REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : [Mathématiques]

Par :

Merabet Asmaa Kheira.

Merzougui Nour El Houda.

Senouci Ahmed Saif Eddine.

Sur le thème

Quelques inégalités intégrales fractionnaires pour les fonctions s-convexes

---

Soutenu publiquement le 08/06 / 2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. SENOUCI Abdelkader	Grade	Université Pr	Président
Mr. SOFRANI Mohammed	Grade	Université MAA	Encadreur
Mr.SOUID Mohammed said	Grade	Université Pr	Examinateur

2021-2022

Dédicaces

...Je dédie ce travail.

Aux êtres les plus chers à mes yeux qui m'ont soutenu durant toutes mes études à savoir : À mon très cher père MERABET AHMED « Que dieu aie son âme ».
À ma trés chere mère Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma consıdération pour les sacrifices que vous mon instruction et mon bien être. Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longe vie.
À mes frères et mes soeurs qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.Ils m'ont chaleureusement supporté et encouragè tout au long de mon parcours.
À ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.
Que dieu vous garde.
Je leur offre ce travail par amour et attachement .
À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé.

Asmaa

Dédicaces

...je dédie ce travail en signe de reconnaissance .

A celui qui a lutté et sacrifié pour m'offrir les conditions propices à ma réussite
Mon trés cher père.
A celle qui m'a étreint de tendresse et d'affection et qui a constitué la première école de mon existance.
Ma très précieuse, chaleureuse et aimable mère.
Grace à mes parents que j'ai pu faire mes études et gravir les pentes qui me semblaient infranchissables.
A mes soeurs pour leur tendresse et leur complicité
Pour leurs encouragements et je leurs souhaite tout le bonheur et la réussite.
En témoignage de leur amour et de leur affectation dont ils ont toujours fait preuve.
Que dieu vous garde.
Je leur offre ce travail par amour et attachement .
A toute la famille

Houda

Dédicaces

...je tiens c'est avec grande plaisir que je dédie ce modeste travail :

A Ma mère qui m'a enccouragé durant toutes mes études, et qui sans elle ,ma réussite n'aura pas eu lieu.
A Qu'elle trouve ici mon amour et mon effection.
A Celui qui m'a fait de moi un homme,mon père.
A Mes chers fréres Djamel et Imad.
Tous Mes Amis,tout particulièrement Elhacene et Aymane qui m'ont toujours encouragé,et à qui je souhaite plus de succés.
A toute la famille .

Saif Eddine

Remerciements

En premier lieu, nous remercions Allah qui nous avoir donné le courage et la volonté ça fin d'accomplir ce modeste travail.
Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce Mr.Sofrani Mohammed pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous.
Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.
Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet scolaire.
Nous remercions les parents généreux pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs. Et nous remercions les frères et sœurs chére.
Nous remercions les amis et les collègues .
Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Résumé

Ce mémoire est consacré à la preuve de certaines nouvelles inégalités intégrales fractionnaires pour les fonctions s-convexes,en utilisant une égalité qui est donnée dans [16].Aussi sont donéés quelques applications à des moyennes spéciaux des nombres réels positifs.
Mots clés : Inégalitées de type d'Ostowski,Inégalité de type médian,integrale fractionnaire de Riemann-Liouville,fonctions s-convexes,

Table des matières

INTRODUCTION

La convexité est une notion simple qui remonté à Archimedes à propos de sa célèbre estimation de la valeur $\boldsymbol{\pi}$.

Il a remarqué une réalité importante ,que le périmètre d'une figure convexe est plus petit que le périmètre de tout autre figure convexe qui est circourcuit. L'étude du sujet des fonctions convexes est généralement attribuée à J.L.W.Jensen.

Cependant il n'était pas le premier a utiliser de telles fonctions,mais il y 'a d'autres tels que :Hermite,Hölder et Stolz. Pendant tout le XXe siècle,il y 'eut une activité de recherche et de nombreux résultats importants,en analyse fonctionnelle,géométrie,économie mathématique,analyse convexe et l'optimisation.

Le concept de convexité et ses diverses généralisations et extensions jouent un rôle important dans l'analyse moderne.

Des nombreuses inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard sont présentés pour les fonctions convexes,pour log-convexe,quasi-convexe,et s-convexe.

En ce qui concerne la fonction s-convexe,le concept suivant :
$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ òu $\mathbb{R}_+ = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\infty})$ est dit s-convexe au premier sens si :

$$\boldsymbol{f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).}$$

pour tout $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}_+$ $\boldsymbol{\alpha, \beta} \geq \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\alpha^s + \beta^s} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{s} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ a été introduit par Orlicz.

En 1992,Hudzik et Maligrand considérent le concept suivant :
$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dit s-convexe au deuxième sens si :

$$\boldsymbol{f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).}$$

pour tout $\boldsymbol{x, b} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha + \beta} = \mathbf{1}$ et $\boldsymbol{s} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

En 1999 Dragomir présenté les inégalités intégrales d'Hermite-Hadamard pour les fonctions s-convexes au deuxième sens.

Le mémoire est constitué de quatre chapitres repartis comme suit :

Le premier chapitre comprend certaines notions nécéssaires pour le calcul fractionnaire , ensuite sont définis les espaces intégrables, des fonctions continues et absolument continues et quelques inégalités de Hölder, Ostrowski et Hermite-Hadamard.

Le deuxième chapitre comprend quelques nouvelles inégalités intégrales pour les fonctions convexes et s-convexes.

Dans le troisième chapitre on considère quelques nouvelles inégalités intégrales fractionnaire de Riemann-Liouville pour les fonctions convexes et s-convexes.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude quelques applications des inégalités intégrales pour les fonctions s-convexes .

Nous terminons notre mémoire par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous introduisons quelques définitions,d'espaces des fonctions p-intégrables,absoluments continues et des fonctions continues et leurs propriétés.
Nous présentons également les fonctions Gamma,Béta et quelques types des fonctions convexes.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace des fonctions intégrales

Définition 1.1.1. *Soient* $\Omega = (a, b)(\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infini dans* $\mathbb{R}$ *,* $1 \leq p \leq \infty$*.*

1. *Pour* $1 \leq p < \infty$*, l'éspace* $L^P(\Omega)$ *est l'éspace des classes des fonctions f réelles sur* Ω *telles que f est mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

2. *Pour* $p = \infty$ *,l'éspace* $L^\infty(\Omega)$*est l'éspace des classes des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur* Ω*.*

Théorème 1.1.1. *Soit* $\Omega = (a, b)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$.

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$ *, l'éspace* $L^p(\Omega)$ *est un éspace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. *L'éspace* $L^\infty(\Omega)$ *est un éspace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = inf\{M \geq 0 : \ |f(x)| \leq M \ \ p.p \, sur \, \Omega\}.$$

1.1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.1.2. *([20]) Soit* $\Omega = [a, b](-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ *on désigne par* $\mathbb{C}^n(\Omega)$ *l'éspace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou* *égale à (n-1) continues sur* $\boldsymbol{\Omega}$*,muni de la norme :*

$$\|f\|_{c^n} := \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}(x)\right\| := \sum_{k=0}^{n} max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0, \mathbb{C}^{O}(\Omega) = \mathbb{C}(\Omega)$ *l'éspace des fonctions f continues sur* Ω *muni de la norme :*

$$\|f\|_{C} := max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Définition 1.1.3. *([20]) Soit* $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < +\infty)$*un intervalle fini. on désigne par*$AC([a, b])$ *l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrable , c'est à dire :*

$$AC([a, b]) = \{f/\exists\varphi \in L^1([a, b]) : \ f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt\}.$$

Et on appelle AC([a,b])l'éspace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Définition 1.1.4. *([20]) Pour* $n \in \mathbb{N} = 0, 1, ...,$ *on désigne par* $AC^n([a, b])$*l'éspace des fonctions f ayant des drivées jusqu'à l'ordre* $(n - 1)$*continue sur [a,b] telles que* $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ *:*

$$AC^n([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{C}\} \ et \ f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

En particulier $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$.

1.1.3 Espace des fonction continues avec poids $C_\lambda([a.b])$

Définition 1.1.5. *([20]) Soit* $\Omega = [a, b]$ *un intervalle fini et* $\lambda \in C(0 \leq \Re(\lambda) < 1)$ *On désigne par* $C_\lambda([a, b])$*l'éspace des fonction f définies sur]a,b] telles que la fonction* $(x - a)^\lambda f(x) \in C([a, b])$ *c'est à dire :*

$$C_\lambda([a, b]) = \{f :]a, b] \to C, (. - a)^\lambda f(.) \in C([a, b])\} \tag{1.1}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\lambda} = \|(x - a)^\lambda f(x)\|_C = max_{x\in\Omega} |(x - a)\lambda f(x)|. \tag{1.2}$$

L'éspace $C_\lambda([a, b])$ *est appelé l'éspace des fonctions continues avec poids en particulier,* $C_0([a, b]) = C([a, b])$.

Définition 1.1.6. *([25]) Une fonction réelle f(t),*$t \geq 0$ *est dite dans l'éspace* C_μ *,*$\mu \in \mathbb{R}$ *s'il existe un nombre réel* $p > \mu$ *tel que* $f(t) = t^p f_1(t)$*, où*$f_1(t) \in C([0, \infty])$.

Définition 1.1.7. *Une fonction f(t),*$t \geq 0$ *est dite dans l'éspace* $C_\mu^n \in \mathbb{R}$*, si* $f^{(n)} \in C_\mu$.

1.2 Les inégalités intégrales

1.2.1 Inégalité de Hölder

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p, q < \infty$,telles que $q = \dfrac{p}{p-1}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on a l'inégalité :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_\Omega |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité se généralise en considérant les réels $p_j > 1$ donc $\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} = 1$:

$$\forall f_j \in L^{p_j}(\Omega), \int_\Omega \left| \prod_{j>1} f_j(x) \right| dx \leq \prod_{j>1} \left(\int_\Omega \left| f_j(x) \right|^{p_j} dx \right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

1.2.2 Inégalité de Cauchy Schwartz

Soient $f, g \in (C([a,b],\mathbb{R}))^2$ si $p = q = 2$ alors :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.3 Inégalité d'Ostrowski

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$, telle que $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in (a,b)$,alors :

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a)M \left[\frac{1}{4} + (\frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right].$$

Pour tout $x \in [a,b]$.

1.2.4 Inégalité de Hermite-Hadamard

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur $[a,b]$,alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

inégalité de Hermite-Hadamard.

1.2.5 Inégalité integrale de puissance moyenne

(See[24]) Soient f, w deux fonctions définies sur $[a,b]$ et $q \geqslant 1$. Si $|w|$ et $|w||f|^q$ sont intégrables sur $[a,b]$,alors :

$$\int_a^b |w(x)f(x)|dx \leq \left(\int_a^b |w(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |w(x)| \, |f(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.3 Fonctions Spécifiques

1.3.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.3.1. *([22]) Pour* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$ *, la fonction Gamma d'Euler est définie par :*

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt & si\ Re(z) > 0 \\ \dfrac{\Gamma(z+1)}{z} & si\ Re(z) \leq 0,\ z \neq 0, -1, -2, -3, ... \end{cases}$$

Propriétés 1.3.1. 1. *Pour* $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt.$$

2. *Pour* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

3. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

4. *Pour* $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z).$$

5. *Pour* $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)(z+3)....(z+n)}.$$

6. *Pour* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}$$

avec

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K} - \ln(n) \right) \approx 0,5772156649.$$

(constante d'Euler)

7. *La fonction Gamma d'Euler est analytique* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$*.*

8. *Pour* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$ *:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

et

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}.$$

9.

$$\Gamma(0^+) = +\infty.$$

10.

$$\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 1.$$

11.

$$x! = \Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^x}{(x+1)....(x+k)}, x \in \mathbb{R}, x \neq -1, -2, -3, ..., -k.$$

Définition 1.3.2. *Pour tout x tel que* $(-n < x < -n+1)$ *,* $n = 1, 2, 3, ...$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)....(x+n-1)}.$$

1.3.2 Fonction Béta

Définition 1.3.3. *([22]) Pour* $Re(z), Re(w) > 0$ *, la fonction Béta est définie par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

Propriétés 1.3.2. *1. Pour* $z, w \in \mathbb{C}$

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

2.

$$B(z+1, w+1) = \int_0^1 t^z(1-t)^w dt.$$

3. La fonction Béta vérifie les identités suivantes :

(a)

$$B(z,w) = B(w,z).$$

(b)

$$B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1).$$

(c)

$$B(z,w+1) = \frac{w}{z}B(z+1,w) = \frac{w}{z+w}B(z,w).$$

4.

$$B(z,w) = \int_0^\infty \frac{tz-1}{(1+t)^{z+w}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}.$$

5.

$$B_x(z,w) = \int_0^x t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

1.3.3 Fonction convexe

Définition 1.3.4. *On dit que* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Pour tout $x, y \in [0, \infty), t \in [0, 1]$.

1.3.4 Fonction s-convexe

Définition 1.3.5. *([8]) On dit que* $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ *est une fonction s-convexe au seconde sens si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y).$$

Pour tout $x, y \in [0, \infty), t \in [0, 1]$ *et* $s \in (0, 1]$.

Remarques 1.3.1. *Pour* $s = 1$, *la s-convexité devient la convexité ordinaire.*

1.4 Analyse et calcul fractionnaire

1.4.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1. *([19]) Soit* $f \in L[a, b]$ *Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville de gauche et de droite (respectivement)* J_{a+}^{α} *et* J_{b-}^{α} *d'ordre* $\alpha > 0$ *sont définies par :*

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a. \forall t \in [a, b].$$

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b. \forall t \in [a, b].$$

Chapitre 2

Quelques nouvelles inégalités intégrales pour les fonctions convexes et s-convexes

Dans ce chapitre,nous présontons des preuves des théorèmes de nouvelles inégalités intégrales d'Ostorwski et d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes et s-convexes.

2.1 Les inégalités intégrales pour les fonctions convexes

Théorème 2.1.1. *([6]) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$,telle que $|f'(t)| \leq M$, pour tout $t \in (a,b)$,alors :*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a)M\left[\frac{1}{4} + \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right]. \tag{2.1}$$

Pour tout $x \in [a,b]$.
La constante $\dfrac{1}{4}$ est la plus petite possible . L'inégalité (2.1)on peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]. \tag{2.2}$$

Preuve 2.1.1. *En utilisant l'identité :*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$

Pour tout $x \in [a,b]$,avec :

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & si\ a \leq t \leq x \\ t-b, & x < t \leq b \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |p(x,t)f'(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |p(x,t)||f'(t)|dt\end{aligned}$$

On a :

$$|f'(x)| \leq M \tag{2.3}$$

On multiplie l'inégalité (2,3) par $|p(x,t)|$ *:*

$$|p(x,t)||f'(t)|dt \leq M|p(x,t)|$$

$$\int_a^b |p(x,t)||f'(t)|dt \leq \frac{M}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| &\leq \frac{M}{b-a}\int_a^b |p(x,t)|dt \\ &= \int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (b-t)dt \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2}\right] \\ \left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| &\leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right] \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2}{2}\right] \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{a^2+b^2+2x^2-2ax-2bx}{2}\right] \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{2a^2+2b^2+4x^2-4ax-4bx}{4}\right] \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{b^2-2ab+a^2+4x^2-4(a+b)x+(a+b)^2}{4}\right] \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{b^2-2ab+a^2+4(x^2-(a+b)x+(\frac{a+b}{4})^2}{4}\right] \\ &= \frac{M}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{4}+(x-(\frac{a+b}{2})^2)\right] \\ &= M(b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right].\end{aligned}$$

Théorème 2.1.2. *([23]) On suppose* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction convexe et soit* $(a,b) \in [0,\infty)$*,* $a < b$ *.Si* $f' \in L[a,b]$ *,alors l' inegalité est vérifiée :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.4}$$

Preuve 2.1.2. *Comme f est convexe :*

$$\boldsymbol{f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b).} \tag{2.5}$$

Pour tout $\boldsymbol{t \in [0,1]}$ *.*
On intégre l'inégalité (2.5) $\boldsymbol{t \in [0,1]}$ *,on obtient :*

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt.} \tag{2.6}$$

Comme

$$\boldsymbol{\int_0^1 tdt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}}$$

et par le changement de variable $\boldsymbol{x = ta+(1-t)b.}$

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.}$$

Nous obtenons l'inégalité droite de (2,4) à partir de (2,5) et par la convexite de f nous avons :

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right] \geq f\left[\frac{ta+(1-t)b+(1-t)a+tb}{2}\right] = f\left(\frac{a+b}{2}\right).}$$

Aprés l'intégration de cette inégalité (2,5) sur $\boldsymbol{[0,1]}$*,on obtient :*

$$\boldsymbol{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((t-1)a+bt)dt\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.}$$

Ce qui prouve l'inégalité gauche de (2,4).La même manière de l'inégalité de droite de (2,4)

Lemme 2.1.1. *([19]) Soit* $\boldsymbol{f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}}$ *une fonction différentiable sur (a,b)avec* $\boldsymbol{a < b}$ *.Si* $\boldsymbol{f' \in L[a,b]}$ *,et pour tout* $\boldsymbol{x \in [a,b]}$*,alors :*

$$\boldsymbol{\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| = (a-b)\int_0^1 p(t)f'(ta+(1-t)b)dt} \tag{2.7}$$

avec

$$\boldsymbol{p(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \dfrac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1, & t \in \left(\dfrac{b-x}{b-a}, 1\right] \end{cases}.}$$

Preuve 2.1.3. *On a :*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{(a-b)\int_0^1 p(t)f'(ta+(1-t)b)dt} \\
&\boldsymbol{= (a-b)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tf'(ta+(1-t)b)dt + (a-b)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt} \\
&\boldsymbol{= I_1 + I_2.}
\end{aligned}$$

On intégre par partie $ta+(1-t)b=u$, $dt=\dfrac{du}{a-b}$ *,alors :*

$$\begin{aligned}
I_1 &= (a-b)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tf'(ta+(1-t)b)dt \\
&= (a-b)\left[\frac{tf(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^{\frac{b-x}{b-a}} - \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt\right. \\
&= \frac{(b-x)}{(b-a)}f(x) - \frac{1}{(b-a)}\int_x^b f(u)du
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= (a-b)\int_{\frac{b-x}{b-ac}}^{1} (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= (a-b)\left[\frac{(t-1)f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} - \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt\right. \\
&= -\left(\frac{a-x}{b-a}\right)f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^x f(u)du.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I_1+I_2 &= (a-b)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tf'(ta+(1-t)b)dt + (a-b)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(t-1)f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= \int_0^1 p(t)f'(ta+(1-t)b)dt.
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.3. *([17]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$*, une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a<b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|$ *est convexe dans* $[a,b]$ *, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{6} \times \left\{\begin{array}{c} \left[4\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^3 - 3\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2 + 1\right]|f'(a)| \\ + \left[4\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 + 1\right]|f'(b)| \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve 2.1.4. *D'aprés le lemme(2.1.1)et comme* $|f'|$ *est convexe sur* $[a,b]$*,alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
\leq\ & (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} (t^2|f'(a)|+(t-t^2)|f'(b)|dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 ((t-t^2)|f'(a)|+(1-t)^2|f'(b)|)|dt
\end{aligned}$$

$$= (b-a)\left\{\begin{array}{c} |f'(a)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^2dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}(t-t^2)dt \\ +|f'(a)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (t-t^2)dt+|f'(b)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^2dt \end{array}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\times\left\{\begin{array}{c} \left[4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2+1\right]|f'(a)| \\ +\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2+1\right]|f'(b)| \end{array}\right\}.$$

avec :

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^2dt=\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3$$

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}(t-t^2)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2+\frac{1}{6}$$

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(t-t^2)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2+\frac{1}{6}$$

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^2dt=\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3.$$

Corollaire 2.1.1. *1. Si* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in[a,b]$*,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leqslant M\left[\ \frac{2[(b-x)^3+(x-a)^3]+(b-a)^3}{3(b-a)^2}-\frac{[(b-x)^2+(x-a)^2]}{2(b-a)^1}\ \right].
\end{aligned}$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$ *on a :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \frac{b-a}{8}[|f'(a)+|f'(b)|].$$

Théorème 2.1.4. *Soit* $f : [a, b] \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a, b]$*.Si* $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a, b]$, $p \geq 1$, *alors :*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \\
\leq &(b-a) \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{(2)^{\frac{1}{q}}} \\
&\times \left\{ \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 |f'(a)|^q + \left[1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\right] |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left[1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\right] |f'(a)|^q + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour tout $x \in [a, b]$*,avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Preuve 2.1.5. *: On suppose que* $p > 1$ *. D'aprés le lemme(2.1.1) et l'inégalité de Höl-der,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \\
&\leq (b-a) \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta + (1-t)b)|dt \\
&\quad + (b-a) \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta + (1-t)b)|dt
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a) \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + (b-a) \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a, b]$*,alors :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left[t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q\right] dt \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 |f'(a)|^q + \left[1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\right] |f'(b)|^q \right\}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt &\leq \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left[t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q\right] dt \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\right] |f'(a)|^q + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 |f'(b)|^q \right\}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

avec :

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt = \frac{1}{(p+1)}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}$$
$$et \tag{2.12}$$
$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{(p+1)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}.$$

D'aprés (2.9)-(2.12),on obtient l'inégalité(2.8).

Corollaire 2.1.2. *1. Si $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$,on a :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant M(b-a)\left(\frac{(b-x)^2+(b-a)^2-(x-a)^2}{2(b-a)^2}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left[\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)(b-a)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)(b-a)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

2. Si $x = \dfrac{a+b}{2}$, on a :

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{(b-a)}{4}\frac{1}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}|f'(a)|^q + \frac{3}{2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{1}{2}|f'(b)|^q + \frac{3}{2}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Théorème 2.1.5. *Soit $f : [a,b] \subset [0,\infty] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur(a,b)avec $a < b$ telle que $f' \in L[a,b]$.Si $|f'|^q$ est convexe dans $[a,b]$ et $p \geq 1$, alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \times \left\{\begin{array}{c}(b-x)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +(x-a)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}.$$

Pour $\forall x \in [a,b]$,où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1.$

Preuve 2.1.6. *On suppose que $p > 1$. D'aprés le lemme(2.1.1)et on appliquant l'inégalité de Hölder,alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt$$
$$+ (b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+(b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a,b]$*,alors :*

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{b-x}{b-a}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right).$$

et

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x-a}{b-a}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right).$$

donc :

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\times\left\{\begin{array}{c}(b-x)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\ +(x-a)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}.$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$ *On sait que :*

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt = \frac{1}{p+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}$$

et

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{p+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}.$$

Théorème 2.1.6. *Soit* $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a<b$ *telle que* $f'\in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a,b]$*,*$p\geq 1$*, alors :*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.13}$$

Pour tout $x\in[a,b]$*,avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Preuve 2.1.7. *On suppose que* $p>1$*.D'aprés le lemme(2.1.1)et l'inégalité de Hölder,on obtient :*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq (b-a)\left(\int_0^1 |p(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.14}$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe,on obtient :*

$$\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1 \left(t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q\right) dt \tag{2.15}$$
$$= \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}.$$

et

$$\int_0^1 |p(t)|^p dt = \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt \tag{2.16}$$
$$= \frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1} + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right].$$

D'aprés (2.14)-(2.16),on obtient l'inégalité(2.13).

Corollaire 2.1.3. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *,on a :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{q+2}}{q+2} + B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,2)\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,2) + \frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{q+2}}{q+2}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

2. Si $x = \dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2^{q+2}(q+2)}\left|f'(a)\right|^q + B_{\frac{1}{2}}(q+2)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\frac{1}{2^{q+2}(q+2)}\left|f'(b)\right|^q + B_{\frac{1}{2}}(q+2)\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Théorème 2.1.7. *Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a,b]$ *pour* $q \geq 1$*, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3|f'(a)|^q\right.\right. \\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2+\frac{1}{6}\right)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&+(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3|f'(b)|^q\right.\right. \\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2+\frac{1}{6}\right)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve 2.1.8. *On suppose que* $p > 1$ *. D'aprés le lemme(2.1.1) et l'inégalité de la moyenne puissance,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt \\
&\quad +(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad +(b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a,b]$*,alors :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{b-z}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt \\
&\leq \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left[t^2\,|f'(a)|^q+(t-t^2)\,|f'(b)|^q\right]dt \\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3|f'(a)|^q+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3\right. \\
&\quad\left.-\frac{1}{(2)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2+\frac{1}{6}\right]|f'(b)|^q
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\\
\leq&\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}\left[\left(t-t^{2}\right)\left|f'(a)\right|^{q}+(1-t)^{2}\left|f'(b)\right|^{q}\right]dt\\
=&\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{3}\right)\left|f'(a)\right|^{q}\\
&+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{3}\left|f'(b)\right|^{q}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\right|\\
\leq\ &(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{3}\left|f'(a)\right|^{q}\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2}+\frac{1}{6}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
&+(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{3}\left|f'(b)\right|^{q}\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2}+\frac{1}{6}\right)\left|f'(a)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.1.4. *1. Si $|f'(x)|\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\right|\\
&\leqslant M(b-a)\left[c\begin{array}{c}\left(\dfrac{(b-x)^{2}}{2(b-a)^{2}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\dfrac{2(b-x)^{3}}{3(b-a)^{3}}-\dfrac{(b-x)^{2}}{2(b-a)^{2}}+\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\\
+\left(\dfrac{(x-a)^{2}}{2(b-a)^{2}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(-\dfrac{(b-x)^{2}}{2(b-a)^{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\right|\\
&\leqslant\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\begin{array}{c}\left(\dfrac{1}{4}\left|f'(a)\right|^{q}+\dfrac{1}{3}\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\\
+\left(\dfrac{1}{4}\left|f'(b)\right|^{q}+\dfrac{1}{3}\left|f'(a)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

2.2 Les inégalités intégrales pour les fonctions s-convexes

Dans[5] Dragomir et Fitzpatrick présentent l'inégalité de Hermite-Hadamard pour les fonctions s-convexes suivant le deuxième sens :

Théorème 2.2.1. *On suppose* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *une fonction s-convexe au seconde sense ,et* $s \in (0, 1)$ *et soit* $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ *si* $f' \in L^1([a, b])$ *alors l' inégalité suivante est vérifiée :*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{2.17}$$

Preuve 2.2.1. *comme f est s-convexe :*

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b). \tag{2.18}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$.
On intégre l'inégalité (2.18) $t \in [0, 1]$ *,on obtient :*

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq f(a) \int_0^1 t^s dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^s dt \tag{2.19}$$

comme :

$$\int_0^1 t^s dt = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1}\right] = \frac{1}{s+1}$$

$$\int_0^1 (1-t)^s dt = \left[-\frac{1}{s+1}(1-t)^{s+1}\right]_0^1 = \frac{1}{s+1}$$

et par le changement de variable : $x = ta + (1-t)b.$

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(a) \int_0^1 t^s dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^s dt$$

,

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

On a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\left(\frac{1}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2}\right)b\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s f(a) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^s f(b)$$

$$= \frac{1}{2^s} f(a) + \frac{1}{2^s} f(b)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^s}. \tag{2.20}$$

On multiplie par 2^s *l'inégalité (2.20) et on dévise par* 2 .

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a) + f(b)$$

$$\frac{2^s}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

On a :

$$0 < s < 1$$
$$1 < s+1 < 2$$
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{s+1}.$$

Donc :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} < \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) < f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} < \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

Théorème 2.2.2. *([19]) Soit $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur(a,b)avec $a < b$ telle que $f' \in L[a,b]$.Si $|f'|$ est s-convexe suivant le second sens dans $[a,b]$ pour s fixé $s \in (0,1]$ et $\alpha > 0$, alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{b-a}{(s+1)(s+2)} \times \left\{ \begin{array}{c} \left[2(s+1)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} - (s+2)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + 1\right]|f'(a)| \\ + \left[2(s+1)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} - (s+2)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + 1\right]|f'(b)| \end{array} \right\}.$$

Pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve 2.2.2. *D'aprés le lemme(2.1.1)et comme $|f'|$ est s-convexe dans $[a,b]$,alors :*

$$\begin{aligned} &\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\ \leq \quad & (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt \\ & + (b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt \\ \leq\ & (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t(t^s|f'(a)| + (1-t)^s|f'(b)|dt \\ & + (b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)(t^s|f'(a)| + (1-t)^s|f'(b)|)|dt \end{aligned}$$

$$= (b-a)\left\{\begin{array}{c} |f'(a)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{s+1}dt + |f'(b)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t(1-t)^s dt \\ +|f'(a)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (t^s - t^{s+1})dt + |f'(b)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{s+1}dt \end{array}\right\}.$$

$$= \frac{b-a}{(s+1)(s+2)} \times \left\{\begin{array}{c} \left[2(s+1)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} - (s+2)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + 1\right]|f'(a)| \\ +\left[s\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} - (s+2)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + 1\right]|f'(b)| \end{array}\right\}$$

avec :

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{s+1}dt = \frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}$$

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t(1-t)^s dt = \frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} - \frac{1}{s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (t^s - t^{s+1})dt = \frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} - \frac{1}{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{s+1}dt = \frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}.$$

Corollaire 2.2.1. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *,on a :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant M\left[\frac{2(s+1)[(b-x)^{s+2} + (x-a)^{s+2}] + 2(b-a)^{s+2}}{(s+1)(s+2)(b-a)^{s+1}} - \frac{[(b-x)^{s+1} + (x-a)^{s+1}]}{(s+1)(b-a)^s}\right]$$

2. Si $x = \dfrac{a+b}{2}$ *,on a :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \frac{(b-a)}{(s+1)(s+2)}\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)[|f'(a) + |f'(b)|].$$

Théorème 2.2.3. *([19]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est s-convexe suivant le second sens dans* $[a,b]$ *pour s fixé* $s \in (0,1]$ *et* $\alpha > 0$ *,*$p \geq 1$*, alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq (b-a)\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}|f'(a)|^q + \left[1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}\right]|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\left[1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}\right]|f'(a)|^q + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{2.21}$$

Pour tout $x \in [a,b]$,*où* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Preuve 2.2.3. *: On suppose que* $p>1$ *. D'aprés le lemme(2.1.1)et l'inégalité d'Hölder,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt \qquad (2.22)\\
&\quad + (b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + (b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Comme $|f'|^q$ *est s-convexe dans* $[a,b]$,*alors :*

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left[t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right]dt \tag{2.24}$$

$$=\frac{1}{s+1}\left\{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}|f'(a)|^q+\left[1-\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}\right]|f'(b)|^q\right\}.$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left[t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right]dt \\
&=\frac{1}{s+1}\left\{\left[1-\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}\right]|f'(a)|^q+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}|f'(b)|^q\right\}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

avec :

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt=\frac{1}{(p+1)}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1} \tag{2.26}$$

et

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt=\frac{1}{(p+1)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}. \tag{2.27}$$

D'aprés (2.22)-(2.27), on obtient l'inégalité(2.21).

Corollaire 2.2.2. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \\
&\leqslant M(b-a)\left(\frac{(b-x)^{s+1}+(b-a)^{s+1}-(x-a)^{s+1}}{(s+1)(b-a)^{s+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left[\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)(b-a)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)(b-a)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \right].
\end{aligned}$$

2. Si $x = \dfrac{a+b}{2}$ *,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{4}\frac{1}{2^{\frac{s}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{s+1}|f'(a)|^q + \frac{2^{s+1}-1}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\frac{1}{s+1}|f'(b)|^q + \frac{2^{s+1}-1}{s+1}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.4. *([19]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est s-convexe suivant le second sens dans* $[a,b]$ *pour s fixé* $s \in (0,1]$*,*$p \geq 1$*, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \times \left\{ \begin{array}{c} (b-x)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +(x-a)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [a,b]$*,où* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Preuve 2.2.4. *On suppose que* $p > 1$ *. D'aprés le lemme(2.1.1) et l'inégalité d'Höl-der,alors :*

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| &\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt \\
&\quad + (b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + (b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ *est s-convexe dans* $[a,b]$*,alors :*

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{b-x}{b-a}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)$$

et

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x-a}{b-a}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right).$$

donc :

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\\ &\leqslant \frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\times\left\{\begin{array}{c}(b-x)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\ +(x-a)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$ *On a :*

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt = \frac{1}{p+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}$$

et

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{p+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}.$$

Remarque 2.2.1. *Si* $s=1$ *:*

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\\ &\leqslant \frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\times\left\{\begin{array}{c}(b-x)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\ +(x-a)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Pour tout $x\in[a,b]$*,où* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Théorème 2.2.5. *([19]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a<b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est s-convexe suivant le second sens dans* $[a,b]$*, pour s fixé* $s\in(0,1]p\geq 1$*, alors :*

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\\ &\leqslant \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Pour tout $x\in[a,b]$*,où* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Preuve 2.2.5. *On suppose que* $p > 1$*.D'aprés le lemme(2.1.1)et l'inégalité de Hölder,alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq (b-a)\left(\int_0^1 |p(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.29}$$

Comme $|f'|^q$ *est s-convexe,on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^1 \left(t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q\right) dt \\ &= \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 |p(t)|^p dt &= \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p dt \\ &= \frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1} + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right].\end{aligned} \tag{2.31}$$

D'aprés (2.29)-(2.31),on obtient l'inégalité(2.28).

Corollaire 2.2.3. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *,on a :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{q+s+1}}{q+s+1} + B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,s+1)\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,s+1) + \frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{q+s+1}}{q+s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

2. Si $x = \dfrac{a+b}{2}$ *,on a :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}|f'(a)|^q + B_{\frac{1}{2}}(q+s+1)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}|f'(b)|^q + B_{\frac{1}{2}}(q+s+1)|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Théorème 2.2.6. *([19]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est s-convexe suivant le second sens* *dans* $[a, b]$ *pour s fixé* $s \in (0,1)$ $q \geq 1$, *alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \ (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}|f'(a)|^q\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} - \frac{1}{s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$+(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}|f'(b)|^q\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} - \frac{1}{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve 2.2.6. *On suppose que* $p > 1$. *D'aprés le lemme(2.1.1) et l'inégalité de la moyenne puissance,alors :*

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt$$
$$+ (b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+ (b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $|f'|^q$ *est s-convexe dans* $[a, b]$,*alors :*

$$\int_0^{\frac{b-z}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt$$
$$\leq \int_0^{\frac{b-z}{b-a}} t\left[t^s\,|f'(a)|^q + (1-t)^s\,|f'(b)|^q\right]dt$$
$$=\frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}|f'(a)|^q + \left[\frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(s+1)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]|f'(b)|^q.$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\\
&\leq\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)\left[t^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+(1-t)^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right]dt\\
&=\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}+\frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}\right)\left|f'(a)\right|^{q}\\
&\quad+\frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}\left|f'(b)\right|^{q}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\right|\\
\leq\ &(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}\left|f'(a)\right|^{q}\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}-\frac{1}{s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
&+(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2(1-1/q)}\left[\frac{1}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}\left|f'(b)\right|^{q}\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}-\frac{1}{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)\left|f'(a)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.4. 1. *Si* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in[a,b]$ *,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\right|\\
&\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{(b-x)^{2}}{2(b-a)^{2}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{2(b-x)^{s+2}}{(s+2)(b-a)^{s+2}}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}-\frac{(b-x)^{s+1}}{(s+1)(b-a)^{s+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{(x-a)^{2}}{2(b-a)^{2}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}-\frac{(b-x)^{s+1}}{(s+1)(b-a)^{s+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

2. *Si* $x=\dfrac{a+b}{2}$ *,on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\right|\\
&\leqslant\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{(s+1)2^{s}}\left|f'(a)\right|^{q}+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)2^{s}}\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{1}{(s+1)2^{s}}\left|f'(b)\right|^{q}+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)2^{s}}\left|f'(a)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Quelques nouvelles inégalités intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville pour les fonctions convexes et s-convexes

Ce chapitre est consacré à la preuve de nouvelles inégalités intégrales fractionnaire de Riemann-Liouville pour les fonctions convexes et s-convexes [19].

3.1 Les inégalités intégrales fractionnaires pour les fonctions convexes

Lemme 3.1.1. *([19]) Soit* $\boldsymbol{f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}}$ *une fonction différentiable sur (a,b)avec* $\boldsymbol{a < b}$ *,si* $\boldsymbol{f' \in L[a,b]}$ *,alors pour tout* $\boldsymbol{x \in [a,b]}$ *et* $\boldsymbol{\alpha > 0}$*, on obtient :*

$$\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}[J^{\alpha}_{x+}f(b)+J^{\alpha}_{x-}f(a)] = (a-b)\int_0^1 p(t)^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt \quad (3.1)$$

avec

$$p(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\dfrac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1, & t\in\left(\dfrac{b-x}{b-a},1\right]. \end{cases}$$

Preuve 3.1.1. *On a :*

$$\begin{aligned}(a-b)\int_0^1 p(t)^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt &= (a-b)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt \\ &\quad + (a-b)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (t-1)^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

on intégre par partie $ta+(1-t)b=u$, $dt=\dfrac{du}{a-b}$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
I_1 &= (a-b)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= (a-b)\left[\frac{t^{\alpha} f(ta+(1-t)b)}{a-b}\right|_0^{\frac{b-x}{b-a}} - \alpha\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\
&= \frac{(b-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha}}\int_x^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)du \\
&= \frac{(b-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} J_{x+}^{\alpha} f(b)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= (a-b)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (t-1)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= (a-b)\left[\frac{(t-1)^{\alpha} f(ta+(1-t)b)}{a-b}\right|_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} - \alpha\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (t-1)^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\
&= -\frac{(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha}}\int_a^x (u-a)^{\alpha-1} f(u)du \\
&= -\frac{(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} J_{x-}^{\alpha} f(a).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I_1+I_2 &= (a-b)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt + (a-b)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (t-1)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= \int_0^1 p(t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt.
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.1. *Soit* $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a<b$ *telle que* $f'\in L[a,b]$.*Si* $|f'|$ *est convexe dans* $[a,b]$ *, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha} f(b) + J_{x-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \\
&\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} |f'(a)|\left(\dfrac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)\right) \\ +|f'(b)|\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2) + \dfrac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)\end{array}\right]. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Pour tout $x\in[a,b]$ *,où* $B_x(a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

Preuve 3.1.2. *D'aprés le lemme (3.1.1),on obtient :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}[J_{x+}^\alpha f(b)+J_{x-}^\alpha f(a)]\right|$$
$$\leq (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]. \tag{3.3}$$

Comme $|f'|$ *est convexe on a :*

$$|f'(ta+(1-t)b)|\leq t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|. \tag{3.4}$$

On utilise(3,3)dans (3,4),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{x+}^\alpha f(b)+J_{x-}^\alpha f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\\ \displaystyle+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\end{array}\right]$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle|f'(a)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha+1}dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha(1-t)dt\\ \displaystyle+|f'(a)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha tdt+|f'(b)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha+1}dt\end{array}\right]$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle|f'(a)|\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}+|f'(b)|\,B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2)\right)\\ \displaystyle+|f'(a)|\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)+|f'(b)|\,\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)\end{array}\right]$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle|f'(a)|\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}+B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)\right)\\ \displaystyle+|f'(b)|\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)\end{array}\right].$$

Corollaire 3.1.1. *1. Si* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in[a,b]$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}+B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)\right)\\ \left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)\end{array}\right].$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^{\alpha}-(\frac{a-b}{2})^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{(\frac{a+b}{2})+}^{\alpha}f(b)+J_{(\frac{a+b}{2})-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant(b-a)+\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)}+B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,2)\right)[|f'(a)|+|f'(b)|].$$

Théorème 3.1.2. *Soit* $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a<b$ *telle que* $f'\in L[a,b]$*.Si* $|f'|^{q}$ *est convexe dans* $[a,b]$*,* $q\geq 1$*, alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant(b-a)\left[\begin{array}{c}K_{1}^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}|f'(a)|^{q}+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2)|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_{2}^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)|f'(a)|^{q}+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].\tag{3.5}$$

Avec

$$K_{1}(x,a,b,\alpha)=\int_{0}^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha}dt=\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}.$$
$$K_{2}(x,a,b,\alpha)=\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}dt=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}.$$

Pour tout $x\in[a,b]$ *,où* $B_{x}(a,b)=\displaystyle\int_{0}^{x}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ *.*

Preuve 3.1.3. *D'aprés le lemme (3.1.1) et l'inégalité de la moyenne puissance,alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq(b-a)\left[\int_{0}^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]\tag{3.6}$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^\alpha dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^\alpha |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe ,on obtient :*

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q. \tag{3.7}$$

On utilise(3,6)dans (3,7),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{x+}^\alpha f(b)+J_{x-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha[t\,|f'(b)|^q+(1-t)\,|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^\alpha[t\,|f'(b)|^q+(1-t)\,|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(|f'(a)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha+1}dt+|f'(b)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha(1-t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(|f'(a)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 t(1-t)^\alpha dt+|f'(b)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha+1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\,|f'(a)|^q+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2)\,|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)\,|f'(a)|^q+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\,|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Corollaire 3.1.2. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{x+}^\alpha f(b)+J_{x-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,2)\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,2)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

2. Si $x = \dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^{\alpha} - (\frac{a-b}{2})^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+} f(b) + J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-} f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left(\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)}\left|f'(a)\right|^{q} + B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,2)\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,2)\left|f'(a)\right|^{q} + \dfrac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)}\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Théorème 3.1.3. *Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^{q}$ *est convexe dans* $[a,b]$*,* $q \geq 1$ *,*$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha} - (a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{x+} f(b) + J^{\alpha}_{x-} f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\dfrac{(\frac{b-x}{b-a})^{2}}{2}|f'(a)|^{q} + \dfrac{1-(\frac{x-a}{b-a})^{2}}{2}|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ + K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\dfrac{1-(\frac{b-x}{b-a})^{2}}{2}|f'(a)|^{q} + \dfrac{(\frac{x-a}{b-a})^{2}}{2}|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right]. \tag{3.8}$$

Avec

$$K_3(x,a,b,\alpha) = \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha p} dt = \frac{(b-x)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}.$$

$$K_4(x,a,b,\alpha) = \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{\alpha p} dt = \frac{(x-a)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}.$$

Pour tout $x \in [a,b]$ *,où* $B_x(a,b) = \displaystyle\int_0^{x} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$.

Preuve 3.1.4. *D'aprés le lemme (3.1.1) et l'inégalité de Hölder,alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha} - (a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{x+} f(b) + J^{\alpha}_{x-} f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)| dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)| dt\right] \tag{3.9}$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\displaystyle\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^{q} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\displaystyle\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\displaystyle\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |f'(ta+(1-t)b)|^{q} dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe ,on obtient :*

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q. \tag{3.10}$$

On utilise(3.9)dans (3.10),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{(b-x)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q dt]\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{(x-a)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q dt]\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(|f'(a)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}tdt+|f'(b)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}(1-t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(|f'(a)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 tdt+|f'(b)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^2}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^2}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^2}{2}|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^2}{2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Corollaire 3.1.3. *1. Si* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in[a,b]$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2}{2}+\frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^2}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^2}{2}+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^2}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^\alpha-(\frac{a-b}{2})^\alpha}{(b-a)^\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{(\frac{a+b}{2})+}f(b)+J^\alpha_{(\frac{a+b}{2})-}f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left(\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^2}{2}|f'(a)|^q+\left(\frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^2}{2}\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^2}{2}|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^2}{2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Théorème 3.1.4. *Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$.*Si* $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a,b]$,$q \geq 1$ *et,*$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *,alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha q+2}}{\alpha q+2}|f'(a)|^q+\beta_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha q+1,2)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\beta_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha q+1,2)|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{\alpha q+2}}{\alpha q+2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]. \tag{3.11}$$

Pour tout $x \in [a,b]$ *,où* $\beta_x(a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

Preuve 3.1.5. *D'aprés le lemme (3.1.1) et l'inégalité de Hölder,alors : :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha|f'(ta+(1-t)b)|dt\right] \tag{3.12}$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}1dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha q}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 1dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha q}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Comme $|f'|^q$ *est convexe ,on obtient :*

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q. \tag{3.13}$$

On utilise(3.12)dans (3.13) et on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha q}\left[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha q}[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha q+1}dt+|f'(b)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha q}(1-t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha q}tdt+|f'(b)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha q+1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha q+2}}{\alpha q+2}|f'(a)|^q+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha q+1,2)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha q+1,2)|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{\alpha q+2}}{\alpha q+2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Corollaire 3.1.4. *1. Si* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in[a,b]$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha q+2}}{\alpha q+2}+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha q+1,2)\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(B_{\frac{x-a}{b-a}]}(\alpha q+1,2)+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{\alpha q+2}}{\alpha q+2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^\alpha-(\frac{a-b}{2})^\alpha}{(b-a)^\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{(\frac{a+b}{2})+}f(b)+J^\alpha_{(\frac{a+b}{2})-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant\frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2^{\alpha q+2}(\alpha q+2)}|f'(a)|^q+B_{\frac{1}{2}}(\alpha q+1,2)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(B_{\frac{1}{2}}(\alpha q+1,2)|f'(a)|^q+\frac{1}{2^{\alpha q+2}(\alpha q+2)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

3.2 Les inégalités intégrales fractionnaires pour les fonctions s-convexes

Théorème 3.2.1. *([19]) Soit* $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a<b$ *telle que* $f'\in L[a,b]$*.Si* $|f'|$ *est s-convexe suivant le second sens dans* $[a,b]$ *pour s fixé* $s\in(0,1]$ *et* $\alpha>0$*, alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant(b-a)\left[\begin{array}{c}|f'(a)|\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}+B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\right)\\+|f'(b)|\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\right)\end{array}\right].\tag{3.14}$$

Pour tout $x\in[a,b]$ *,où* $\beta_x(a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

Preuve 3.2.1. *D'aprés le lemme (3.1.1),on obtient :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)]\right|$$
$$\leq (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^\alpha|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]. \tag{3.15}$$

Comme $|f'|$ est s-convexe on a :

$$|f'(ta+(1-t)b)|\leq t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(b)|. \tag{3.16}$$

On utilise(3,15)dans (3,16),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^\alpha[t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(b)|]dt\\ \displaystyle+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha[t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(b)|]dt\end{array}\right]$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle|f'(a)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha+s}dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^\alpha(1-t)^sdt\\ \displaystyle+|f'(a)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^\alpha t^sdt+|f'(b)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha+s}dt\end{array}\right]$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle|f'(a)|\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}+|f'(b)|\,B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\right)\\ \displaystyle+|f'(a)|\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)+|f'(b)|\,\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\right)\end{array}\right]$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle|f'(a)|\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}+B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\right)\\ \displaystyle+|f'(b)|\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\right)\end{array}\right].$$

Corollaire 3.2.1. *1. Si $|f'(x)|\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+}f(b)+J^\alpha_{x-}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}\displaystyle\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}+B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\right)\\ \displaystyle+\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\right)\end{array}\right].$$

2. *Si* $x = \dfrac{a+b}{2}$, *on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^{\alpha} - (\frac{a-b}{2})^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+} f(b) + J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-} f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left(\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)} + B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1, s+1)\right)[|f'(a)| + |f'(b)|].$$

Théorème 3.2.2. *([19]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est s-convexe suivant le seconde sens dans* $[a,b]$ *pour s fixé* $s \in (0,1]$ *et* $q \geq 1$ *et* $\alpha \geq 0$*, alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha} - (a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{x+} f(b) + J^{\alpha}_{x-} f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\dfrac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}|f'(a)|^q + B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)|f'(a)|^q + \dfrac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right]. \tag{3.17}$$

avec

$$K_1(x,a,b,\alpha) = \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha} dt = \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}.$$
$$K_2(x,a,b,\alpha) = \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{\alpha} dt = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}.$$

Pour tout $x \in [a,b]$ *,où* $\beta_x(a,b) = \displaystyle\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

Preuve 3.2.2. *D'aprés le lemme (3.1.1) et l'inégalité de la moyenne puissance ,alors : :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha} - (a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{x+} f(b) + J^{\alpha}_{x-} f(a)\right]\right|$$
$$\leq (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|dt\right] \tag{3.18}$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\displaystyle\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\displaystyle\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\displaystyle\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Comme $|f'|^q$ *est s-convexe ,on obtient :*

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q. \tag{3.19}$$

On utilise(3.18)dans (3.19),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha}[t^s\left|f'(b)\right|^q+(1-t)^s\left|f'(b)\right|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(b-a)^{\alpha+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}[t^s\left|f'(b)\right|^q+(1-t)^s\left|f'(b)\right|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\left|f'(a)\right|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha+s}dt+\left|f'(b)\right|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^{\alpha}(1-t)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\left|f'(a)\right|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}t^s(1-t)^{\alpha}dt+\left|f'(b)\right|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha+s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\left|f'(a)\right|^q+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\left|f'(a)\right|^q+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Corollaire 3.2.2. *1. Si* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in(a,b)$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c}K_1^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha+1,s+1)\right)^{\frac{1}{q}}\\ +K_2^{1-\frac{1}{q}}(x,a,b,\alpha)\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha+1,s+1)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+s+1}}{\alpha+s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^{\alpha}-(\frac{a-b}{2})^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{(\frac{a+b}{2})+}^{\alpha}f(b)+J_{(\frac{a+b}{2})-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left(\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\left|f'(a)\right|^q\right.\\ \left.+B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,s+1)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,s+1)\left|f'(a)\right|^q\right.\\ \left.+\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Théorème 3.2.3. *([19]) Soit $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur(a,b)avec $a < b$ telle que $f' \in L[a,b]$.Si $|f'|^q$ est s-convexe suivant le second sens dans $[a,b]$ pour certains s fixé $s \in (0,1]$, $q \geq 1$ et $\alpha \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha - (a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+} f(b) + J^\alpha_{x-} f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{l} K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(a)|^q + \frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(a)|^q + \frac{(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right]. \tag{3.20}$$

Avec

$$K_3(x,a,b,\alpha) = \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha p} dt = \frac{(b-x)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}.$$
$$K_4(x,a,b,\alpha) = \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha p} dt = \frac{(x-a)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}.$$

Pour tout $x \in [a,b]$,où $\beta_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$.

Preuve 3.2.3. *D'aprés le lemme (3.1.1) et l'inégalité de Hölder,alors : :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha - (a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+} f(b) + J^\alpha_{x-} f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^\alpha |f'(ta+(1-t)b)| dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^\alpha |f'(ta+(1-t)b)| dt\right] \tag{3.21}$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ +\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe ,on obtient :

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q. \tag{3.22}$$

On utilise(3.21)dans (3.22),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha - (a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{x+} f(b) + J^\alpha_{x-} f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{l} \left(\frac{(b-x)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} [t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q] dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{(x-a)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(b-a)^{\alpha p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 [t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q] dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(|f'(a)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^s dt+|f'(b)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}(1-t)^s dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(|f'(a)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 t^s dt+|f'(b)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c} K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(a)|^q+\frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Corollaire 3.2.3. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{x+}^\alpha f(b)+J_{x-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c} K_3^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}}{s+1}+\frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +K_4^{\frac{1}{p}}(x,a,b,\alpha)\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{(\frac{b-a}{2})^\alpha-(\frac{a-b}{2})^\alpha}{(b-a)^\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{(\frac{a+b}{2})+}^\alpha f(b)+J_{(\frac{a+b}{2})-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left(\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(a)|^q+\left(\frac{1-(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{1-(\frac{b-x}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{s+1}}{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Théorème 3.2.4. *([19]) Soit* $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur(a,b)avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L[a,b]$*.Si* $|f'|^q$ *est s-convexe suivant le seconde sens dans* $[a,b]$ *pour certain s fixé et* $s \in (0,1]$*,*$q \geq 1$ *et* $\alpha \geq 0$*,*$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ *,alors :*

$$\left|\frac{(b-x)^\alpha-(a-x)^\alpha}{(b-a)^\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{x+}^\alpha f(b)+J_{x-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha q+s+1}}{\alpha q+s+1}|f'(a)|^q+\beta_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha q+1,s+1)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\beta_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha q+1,s+1)|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{\alpha q+s+1}}{\alpha q+s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]. \tag{3.23}$$

Pour tout $x \in [a,b]$ *,où* $\beta_x(a,b) = \displaystyle\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

Preuve 3.2.4. *D'aprés le lemme (3.1.1) et l'inégalité de Hölder,alors : :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^{\alpha}|f'(ta+(1-t)b)|dt\right] \tag{3.24}$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} 1dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha q}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 1dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha q}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Comme $|f'|^q$ *est s-convexe ,on obtient :*

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q. \tag{3.25}$$

On utilise(3.24)dans (3.25),on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha}f(b)+J_{x-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha q}\left[t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha q}[t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha q+s}dt+|f'(b)|^q\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha q}(1-t)^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha q}t^s dt+|f'(b)|^q\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha q+s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]$$

$$\leqslant (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha q+s+1}}{\alpha q+s+1}|f'(a)|^q+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha q+1,s+1)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(\alpha q+1,s+1)|f'(a)|^q+\frac{(\frac{x-a}{b-a})^{\alpha q+s+1}}{\alpha q+s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Corollaire 3.2.4. *1. Si* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *,on a :*

$$\left|\frac{(b-x)^{\alpha}-(a-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{x+}^{\alpha} f(b)+J_{x-}^{\alpha} f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant M(b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha q+s+1}}{\alpha q+s+1}+B_{\frac{b-x}{b-a}}(\alpha q+1, s+1)\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(B_{\frac{x-a}{b-a}]}(\alpha q+1, s+1)+\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha q+s+1}}{\alpha q+s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

2. Si $x=\dfrac{a+b}{2}$*, on a :*

$$\left|\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^{\alpha} f(b)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}^{\alpha} f(a)\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2^{\alpha q+s+1}(\alpha q+s+1)}|f'(a)|^{q}+B_{\frac{1}{2}}(\alpha q+1, s+1)|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(B_{\frac{1}{2}}(\alpha q+1, s+1)|f'(a)|^{q}+\frac{1}{2^{\alpha q+s+1}(\alpha q+s+1)}|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Chapitre 4

Applications à certaines moyennes spéciales

On donne quelques applications sur l'inégalité d'Ostrowski,pour l'estimation entre les moyennes suivantes ([21]) :

1. La moyenne arithmétique :

$$\boldsymbol{A = A(a,b) = \frac{(a+b)}{2}, \qquad a,b \geq 0}$$

2. La moyenne géométrique :

$$\boldsymbol{G = G(a,b) = \sqrt{ab}, \qquad a,b \geq 0}$$

3. La moyenne harmonique :

$$\boldsymbol{H = H(a,b) = \frac{2}{(\frac{1}{a}) + (\frac{1}{b})}, \qquad a,b \geq 0}$$

4. La moyenne logarithmitique :

$$\boldsymbol{L = L(a,b) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{lnb - lna}, & \text{si a} \neq b \\ a, & \text{si a=b} \end{cases}, a,b \geq 0}$$

5. La moyenne identique :

$$\boldsymbol{I = I(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{exp}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & si \text{ a} \neq b \\ a & si \text{ a=b} \end{cases}, a,b \geq 0}$$

6. La moyenne p-logarithmique :

$$\boldsymbol{L_p(a,b) = \begin{cases} \left[\dfrac{(b^{p+1}) - (a^{p+1})}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & si \text{ a} \neq b \\ a & si \text{ a=b} \end{cases}, p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, a,b \geq 0}$$

Ces moyennes jouent un rôle trés important dans l'approximation numérique et d'autres domaines.On a les inégalités suivantes : $\boldsymbol{H \leq G \leq L \leq I \leq A.}$
avec $\boldsymbol{L_0 = I}$ et $\boldsymbol{L_{-1} = L}$.

Nous avons trois cas suivantes :

1. <u>**premièr cas :**</u>$\boldsymbol{f(x) = x^p}$ avec $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}\diagdown\{\boldsymbol{-1,0}\}$, pour tout $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a,b}]$ **:**

$$|x^p - L_p^p| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b) \tag{4.1}$$

avec

$$\gamma_p(a,b) = \begin{cases} pb^{p-1} & si \text{ p} \geq 1 \\ |p|a^{p-1} & si \text{ p} \in (-\infty,0) \cup (0,1)\backslash\{-1\} \end{cases}$$

Si $\boldsymbol{x = A}$ dans(4.1),alors

$$|A^p - L_P^p| \leq \frac{b-a}{4}\gamma_p(a,b).$$

Car $\boldsymbol{p \geq 1}$,l'inégalité (4,1)

$$0 \leq L_p^p - A^p \leq \frac{p(b-a)b^{p-1}}{4}$$

et $\boldsymbol{p} \in (-\infty, 0)\diagdown\{-1\}$,l'inégalité (4,1)

$$0 \leq L_p^p - A^p \leq \frac{(b-a)pa^{p-1}}{4}$$

En autre, si $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{0,1})$,alors

$$0 \leq A^p - L_p^p \leq \frac{p(b-a)a^{p-1}}{4}.$$

Si $\boldsymbol{x = I}$ dans (4.1),alors

$$|I^p - L_p^p| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(I-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b).$$

Si $\boldsymbol{x = L}$ et $\boldsymbol{x = G}$ dans (4.1) ,respectivement

$$|L^p - L_p^p| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(L-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b)$$

et

$$|G^p - L_p^p| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(G-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b).$$

2. <u>**deuxième cas :**</u>$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$, nous obtenons

$$|L - x| \leq \frac{xL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(x-A)^2}{(b-a)^2}\right], \forall x \in [a,b] \tag{4.2}$$

Maintenant, en prenant,$\boldsymbol{x = A}$,$\boldsymbol{x = I}$, $\boldsymbol{x = G}$ et $\boldsymbol{x = M}$ respectivement dans (4.2) ,nous avons les limites suivantes pour les différences des moyennes

$$0 \leq A - L \leq \frac{AL(b-a)}{4a^2}$$

$$0 \leq I - L \leq \frac{IL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(I-A)^2}{(b-a)^2}\right], \forall x \in [a,b]$$

$$0 \leq L - G \leq \frac{GL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(I-A)^2}{(b-a)^2}\right], \forall x \in [a,b]$$

$$0 \leq L - H \leq \frac{HL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(H-A)^2}{(b-a)^2}\right], \forall x \in [a,b].$$

3. **troisième cas :**$f(x) = -lnx$ substituant ce f dans (2,1),nous obtenons

$$|lnI - lnx| \leq \frac{(b-a)}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(x-A)^2}{(b-a)^2}\right], \forall x \in [a,b]. \tag{4.3}$$

D'une manière analogue aux cas précédents,en prenant $x = A$,$x = I$,$x = G$ et $x = H$,respectivement dans(4.3),nous obtenons les estimations pour les rapports des moyennes de la manière suivante :

$$1 \leq \frac{A}{I} \leq exp\left(\frac{1}{4(b-a)}\right)$$

$$1 \leq \frac{I}{L} \leq exp\left\{\frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(L-A)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}, \forall x \in [a,b]$$

$$1 \leq \frac{I}{G} \leq exp\left\{\frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(G-A)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}, \forall x \in [a,b]$$

$$1 \leq \frac{I}{H} \leq exp\left\{\frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(H-A)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}, \forall x \in [a,b].$$

Proposition 4.0.1. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \dfrac{x^{s+1}}{s+1}$,$s \in (0,1)$ *et* $|f'(x)| = x^s$ *est s-convexe avec* $0 \leq a \leq b$ *,alors :*

$$|A^{s+1}(a,b) - L_{s+1}^{s+1}(a,b)| \leq \frac{b-a}{(s+2)}\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)[a^s + b^s].$$

Preuve 4.0.5. *on utilise le corollaire(3.1.1)dans 2, d'ou :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{b-a}{(s+1)(s+2)}\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)[|f'(a) + f'(b)]. \tag{4.4}$$

Donc,d'aprés linégalité(4.4)

$$\left|\frac{(x^{s+1})}{s+1} - \frac{1}{b-a}.\frac{1}{s+1}\left[\frac{x^{s+2}}{s+2}\right]_a^b\right| = \left|\frac{(\frac{a+b}{2})^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}\left[\frac{b^{s+2} - a^{s+2}}{(s+2)(b-a)}\right]\right|.$$

Alors :

$$|A^{s+1}(a,b) - L_{s+1}^{s+1}(a,b)| \leq \frac{b-a}{(s+2)}\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)[a^s + b^s].$$

Proposition 4.0.2. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$*,* $f(x) = \dfrac{x^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}$ *,* $s \in (0,1)$ *et* $q \geq 1$ *,*$|f'(x)|^q = x^s$ *est s-convexe,avec* $0 \leq a \leq b$ *,alors :*

$$\left|A^{\frac{s}{q}+1}(a,b) - L_{\frac{s}{q}+1}^{\frac{s}{q}+1}(a,b)\right|$$
$$\leqslant \left(\frac{s}{q}+1\right)\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{(s+2)2^s}a^s + \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)2^s}b^s\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)2^s}a^s + \dfrac{1}{(s+2)2^s}b^s\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Preuve 4.0.6. *On utilise le corollaire (3.1.2)dans 2, on a :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{(s+2)2^s}|f'(a)|^q + \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)2^s}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)2^s}|f'(a)|^q + \dfrac{1}{(s+2)2^s}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right]. \tag{4.5}$$

Donc,d'aprés l'inégalité(4.5)

$$\left|\frac{x^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1} - \frac{1}{b-a}.\frac{1}{\frac{s}{q}+1}\left[\frac{x^{\frac{s}{q}+2}}{\frac{s}{q}+2}\right]_a^b\right| = \left|\frac{(\frac{a+b}{2})^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1} - \frac{1}{\frac{s}{q}+1}\left[\frac{b^{s+2}-a^{s+2}}{(\frac{s}{q}+2)(b-a)}\right]\right|.$$

Alors :

$$\left|A^{\frac{s}{q}+1}(a,b) - L_{\frac{s}{q}+1}^{\frac{s}{q}+1}(a,b)\right|$$
$$\leqslant \left(\frac{s}{q}+1\right)\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{(s+2)2^s}a^s + \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)2^s}b^s\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)2^s}a^s + \dfrac{1}{(s+2)2^s}b^s\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Proposition 4.0.3. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$*,* $f(x) = \dfrac{x^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}$ *,* $s \in (0,1)$ *et* $q \geq 1$ *,*$|f'(x)|^q = x^s$ *est s-convexe,avec* $0 \leq a \leq b$ *et* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$*,alors :*

$$\left|A^{\frac{s}{q}+1}(a,b) - L_{\frac{s}{q}+1}^{\frac{s}{q}+1}(a,b)\right|$$
$$\leqslant \left(\frac{s}{q}+1\right)\frac{(b-a)}{4}\frac{1}{2^{\frac{s}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{(s+1)}a^s + \dfrac{2^{s+1}-1}{(s+1)}b^s\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\dfrac{1}{(s+1)}b^s + \dfrac{2^{s+1}-1}{(s+1)}a^s\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right].$$

Preuve 4.0.7. *On utilise le corollaire(3.1.3)dans 2, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{4}\frac{1}{2^{\frac{s}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{(s+1)}|f'(a)|^q+\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{1}{(s+1)}|f'(b)|^q+\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Donc,d'aprés l'inégalité(4.6)

$$\left|\frac{x^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}-\frac{1}{b-a}.\frac{s}{q}+1\left[\frac{x^{\frac{s}{q}+2}}{\frac{s}{q}+2}\right]_a^b\right| = \left|\frac{(\frac{a+b}{2})^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}-\frac{1}{\frac{s}{q}+1}\left[\frac{b^{s+2}-a^{s+2}}{(\frac{s}{q}+2)(b-a)}\right]\right|.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\left|A^{\frac{s}{q}+1}(a,b)-L_{\frac{s}{q}+1}^{\frac{s}{q}+1}(a,b)\right| \\
&\leqslant \left(\frac{s}{q}+1\right)\frac{(b-a)}{4}\frac{1}{2^{\frac{s}{q}}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{(s+1)}a^s+\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)}b^s\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\frac{1}{(s+1)}b^s+\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)}a^s\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Proposition 4.0.4. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \dfrac{x^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}$, $s \in (0,1)$ *et* $q \geq 1$,$|f'(x)|^q = x^s$ *est s-convexe,avec* $0 \leq a \leq b$ *et* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,*alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|A^{\frac{s}{q}+1}(a,b)-L_{\frac{s}{q}+1}^{\frac{s}{q}+1}(a,b)\right| \\
&\leqslant \left(\frac{s}{q}+1\right)\frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}a^s+\beta_{\frac{1}{2}}(q+1,s+1)b^s\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\beta_{\frac{1}{2}}(q+1,s+1)a^s+\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}b^s\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned}$$

Preuve 4.0.8. *On utilise le corollaire(3.1.4)dans 2, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}|f'(a)|^q+\beta_{\frac{1}{2}}(q+1,s+1)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\beta_{\frac{1}{2}}(q+1,s+1)|f'(a)|^q+\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Donc,d'aprés l'inégalité(4.7)

$$\left|\frac{x^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}-\frac{1}{b-a}.\frac{s}{q}+1\left[\frac{x^{\frac{s}{q}+2}}{\frac{s}{q}+2}\right]_a^b\right|\left|\frac{(\frac{a+b}{2})^{\frac{s}{q}+1}}{\frac{s}{q}+1}-\frac{1}{\frac{s}{q}+1}\left[\frac{b^{s+2}-a^{s+2}}{(\frac{s}{q}+2)(b-a)}\right]\right|.$$

Alors :

$$\left|A^{\frac{s}{q}+1}(a,b)-L_{\frac{s}{q}+1}^{\frac{s}{q}+1}(a,b)\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{s}{q}+1\right)\frac{(b-a)}{2^{\frac{1}{p}}}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}a^s+\beta_{\frac{1}{2}}(q+1,s+1)b^s\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\beta_{\frac{1}{2}}(q+1,s+1)a^s+\frac{1}{2^{q+s+1}(q+s+1)}b^s\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right].$$

Conclusion

Dans ce mémoire ,nous présentons certaines travaux sur quelques nouvelles inégalités intégrales pour les fonctions s-convexes à l'aide de l'intégrale fractionnaire.

Bibliographie

[1] M. Alomari, M. Darus, *Some Ostrowski's type inequalities for convex functions with applications*, RGMIA Res. Rep. Coll, 2010 (2010), 14 pages. 1.

[2] M. Alomari, M. Darus, S. S. Dragomir, P. Cerone, *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense*, Appl. Math. Lett., 23 (2010), 1071–1076. 1, 1.

[3] M. Alomari, M. Darus, U. S. Kırmacı, *Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions, Acta Math.*Sci. Ser. B Engl. Ed., 31 (2011), 1643–1652. 3.

[4] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, *Fractional Calculus : Models and Numerical Methods*, World Scientific, Singapore, y(2012). 1.

[5] S. S. Dragomir, S. Fitzpatrick, *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense*, Demonstratio Math., 32 (1999),687–696. 1, 1.

[6] S. S. Dragomir, T. M. Rassias , Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration, Springer, Netherlands, (2002). 1.1, 1.

[7] G. Farid, *Some new Ostrowski type inequalities via fractional integrals*, Int. J. Anal. Appl., 14 (2017), 64–68. 1, 1.

[8] H. Hudzik, L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Math., 48 (1994), 100–111. 1, 1.

[9] I. Is¸can, *Ostrowski type inequalities for harmonically s-convex functions*, Konuralp J. Math., 3 (2015), 63–74. 1

[10] I. Is¸can, *Ostrowski type inequalities for p-convex functions* , New trends Math. Sci., 4 (2016), 140–150.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, (2006). 1.4.

[12] M. A. Latif, S. S. Dragomir, A. E. Matouk, *New inequalities of Ostrowski type for co-ordinated s-convex functions via fractional integrals*, J. Frac. Calcu. Appl., 4 (2013), 22–36. 1, 1.

[13] M. Matloka, *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are h-convex via fractional integrals*, J. Sci. Res. Rep., 3 (2014), 1633–1641. 1, 1.

[14] A. Ostrowski, *Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert*, Comment. Math. Hel, 10 (1938), 226–227. 1.

[15] M. Z. Sarıkaya, H. Budak, *Generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals*, Proceed. Amer. Math.Soc., 145 (2017), 1527–1538. 1, 1.

[16] E. Set, *New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals*, Comp. Math. Appl., 63 (2012), 1147–1154. 1, 1.

[17] E. Set, M. E. Ozdemir, M. Z. Sarıkaya,*New inequalities of Ostrowskı's type for s-convex functions in the second sense with applications*, Facta Unv. Ser. Math. Inform., 27 (2012), 67–82. 1, 1, 4, 2.3, 2.6, 2.9.

[18] ç. Yıldız, M. E. Ozdemir, M. Z. Sarıkaya, *New Generalizations of Ostrowski-Like Type Inequalities for Fractional Integrals*, Kyungpook Math. J., 56 (2016), 161–172.

[19] D.Karapınar,S.Turhan,M.Kunt,I.Işcan , *Some new fractional integral inequalities for s-convex functions.* Journal of Nonlinear Sciences and Applications(2017),4552-4563.

[20] A.A.A Kilbas ,H.M.Srivastava and J.J Trujillo theory and applications cf fractional different,north holland Matimaticl studies 204,ad van mill ,amsterdam,(2006)

[21] S.S.Dragomir,S.WANG,Application of Osrtowski's Inequalityto theEstimation of Error Bounds for Some special Means and for Some Numerical Quadrature Rules.Appl.Math.Lett.Vol.11,NO.1,pp.105-109.1998

[22] R.Beals,R,WongS,pecial functions, A Graduate Text,Cambridge university press Cambridge,(2010)

[23] D. S. M i t r i n o v i d , J. E. P e c a r i c and A. M. F i n k , Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer, Dordrecht, 1993.

[24] I,Scan,I :New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality.J.Inequal.Appl.2019,Article ID 304(2019).

[25] Z.Dahmani,S.Belarbi,On some new fractional integral inequelities.J.I.P.A.M.2009.Vol.10,no 03.