ;
epsilon23 := diff(v(x,z,t),z) + diff(w(x,z,t),y) ;
#epsilon13 := diff(u(x,z,t),z) + diff(w(x,z,t),x) ;
epsilon13 := k1*A1*g(z)*diff(theta(x,t),x) ;
```

$$\epsilon_{11} := \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0(x, t) \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right)$$

$$\epsilon_{22} := 0$$

$$\epsilon_{33} := 0$$

$$\epsilon_{12} := 0$$

$$\epsilon_{23} := 0$$

$$\epsilon_{13} := kI AI g(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right)$$

>#---Stresses---

```
Strains:= array([[epsilon11],[epsilon13]]);
Rigidity:= array([[Q11(z), 0], [0, Q55(z)]];
sigma:=multiply(Rigidity, Strains);
```

Strains :=

$$\left[\left[\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0(x, t) \right) + kI AI f(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) \right], \left[kI AI g(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right) \right] \right]$$

$$Rigidity := \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 \\ 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix}$$

$$\sigma := \left[\left[Q_{11}(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0(x, t) \right) + kI AI f(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) \right) \right], \left[Q_{55}(z) kI AI g(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right) \right] \right]$$

```
> sigma11 := sigma[1, 1];
```

```
tau13 := sigma[2, 1];
```

$$\sigma_{11} := Q_{11}(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0(x, t) \right) + kI AI f(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) \right)$$

$$\tau_{13} := Q_{55}(z) kI AI g(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right)$$

>#---Stress resultants---

```
N11(x, t) := expand(expand(int(sigma11, z)));
```

```
M11b(x, t) := expand(expand(int(z*sigma11, z)));
```

```
M11s(x, t) := expand(expand(int(f(z)*sigma11, z)));
```

```
Q13(x, t) := expand(expand(int(g(z)*tau13, z)));
```

$$N_{11}(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right) \left(\int Q_{11}(z) dz \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0(x, t) \right) \left(\int Q_{11}(z) z dz \right) + kI AI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) \left(\int Q_{11}(z) f(z) dz \right)$$

$$M11b(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) \left(\int Q11(z) z dz \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w0(x, t) \right) \left(\int Q11(z) z^2 dz \right) + kl AI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) \left(\int Q11(z) z f(z) dz \right)$$

$$M11s(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) \left(\int Q11(z) f(z) dz \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w0(x, t) \right) \left(\int Q11(z) z f(z) dz \right) + kl AI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) \left(\int Q11(z) f(z)^2 dz \right)$$

$$Q13(x, t) := kl AI \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right) \left(\int g(z)^2 Q55(z) dz \right)$$

>

N11(x, t) := subs (int (Q11 (z) , z)=A11 , int (Q11 (z) *z , z)=B11 , int (Q11 (z) *f (z) , z)=E11 , int (Q13 (z) *diff (g (z) , z) , z)=Es13 , N11 (x, t)) ;

$$N11(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) A11 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w0(x, t) \right) B11 + kl AI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) E11$$

>

M11b(x, t) := subs (int (Q11 (z) *z , z)=B11 , int (Q11 (z) *z^(2) , z)=Da11 , int (Q11 (z) *z*f (z) , z)=H11 , int (Q11 (z) *z*g (z) , z)=F11 , int (Q13 (z) *z*diff (g (z) , z) , z)=Fs13 , M11b (x, t)) ;

$$M11b(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) B11 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w0(x, t) \right) Da11 + kl AI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) H11$$

>

M11s(x, t) := subs (int (Q11 (z) *f (z) , z)=E11 , int (Q11 (z) *z*f (z) , z)=H11 , int (Q11 (z) *f (z)^2 , z)=Ds11 , int (Q13 (z) *f (z) *diff (g (z) , z) , z)=Is13 , M11s (x, t)) ;

$$M11s(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) E11 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w0(x, t) \right) H11 + kl AI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) Ds11$$

> **Q13(x, t) := subs (int (Q55 (z) *g (z)^2 , z)=As55 , Q13 (x, t)) ;**

$$Q13(x, t) := kl AI \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right) As55$$

>#---Differential equations---

eq1 := -diff (N11 (x, t) , x) + I0 * (diff (u0 (x, t) , t, t)) - I1 * (diff (w0 (x, t) , x, t, t)) + I3 * k1 * A1 * (diff (theta (x, t) , x, t, t)) = 0 ;

$$\begin{aligned}
eq1 := & - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u0(x, t) \right) A1I + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} w0(x, t) \right) B1I \\
& - kI AI \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \theta(x, t) \right) E1I + I0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u0(x, t) \right) \\
& - II \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} w0(x, t) \right) + I3 kI AI \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \theta(x, t) \right) = 0
\end{aligned}$$

> eq2 := -diff(M11b(x, t), x, x) + I1*(diff(u0(x, t), x, t, t)) - I2*(diff(w0(x, t), x, x, t, t)) + I4*k1*A1*(diff(theta(x, t), x, x, t, t)) + I0*(diff(w0(x, t), t, t)) = 0;

$$\begin{aligned}
eq2 := & - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u0(x, t) \right) B1I + \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w0(x, t) \right) Da1I \\
& - kI AI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \theta(x, t) \right) H1I + II \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} u0(x, t) \right) \\
& - I2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} w0(x, t) \right) + I4 kI AI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \theta(x, t) \right) \\
& + I0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} w0(x, t) \right) = 0
\end{aligned}$$

> eq3 := k1*A1*diff(M11s(x, t), x, x) - k1*A1*diff(Q13(x, t), x) - I3*k1*A1*(diff(u0(x, t), x, t, t)) + I4*k1*A1*(diff(w0(x, t), x, x, t, t)) - I5*k1^2*A1^2*(diff(theta(x, t), x, x, t, t)) = 0;

$$\begin{aligned}
eq3 := & kI AI \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u0(x, t) \right) E1I - \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w0(x, t) \right) H1I \right. \\
& \left. + kI AI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \theta(x, t) \right) Ds1I \right) - kI^2 AI^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right) As55 \\
& - I3 kI AI \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} u0(x, t) \right) + I4 kI AI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} w0(x, t) \right) \\
& - I5 kI^2 AI^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \theta(x, t) \right) = 0
\end{aligned}$$

>#---Solution of the differential equation---

u0(x, t) := Umn*cos(alpha*x)*exp(-I*omega*t);
w0(x, t) := Wmn*sin(alpha*x)*exp(-I*omega*t);
theta(x, t) := theta(mn)*sin(alpha*x)*exp(-I*omega*t);

$$u0(x, t) := Umn \cos(\alpha x) e^{-I \omega t}$$

$$w0(x, t) := Wmn \sin(\alpha x) e^{-I \omega t}$$

$$\theta(x, t) := \theta(mn) \sin(\alpha x) e^{-I \omega t}$$

> q1 := eval(eq1, [cos(alpha*x)=1, sin(alpha*x)=1, exp(-I*omega*t)=1]);

$$\begin{aligned}
q1 := & Umn \alpha^2 A1I - Wmn \alpha^3 B1I + kI AI \theta(mn) \alpha^3 E1I \\
& - I0 Umn \omega^2 + II Wmn \alpha \omega^2 - I3 kI AI \theta(mn) \alpha \omega^2 = 0
\end{aligned}$$

> q2 := eval(eq2, [cos(alpha*x)=1, sin(alpha*x)=1, exp(-I*omega*t)=1]);

$$\begin{aligned}
q2 := & -Umn \alpha^3 B1I + Wmn \alpha^4 Da1I - kI AI \theta(mn) \alpha^4 H1I \\
& + II Umn \alpha \omega^2 - I2 Wmn \alpha^2 \omega^2 + I4 kI AI \theta(mn) \alpha^2 \omega^2 \\
& - I0 Wmn \omega^2 = 0
\end{aligned}$$

> q3:=eval(eq3,[cos(alpha*x)=1,sin(alpha*x)=1,exp(-I*omega*t)=1]);

$$q3 := k1 A1 (Umn \alpha^3 E11 - Wmn \alpha^4 H11 + k1 A1 \theta(mn) \alpha^4 Ds11) \\ + k1^2 A1^2 \theta(mn) \alpha^2 As55 - I3 k1 A1 Umn \alpha \omega^2 \\ + I4 k1 A1 Wmn \alpha^2 \omega^2 - I5 k1^2 A1^2 \theta(mn) \alpha^2 \omega^2 = 0$$

> q1:=collect(q1,[Umn,Wmn,theta(mn)]);

q2:=collect(q2,[Umn,Wmn,theta(mn)]);

q3:=collect(q3,[Umn,Wmn,theta(mn)]);

$$q1 := (-I0 \omega^2 + \alpha^2 A11) Umn + (I1 \alpha \omega^2 - \alpha^3 B11) Wmn \\ + (k1 A1 \alpha^3 E11 - I3 k1 A1 \alpha \omega^2) \theta(mn) = 0$$

$$q2 := (I1 \alpha \omega^2 - \alpha^3 B11) Umn + (-I2 \alpha^2 \omega^2 + \alpha^4 Da11 \\ - I0 \omega^2) Wmn + (-k1 A1 \alpha^4 H11 + I4 k1 A1 \alpha^2 \omega^2) \theta(mn) \\ = 0$$

$$q3 := (k1 A1 \alpha^3 E11 - I3 k1 A1 \alpha \omega^2) Umn + (-k1 A1 \alpha^4 H11 \\ + I4 k1 A1 \alpha^2 \omega^2) Wmn + (k1^2 A1^2 \alpha^4 Ds11 \\ - I5 k1^2 A1^2 \alpha^2 \omega^2 + k1^2 A1^2 \alpha^2 As55) \theta(mn) = 0$$

>#---stiffness matrix---

k11:=alpha^2*A11;

k12:=-alpha^3*B11;

k13:=k1*A1*alpha^3*E11;

$$k11 := \alpha^2 A11$$

$$k12 := -\alpha^3 B11$$

$$k13 := k1 A1 \alpha^3 E11$$

> k21:=-alpha^3*B11;

k22:=alpha^4*Da11;

k23:=-k1*A1*alpha^4*H11;

$$k21 := -\alpha^3 B11$$

$$k22 := \alpha^4 Da11$$

$$k23 := -k1 A1 \alpha^4 H11$$

> k31:=k1*A1*alpha^3*E11;

k32:=-k1*A1*alpha^4*H11;

k33:=k1^2*A1^2*alpha^4*Ds11+k1^2*A1^2*alpha^2*As55;

$$k31 := k1 A1 \alpha^3 E11$$

$$k32 := -k1 A1 \alpha^4 H11$$

$$k33 := k1^2 A1^2 \alpha^4 Ds11 + k1^2 A1^2 \alpha^2 As55$$

> simplify(k12/k21);simplify(k13/k31);simplify(k23/k32);

1

1

1

> K:= Matrix([[k11,k12,k13], [k21,k22,k23], [k31,k32,k33]]);

$$K := \begin{bmatrix} \alpha^2 A_{11}, -\alpha^3 B_{11}, k_1 A_1 \alpha^3 E_{11}, \\ -\alpha^3 B_{11}, \alpha^4 D_{a11}, -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11}, \\ k_1 A_1 \alpha^3 E_{11}, -k_1 A_1 \alpha^4 H_{11}, k_1^2 A_1^2 \alpha^4 D_{s11} \\ + k_1^2 A_1^2 \alpha^2 A_{s55} \end{bmatrix}$$

>#---masse matrix---

```
M11 := I0;
M12 := -I1*alpha;
M13 := I3*k1*A1*alpha;
M21 := -I1*alpha;
M22 := I2*alpha^2+I0;
M23 := -I4*k1*A1*alpha^2;
M31 := I3*k1*A1*alpha;
M32 := -I4*k1*A1*alpha^2;
M33 := I5*k1^2*A1^2*alpha^2;
M := Matrix([ [M11,M12,M13], [M21,M22,M23], [M31,M32,M33] ] );
```

$$M_{11} := I_0$$

$$M_{12} := -I_1 \alpha$$

$$M_{13} := I_3 k_1 A_1 \alpha$$

$$M_{21} := -I_1 \alpha$$

$$M_{22} := I_2 \alpha^2 + I_0$$

$$M_{23} := -I_4 k_1 A_1 \alpha^2$$

$$M_{31} := I_3 k_1 A_1 \alpha$$

$$M_{32} := -I_4 k_1 A_1 \alpha^2$$

$$M_{33} := I_5 k_1^2 A_1^2 \alpha^2$$

$$M := \begin{bmatrix} I_0 & -I_1 \alpha & I_3 k_1 A_1 \alpha \\ -I_1 \alpha & I_2 \alpha^2 + I_0 & -I_4 k_1 A_1 \alpha^2 \\ I_3 k_1 A_1 \alpha & -I_4 k_1 A_1 \alpha^2 & I_5 k_1^2 A_1^2 \alpha^2 \end{bmatrix}$$

>#---Calculation---

```
with(LinearAlgebra); with(MTM);
Ec:=380;
Em:=70;
rhom:=2702;
rhoc:=3960;
nu:=0.3;
h:=1;
pi:=3.1415926535897932384626433832795;
k1:=alpha^2;A1:=-1/alpha^2;
L:=5*h;p:=0;
f(z):=(2*z*Pi*(1/3*z^2-1/4*h))/(h); g(z):=diff(f(z),z);
#f(z):=z*cosh(1./2.)-h*sinh(z/h); g(z):=diff(f(z),z);
#f(z):=z*(1-4/(3)*(z/(h))^2); g(z):=diff(f(z),z);
#f(z):=sin(Pi*z/h); g(z):=diff(f(z),z);
#f(z):=z*exp(-2*(z/(h))^2); g(z):=diff(f(z),z);
#f(z):=(z*(Pi+2*cos((Pi*z)/(h)))/(2+Pi); g(z):=diff(f(z),z);
#f(z):=5/4*z*(1-4/3*(z^2)/(h^2)); g(z):=diff(f(z),z);
```

[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis,
 BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm,
 CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column,
 ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace,
 CompanionMatrix, ConditionNumber, ConstantMatrix,
 ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct,
 DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal,
 DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct,
 EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal,
 ForwardSubstitute, FrobeniusForm, GaussianElimination,
 GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic,
 GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix,
 GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm,
 HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix,
 HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis,
 IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary,
 JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main,
 LUdecomposition, LeastSquares, LinearSolve, Map, Map2,
 MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse,
 MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower,
 MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply,
 MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue,
 Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent,
 Pivot, PopovForm, QRdecomposition, RandomMatrix,
 RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm,
 ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation,
 RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector,
 SchurForm, SingularValues, SmithForm,
 StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis,
 SylvesterMatrix, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose,
 TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd,
 VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm,
 VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip]

[*ElementwiseAnd, ElementwiseNot, ElementwiseOr, Map, Minus, Mod, Zip, abs, acos, acosh, acot, acoth, acsc, acsch, array_dims, asec, asech, asin, asinh, atan, atanh, besseli, besselj, besserk, bessely, ccode, ceil, char, coeffs, collect, colspace, compose, conj, cos, cosh, cosint, cot, coth, csc, csch, ctranspose, det, diag, diff, digits, dirac, disp, double, dsolve, eig, eq, erf, exp, expand, expm, ezcontour, ezcontourf, ezmesh, ezmeshc, ezplot, ezplot3, ezpolar, ezsurf, ezsurf, factor, findsym, finverse, fix, floor, fortran, fourier, frac, γ , gcd, ge, gt, heaviside, horner, horzcat, hypergeom, ifourier, ilaplace, imag, int, int16, int32, int64, int8, inv, isreal, iztrans, jacobian, jordan, lambertw, laplace, latex, lcm, ldivide, le, limit, log, log10, log2, lt, mfun, mldivide, mpower, mrdivide, mtimes, ne, null, numden, numel, plus, poly, poly2sym, power, pretty, procread, prod, quorem, rank, rdivide, real, round, rref, sec, sech, simple, simplify, sin, single, sinh, sinint, size, solve, sort, sqrt, struct, subs, subsasgn, subsref, sum, svd, sym2poly, symsum, tan, tanh, taylor, times, transpose, tril, triu, uint16, uint32, uint64, uint8, vertcat, vpa, ζ , ztrans]*

$$E_c := 380$$

$$E_m := 70$$

$$\text{rhom} := 2702$$

$$\text{rhoc} := 3960$$

$$v := 0.3$$

$$h := 1$$

$$\pi := 3.14159265358979323846264338327$$

$$k1 := \alpha^2$$

$$A1 := -\frac{1}{\alpha^2}$$

$$L := 5$$

$$p := 0$$

$$f(z) := 2z\pi \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$g(z) := 2\pi \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{4}{3}z^2\pi$$

$$> V(z) := (1/2+z/h)^p;$$

$$E(z) := (E_c - E_m) * V(z) + E_m;$$

$$\text{rho}(z) := (\text{rhoc} - \text{rhom}) * V(z) + \text{rhom};$$

$$Q11(z) := E(z); \quad Q55(z) := E(z) / (2 * (1 + nu));$$

$$V(z) := 1$$

$$E(z) := 380$$

$$\rho(z) := 3960$$

$$Q11(z) := 380$$

$$Q55(z) := 146.153846;$$

> A11:=int(Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$A11 := 380$$

> B11:=int(z*Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$B11 := 0$$

> Da11:=int(z^2*Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$Da11 := \frac{95}{3}$$

> E11:=int(f(z)*Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$E11 := 0$$

> H11:=int(z*f(z)*Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$H11 := -\frac{38}{3} \pi$$

> Ds11:=int(f(z)^2*Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$Ds11 := \frac{323}{63} \pi^2$$

> F11:=int(z*g(z)*Q11(z), z=-h/2..h/2);

$$F11 := 0$$

> As55:=int(g(z)^2*Q55(z), z=-h/2..h/2);

$$As55 := 192.330752;$$

> m:=1;

alpha:=m*pi/L;

$$m := 1$$

$$\alpha := 0.628318530;$$

> K := Matrix([[k11,k12,k13], [k21,k22,k23], [k31,k32,k33]]);

$$K := \begin{bmatrix} 150.0179869 & -0. & -0. \\ -0. & 4.935393947 & -1.974157579\pi \\ -0. & -1.974157579\pi & 0.7990637814\pi^2 + 75.92913763 \end{bmatrix}$$

> I0:=evalf(int(rho(z)*1, z=-h/2..h/2));

I1:=evalf(int(rho(z)*z, z=-h/2..h/2));

I2:=evalf(int(rho(z)*z^2, z=-h/2..h/2));

I3:=evalf(int(rho(z)*f(z), z=-h/2..h/2));

I4:=evalf(int(rho(z)*z*f(z), z=-h/2..h/2));

I5:=evalf(int(rho(z)*f(z)^2, z=-h/2..h/2));

$$I0 := 3960.$$

$$I1 := 0.$$

$$I2 := 330.$$

$$I3 := 0.$$

$$I4 := -414.690230;$$

$$I5 := 527.318863;$$

> M := Matrix([[M11,M12,M13], [M21,M22,M23], [M31,M32,M33]]);

$$M := \begin{bmatrix} 3960. & -0. & -0. \\ -0. & 4090.278778 & -163.7131409 \\ -0. & -163.7131409 & 208.1771431 \end{bmatrix}$$

> S := Determinant(K-omega^2*M);

$$S := (-150.0179869 + 3960 \cdot \omega^2) (-0.046396403\pi^2 - 374.7402063 \\ + 3.11598776510^5 \omega^2 + 3268.393627\omega^2 \pi^2 \\ - 8.24700558010^5 \omega^4 - 646.3910758\pi \omega^2)$$

> **omega1 := solve(S, omega) ;**

$$\omega 1 := \begin{bmatrix} 0.1946364047 \\ -0.1946364047 \\ 0.03317456448 \\ 0.6429496329 \\ -0.03317456448 \\ -0.6429496329 \end{bmatrix}$$

> **omega2 := evalf(min(abs(omega1*L^2*sqrt(rhom/Em)/h)) ;**

$$\omega 2 := 5.15274785$$

>

> **#restart;**

>

$$\#u(x, z, t) := u0(x, t) - z \left(\frac{\partial}{\partial x} w0(x, t) \right) + k1 \text{ AI } f(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right);$$

$$\#w(x, z, t) := w0(x, t);$$

$$\#u1(x, z, t) := u01(x, t) - z \left(\frac{\partial}{\partial x} w01(x, t) \right) \\ + k1 \text{ AI } f(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta1(x, t) \right);$$

$$\#w1(x, z, t) := w01(x, t);$$

$$\#\epsilon11 := \frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) - z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w0(x, t) \right) + k1 \text{ AI } f(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, t) \right);$$

$$\#\epsilon13 := k1 \text{ AI } g(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) \right);$$

$$\#\delta Ud := \text{expand}(\sigma11 \cdot \delta \cdot \epsilon11 + \tau13 \cdot \delta \cdot \epsilon13);$$

$$\#\delta K := \text{expand}(\rho \cdot \text{diff}(u(x, z, t), t) \cdot \text{diff}(u1(x, z, t), t) + \rho \cdot \text{diff}(w(x, z, t), t) \cdot \text{diff}(w1(x, z, t), t));$$

>