

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**

---



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

HATI Khaled

*Sujet du mémoire*

**FLAMBEMENT DES POUTRES SANDWICHES EN FGM SOUS DIVERSES  
CONDITIONS D'APPUI**

*Soutenu publiquement le 23/09/2021 devant le jury composé de :*

M<sup>me</sup>, Z. KHELIFA

Mr, Y. TLIDJI

M<sup>lle</sup> K. OUAZIR

Mr, K. DRAICHE

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

RRROMOTION : 2020-2021

## RESUME

---

L'objectif de ce travail est d'étudier le flambement des poutres sandwiches en FGM avec diverses conditions aux bords par une approche analytique. On suppose que les propriétés matérielles varient de la poutre sandwich suivant l'épaisseur seulement selon une simple loi de puissance (P-FGM) en termes de fractions de volume des constituants tandis que le coefficient de poisson reste constant dans tout point de la poutre. Dans cette étude on suppose que la poutre sandwich est composée de deux peaux FGM et des cœurs en matériau homogène en céramique (a cœur rigide) et en métal (a cœur souple). Les équations d'équilibres de la poutre sandwich en FGM ont été obtenues en utilisant le principe des d'énergie des travaux virtuels. La méthode des variables séparées est utilisée pour résoudre ces équations d'équilibres, et les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant le problème aux valeurs propres. Les résultats numériques obtenus par cette approche pour le problème de flambement des poutres FGM avec diverses conditions aux bords sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature.

**Mots clés :** Flambement, Poutre en FGM, Sandwich, conditions d'appuis.

## Abstract

---

The aim of this Works is to study the buckling of functionally graded sandwich beam with various boundary conditions using an analytical approach. It is assumed that the material properties vary with a power law in the transverse direction of the sandwich beam in terms of volume fractions of the components while the Poissons ratio remains constant in any point of the beam. Two types of FGM sandwich beam is considered, namely, the sandwich with the FGM facesheet and the homogeneous hardcore (ceramic) and softcore (metal). The equations of equilibrium for the FGM sandwich beam are obtained using the principle of Virtual Works. The method of separate variables is used to solve the equilibrium equations, and the critical buckling loads are found by solving the eigenvalue probleme. The numerical results obtained in this study for the problem of buckling of functionally graded beam under various boundary conditions are presented and compared with those available in the literature.

**Keywords** : Buckling; FGM beam, Sandwich; boundary conditions.

# ملخص

---

الهدف من هذا العمل هو دراسة استقرار عرائض السندويتش المتدرجة وظيفيا باستعمال عدد مختلف من مساند بواسطة طريقة نظرية. خصائص المواد في هذه الدراسة تتغير في الاتجاه العرضي لعريضة السندويتش بواسطة قانون اسي في حين نعتبر معامل بواسو ثابت. في هذه الدراسة، العريضة السندويتش تتألف من طبقتين متدرجتين وظيفيا ولب متجانس من مادة السيراميك (صلب) و اخر من المعدن (لين). معادلات التوازن نتحصل عليهم باستعمال مبدأ العمل الخيالي. الحل التحليلي باستعمال طريقة المتغيرات المتفرقة من أجل حل معادلات التوازن، وقوى الإلتواء الحرجة نتحصل عليها بحل مشكلة القوى الذاتية. الحلول العددية المتحصل عليها باستعمال هذه النظرية لدراسة مشكل إلتواء عرائض السندويتش المتدرجة وظيفيا تم عرضها ومقارنتها مع النتائج المتحصل عليها في الدراسات السابقة.

**الكلمات المفتاحية:** الاتبعاج، عريضة متدرجة وظيفيا، سندوتش، مساند.

# Sommaire

---

<b>RESUME</b> .....	i
Abstract.....	ii
ملخص .....	iii
Sommaire.....	iv
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux .....	viii
Liste des symboles.....	ix
Introduction générale .....	1
Chapitre I Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés FGM.....	2
I.1 Définition.....	3
I.2 Matériaux à gradients de propriétés .....	3
I.2.1 Introduction .....	3
I.2.2 Historique .....	4
I.2.3 Définition .....	4
I.2.4 Élaboration des matériaux à gradient de propriétés .....	5
I.2.4.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....	6
I.2.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	7
I.2.4.3 Compaction sèche des Poudres.....	7
I.2.4.4 Projection plasma.....	7
I.2.4.5 Frittage et Infiltration.....	8
I.2.4.6 Frittage Laser Différentiel .....	8
I.2.4.7 Dépôt par Electrophorèse .....	9
I.2.4.8 C. V. D. et P. V. D. ....	9
I.2.4.9 Implantation Ionique (Sputtering) .....	9
I.2.4.10 Dépôt par Centrifugation .....	10
I.3 Domaines d'application des FGMs .....	10
I.3.2 Domaine aéronautique.....	12
I.3.3 Domaine des matières industrielles .....	12
I.3.4 Domaine Optoélectronique .....	12
I.3.5 Domaine Biomatériaux .....	13
I.3.6 D'autres domaines .....	13
I.4 Exemples des produits de FGM .....	13
I.4.1 Système spatial.....	13

I.4.2	Système de distribution et de transmission .....	14
I.4.3	Fibre optique .....	14
I.4.4	Industriel.....	14
I.4.5	Titanium .....	15
I.4.6	Crampons Baseball.....	15
I.4.7	Lames de rasoir .....	15
I.4.8	Autres applications .....	16
I.5	Propriétés physiques et mécaniques des FGM .....	16
I.5.1	Propriétés de l'Aluminium .....	16
I.5.1.1	Définition.....	16
I.5.1.2	Propriétés physiques .....	16
I.5.1.3	Propriétés mécaniques .....	16
I.5.1.4	Propriétés des alliages d'aluminium .....	17
I.5.1.5	Propriétés de la céramique .....	18
I.5.2	Définition .....	18
I.5.2.1	Propriétés physiques .....	18
I.5.2.2	Propriétés mécaniques .....	18
I.5.2.3	Propriétés des céramiques.....	18
I.6	Concept des matériaux a gradient de propriété FGM.....	19
I.7	Propriétés matérielles effectives des FGM .....	19
I.8	Les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM .....	20
I.8.1	Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	20
I.8.2	Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	21
I.8.3	Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	22
I.9	Conclusion.....	23
Chapitre II	Les théories des structures FGM .....	24
II.1	Introduction .....	25
II.2	Historique des théories des poutres .....	25
II.2.1	Comportement des poutres composites.....	27
II.2.2	Structures composites et élasticité bidimensionnelles .....	27
II.2.2.1	Approche monocouche équivalente.....	28
II.2.2.1.a	Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du.....	28
II.2.2.2	Approche par couche .....	33
II.3	Conclusion.....	38

Chapitre III	Flambement des poutres en FGM .....	39
III.1	introduction.....	40
III.2	Configuration géométrique.....	40
III.3	Équations cinématique et constitutive .....	41
III.3.1	Efforts résultants .....	42
III.3.2	Énergie de déformation .....	43
III.3.3	Énergie potentielle externe .....	43
III.3.4	Solution exacte pour les poutre sandwiches FGM .....	44
III.4	Conclusion.....	46
Chapitre IV	Validation et comparaison des résultats .....	47
IV.1	Introduction .....	48
IV.2	Résultats et interprétations .....	48
IV.2.1	Validation des résultats de flambement des poutres en FGM avec diverses conditions aux bords .....	49
IV.2.2	Validation des résultats de flambement des poutres sandwiches en FGM avec diverses conditions aux bords.....	50
IV.3	Conclusion.....	55
	Conclusion générale et perspectives.....	57
	References .....	58

## Liste des figures

---

<b>Figure I.1 :</b>	Figure I.8 Principe de la méthode coulage en bande [BOCH, P, 1986] [BOCH, P,1987].	6
<b>Figure I.2 :</b>	Disposition du procédé frittage laser différentiel.	9
<b>Figure I.3 :</b>	Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997].	10
<b>Figure I.4 :</b>	Les principaux domaines d'application des FGM [Houari, 2011]	11
<b>Figure I.5 :</b>	La distribution des composantes des matériaux	19
<b>Figure I.6 :</b>	Modèles analytiques pour une couche en FGM.	20
<b>Figure I.7 :</b>	Les dimensions de la poutre FGM	20
<b>Figure I.8 :</b>	La variation du module de Young d'une poutre P-FGM.	21
<b>Figure I.9 :</b>	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.	22
<b>Figure I.10 :</b>	Variation du module de Young d'une poutre E-FGM [B-O. Sallai, 2009].	23
<b>Figure II.1 :</b>	Cinématique de Reissner-Mindlin.	28
<b>Figure II.2 :</b>	Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.	29
<b>Figure II.3 :</b>	Cinématique de Love-Kirchhoff.	30
<b>Figure II.4 :</b>	<b>Figure</b> Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.	31
<b>Figure II.5 :</b>	Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004].	34
<b>Figure II.6 :</b>	Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004]	34
<b>Figure II.7 :</b>	Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Viet.Tung, 2004].	35
<b>Figure II.8 :</b>	Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [Viet.Tung, 2004].	36
<b>Figure III.1 :</b>	Configuration géométrique	40
<b>Figure IV.1 :</b>	Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle, d'une poutre sandwich 1-1-1.	54
<b>Figure IV.2 :</b>	Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle, des poutres sandwiches 1-2-1 et 2-2-1.	55



## Liste des tableaux

---

<b>Tableau IV.1 :</b> -La valeur de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre en FGM sous divers conditions d'appuis, $\frac{\ell}{h} = 5$ .....	49
<b>Tableau IV.2 :</b> La valeur de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre en FGM sous divers conditions d'appuis, $\frac{\ell}{h} = 10$ .....	50
<b>Tableau IV.3 :</b> La variation de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre sandwich 1-1-1 a cœur rigide. ....	51
<b>Tableau IV.4 :</b> La variation de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre sandwich 1-1-1 a cœur souple .....	51
<b>Tableau IV.5 :</b> La variation de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre sandwich a cœur rigide , $\frac{\ell}{h} = 5$ .....	51
<b>Tableau IV.6 :</b> La variation de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre sandwich a cœur rigide , $\frac{\ell}{h} = 20$ .....	52
<b>Tableau IV.7 :</b> La variation de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre sandwich a cœur souple , $\frac{\ell}{h} = 5$ .....	52
<b>Tableau IV.8 :</b> La variation de la charge critique $\bar{N}$ de la poutre sandwich a cœur souple , $\frac{\ell}{h} = 20$ .....	53

## Liste des symboles

---

$E_c$	Module de Young de la céramique.
$E_m$	Module de Young de métal.
$E_1$	Module de Young de la face supérieure.
$E_2$	Module de Young de la face inférieure.
$E(z)$	Module de Young en fonction de $z$ .
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de $z$ .
$\rho_c, \rho_m$	Densités de masse de la céramique et du métal respectivement.
$V(z)$	Fraction volumique.
$V_c$	Fraction volumique de la céramique.
$V_m$	Fraction volumique du métal.
$p$	Indice de loi de puissance ou l'indice matérielle.
$L, b, h$	Dimensions de la poutre.
$u, w$	Les déplacements suivant les directions $x$ et $z$ .
$w_\alpha$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement).
$u_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre.
$\phi_x, \phi_z$	Les rotations autour des axes $x$ et $z$ .
$\psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$ .
$\sigma_x, \sigma_z$	Contraintes normales.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement.
$\epsilon_x$	Déformation dans les directions $x$ .
$\gamma_{xz}$	Déformation de distorsion.
$N$	Effort normal.
$M^b$	Moments de flexion pure.
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse.
$S$	Effort de cisaillement pur.
$m$	Nombre de mode.
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la poutre.

$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la poutre.
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la poutre.
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement.
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement.
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement.
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement.
$Q_{ij}$	Coefficients de rigidité.
$\partial$	Dérivée partielle.
$d_{ij}$ , $d_{ijl}$ et $d_{ijlm}$	Opérateurs différentiels.
$U$	Les énergies de déformation due aux effets mécaniques
$U_m$ , $W_m$ , et $\varphi_m$	Paramètres arbitraires.
[K]	Matrice symétrique des valeurs propres.
{ $\Delta$ }	Vecteur des déplacements.
$N_0$	Charge de flambement
$\bar{N}$	Charge critique de flambement adimensionnelle

# Introduction générale

---

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil.

Vue l'utilisation vaste des matériaux FGM dans le domaine de la construction, nous avons proposé une étude analytique du comportement des poutres sandwiches en FGM vis-à-vis le flambement. Notre travail est constitué de quatre chapitres :

Le premier chapitre comporte des généralités sur les matériaux à gradient de propriété FGM.

Dans le deuxième chapitre, les différentes théories des poutres des structures FGM.

Le chapitre troisième est une étude analytique du problème de flambement des poutres sandwiches en FGM avec diverses conditions aux bords.

Le quatrième chapitre est consacré pour la validation des résultats numériques pour vérifier l'efficacité de l'approche proposé dans la prédiction des charges critiques de flambement et étudier l'influence de l'indice de loi de puissance, le rapport d'épaisseur des couches et le type d'appuis sur la charge critique de flambement des poutres sandwiches en FGM.

**CHAPITRE I :GENERALITES SUR LES MATERIAUX**  
**A GRADIENTS DE PROPRIETES FGM**

## **I.1 Définition**

Les matériaux composites existent depuis toujours, ils ont été utilisés par l'homme comme le torchis et le bois qui sont des composites de la vie quotidienne. Ainsi ils ont été utilisés pour optimiser les performances de certaines armes, par exemple :

Les arcs mongols, dans lesquels les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues sont en bois, soies collées et tendons de bœuf.

Les épées damassées ou sabres japonais dont les lames sont en acier et en fer doux.

Les matériaux composite sont constitués d'un mélange de deux matériaux de nature différente, qui se complètent et permettent d'aboutir à un matériau dont la nouvelle performance obtenue est supérieure à la celle des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibre. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc...). Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice permet de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. Le mélange entre eux est réalisé par polymérisation (réaction chimique).

Les matériaux composites ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement aux paramètres suivants ; Le premier résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal.[Tafla 2007].

## **I.2 Matériaux à gradients de propriétés**

### **I.2.1 Introduction**

Les matériaux à gradients de propriétés (FGM) sont des matériaux composés de deux ou de plusieurs matériaux avec des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus afin d'avoir une continuité spatiale des variables. Les (FGM) permettent l'adaptation des fractions de volume d'un matériau pour extraire l'avantage maximum de leur inhomogénéité, ils offrent un grand potentiel pour les composants dont le fonctionnement est soumis à de fortes charges mécaniques ou thermiques, tels que les boucliers thermiques des vaisseaux spatiaux, les revêtements du plasma pour les réacteurs de fusion, les composantes du moteur pour les avions.

### **I.2.2 Historique**

Les structures fonctionnellement graduées se trouvent en abondance dans la nature sous différentes formes, à savoir ; le corps humain comme les os, le bio-tissu des plantes et des animaux etc..., les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous. Ces derniers sont dotés de plusieurs caractéristiques de qualité supérieure, ils sont légers, solides et élastiques, celles-ci sont dues à leurs nœuds qui créent une hiérarchie et donnent naissance à l'activité de structure. De même, une simple comparaison entre les plantes qui vivent sur une surface plane et celles poussant sur une pente. [BERRABAH H M, 2011].

Les FGMs ont connu une évolution importante dans le temps. D'abord, ils ont été proposés en 1984 par deux chercheurs dont l'un étudiait l'aéronautique et l'autre s'intéressait aux matériaux avancés. Ces deux là parlaient de leur rêve concernant un avion spatial exposé à un environnement à très haute température (1700° c).

Ils exposaient la problématique de la résistance à de grands écarts de température entre l'intérieur et l'extérieur, et ils se confrontent à la réalité suivante: Il n'existe pas de matériau unique supportant une telle situation. A partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGMs, ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifiques. Pour ce faire, ils ont opté pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température.

En 1987, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire traitant les FGMs. A partir de cette mise en valeur du projet, plusieurs autres chercheurs et plusieurs laboratoires ont initié leurs recherches en discutant les méthodes de développement des FGMs, la conception des matériaux, leurs productions et leurs évolutions.

Enfin, une contrainte thermique relaxant matériau FGM a vu le jour lors d'une première conférence internationale qui s'est tenue à Sendai en 1990, ce ci a conduit à fonder toute une technologie, qui est devenue, même, de recueillir les attentions, non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondial.

### **I.2.3 Définition**

Un matériau à gradients de propriétés est un matériau composite qui est fabriqué en mélangeant les particules des phases de deux matières différentes, par exemple, en métal et en

céramique. On assume que les phases matérielles constitutives sont parfaitement collées l'une sur l'autre. Le résultat est une structure multiphasée que nous considérons comme isotrope en nature. Souvent, les informations précises sur la taille, la forme et la distribution des particules ne peuvent pas être aisément disponibles, et les modules efficaces du composite évalué doivent être basés seulement sur les distributions de fraction de volume et la forme approximative de la phase dispersée. Une fois présentée avec une telle configuration, comme c'est le cas avec les matériaux à gradient de propriétés, il est nécessaire d'estimer les propriétés efficaces des matériaux afin de réaliser des simulations numériques de la conduction de chaleur, les problèmes thermoélastiques et l'équilibre de vibrations. Plusieurs modèles micromécaniques ont été développés au cours des dernières années pour estimer les propriétés efficaces de FGMs biphasés. Le plus simple, et peut-être le plus commun, est la loi classique linéaire de mélanges qui suppose que les propriétés efficaces sont la somme de chaque constituant de matériel et sa fraction de volume respective. Une autre méthode est la règle des mélanges modifiés, qui est une formule empirique qui incorpore les effets d'interaction aux valeurs des contraintes et déformations liées à chaque phase. [BERRABAH H M, 2011].

#### **I.2.4 Élaboration des matériaux à gradient de propriétés**

La fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peut habituellement être divisée en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [KIEBACK B, 2003].



Ces dernières années, les travaux menés aux laboratoires ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux.

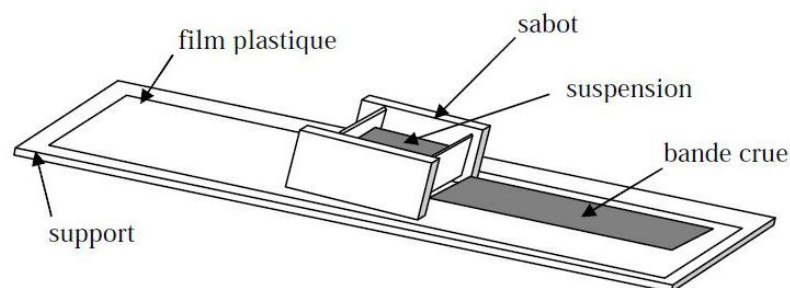
Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule (relation de Stokes). En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après :

#### **I.2.4.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)**

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.8), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [BOCH, P,1986] [BOCH, P,1987] . Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.1 :** Figure I.8 Principe de la méthode coulage en bande [BOCH, P, 1986] [BOCH, P,1987].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par

Mistler [Mistler.R.E, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [BOCH, P, 1987].

#### **I.2.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- **Formation du tesson ou "prise";**
- **Consolidation du tesson ou "raffermissement".**

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- **Pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) [Moya 1992];**
- **Une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).**

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

#### **I.2.4.3 Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Yang. J, 2003] .Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.2.4.4 Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se

fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens H.D, 1990].

#### **I.2.4.5 Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, M, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **I.2.4.6 Frittage Laser Différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un FGM de PSZ/Mo [Yuki, 1991]. La (figure I.9) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé.

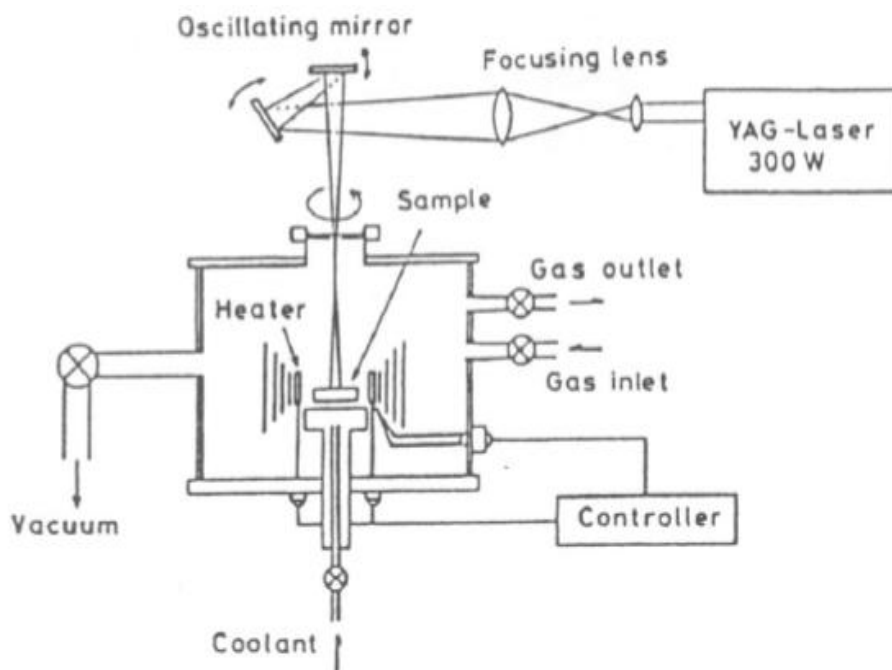


Figure I.2 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

#### I.2.4.7 Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [Sark 1996]. L'élaboration des FGM peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Hossein Abdizadeh 1997].

#### I.2.4.8 C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées [Kawa,C 1990].

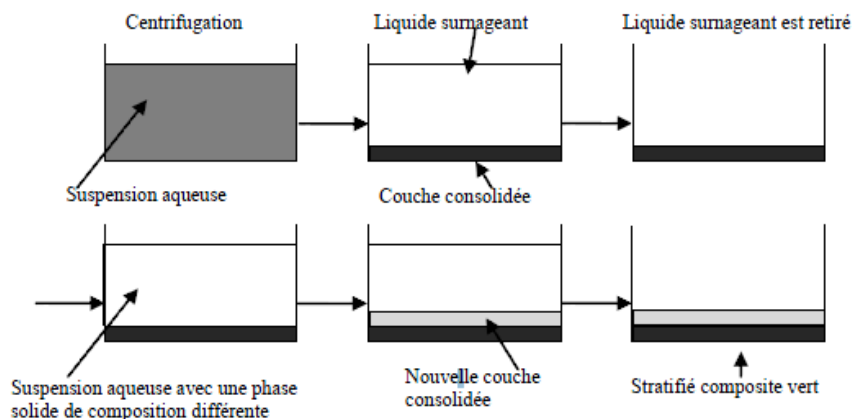
#### I.2.4.9 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs.

Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Hossein Abdizadeh, 1997].

#### I.2.4.10 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches [Hossein Abdizadeh, 1997], (**Figure I.3**).



**Figure I.3 :** Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997].

### I.3 Domaines d'application des FGMs

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

La figure I.4, résume la majorité des domaines d' application des FGMs, qui sera détaillés par la suite ;

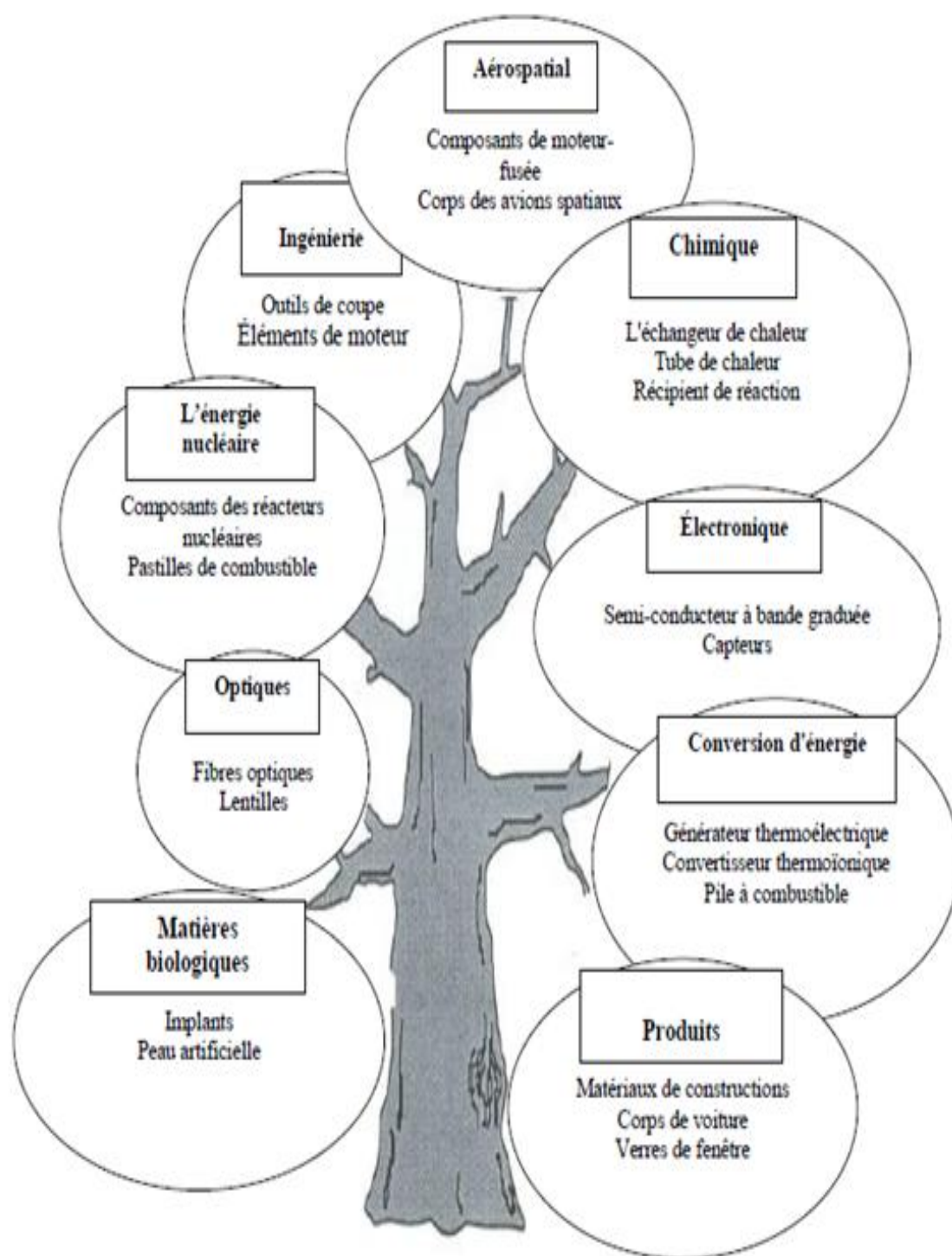


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM [Houari, 2011]

### **I.3.2 Domaine aéronautique**

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Regardez deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau. À l'heure actuelle, il permet de produire le poids-léger, des matériaux solides et durables et est applicable à un large éventail de domaines tels que les matériaux de structure, le matériel de conversion d'énergie et d'autres. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. FGMs sont également applicables à un mur externe d'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

### **I.3.3 Domaine des matières industrielles**

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Un exemple a la forme d'outils. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été mené avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

### **I.3.4 Domaine Optoélectronique**

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application de FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

### **I.3.5 Domaine Biomatériaux**

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, un nouveau matériau qui peut remplacer des os et des articulations et à une longue vie a été souhaité. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion, de compatibilité, mais aussi biologiques et son innocuité sont souhaitées. Les FGM technologie est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents.

Technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. L'un d'eux est, par exemple, une étude sur le renforcement de collagène structure en utilisant la technologie de classement.

### **I.3.6 D'autres domaines**

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. FGM technologie est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et efficace de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faite de polymères fluorés ont été développés. En outre, de nouvelles recherches mai également développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nanotechnologie de classification niveau.

## **I.4 Exemples des produits de FGM**

### **I.4.1 Système spatial**

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement



effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs énormes. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs.

#### **I.4.2 Système de distribution et de transmission**

Les FGM technologie sont utilisées pour la commutation à isolation gazeuse (GIS). Le SIG est un appareillage complexe, constitué d'un disjoncteur, un sectionneur et un parafoudre.

Power and Industrial Systems Research and Development Center, Toshiba Corp construit un élément d'arrêt pour l'éclairage d'avoir une structure cristalline classés dans les entre l'extérieur et l'intérieur, résultant en une gestion du stress thermique et une amélioration considérable dans la capacité d'adsorption de l'énergie.

#### **I.4.3 Fibre optique**

Asahi Glass Company a publié un Graded Index CYTOP TM de fibre optique, Lucina MC, depuis Juin 2000. Les fibres optiques plastiques (POF) peut facilement augmenter une fibre de taille dû à la propriété en plastique tout en maintenant leur flexibilité, ce qui entraîne la réduction du coût de l'installation grâce à un câblage facile. D'ailleurs, en ayant GI-type de distribution et l'utilisation de l'indice de réfraction CYTOP, qui est une matière claire et perfluorés, de données à haute vitesse de communication est devenu disponible. À présent, Lucina TM a réalisé la transmission à haute vitesse de grande taille de données allant jusqu'à 10 Gbit / s qui est équivalent à 200.000 lignes téléphoniques et a également atteint plusieurs centaines de mètres de distance de transmission. Dans le présent, de nombreuses constructions ont été réalisées principalement dans les hôpitaux et les écoles, et les demandes sont encore en croissance.

#### **I.4.4 Industriel**

La substance se comportant à la fois résistance à l'usure supérieure et de la ténacité est nécessaire pour produire des outils idéaux industriels. Mitsubishi Material Corp a fabriqué un matériau revêtu CVD, UE6020. Il a une structure de surface classée, pour lesquelles le concept de la FGM a été appliqué. Un outil revêtu CVD a été préparé avec succès pour une

application pratique et les caractéristiques remarquablement améliorées, telles que de porter en soi et de rupture, qui est contradictoires entre eux, cependant.

En outre, Ltd applique la technique de la FGM au carbure outils. Autres différentes applications sont également possibles, par exemple, le carbure de composition classés / matériel en acier articulé est applicable aux instruments de plastique formant (coup de poing par exemple, de matrices et de moules), des outils pour le développement urbain (bit par exemple) et les pièces de machines (p.ex. garniture mécanique et manette des gaz tige de valve). En outre, des diamants dispersés carbure est applicable au centre des lames et des outils de roulement et résistant à l'usure des outils industriels tels que des centres de tournage.

#### **I.4.5 Titanium**

Le titane est utilisé pour une caisse de voir car il est la lumière matérielle pondérée et non allergique, mais il a une faible dureté et est inférieur en résistance aux dégâts. Par conséquent, le durcissement de surface de titane, une nouvelle technique a évolué pour améliorer la qualité des eaux de surface par traitement

Thermique à basse pression et H<sub>2</sub>O atmosphère de gaz mixtes. Cette technique permettra surface dure de maintien surface de miroir sans couleur. Une nouvelle marque de montre avec le corps en titane traitée par le durcissement de surface.

#### **I.4.6 Crampons Baseball**

La technique d'excision est utilisée pour tasseaux. Traitement thermique des aciers industriels utilisés doivent être utilisées avant. Toutefois, il n'était pas facile de résister à l'usure à partir d'argile et de sable, et des clous en l'habitude d'avoir de nombreux échecs. Par conséquent, une nouvelle chaussure de base-ball a été conçue pour avoir taquets de forme particulière avec des conseils en alliage de carbure de ciment et d'aciers au carbone constitué par la méthode de soudage par résistance. Ils n'avaient reçu aucune réclamation pour les défauts ou de fissures pour le moment.

#### **I.4.7 Lames de rasoir**

Ltd commercialisées avec succès classés lames de rasoir dureté. Ils ont utilisé à haute résistance et la ténacité à-inox pour un substrat et des composés de haute dureté intermétalliques pour une couche de surface pour la fabrication d'une lame qui a une structure

à haute adhérence composition classée. En conséquence, l'une avec douceur ainsi que la forte et profonde à raser les résultats pourraient être obtenus.

#### **I.4.8 Autres applications**

En plus de ce que nous venons de mentionner ci-dessus, beaucoup de produits FGM ont été élaborés tels que les outils industriels, fibres optiques, pièces et composants électroniques de précision. Nous pouvons voir de nombreuses applications du concept de la FGM dans diverses recherches et dans différents domaines industriels, on assiste à une propagation des FGM dans de nombreuses applications.

### **I.5 Propriétés physiques et mécaniques des FGM**

Comme exemple du matériau FGM, l'Aluminium-Céramique a été choisi.

#### **I.5.1 Propriétés de l'Aluminium**

##### **I.5.1.1 Définition**

L'Aluminium est un élément chimique de numéro atomique 13, de symbole Al, appartient au groupe 13 du tableau périodique ainsi qu'à la famille des métaux, de couleur blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant. L'aluminium est un métal malléable, argenté, peu altérable à l'air et peu dense.

##### **I.5.1.2 Propriétés physiques**

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660 °C. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut facilement le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport [Houari, 2011].

##### **I.5.1.3 Propriétés mécaniques**

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mises en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

#### **I.5.1.4 Propriétés des alliages d'aluminium**

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme un revêtement extérieur de bâtiments.

Dans les milieux corrosifs et en l'absence de la couche d'oxyde les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres de la corrosion sous

contrainte ou une corrosion généralisée peuvent se développer. Dans des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### **I.5.1.5 Propriétés de la céramique**

#### **I.5.2 Définition**

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

#### **I.5.2.1 Propriétés physiques**

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de  $3800 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique, métallurgique, aéronautique, spatiale, médicale et dans les revêtements.

#### **I.5.2.2 Propriétés mécaniques**

Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence

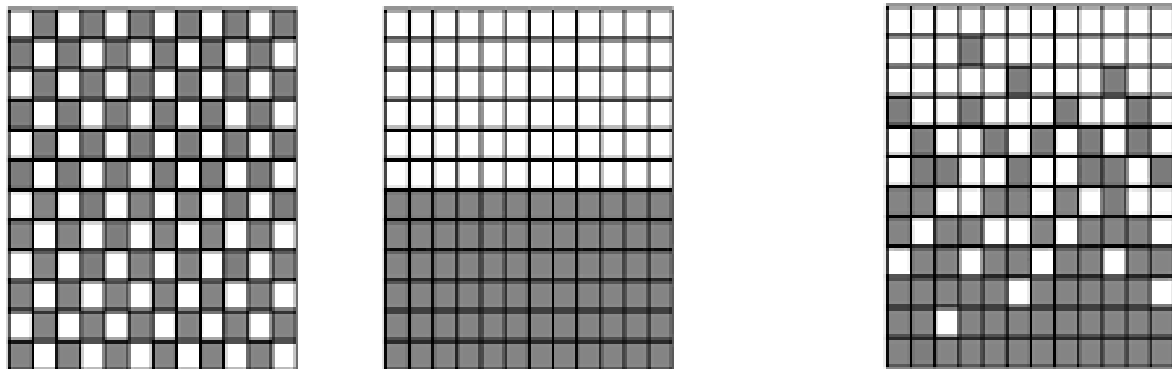
#### **I.5.2.3 Propriétés des céramiques**

Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de Young élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).
- Une dureté élevée (Abrusif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).

### I.6 Concept des matériaux a gradient de propriété FGM

Le matériau à gradient de propriété peut être fabriqué en faisant varier le pourcentage de deux ou plusieurs matériaux, ou en variant la microstructure d'un composant, de telles sortes, que le nouveau matériau possèdera les propriétés voulues suivant la direction désirée. C'est donc un composite, un hétérogène à caractéristiques inhomogènes à l'échelle macroscopique [Hossein Abdizadeh, 1997] et homogènes à l'échelle microscopique.

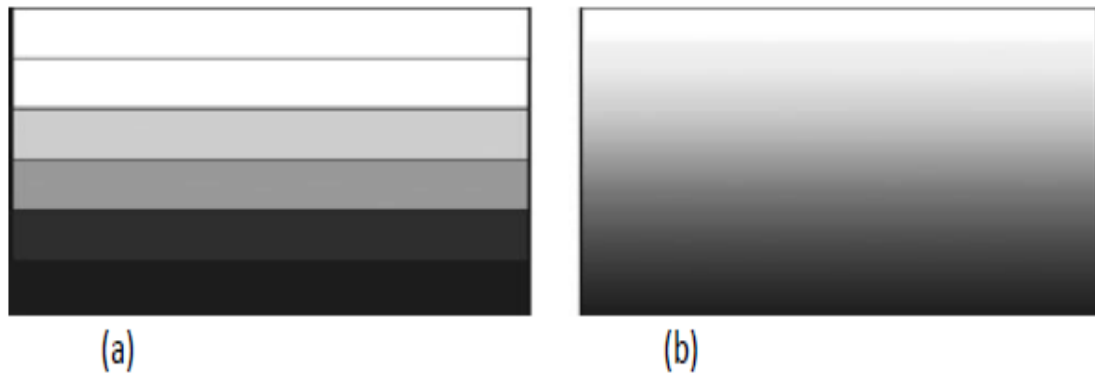


A – Matériau composite B – Matériau composite laminaire C – Matériau à gradient de propriété

Figure I.5 : La distribution des composantes des matériaux

### I.7 Propriétés matérielles effectives des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM. Pour le premier choix, une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure.I.13). Pour la deuxième approche, une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) :



**Figure I.6 :** Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La fonction de loi de puissance est la plus employée par les chercheurs, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des poutres en FGM avec une variation de la fraction de volume qui suit une fonction de loi exponentielle.

### I.8 Les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

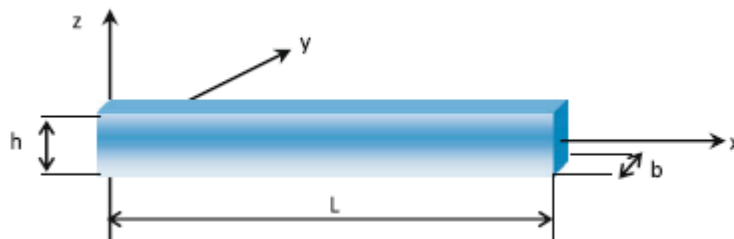
#### I.8.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^P \quad (\text{I-1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z).E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (\text{I-2})$$



**Figure I.7 :** Les dimensions de la poutre FGM

Où  $E_1$  et  $E_2$  et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z=h/2$ ) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I.8, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ . Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives  $E$  de la couche de FGM, comme le module de Young  $E$ , et la densité et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \quad (\text{I-3})$$

Là où le  $E_j$  et le  $g_j$  sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche  $j_j$  (Figure I.8), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

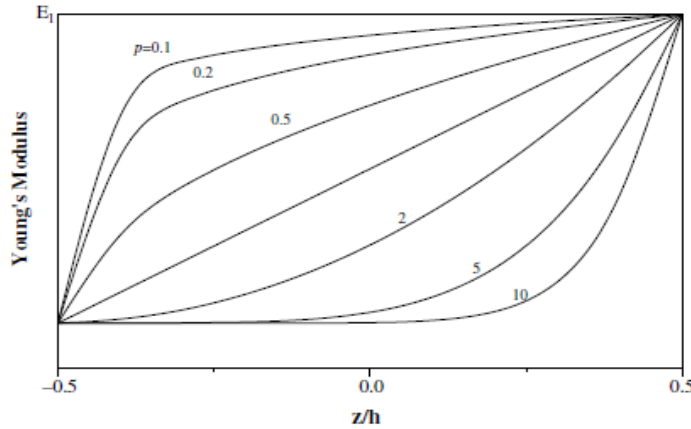


Figure I.8 : La variation du module de Young d'une poutre P-FGM

### I.8.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-4})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0$$

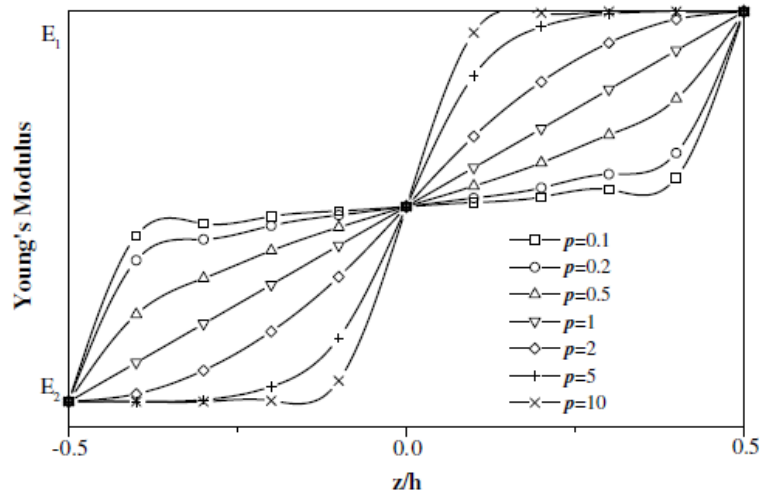


En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = g_1(z).E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

La figure I.9 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).



**Figure I.9 :** La variation du module de Young dans une poutre S-FGM

### I.8.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

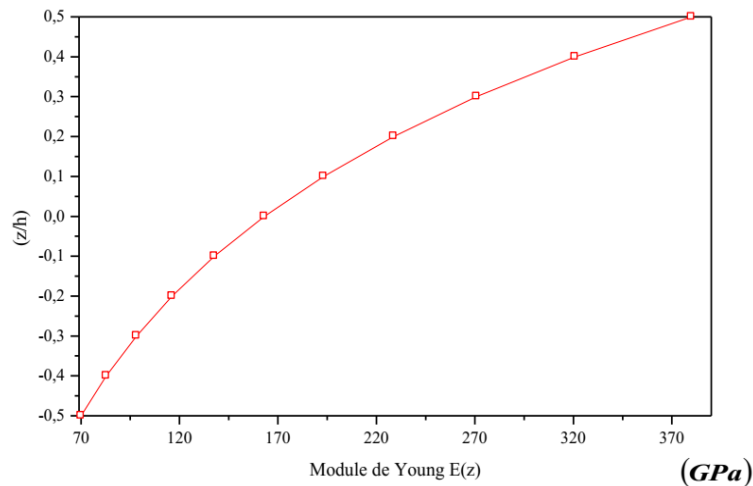
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [F,Delale , 1983]:

$$E(z) = E_2 e^{B.(z+h/2)} \quad (I.5)$$

avec

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure I.10.



**Figure I.10 :** Variation du module de Young d'une poutre E-FGM [B-O. Sallai, 2009].

### I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de présenter et de définir la notion des matériaux composites et matériaux FGM, ainsi on a présenté l'historique de la fabrication des FGM et les différentes méthodes d'usinage et les domaines d'application. Puis on a cité les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.

À la fin nous avons terminés par les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) selon l'épaisseur, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou sigmoïde.

Le chapitre suivant va porter sur les théories régissant le comportement des structures en matériaux à gradient de propriétés.

## **CHAPITRE II :LES THEORIES DES STRUCTURES**

### **FGM**

### I.10 Introduction

Les structures en FGM peuvent être considérées comme des corps hétérogènes. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [A. K,1989], [R. K. Kapania,1989] ,[T. Kant,2000] ,[E. Carrera,2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [N.J. Pagano,1969], [N.J. Pagano,1970], [S. Srinivas,1970], [S. Srinivas,1973]. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- **Approche monocouche équivalente.**
- **Approche par couche.**
- **Approche développement asymptotique.**

### I.11 Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse

incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquant l'évolution de la théorie des plaques.

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

En 1764, par analogie aux poutres, Leonhard Euler est arrivé à définir une équation différentielle du second ordre décrivant la vibration libre de la peau des tambours assimilée à une membrane élastique [Chaouche A, 2013].

En 1787, Ernst Chladni, physicien allemand, connu pour être le fondateur de l'acoustique moderne, publia ses études expérimentales sur les vibrations des plaques, où il cherchait une méthode de mesure de la vitesse du son dans les corps solides. L'expérience de Ernst Chladni consistée à faire vibrer des plaques de taille, de forme et d'épaisseur différentes, saupoudrées de sable fin, et déposées horizontalement sur un support fixe à leurs centres, à l'aide d'un archet. La vibration des plaques fait migrer les grains de sable des zones de forte vibration aux zones de faible vibration, faisant apparaître des figures correspondants aux différents modes de vibration des plaques.

En 1811, l'Académie Française des sciences a lancé un concours pour la détermination d'une théorie mathématique expliquant les travaux du physicien Ernst Chladni, et c'est en 1816 que Sophie Germain mathématicienne et philosophe française obtient finalement l'équation de la déformée en ajoutant un terme à l'équation d'Euler tenant compte des rayons de courbure dans les deux directions perpendiculaires.

En 1821, Henri Navier présente un mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, ces derniers sont considérés comme le fondement de la théorie d'élasticité.

Les travaux de Henri Navier ont été suivi par d'autres travaux tels ceux d'Augustin Louis Cauchy, de Siméon Denis Poisson, de Gabriel Lamé et d'Émile Clapeyron.

Gustav Robert Kirchhoff l'un des plus grands physiciens du XIXe siècle, a réussi par ces travaux, à cerner le champ de validité de la solution de Navier, en calculant toutes les composantes du champ de déformation et de contrainte. Et il constata que la solution classique ne satisfaisait pas les conditions aux limites en déplacement pour une plaque d'étendue finie (appuyée ou encadrée), mais précisa que l'écart tend à s'annuler lorsque l'épaisseur relative de la plaque tend vers 0 et c'est en 1850 qu'il arriva à établir de façon correcte des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

En 1888, Augustus Edward Hough Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, pour fonder une théorie des plaques minces.

C'est ainsi que les trois principales théories feront leurs apparitions dans les années qui suivent.

### **I.11.1 Comportement des poutres composites**

- a. L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, Cela est du au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres [Elomari k, 2011].

### **I.11.2 Structures composites et élasticité bidimensionnelles**

Les structures composites peuvent être présentées sous différents modèles ;

**I.11.2.1 Approche monocouche équivalente**

Dans l'approche monocouche équivalente, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche.

De nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés et ce on se basant sur le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin,. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

**I.11.2.1.a Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)**

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

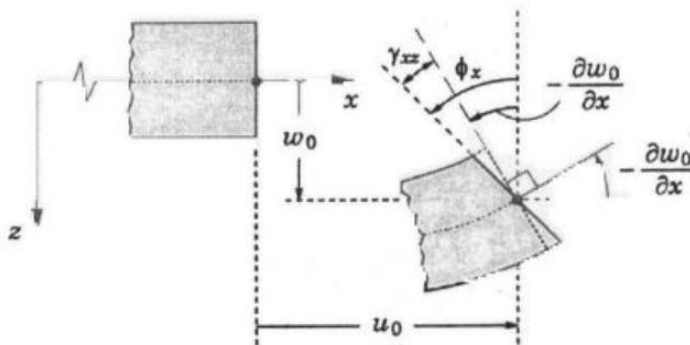
La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.II.1). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (II.1)$$

Avec,

$\phi_\alpha$  : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_\alpha$ ,

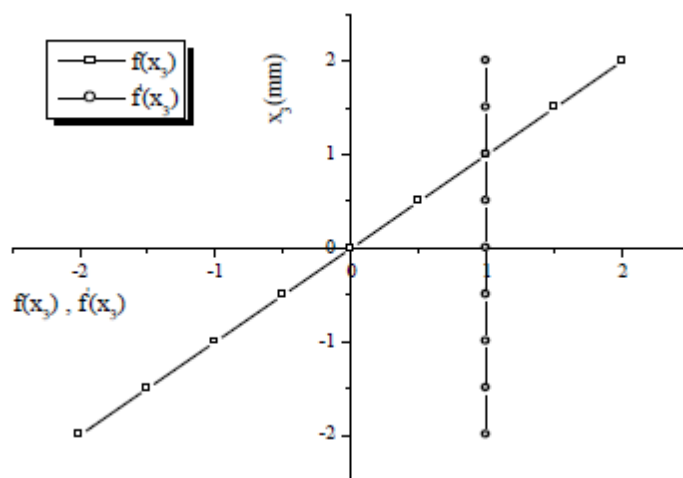
$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.



**Figure I.11 :** Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [J.M. Whitney, 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. II.2 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.



**Figure I.12 :** Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3$  et  $f'(x_3)$  suivant l'épaisseur.

### I.11.2.1.b Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner E, 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [G. Kirchhoff, 1850] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont



négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après déformation (Figure. II.3).

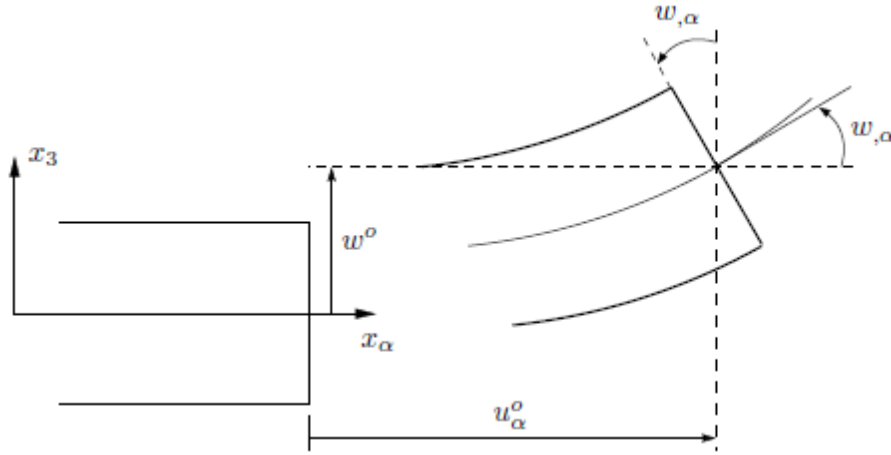


Figure I.13 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad , \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.2})$$

Avec,

$u_\alpha^0$  : Le déplacement de membrane dans la direction  $\alpha$ ,

$w$  : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$  : La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

### I.11.2.1.c Les modèles d'ordre supérieur

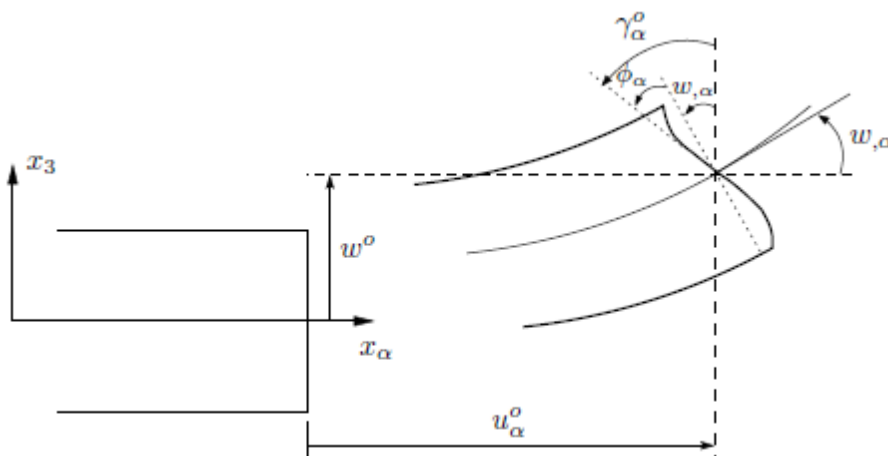
Plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur et ce pour franchir les limites des théories du premier ordre. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4) [L.Liberscu, 1969],[J.M. Whitney,1973] -[M. Touratier,1991], [Viet.Tung, 2004]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3) = & u_i^0(x_1, x_2) + z \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2 \phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) \\ & + z^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4 \phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de  $\phi_j^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j = 2,3,4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$ ,  $\phi_i^{o(3)}$ ,  $\alpha = \{1,2\}$ . Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (II.4)$$



**Figure I.14 :** Figure Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

- b. L'approche d'Ambartsumyan [S.A. Ambartsumyan, 1969] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

c. L'approche de Reissner [73]:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

d. L'approche de Reddy [J.N. Reddy, 1987] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de [J.N. Reddy, 1987], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

e. L'approche de Touratier [M. Touratier, 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale

dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [J.N. Reddy, 1984].

Récemment, Afaq et al. [K.S. Afaq, 2003] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

f. L'approche de Aydogdu [Metin Aydogdu, 2005] avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

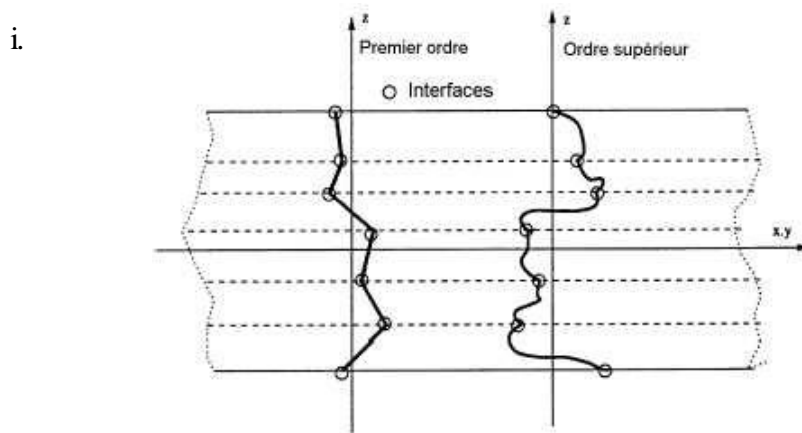
### I.11.2.2 Approche par couche

Ces approches ont été élaborés afin de mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure. II.20.a et les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [78 A. Chabot,1997] ,[E. Carrera,2000] ,[K.S. Afaq,2003] ,[J.N. Reddy,1984] ,[M. Di Sciuva,1987]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des

équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

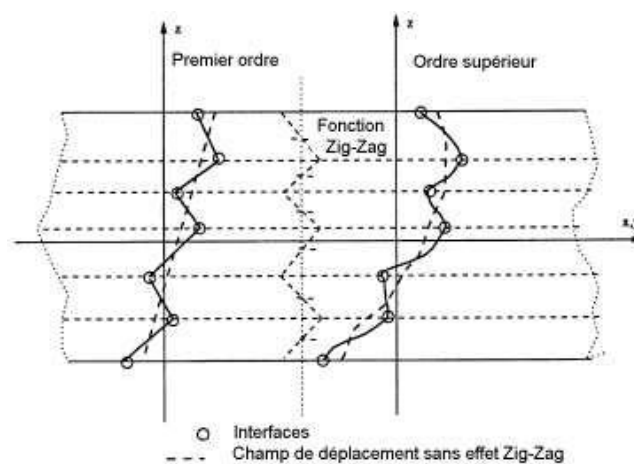
D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- g. les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- h. les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. II.5 et II.6).



j.

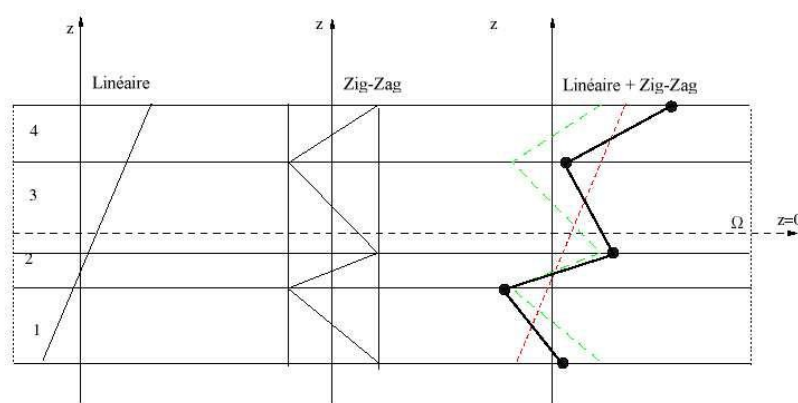
**Figure I.15 :** Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004]



**Figure I.16 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004]

### I.11.2.2.a Les modèles zig-zag

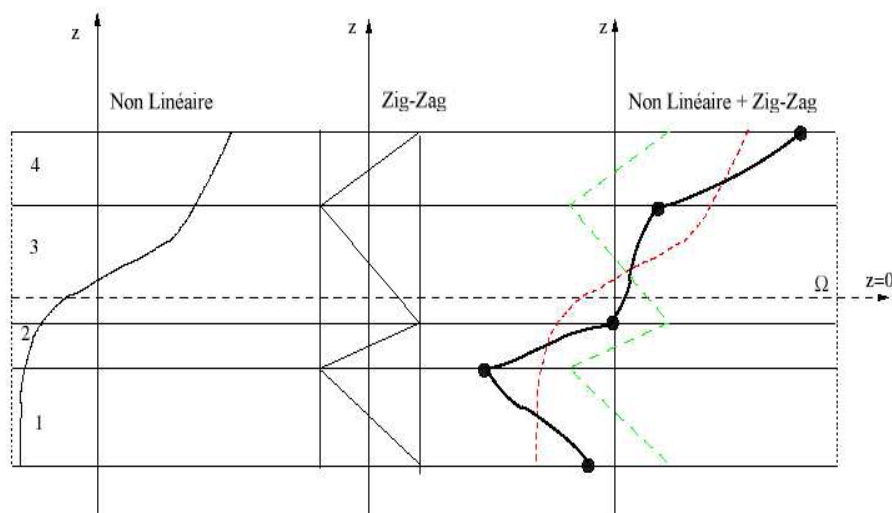
Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [M. Di Sciuva,1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure I.17 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Viet.Tung, 2004].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de [M. Di Sciuva, 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Viet.Tung, 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.II.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure I.18 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.  
[Viet.Tung, 2004].

Dans les travaux de [M. Karama,1998] ,[C. Ossadzow, 2001], la fonction sinus de [M. Touratier,1991] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [K.S. Afaq, 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [U. Icardi, 2001]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C demandée qui complique leur implémentation numérique.

#### I.11.2.2.b Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. II.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de

continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [S. Srinivas,1973] ,[J.N. Reddy,1987] ,[M. Tahani,2003]], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [J.G. Ren,1986] ,[C. Kassapoglou,1987] ,[W.L. Yin,1994], utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [J.G. Ren, 1986] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [C. Kassapoglou,1987], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [W.L. Yin,1994], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [N.J Pagano, 1987]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC



dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Viet.Tung, 2004].

### **I.12 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons exposé les différentes théories régissant les poutres à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous avons essayé de montrer les différentes théories des poutres telles que ; la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).dans le chapitre suivant nous allons procéder a une investigation sur les différents travaux de recherche sur les structures FGM.

**CHAPITRE III : FLAMBEMENT DES POUTRES EN  
FGM**

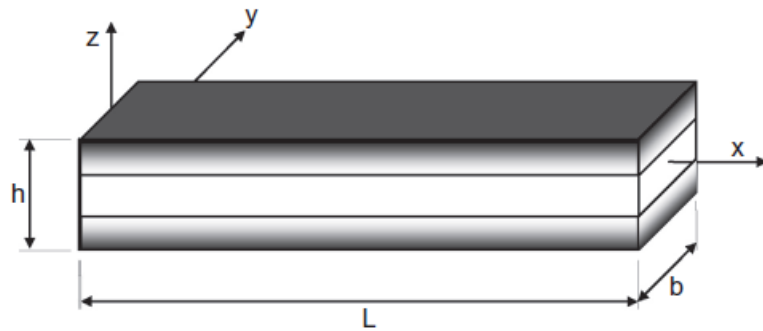
### I.13 introduction

Dans ce chapitre, une théorie des poutres a ordre élevée est utilisée pour l'analyse du flambement des poutres en matériau fonctionnellement graduées FGM. Les propriétés des matériaux de la poutre FGM varie travers l'épaisseur de poutre selon une loi de puissance.

Les équations d'équilibre sont obtenues par théorème des travaux virtuels, et résolues par une approche analytique.

### I.14 Configuration géométrique

Considérons une poutre sandwich en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires  $(x, z)$  comme le montre la figure III.1



**Figure I.19 :** Configuration géométrique

Les faces supérieure et inférieure de la poutre sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la poutre sont parallèles à l'axes  $x$ .

La poutre sandwich est composée de trois couches élastiques : "couche 1", "couche 2" et "couche 3" du bas vers le haut de la poutre. Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la poutre sont notées par :  $h_0 = -h/2$ ,  $h_1, h_2, h_3 = h/2$ , respectivement. Le volume et la surface supérieure sont notés par  $V$  et  $\Omega$ , respectivement. Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la poutre est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-2-2", "1-1-1" et ainsi de suite.

La fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur :

$$\begin{cases} V^{(1)} = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^p, & z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)} = 1, & z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^p, & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où

$V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$  ;  $p$  est l'indice de la fraction volumique ( $0 < p < +\infty$ ), qui indique le profil de la variation matérielle à travers l'épaisseur.

Les propriétés matérielles, comme le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , peuvent être exprimées par la loi de mélange

$$P^{(n)}(z) = P_c + (P_m - P_c)V^{(n)} \quad (\text{III.2})$$

Où

$P^{(n)}$  est la propriété de matérielle effective de la couche  $n$ .  $P_c$  et  $P_m$  correspondent à la propriété des faces inférieure et supérieure respectivement de la couche 1 ( $h_0 \leq z \leq h_1$ ), et vice versa pour la couche 3 ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ), selon la fraction de volume  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ). On Note que  $P_c$  et  $P_m$  sont, respectivement, les propriétés correspondantes à la céramique et au métal de la poutre sandwich FGM. Dans cette étude le coefficient de poisson de la poutre est supposé constant. Cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young.

### I.15 Équations cinématique et constitutive

Le modèle utilisé dans notre étude est le model du troisième ordre de Reddy (TSDT), le champ de déplacement est exprimé sous la forme

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III.3a})$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (\text{III.3b})$$

Les valeurs  $u_0$  et  $w$  sont les composants de déplacement dans les directions de  $x$  et de  $z$ , respectivement, et  $\varphi$  est la rotation de la section transversale de la poutre.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement est :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \varepsilon_x^1 + f(z) \varepsilon_x^2 \quad (\text{III.4a})$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \varphi_x \quad (\text{III.4b})$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \varepsilon_x^1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_x^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III.4c})$$

$$g(z) = f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.4d})$$

$$\text{Avec : } f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right).$$

L'état de contrainte dans la poutre FGM est donné par la loi de Hooke généralisée comme suit:

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (\text{III.5a})$$

Ou

$$Q_{11}^n(z) = E(z) \text{ et } Q_{55}^n(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (\text{III.5b})$$

### I.15.1 Efforts résultants

Les résultantes de force et de moment peuvent être exprimées en termes de contraintes comme

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} \sigma_x^n dz, \quad Q_{xz} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} g(z) \tau_{xz}^n dz \quad (\text{III.5.c})$$

On peut simplifier l'équation (III.5.c) comme

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ B_{11} & D_{11} & F_{11} \\ C_{11} & F_{11} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_x^2 \end{Bmatrix}, \quad R_{xz} = A_{55} \gamma_{xz} \quad (\text{III.6})$$

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, C_{11}, F_{11}, H_{11}) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^n (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{III.7a})$$

$$A_{55} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{55}^n [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.7b})$$

### I.15.2 Énergie de déformation

La fonctionnelle de l'énergie de déformation de la poutre à gradient fonctionnel est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_v [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dv \quad (\text{III.8})$$

L'énergie de déformation de la poutre peut être écrite comme

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^\ell [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta \varepsilon_x^1 + P_x \delta \varepsilon_x^2 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}] dx \quad (\text{III.9})$$

### I.15.3 Énergie potentielle externe

Le travail des actions exercées par la charge de compression latérale  $N_0$ .

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\ell [N_0 (w, x)^2] dx \quad (\text{III.10})$$

La variation du travail des actions s'exprime finalement en prenant la variation de (III.10), soit

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[ N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w dx \quad (\text{III.11})$$

Ou  $N_0$  est la force appliquée transversale à la surface supérieure de la poutre.

Le principe de travaux virtuels pour un corps élastique peut être représenté par

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_0^\ell (\sigma \delta \varepsilon) dx dz - \int_0^\ell N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta W dx = 0 \quad (\text{III.12})$$

En remplaçant l'équation (III.6) dans l'équation (III.12) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients  $\delta u, \delta \varphi, \delta w$ , les équations d'équilibres pour la poutre sandwich FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \\ \delta w &= \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \delta \varphi &= \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - Q_{xz} = 0\end{aligned}\tag{III.13}$$

Équations (III.13) peuvent être exprimées en termes des déplacements ( $u_0, \varphi, w$ ) en remplaçant les forces résultantes de l'équation(III.6). Pour la poutre de FGM, les équations d'équilibre (III.13) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_{11} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0\tag{III.13a}$$

$$A_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\tag{III.13b}$$

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + H_{11} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - A_{55} \varphi = 0\tag{III.13c}$$

#### I.15.4 Solution exacte pour les poutre sandwiches FGM

Pour une solution analytique des équations (III.13), la méthode des variables séparées est utilisée pour une poutre sandwich rectangulaire en FGM sous diverses conditions aux bords. Les conditions aux limites pour un bord arbitraire avec coté simplement appuyée et encastré sont :

- Encastré (C) :

$$u = \varphi = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0\tag{III.14A}$$

- Simplement appuyé (S) :

$$u = \varphi = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0\tag{III.14b}$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (III.14) sont développées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ \varphi \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m X'_m(x) \\ \varphi_m X_m(x) \\ W_m X_m(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Ou  $U_m$ ,  $\varphi_m$  et  $W_m$  sont des paramètres à déterminer. Les fonctions  $X_m(x)$  données dans le tableau III.1 sont proposés par [Malikan et al, 2020] pour satisfaire les diverses conditions aux limites dans les équations III.13.

Notation	$x = 0$	$x = L$	$X_m(x)$
SS	S	S	$\sin(\lambda x), \lambda = \frac{m\pi}{\ell}$
CC	C	C	$\sin^2(\lambda x) \lambda = \frac{m\pi}{\ell}$
CF	C	F	$\sin(\gamma x) * \cos(\gamma x), \gamma = \frac{m\pi}{4\ell}$

Substituant les équations (III.15) dans les équations d'équilibres (III.13) et en multipliant chaque équation par la fonction propre correspondante puis en intégrant sur le domaine de la solution, Nous pouvons obtenir, après quelques manipulations mathématiques, les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ \varphi_m \\ W_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Équation (III.16) présente un système aux valeurs propres pour le problème de flambement des poutres sandwichs en FGM :

$$([K])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.17})$$

Ou  $\{\Delta\}$  représente le vecteur de colonne des inconnus :

$$\{\Delta\}^T = \{U_m, \varphi_m, W_m\} \quad (\text{III.18})$$

Dans lequel :



$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11} \int_0^{\ell} X_m''' X_m' dx \\
 a_{12} &= -B_{11} \int_0^{\ell} X_m''' X_m' dx \\
 a_{13} &= C_{11} \int_0^{\ell} X_m''' X_m' dx \\
 a_{21} &= B_{11} \int_0^{\ell} X_m''' X_m dx \\
 a_{22} &= -D_{11} \int_0^{\ell} X_m'''' X_m dx - N_0 \int_0^{\ell} X_m'' X_m dx \\
 a_{23} &= F_{11} \int_0^{\ell} X_m'''' X_m dx \\
 a_{31} &= C_{11} \int_0^{\ell} X_m''' X_m' dx \\
 a_{32} &= -F_{11} \int_0^{\ell} X_m''' X_m' dx \\
 a_{33} &= H_{11} \int_0^{\ell} X_m'' X_m' dx - A_{55} \int_0^{\ell} X_m' X_m' dx
 \end{aligned}
 \tag{III.19}$$

### I.16 Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de flambement des poutres FGM avec diverses conditions aux bords est examinée. Dans cette étude la poutre sandwich est composée de deux peaux en FGM et de deux cœur en matériau homogène (cœur rigide, en céramique et un cœur souple, en métal). On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre sandwich seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibres pour la poutre sandwich en FGM ont été obtenues par l'utilisation du principe d'énergie des travaux virtuel. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode des variables séparées, et les charges critiques de flambement sont trouvées en résolvant un problème a valeurs propres.

# **CHAPITRE IV : VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS**

### I.17 Introduction

Dans ce présent chapitre, plusieurs exemples numériques sont présentes et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente approche. Les effets de l'indice puissance de la loi de puissance, rapport d'épaisseur des couches, types d'appuis, l'élanement de la poutre sur la charge critique de flambement sont étudiés et discutés. Nous étudions, dans cette partie une poutre en FGM et deux types de poutre sandwiches en FGM ; la première a cœur rigide (en céramique) et la deuxième a cœur souple, (en métal) et les peaux en FGM.

### I.18 Résultats et interprétations

Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

Céramique ( $P_1$ , alumine,  $Al_2O_3$ )  $E_c = 380GPa$ ,  $\nu = 0.23$ .

Métal ( $P_2$ , Aluminium,  $Al$ )  $E_m = 70GPa$ ,  $\nu = 0.23$ .

La charge critique de flambement correspond aux valeurs de  $m$ , conduisant aux valeurs les plus faibles de  $N_0$ . Les résultats numériques sont présentés en termes des charges de flambement adimensionnelles. Le paramètre adimensionnel est défini comme :

$$\bar{N} = \frac{12N_{cr}\ell^2}{h^3 E_m} \quad (IV.1)$$

Sept configurations des poutres sandwiches sont utilisées :

- *Configuration 1-0-1 : dans lequel est composée de deux couches de même épaisseur sans cœur.*
- *Configuration 2-1-2 : dans lequel l'épaisseur du cœur est la moitié de l'épaisseur des peaux.*
- *Configuration 1-1-1 : dans le quel l'épaisseur du cœur est le même que l'épaisseur des peaux.*
- *Configuration 2-2-1 : dans lequel l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur du peau inférieur et le double du celle du peau supérieur.*
- *Configuration 1-2-1 : dans lequel l'épaisseur du cœur est le double de l'épaisseur de feuilles des peaux.*
- *Configuration 2-1-4: dans lequel l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur du peau inférieur et le double du celle du peau supérieur.*
- *Configuration 2-2-1 : dans lequel l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur du peau inférieur et le double du celle du peau supérieur.*

**I.18.1 Validation des résultats de flambement des poutres en FGM avec diverses conditions aux bords**

Les tableaux IV.1 et IV.2 donnent les résultats numériques de la charge critique de flambement adimensionnel d'une poutre FGM pour  $\frac{\ell}{h} = 5$  et  $\frac{\ell}{h} = 10$ , respectivement, avec diverses conditions aux limites en utilisant les théories poutres classique, du premier ordre et d'ordre élevés de déformation en cisaillement. Et pour différentes valeurs d'indice de fraction volumique  $p$ .

À partir des résultats présentés dans les tableaux IV.1 et IV.2, on remarque que nos résultats sont identiques avec les résultats de la théorie de Li [Li et Batra ,2013] pour les diverses conditions aux limites de la poutre FGM. On constate que la charge critique de flambement diminué lorsque l'indice de puissance  $p$  augmente qui est due à la diminution de la quantité de céramique et l'augmentation de métal ce qui influe sur la rigidité de la poutre. En général, les poutres entièrement en céramique donnent les plus grandes valeurs des charges de flambement.

**Tableau I.1 :** -La valeur de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre en FGM sous divers conditions d'appuis,  $\frac{\ell}{h} = 5$

Conditions d'appuis	Theories	P					
		0	0.5	1	2	5	10
S-S	HBT	48.840	32.008	24.689	19.158	15.739	14.953
	FBT	48.835 48.835 <sup>1</sup>	31.967 31.967 <sup>1</sup>	24.687 24.687 <sup>1</sup>	19.245 19.245 <sup>1</sup>	16.024 16.024 <sup>1</sup>	14.427 14.427 <sup>1</sup>
	CBT	53.578 53.578 <sup>1</sup>	34.731 34.731 <sup>1</sup>	26.705 26.207 <sup>1</sup>	20.839 20.838 <sup>1</sup>	17.623 17.623 <sup>1</sup>	16.052 16.052 <sup>1</sup>
C-C	HBT	154.550	103.738	80.589	61.770	47.742	41.797
	FBT	154.351 154.35 <sup>1</sup>	103.223 103.22 <sup>1</sup>	80.498 80.489 <sup>1</sup>	62.615 62.614 <sup>1</sup>	50.384 50.384 <sup>1</sup>	44.267 44.267 <sup>1</sup>
	CBT	214.311 214.31 <sup>1</sup>	138.926 138.93 <sup>1</sup>	106.821 106.82 <sup>1</sup>	83.355 83.355 <sup>1</sup>	70.491 70.491 <sup>1</sup>	64.207 64.207 <sup>1</sup>
C-F	HBT	13.077	8.502	6.543	5.098	4.277	3.882
	FBT	13.077 13.213 <sup>1</sup>	8.499 8.578 <sup>1</sup>	6.543 6.600 <sup>1</sup>	5.104 5.149 <sup>1</sup>	4.298 4.344 <sup>1</sup>	3.903 3.950 <sup>1</sup>
	CBT	13.077 13.394 <sup>1</sup>	8.499 8.683 <sup>1</sup>	6.543 6.676 <sup>1</sup>	5.104 5.210 <sup>1</sup>	4.298 4.406 <sup>1</sup>	3.903 2.766 <sup>1</sup>

<sup>1</sup> CBT, FBT [Li et Batra ,2013]

**Tableau I.2 :** La valeur de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre en FGM sous divers conditions d'appuis,  $\frac{\ell}{h} = 10$

Conditions d'appuis	Theories	P					
		0	0.5	1	2	5	10
S-S	HBT	52.308	34.008	26.171	20.391	17.110	15.528
	FBT	52.309	33.996	26.170	20.416	17.194	15.612
		52.309 <sup>1</sup>	33.996 <sup>1</sup>	26.171 <sup>1</sup>	20.416 <sup>1</sup>	17.192 <sup>1</sup>	15.612 <sup>1</sup>
CBT	53.578	34.731	26.705	20.839	17.623	16.052	
		53.578 <sup>1</sup>	34.731 <sup>1</sup>	26.705 <sup>1</sup>	20.838 <sup>1</sup>	17.623 <sup>1</sup>	16.052 <sup>1</sup>
C-C	HBT	195.361	128.033	98.757	76.633	62.954	56.584
	FBT	195.341	127.869	98.748	76.980	64.096	57.708
		195.341 <sup>1</sup>	127.87 <sup>1</sup>	98.749 <sup>1</sup>	76.980 <sup>1</sup>	64.096 <sup>1</sup>	57.708 <sup>1</sup>
CBT	214.311	138.926	106.821	83.355	70.491	64.207	
		214.311 <sup>1</sup>	138.93 <sup>1</sup>	106.82 <sup>1</sup>	83.355 <sup>1</sup>	70.491 <sup>1</sup>	64.207 <sup>1</sup>
C-F	HBT	13.314	8.637	6.642	5.181	4.373	3.980
	FBT	13.314	8.636	6.642	5.183	4.378	3.985
		13.349 <sup>1</sup>	8.656 <sup>1</sup>	6.657 <sup>1</sup>	5.195 <sup>1</sup>	4.390 <sup>1</sup>	3.997 <sup>1</sup>
CBT	13.394	8.683	6.676	5.210	4.406	4.013	
		13.395 <sup>1</sup>	8.683 <sup>1</sup>	6.676 <sup>1</sup>	5.210 <sup>1</sup>	4.406 <sup>1</sup>	4.013 <sup>1</sup>

### I.18.2 Validation des résultats de flambement des poutres sandwiches en FGM avec diverses conditions aux bords

Dans cette partie, Nous considérons deux type de poutre sandwiches, la première a cœur rigide et la deuxième a cœur souple.

Les résultats obtenus sont comparées avec celle de *Vo et al*, 2.14. À partir des résultats présentés dans les tableaux IV.3- IV.4 pour une poutres sandwich 1-1-1 a cœur rigide et a cœur souple, respectivement, on peut constater que les charges de flambement adimensionnelle de la présente approche montre un bon accord avec celles obtenues par *Vo et al*, 2.14, pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $p$ , le type d'appuis.

La variation de la charge critique de flambement adimensionnelle en fonction de la configuration des poutres sandwiches et l'indice de puissance  $p$  est reportée sur les tableaux (IV.5, IV.6) pour les poutres sandwich a cœur rigide et les tableaux (IV.7, IV.8) pour les poutres sandwich a cœur souple. On remarque que les charges de flambement adimensionnelle diminué avec l'augmentation de l'indice de puissance  $p$  et aussi avec la diminution de l'épaisseur du cœur, par rapport à l'épaisseur totale de la poutre. On note toujours que les poutres entièrement en céramique donne les plus grandes valeurs des charges de flambement quelque soit la configuration de la poutre utilisée dans le calcul, qui s'explique par l'effet de la rigidité sur la charge de flambement de la poutre (lorsque  $p$  augmente le pourcentage de la céramique dans la poutre diminué et le pourcentages du métal augmente qui

conduit à une diminution de la rigidité de la poutre, ce qui donne des faibles charges de flambement) et vice versa, c.-à-d. (lorsque  $p$  augmente le pourcentage du métal dans la poutre diminué et pourcentage de la céramique augmente qui conduit à une augmentation de la rigidité de la poutre, ce qui donne des fortes charges de flambement) . ..

**Tableau I.3 :** La variation de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre sandwich 1-1-1 a cœur rigide.

Conditions d'appuis	$\frac{\ell}{h}$	Theories	P					
			0	0.5	1	2	5	10
S-S	5	Présente	48.596	31.878	24.560	18.359	13.721	12.260
		Vo et al, 2014	48.5959	31.8784	24.5596	18.3587	13.7212	12.2605
	20	Présente	53.236	34.086	25.959	19.200	14.228	12.682
		Vo et al, 2014	53.2364	34.0862	25.9588	19.3116	14.2284	12.6819
C-C	5	Présente	152.147	105.679	83.818	64.423	49.276	44.337
		Vo et al, 2014	152.1470	105.6790	83.8177	64.4229	49.2763	44.3374
	20	Présente	208.951	134.481	102.665	76.102	56.496	50.381
		Vo et al, 2014	208.9510	134.4810	102.6650	76.1020	56.4958	50.3811
C-F	5	Présente	13.059	8.405	6.417	4.756	3.756	3.149
		Vo et al, 2014	13.0594	8.4051	6.4166	4.7564	3.5310	3.1488
	20	Présente	13.373	8.551	6.508	4.811	3.564	3.176
		Vo et al, 2014	13.3730	8.5512	6.5083	4.8110	3.5637	3.1759

**Tableau I.4 :** La variation de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre sandwich 1-1-1 a cœur souple

Conditions d'appuis	$\frac{\ell}{h}$	Theories	P					
			0	0.5	1	2	5	10
S-S	5	Présente	8.952	24.054	30.245	35.706	40.324	42.069
		Vo et al, 2014	8.9519	24.0540	30.2449	35.7058	40.3235	42.0693
	20	Présente	9.807	28.817	36.844	43.541	48.516	50.090
		Vo et al, 2014	9.8067	28.8167	36.8445	43.5408	48.5163	50.0902
C-C	5	Présente	28.027	63.117	77.150	90.927	105.025	111.578
		Vo et al, 2014	28.0272	63.1171	77.1502	90.9271	105.0250	111.5780
	20	Présente	38.491	110.869	141.205	166.829	186.475	192.990
		Vo et al, 2014	38.4910	110.8690	141.2050	166.8290	186.4750	192.9900
C-F	5	Présente	2.406	6.929	8.825	10.427	11.655	12.062
		Vo et al, 2014	2.4057	6.9293	8.8253	10.4268	11.6547	12.0619
	20	Présente	2.463	7.276	9.313	11.006	12.254	12.643
		Vo et al, 2014	2.4635	7.2764	9.3130	11.0062	12.2538	12.643

L'influence de type d'appuis est très claire sur la charge critique de flambement, toujours les poutres encastre-libre donnent la plus petite valeur de la charge critique par rapports aux autres modes d'appuis. Le changement d'appuis joue un rôle important dans la variation de la charge critique de flambement, et la poutre avec des bords encastre (CC) donne toujours la plus grande valeur par rapport à la poutre encastre-libre CF et la poutre a appui simple SS.

**Tableau I.5 :** La variation de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre sandwich a cœur rigide ,  $\frac{\ell}{h} = 5$

CA	P	1-2-1	1-0-1	1-1-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1	2-1-4
S-S	0	48.596	48.596	48.596	48.596	48.596	48.596	48.596
	0.5	34.765	27.857	31.878	30.030	33.253	31.073	29.777
	1	28.445	19.652	24.560	22.211	26.361	23.524	21.932
	2	22.787	13.580	18.359	15.915	20.375	17.324	15.765
	5	18.091	10.146	13.721	11.668	15.730	13.027	11.863
	10	16.378	9.451	12.260	10.535	14.199	11.837	10.925
C-C	0	152.147	152.147	152.147	152.147	152.147	152.147	152.147
	0.5	114.171	92.883	105.679	99.986	109.601	102.911	98.765
	1	95.729	67.498	83.818	76.263	89.218	80.164	74.846
	2	78.561	47.701	64.423	56.206	70.752	60.601	55.123
	5	63.782	35.549	49.276	42.003	55.821	46.368	41.884
	10	58.246	32.302	44.337	37.994	50.725	42.188	38.312
C-F	0	13.059	13.0594	13.059	13.059	13.059	13.059	13.059
	0.5	9.194	7.331	8.405	7.907	8.784	8.195	7.850
	1	7.464	5.125	6.417	5.792	6.905	6.149	5.730
	2	5.935	3.517	4.756	4.116	5.295	4.493	4.089
	5	4.681	2.630	3.756	3.000	4.062	3.361	3.068
	10	4.227	2.468	3.149	2.708	3.659	3.053	2.831

**Tableau I.6 :** La variation de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre sandwich a cœur rigide ,  $\frac{\ell}{h} = 20$

CA	P	1-2-1	1-0-1	1-1-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1	2-1-4
S-S	0	53.236	53.236	53.236	53.236	53.236	53.236	53.236
	0.5	37.316	29.718	34.086	32.054	35.640	33.238	31.833
	1	30.231	20.721	25.959	23.421	27.954	24.879	23.182
	2	23.990	14.197	19.200	16.605	21.392	18.140	16.510
	5	18.887	10.617	14.228	12.088	16.383	13.552	12.379
	10	17.044	9.985	12.682	10.907	14.752	12.308	11.428
C-C	0	208.951	208.951	208.951	208.951	208.951	208.951	208.951
	0.5	147.104	117.303	134.481	126.508	140.543	131.122	125.597
	1	119.422	81.992	102.665	92.674	110.479	98.383	91.682
	2	94.956	56.277	76.102	65.849	84.722	71.883	65.423
	5	74.890	42.078	56.496	48.007	64.992	53.773	49.088
	10	67.627	39.493	50.381	43.323	58.551	48.842	45.294
C-F	0	13.373	13.373	13.373	13.373	13.373	13.373	13.373
	0.5	9.363	7.454	8.551	8.040	8.942	8.338	7.986
	1	7.581	5.194	6.508	5.871	7.010	6.238	5.812
	2	6.013	3.557	4.811	4.160	5.362	4.546	4.137
	5	4.732	2.660	3.564	3.028	4.104	3.395	3.101
	10	4.270	2.503	3.176	2.732	3.695	3.083	2.864

**Tableau I.7 :** La variation de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre sandwich a cœur souple,  $\frac{\ell}{h} = 5$

<i>BC</i>	<b>P</b>	<b>1-2-1</b>	<b>1-0-1</b>	<b>1-1-1</b>	<b>2-1-2</b>	<b>2-2-1</b>	<b>2-1-1</b>	<b>2-1-4</b>
<i>S-S</i>	0	8.952	8.952	8.952	8.952	8.952	8.952	8.952
	0.5	21.382	28.428	24.054	25.950	22.386	24.542	25.953
	1	26.480	36.210	30.245	32.897	27.887	30.931	32.879
	2	31.015	42.450	35.706	38.859	32.790	36.484	38.739
	5	35.036	46.650	40.324	43.534	37.035	40.981	43.226
	10	36.687	47.782	42.069	45.114	38.701	42.600	44.746
<i>C-C</i>	0	28.027	28.027	28.027	28.027	28.027	28.027	28.027
	0.5	56.140	77.996	63.117	68.999	59.938	66.592	71.406
	1	66.452	99.920	77.150	86.318	72.771	83.069	90.385
	2	76.063	120.504	90.927	103.313	85.366	99.244	108.681
	5	85.846	138.514	105.025	119.917	98.255	115.034	125.702
	10	90.581	145.336	111.578	127.113	104.257	121.892	132.695
<i>C-F</i>	0	2.406	2.406	2.406	2.406	2.406	2.406	2.406
	0.5	6.158	8.034	6.929	7.432	6.392	6.968	7.325
	1	7.786	10.208	8.825	9.477	8.053	8.820	9.283
	2	9.221	11.830	10.427	11.129	9.479	10.346	10.846
	5	10.421	12.778	11.655	12.282	10.616	11.471	11.933
	10	10.872	12.973	12.062	12.611	11.021	11.834	12.261

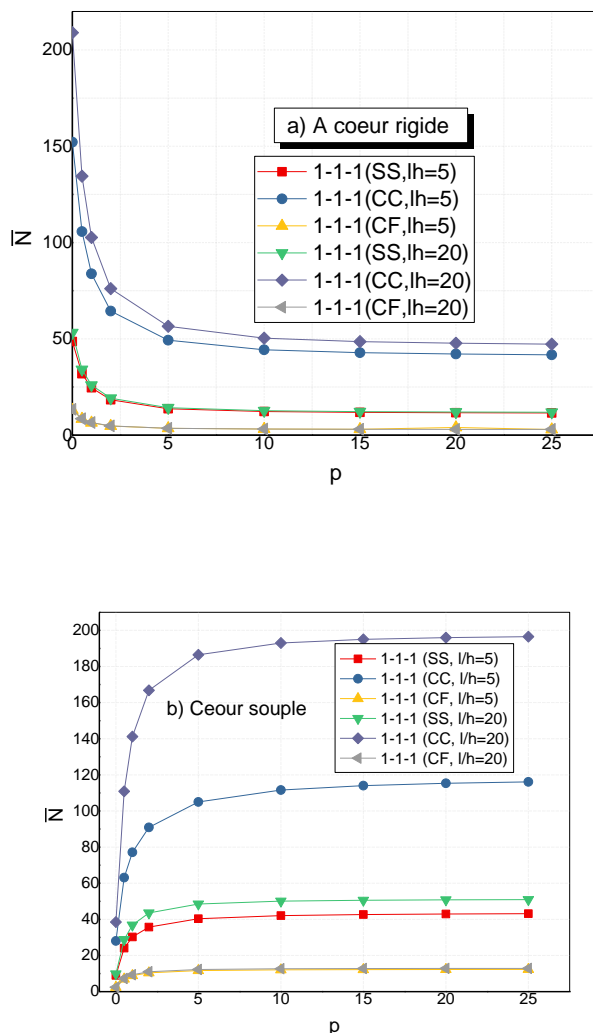
**Tableau I.8 :** La variation de la charge critique  $\bar{N}$  de la poutre sandwich a cœur souple,  $\frac{\ell}{h} = 20$

<i>BC</i>	<b>P</b>	<b>1-2-1</b>	<b>1-0-1</b>	<b>1-1-1</b>	<b>2-1-2</b>	<b>2-2-1</b>	<b>2-1-1</b>	<b>2-1-4</b>
<i>S-S</i>	0	9.807	9.807	9.807	9.807	9.807	9.807	9.807
	0.5	25.606	33.219	28.817	30.855	26.512	28.851	30.280
	1	32.580	42.181	36.844	39.412	33.515	36.567	38.376
	2	38.719	48.722	43.541	46.203	39.459	42.826	44.730
	5	43.764	52.365	48.516	50.761	44.084	47.305	49.011
	10	45.604	53.033	50.090	51.980	45.673	48.693	50.254
<i>C-C</i>	0	38.491	38.491	38.491	38.491	38.491	38.491	38.491
	0.5	98.524	128.536	110.869	118.916	102.271	111.484	117.203
	1	124.572	163.330	141.205	151.634	128.851	141.118	148.531
	2	147.535	189.286	166.829	178.072	151.659	165.541	173.544
	5	166.733	204.447	186.475	196.509	169.860	183.549	190.929
	10	173.946	207.566	192.990	201.771	176.330	189.348	196.181
<i>C-F</i>	0	2.463	2.463	2.463	2.463	2.463	2.463	2.463
	0.5	6.465	8.375	7.276	7.787	6.690	7.277	7.634
	1	8.240	10.633	9.313	9.952	8.464	9.226	9.675
	2	9.802	12.271	11.006	11.661	9.966	10.801	11.270
	5	11.079	13.172	12.254	12.797	11.127	11.918	12.335
	10	11.542	13.332	12.643	13.095	11.522	12.261	12.641

La figure IV.1, illustre la variation de la charge critique de flambement en fonction de l'indice de puissance pour une poutre sandwich (1-1-1). Lorsqu'on compare les résultats des



élancement ( $\frac{\ell}{h} = 5$  et 20), On peut voir qu'ils presque identique pour la poutre encastre-libre et deviennent plus discordants pour les poutres a appui simple (SS) et a bord encasté (CC).

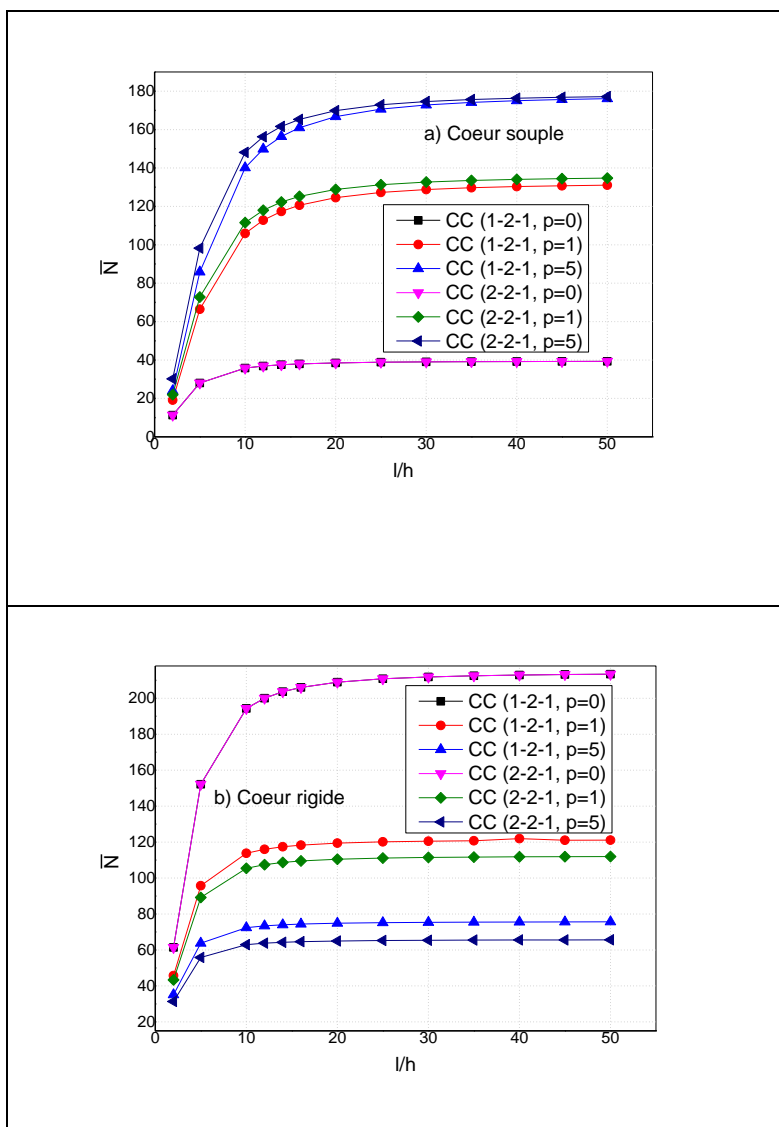


**Figure I.20 :** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle, d'une poutre sandwich 1-1-1.

Il est claire que l'effet de la déformation en cisaillement, est plus important pour les poutres a bord encasté (CC). Cet effet est plus prononcé pour les poutres a cœur souple que celles a cœur rigide.

La figure IV.2, illustre la variation de la charge critique de flambement en fonction de élancement  $\frac{\ell}{h}$  et pour  $p = 0,1$  et 5 pour des poutre sandwich (1-2-1) et (2-2-1), a bord encastre. Pour les poutres sandwich a cœur souple la configuration 2-2-1 a donne des charge

critique supérieure de la configuration 1-2-1. Par contre pour les poutres a cœur rigide la configuration 1-2-1 a générer valeur de la charge critique supérieure a celle de la configuration 2-2-1.



**Figure I.21 :** Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle, des poutres sandwichs 1-2-1 et 2-2-1.

En générale, la charge critique de flambement des poutres sandwichs a cœur rigide sont toujours plus grande que celles des poutres sandwichs cœur souple.

### I.19 Conclusion

Dans ce chapitre, la précision et l'efficacité de l'approche analytique proposée a été démontrées pour analyser le comportement de flambement des poutres en FGM. Trois types de poutre P – FGM sont considérée, dont deux poutre sandwich en FGM avec des cœur homogène (un cœur rigide , et un cœur souple) et des peaux en FGM. En conclusion, nous

pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente approche proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse du problème de flambement des poutres sandwichs rectangulaire en FGM avec diverses conditions aux bords.

## Conclusion générale et perspectives

---

Dans ce travail nous avons présenté une étude analytique du problème de flambement des poutres sandwiches en FGM avec diverses conditions aux bords. Dans cette étude, les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibres ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie des travaux virtuels. La méthode des variables séparés est utilisée pour la résolution des équations d'équilibres. Les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant un système aux valeurs propre. une étude comparative des résultats obtenues en utilisant cette approche avec les résultats qui existe dans la littérature permis de dégager plusieurs points :

Les comparaisons des résultats des charges critiques de flambement montrent que les charges critiques générées par cette approche avec les résultats obtenus par Vo et al, 2014, sont identiques.

- ✓ les poutres entièrement en céramique donnent les plus grandes charges critiques de flambement.
- ✓ les charges critiques de flambement diminuent pour les poutres sandwich à cœur rigide et augmentent pour les poutres sandwich à cœur souple.
- ✓ la charge de flambement  $\bar{N}$  augmente progressivement avec le rapport  $\ell/h$  de la poutre..

Afin de compléter les résultats obtenus et de mieux cerner le comportement mécanique des poutres sandwiches en FGM, nous envisageons les perspectives suivantes pour la suite de notre recherche :

- La prise en compte de l'effet de la température sur le flambement des poutres;
- Utilisation de cette approche pour résoudre les problèmes de vibration.

## References

---

- [A. Chabot,1997] A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [A. K.,1989] A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.
- [A. TAFLA, 2007] A. TAFLA « Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches » Thèse de doctorat de l'université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [Agrawal B.D, 1990] Agrawal B.D., Broutman L.J. Analysis and performance of fiber composite. 2nd edition, John Wiley and Sons, New York 1990, p449
- [Ait Amar et al, 2014] M. Ait Amar Meziane, A. HadjHenni, and A. Tounsi, An Efficient and Simple Refined Theory for Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates under Various Boundary Conditions, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318, 2014.
- [Ait Amar Meziane. 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A., An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions, *J. Sandw. Struct.Mater.*, 16(3), 293-318, 2014.
- [Ait Atmane et al, 2010] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*, 6(2), 113-121, 2010.
- [Ait Atmane. 2015] Ait Atmane, H. Tounsi, A. and Bernard, F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Mater*, 1- 14, 2015.
- [Attia 2018] Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S., A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations, *Struct. Eng. Mech.*, 65(4). 453-464, 2018.
- [Aydogdu, 2007] Uymaz, B., and Aydogdu, M., Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions, *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863, 2007.
- [Belabed et al, 2014] Belabed, Z., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R. and Anwar Bég, O., An Efficient and Simple Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for Functionally Graded Material (FGM) Plates, *Composites: Part B*, vol. 60, pp. 274–283, 2014.
- [Benachouret al, 2011] Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mefah, S. A. (2011) |A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Composites: Part B* 42, 1386–1394, 2011.

- [Bennai 2019] Bennai, R., Fourn, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., and Bessaim, A., Dynamic and wave propagation investigation of FGM plates with porosities using a four variable plate theory, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 28(1), 49-62, 2019.
- [Benyoucef S, 2006] Benyoucef S, Tounsi A, Meftah S.A., Adda bedia E.A. "Approximate Analysis of the Interfacial Stress Concentrations in FRP – RC Hybrid Beams". *Composites Interface* 2006;13(7):561-571
- [Birman 2007] Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Appl Mech Rev*, 60(5), 195–216, 2007.
- [B-O. Sallai, 2009] B-O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, M. Bachir Bouiadjra, M. Meradjah, E.A. Adda Bedia "A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams" *Computational Materials Science* 44, 1344–1350, 2009.
- [BOCH, P,1986] BOCH, P., CHARTIER, T. & HUTTEPAIN, M., Tape Casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> Laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 69, N°. 8, p. C-191-C-192, (1986).
- [BOCH, P,1987] BOCH, P. Tape Casting of Layered Composites, in *Processing of Advanced Ceramics*. Edited by J. S. Moya and S. de Aza. Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, p. 103-112, (1987)
- [Bodaghi et Saidi, 2010] Bodaghi, M. et Saidi, A.R., Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, 3659–3673, 2010.
- [C. Kassapoglou,1987] C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress  $\sigma_{xz}$  in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [C. Ossadzow, 2001] C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [Chaouche Abdellah, 2013] Chaouche Abdellah, *Analyse Vibratoire Des Plaques Minces Sous D ifferentes Conditions Aux Limites*, Master Professionnel, universit  KasdiMerbah Ouargla, 2013.
- [Chen 2018] Chen, Y., Jin, G., Zhang, C., Ye, T., Xue, Y., Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher-order shear deformation theory, *Composite Part B*, 153, 376-386, 2018.
- [Chen 2018] Chen, Y., Jin, G., Zhang, C., Ye, T., Xue, Y., Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher-order shear deformation theory, *Composite Part B*, 153, 376-386, 2018.
- [Dorlot J.M, 1986] Dorlot J.M, Baillon J.P, Masounave J. *Des matériaux* 2 me  dition, Ecole polytechnique de Montréal, Montréal, Québec 1986 , p467.
- [Draiche 2014] Draiche, K., Tounsi, A., and Khalfi, Y., A Trigonometric Four Variable Plate Theory for Free Vibration of Rectangular Composite Plates with Patch Mass, *Steel and Composite Structures*, vol. 17, no. 1, pp. 69–81, 2014.

- [Draiche et al, 2014] K. Draiche, A. Tounsi, and Y. Khalfi, A Trigonometric Four Variable Plate Theory for Free Vibration of Rectangular Composite Plates with Patch Mass, Steel and Composite Structures, vol. 17, no. 1, pp. 69–81, 2014.
- [E. Carrera,2000] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [E. Reissner 1961] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [Ebrahimi 2018] Ebrahimi, F., Safarpour, H., Vibration analysis of inhomogeneous nonlocal beams via a modified couple stress theory incorporating surface effects, Wind and Structures, An Int'l Journal, 27(6), 431-438, 2018.
- [Ebrahimi 2018] Ebrahimi, F., Safarpour, H., Vibration analysis of inhomogeneous nonlocal beams via a modified couple stress theory incorporating surface effects, Wind and Structures, An Int'l Journal, 27(6), 431-438, 2018.
- [El Meiche et al, 2012] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, and E. A. AddaBedia, A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Buckling and Vibration of Functionally Graded Sandwich Plate, International Journal of Mechanical Sciences, 53, no. 4, pp. 237–247, 2011.
- [ELOMARI Kawthar, 2011] ELOMARI Kawthar « Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. » Thèse de Master de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [F. Delale, 1983] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614, 1983.
- [Fekrar et al, 2014] Fekrar, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Mahmoud, S. R., A New Five-Unknown Refined Theory Based on Neutral Surface Position for Bending Analysis of Exponential Graded Plates, Meccanica, vol. 49, pp. 795–810, 2014.
- [Ferreira 2006] Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, Composite Structures, 75, 593–600, 2006.
- [G. Kirchhoff,1850] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [Giunta 2013] Giunta, G., Crisafulli, D., Belouettar, S., Carrera, E., A thermo-mechanical analysis of functionally graded beams via hierarchical modeling, Compos Struct, 95, 676-90, 2013.
- [Hadji et al, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", Applied Mathematics and Mechanics, 925–942, 2011.

[Hamdi 2018] Hamdi, H., and Farah, K., Beam finite element model of a vibrate wind blade in large elastic deformation, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 26(1), 25-34, 2018.

[Hossein Abdizadeh 1997] Hossein Abdizadeh, *Elaboration et Caractérisation de Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'alumine»*, Thèse de Doctorat, L'institut National des Sciences appliquées de Lyon, 1997.

[HOUARI, M,2011] HOUARI MOHAMMED SID AHMED « Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.

[Huang et Shen, 2004] Huang, X.-L., and Shen, H.S., Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2403–2427, 2004.

[J.G. Ren,1986] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.

[J.M. Whitney,1973] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.

[J.N. Reddy,1984] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.

[J.N. Reddy,1987] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.

[Javaheri et Eslami, 2002a] Javaheri, R., Eslami, M.R., Thermal buckling of functionally graded plates, *AIAA Journal*, 40, 162–9, 2002.

[Javaheri et Eslami, 2002b] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002b), —Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *J. Therm. Stress.*, 25(1), 603-625, 2002.

[Javaheri et Eslami, 2002c] Javaheri. R and Eslami. M. R (2002c), —Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *ZAMM*, 82, No. 4, 277-283, 2002.

[K.S. Afaq,2003] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

[Karami 2018] Karami, B., Janghorban, M., Shahsavari, D., Tounsi, A., A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates, *Steel and Composite Structures*, 28(1), 99-110, 2018.

[Kawa,C 1990] KAWAI, C., WAKAMATSU, S., SAKAGAMI, S., & IGARASHI, T., Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1990, p. 77-82.



- [Khalfi et al, 2014] Khalfi, Y., Houari, M. S. A., and Tounsi, A., A Refined and Simple Shear Deformation Theory for Thermal Buckling of Solar Functionally Graded Plates on Elastic Foundation, *International Journal of Computational Methods*, vol. 11, No. 5, 2014.
- [KIEBACK B,2003] KIEBACK B., NEUBRAND A., Riedel H. «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105
- [Klouche Djedid et al, 2014] Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Ameer, M. , A norder Four Variable Refined Theory for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Plates, *Steel and Composite Structures*, 17(1), 21–46, 2014.
- [L. Liberscu,1969] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [Lanhe, 2004] W. Lanhe, Thermal Buckling of a Simply Supported Moderately Thick Rectangular FGM Plate, *Composite Structures*, vol. 64, pp. 211–218, 2004.
- [Li 2009] Li, Q., Iu, V. and Kou, K., Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment, *J. Sound Vib.*, 324(3-5), 733-750, 2009.
- [Li et Batra, 2013] Li S-R, Batra RC. Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler–Bernoulli beams. *Compos Struct* 2013;95(0):5–9.
- [Malikan, M., Eremeyev, V.A, 2020] A new hyperbolic-polynomial higher-order elasticity theory for mechanics of thick FGM beams with imperfection in the material composition, *Composite Structures*,
- [M. Di Sciuva,1984] M. Di Sciuva. A re\_ned transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279 {295, 1984.
- [M. Di Sciuva,1987] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [M. Karama,1998] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [M. Tahani,2003] M. Tahani & A. Nosier. Edge e\_ect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [M. Touratier,1991] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [Metin Aydogdu,2005] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740–1755.
- [Mistler.R.E, 1973] Mistler. R. E., High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, (1973).

- [Moya 1992] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Graded Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, 1992, Vol. 14, p.333-35.
- [N.J Pagano,1987] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.
- [N.J. Pagano,1969] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [N.J. Pagano,1970] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20-35, 1970.
- [Na et Kim, 2005] Na, K.S. et Kim, J.H., (2005), Three-Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials, *AIAA Journal*, 47, 1605-1612, 2005.
- [Nedri 2014] Nedri, K., El Meiche, N., and Tounsi, A., Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 641–650, 2014.
- [Ould Larbi, 2013] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M. S. A., and Tounsi, A., An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 41, pp. 421–433, 2013.
- [OuldLarbi et al, 2013] L. OuldLarbi, A. Kaci, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 41, pp. 421– 433, 2013.
- [Praveen et Reddy, 1998] Praveen, G.N., and Reddy, J.N., Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates, *International Journal of Solids and Structures*, 4457-4476, 1998.
- [R. K. Kapania,1989] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.
- [Reddy 2000] Reddy, J.N., Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 663–684, 2000.
- [Reddy 2004] Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press, 2004.
- [Reddy et Chen, 2003] Reddy, J.N., et Chen, Z.Q., Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach, *Journal of Engineering Mechanics*, 129, 896–900, 2003.
- [Reddy et Cheng, 2001] Reddy, J. N, Cheng, Z. Q, (2001), Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5):841–855, 2001.

- [Reddy, 1999] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Reddy, 2004] J. N. Reddy, Analysis of Functionally Graded Plate, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 47, pp. 663–684, 2000.
- [Reynes M, 1990] Reynes M. Technologie des composites, édition Hermès, édition Hermès, Paris 1990, p198.
- [Rigal J.P, 1989] Rigal J.P. Matériaux composites, teknea, Belma, France 1989, p 288.
- [Rong 2018] Rong, X.N., Xu, R.Q., Wang, H.Y., Feng, S.Y., Analytical solution for natural frequency of monopile supported wind turbine towers, Wind and Structures, An Int'l Journal, 25(5), 459-474, 2018.
- [S. Srinivas,1970] S. Srinivas & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. Int J Solids Structures, vol. 6, pages 1463 {1481, 1970.
- [S. Srinivas,1973] S. Srinivas & A.K. Rao. Flexure of thick plates. ASME, pages 298-299, 1973.
- [S.A. Ambartsumyan,1969] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co,1969.
- [Saidi 2013] Saidi, H., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Adda Bedia, E. A., Thermomechanical Bending Response with Stretching Effect of Functionally Graded Sandwich Plates Using a Novel Shear Deformation Theory, Steel Composite Structures, vol. 15, pp. 221–245, 2013.
- [Saidi et al, 2013] H. Saidi, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and E. A. AddaBedia, Thermomechanical Bending Response with Stretching Effect of Functionally Graded Sandwich Plates Using a Novel Shear Deformation Theory, Steel Composite Structures, vol. 15, pp. 221–245, 2013.
- [Sankar 2002] Sankar, B.V., Tzeng, J.T., Thermal stresses in functionally graded beams, AIAA J, 40(6), 1228-32, 2002.
- [Sark 1996] SARKAR, P. & NICHOLSON, P. S., Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics, J. Am. Ceram. Soc., 1996, Vol. 79, N°. 8, p. 1987-2002.
- [Shahrjerdi 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A., Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory, J. Mech. Sci. Techol., 25(9), 2195-2209.
- [Shariat et al, 2005] Samsam Shariat. B. A, Javaheri R, and M. R. Eslami (2005), —Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading, Thin-Wall. Struct, 43, 1020- 1036, 2005.
- [Shariat et Eslami, 2006] Samsam Shariat. B. A and Eslami. M. R (2006), Thermal buckling of imperfect functionally graded plates, Int. J. Solids Struct., 43, 4082-4096, 2006.

- [Shariat et Eslami, 2007] Samsam Shariat, B.A. et Eslami, M.R. (2007), Buckling of Thick Functionally Graded Plates Under Mechanical and Thermal Loads, *Composite Structures*, 78, 433-439, 2007.
- [Shen 2014] Shen H-S., Wang Z-X., Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Int J Mech Sci*, 81, 195-206, 2014.
- [Shen, 2000] H.-S. Shen, Nonlinear Bending Response of Functionally Graded Plates Subjected to Transverse Loads and in Thermal Environments. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 561–584, 2000.
- [Shen, 2007] Shen, H.S., Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 466- 478, 2007.
- [Simsek 2010] Simsek, M., Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, *Nucl Eng Des*, 240, 697–705, 2010.
- [Sina 2009] Sina, S.A., Navazi, H.M., Haddadpour, H., An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams, *Mater Des*; 30(3), 741–747, 2009.
- [Steffens H.D, 1990] Steffens H.D., Dvorak. M., Wewel. M., Plasma sprayed functionally gradient materials- processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, (1990).
- [T. Kant,2000] T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.
- [Takahash, M, 1990] Takahash, M., Itoh. Y., Kashiwaya, K., Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, (1990).
- [Tounsi et al, 2013] A. Tounsi M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates, *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 209–220, 2013, 2013.
- [Trinh 2016] Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T., T.K., Nguyen, T.K., An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads, *Composites Part B*, 100, 152-163, 2016.
- [U. Icardi,2001] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Uymaz et Aydogdu, 2007] Uymaz, B. and Aydogdu, M., Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions, *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863, 2007.

- [Vel et Batra 2004] Vel, S.S., and Batra, R.C., Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 703-730, 2004.
- [Vel et Batra, 2002] Vel, S.S. et Batra, R.C., Exact Solution for Thermo elastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates, *AIAA Journal*, 40, 1421-1433, 2002.
- [Viet.Tung, 2004] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [Vo et al, 2014] ,T. P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, A. Maheri, J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Engineering Structures* 64 (2014) 12 – 22.,
- [W.L. Yin,1994] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [Wattanasakulpong 2011] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 734–743, 2011.
- [Wattanasakulpong 2011] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 734–743, 2011.
- [Woo et Meguid, 2001] Woo, J. and Meguid, S.A., Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7409-7421, 2001.
- [Wu, 2004] Wu, L.,Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Composite Structures*, 64, 211–218, 2004.
- [Yang. J, 2003] Yang. J., Shen, J., H.-S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, (2003).
- [Yuki,1991] YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan*, 1991, p. 203
- [ZenkouretAlghamdi, 2010] A. M. Zenkour and N. A. Alghamdi, Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 17, pp. 419–432, 2010.
- [Zidi et al, 2014] M. Zidi, A. Tounsi, M. S. A., Houari, E. A. Adda Bedia, and O. Anwar Bég, Bending Analysis of FGM Plates under Hygro-thermomechanical Loading Using a Four Variable Refined Plate Theory, *Aerospace Science and Technology*, vol. 34, pp. 24–34, 2014.