

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

DRAOUI ASSIA

GUITOUNE SARAH

Sujet du mémoire

**ETUDE DE LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM PAR UNE
NOUVELLE THEORIE DE DEFORMATION EN CISAILLEMENT**

Soutenu publiquement le 07/10/2020.devant le jury composé de :

M. ABDELAZIZ	Hadj Henni	Président
M. DRAICHE	Kada	Rapporteur
M. TLIDJI	Youcef	Examineur
Mme. KHELIFA	Zoubida	Examinatrice

PROMOTION : 2019/2020

Remerciement

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr. K. Draiche**, on le remercie pour son encadrement qualifié, pour la patience, la gentillesse, et la disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

On remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Nos profonds remerciements vont également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuves malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Enfin (the last but not the least), nous saluons tous nos camarades de promotion et les remercions pour les agréables moments passés ensemble.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père

Autant de phrases expressions aussi éloquentes soient-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers lui. Il a su m'inculquer le sens de la responsabilité et l'optimisme et je lui dois tout ce que je suis aujourd'hui et tout ce que je serai demain. Qu'il repose en paix et Allah yarhamou.

Ma mère

Autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour que j'éprouve pour elle. Merci pour toute la tendresse et l'affection qu'elle n'a cessé de me procurer tout au long de mon parcours.

Mes frères Ismail et Ibrahim,

Mes sœurs Nadia et Fatima,

tous mes amis en particulier: Sarah , iman , Ikram et Fatima

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Sarah

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

Aux personnes dont j'ai bien aimé, à tous mes sœurs et mon frère.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amis, collègues d'étude, Sarah, Wissame, Ikram, Fatima, Imen et Manal.

A mes amis de toujours et frères de cœur, Asmaa, Hanane, Rima et Cilina.

Assia

Résumé

Le but du présent travail est d'étudier le comportement vibratoire de plaques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en utilisant une nouvelle théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT). Le point fort de la théorie proposée, c'est que le champ de déplacement repose sur nouvelle cinématique du champ de déplacement qui comporte des termes d'intégration indéterminés, de plus elle implique que quatre variables et quatre équations du mouvement au lieu de cinq et donne des résultats avec la même précision que la théorie FSDT conventionnelle. Les équations de mouvement et les conditions aux limites des plaques en FGM sont dérivées du principe d'Hamilton et résolues à l'aide de la solution de Navier. Les résultats obtenus ont été validés en les comparant avec la solution d'élasticité 3D, la FSDT conventionnelle et d'autres solutions disponibles dans la littérature. Le facteur de correction du cisaillement semble impossible dans certains cas (en fonction du cas). Enfin, les chercheurs recommandent de poursuivre l'analyse du comportement des structures FGM avec cette nouvelle cinématique pour modéliser le champ de déplacement.

Mots clés : plaques FGM, vibration libre, FSDT conventionnelle, principe d'Hamilton, solution de Navier.

Abstract

The aim of the present work is to study the vibrational behavior of plates made of functionally graded materials (FGM) using a novel theory of first-order shear deformation theory (FSDT). The strong point of the proposed theory, it is that the displacement field is based on new kinematics which comprises indeterminate integrated terms, moreover it implies that four variables and four equations of movement instead of five and gives results with the same precision as conventional FSDT theory. The equations of motion and boundary conditions of FGM plates are derived from the Hamilton's principle and solved using Navier's solution. The results obtained were validated by comparing them with the 3D elasticity solution, the conventional FSDT and other solutions available in the literature. The shear correction factor appears to be impossible in some cases (depending on the case). Finally, the researchers recommend continuing the analysis of the behavior of FGM structures with this new kinematics to model the displacement field.

Keywords : FGM plates, free vibration, conventional FSDT, Hamilton's principle, Navier's solution.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة السلوك الاهتزازي للصفائح المتدرجة وظيفيا (FGM) باستخدام نظرية جديدة للتشوه القص من الدرجة الأولى (FSDT). النقطة القوية في النظرية المقترحة ، هي أن مجال الإزاحة يعتمد على ديناميكية جديدة لمجال الإزاحة والتي تشتمل على شروط تكامل غير محددة ، علاوة على ذلك فهي تعتمد على أربعة متغيرات وأربع معادلات للحركة بدلاً من خمسة و تعطي نتائج بنفس الدقة مثل نظرية FSĐT التقليدية. معادلات الحركة وحدود الصفائح في تشويه للصفائح ذات الخصائص المتغيرة وظيفيا مشتقة من مبدأ هاملتون وتم حلها باستخدام حل نافيي. تم التحقق من صحة النتائج التي تم الحصول عليها من خلال مقارنتها بطول نظرية المرونة ثلاثية الأبعاد، و FSĐT التقليدية والحلول الأخرى المتوفرة في الأدبيات. يبدو عامل تصحيح القص مستحيلاً في بعض الحالات (حسب الحالة). أخيراً ، يوصي الباحثون بمواصلة تحليل سلوك الهياكل المتدرجة وظيفيا باستخدام هذه الحركية الجديدة لنمذجة مجال الإزاحة.

الكلمات المفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفيا، الاهتزازات الحرة، نظرية التشوه القصي من الدرجة الأولى، مبدأ هاميلتون، حل نافيي.

Sommaire

La liste des tableaux

La liste des figures

La liste de notation

Introduction générale..... 1

Chapitre I : Généralité sur les matériaux à gradient fonctionnel

I.1 Introduction..... 4

I.2 Définition et concept d'un matériau FGM..... 5

I.3 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels 7

I.4 Domaines d'applications des FGMs 8

I.5 Procédés de fabrication des FGMs 9

I.5.1 Coulage en bande (Tape casting)..... 9

I.5.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)..... 10

I.5.3 Compactage des couches (poudre d'empilement) 11

I.5.4 Frittage et infiltration 11

I.5.5 Frittage Laser Différentiel..... 12

I.5.6 Pulvérisation au plasma 12

I.5.7 Le coulage centrifuge..... 14

I.5.8 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)..... 14

I.5.9 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	15
I.5.10 Dépôt assisté par faisceau d'ions (IBAD).....	15
I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGMs	16
I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	17
I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	18
I.6.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	19
I.6.4. Modèle de Mori-Tanaka.....	20
I.6.5. Modèle auto-cohérent de Hill	21
I.7 Conclusion	23
Chapitre II : Les différentes théories des plaques	
II.1 Introduction	24
II.2 C'est quoi une plaque ?	25
II.3 Vibration libre.....	25
II.4 Différentes modèles analytiques appliquées aux plaques FGMs	26
II.4.1 Approches monocouche équivalente	26
II.4.1.1 Théorie classique des plaques (CPT).....	26
II.4.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	28
II.4.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	29
II.4.1.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	32
II.4.2 Approche par couche	32
II.4.3 Approche développement asymptotique	33
II.5 Conclusion	34

Chapitre III : Analyse du comportement dynamique des plaques FGM

III.1 Introduction	35
III.2 Géométrie et propriétés matérielles des plaques FGM	35
III.2.1 Modèle analytique	35
III.2.2 Propriétés matérielles	36
III.2.3 Hypothèses de base de la nouvelle théorie FSDT	38
III.3 Formulations théoriques	39
III.3.1 Champ de déplacement	39
III.3.2 Champ de déformation et équations constitutives	40
III.3.3 Détermination des équations du mouvement	41
III.3.4 Solution analytique pour des plaques FGM simplement appuyées.....	44
III.4 Conclusion.....	46
Chapitre IV : Résultats et discussions	
IV.1 Introduction.....	47
IV.2 Analyse des résultats de la vibration libre des plaques FGM	47
IV.2.1 Analyse de la vibration libre des plaques carrées en FGM Al/ZrO ₂	48
IV.2.2 Analyse de la vibration libre des plaques carrées en FGM Al/Al ₂ O ₃	49
IV.2.3 Analyse de la vibration libre des plaques rectangulaires en FGM Al/Al ₂ O ₃	50
IV.2.4 Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs en FGM	54
IV.3 Conclusion	56
Conclusion générale	57

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....7

Tableau I.2 : Les principaux domaines d'application des FGMs 8

Chapitre II

Tableau II.1 : Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour les plaques FGM....31

Chapitre IV

Tableau IV.1: Propriétés matérielles utilisées dans les plaques FGM et les plaques sandwichs
En FGM48

Tableau IV.2: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\beta} = wh\sqrt{\rho_m / E_m}$
d'une plaque carrée en FGM Al/ZrO₂.49

Tableau IV. 3: deux premières fréquences naturelles non dimensionnelles d'une plaque
FGM.....50

Tableau IV.4: Comparaison des quatre premières fréquences naturelles adimensionnelles
 $\bar{\omega} = wa^2 / h\sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire en FGM Al/Al₂O₃. $b / a = 2$..51

Tableau IV.5: Comparaison des deux premières fréquences naturelles adimensionnel
 $\tilde{\beta} = wa^2 / h\sqrt{\rho_0 / E_0}$ d'une plaque sandwich carrée avec un noyau FGM
Al₂O₃/Al $p = 0.5, 1, 5$ 54

Tableau IV.6: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\tilde{\beta} = wa^2 / h\sqrt{\rho_0 / E_0}$
d'une plaque sandwich carrée avec un noyau FGM W/C.....55

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans la direction verticale	6
Figure I.2 : La distribution composante des matériaux .Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).....	7
Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande.....	10
Figure I.4 : Principe de la méthode coulage séquentiel en barbotine.....	11
Figure I.5 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.....	12
Figure I.6 : Concept de projection thermique.....	13
Figure I.7 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes.....	14
Figure I.8 : Une vue schématique du processus de dépôt chimique en phase vapeur.....	15
Figure I.9 : Processus de dépôt assisté par faisceau d'ions (IBAD).....	16
Figure I.10 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	17
Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque "P-FGM".....	18
Figure I.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque "S-FGM".....	19
Figure I.13: Variation de la fraction volumique dans une plaque "E-FGM".....	20
Figure I.14: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière.....	20
Figure I.15: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique.....	21

Chapitre II

Figure II.1 : Exemple d'une plaque à gradient fonctionnel	25
--	----

Figure II.2 : Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique de Love-Kirchhoff (CPT).....	27
Figure II.3: Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie de premier ordre de Reissner-Mindlin(FSDT).....	29
Figure II.4 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDT).....	30
Figure II.5 : Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche.....	33

Chapitre III

Figure III.1 : Géométrie des plaques à gradient fonctionnel : (a)- Plaque FGM, (b)- Plaques sandwich avec un noyau FGM et peaux isotropes.....	36
Figure III.2(a) : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque à gradient fonctionnel pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.....	38
Figure III.2(b) : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque sandwich à gradient fonctionnel pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.....	38

Chapitre IV

Figure IV.1: Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques carrées à gradient fonctionnel Al/Al ₂ O ₃ avec la variation de l'indice de loi de puissance. p , $a/h = 5$ et 50	53
Figure IV.2: Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques à gradient fonctionnel Al/Al ₂ O ₃ avec la variation du rapport géométrique (a/b) et pour les valeurs de $p = 0, 1$ et 5	53

Notations

∂	Dérivée partielle
[]	Matrice
{ }	Vecteur colonne
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	Densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	Densité du métal
ρ_c	Densité de la céramique
$V(z)$	Fraction volumique
α, β	Paramètres
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
θ	Rotation de la surface neutre
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie cinétique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments dû à la flexion
S_{xz}, S_{yz}	Moment dû au cisaillement transverse
I_1, I_2, I_3	Constantes d'inertie
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel ou à gradient de propriétés "Functionally Graded Matériels : FGM" peuvent être définis comme des matériaux composites avancés ayant une transition graduelle dans les propriétés mécaniques, soit continue, soit par étapes fines et discrètes, à travers l'interface. Ce matériau est produit en mélangeant deux ou plusieurs matériaux dans un certain rapport de volume "généralement céramique et métal". Les FGMs ont été proposées [1], développées et utilisées avec succès dans des applications industrielles depuis les années 1980 [2]. Ces matériaux ont été initialement conçus comme une barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion. Ils sont actuellement développés pour une utilisation générale en tant que composants structurels soumis à des températures élevées. Les structures composites classiques telles que le plastique renforcé de fibres "FRP" souffrent de la discontinuité des propriétés des matériaux à l'interface des couches et des constituants. Par conséquent, les champs de contraintes dans ces régions créent des problèmes d'interface et des concentrations de contraintes thermiques dans des environnements à haute température. De plus, une déformation plastique importante de l'interface peut déclencher l'initiation et la propagation de fissures dans le matériau [3]. Ces problèmes peuvent être réduits en modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs et en adaptant le matériau à l'application souhaitée. Les domaines dans lesquels les FGMs offrent des améliorations et des avantages potentiels dans les applications d'ingénierie comprennent une réduction des contraintes dans le plan et transversales à travers l'épaisseur, la prévention ou la réduction des tendances de délaminage dans les structures en composites stratifiées ou sandwichs, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, résistance à la rupture plus élevée par rapport aux matériaux composites conventionnels et facteurs d'intensité de contrainte réduits [4].

De nombreux auteurs ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques à gradient fonctionnel "FGMs", principalement au moyen de la théorie conventionnelle de la déformation en cisaillement du premier ordre "FSDT" et des théories de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur "HSST". Dans cette étude, des travaux pertinents sur l'analyse vibratoire des FGMs basés sur les théories FSDT conventionnelles et modifiés ont été passés en revue et présentés dans ce qui suit.

Malekzadeh et Alibeygi [5] ont présenté l'analyse de la vibration libre des plaques quadrilatérales arbitraires à faces droites arbitraires fonctionnellement graduées sous environnement thermique basée sur le FSDT utilisant la méthode de quadrature différentielle "DQM". Hosseini *et al.* [6] ont analysé la vibration libre de plaques rectangulaires en utilisant la théorie FSDT et la procédure de solution de forme rapprochée exacte. Zhu *et al.* [7] ont présenté l'analyse des vibrations libres des FGMs en utilisant la méthode locale sans maillage de Kriging. Les équations de mouvement du problème de vibration libre sont obtenues sur la base du FSDT et de la formulation locale de Petrov-Garlekin.

Natarajan *et al.* [8] ont étudié le comportement de flexion et de la vibration libre des plaques sandwichs fonctionnellement graduées employant un élément de plaque quadrilatérale à 8 nœuds basé sur la théorie d'ordre élevé HSDT, les résultats basés sur FSDT ont également été présentés. Valizadeh *et al.* [9] ont étudié le comportement statique et dynamique des FGMs en utilisant une méthode d'éléments finis iso-géométriques non uniforme, où la cinématique de la plaque est basée sur la FSDT. Thai et Choi [10] ont présenté une simple théorie FSDT avec quatre inconnues pour l'analyse de flexion et de vibration libre des FGMs. Les auteurs ont divisé le déplacement transversal " w " en parties de flexion " w_b " et de cisaillement " w_s ", respectivement.

À cet égard nous présentons dans ce modeste mémoire de fin d'études, l'analyse du comportement vibratoire des plaques en matériaux à gradient fonctionnel "FGM" en utilisant une simple théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre "FSDT". Le champ de déplacement de cette théorie repose sur une nouvelle cinématique qui comporte des termes d'intégration indéterminés, de plus elle implique que quatre variables et quatre équations de mouvement au lieu de cinq. On suppose que les propriétés mécaniques des plaques varient dans le sens de l'épaisseur selon une loi de distribution de puissance en termes de fractions volumiques des constituants "la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka [11] n'est pas retenue dans cette étude". Les équations de mouvement des plaques sont dérivées en employant le principe d'Hamilton. Ces équations sont ensuite résolues à l'aide de la technique de Navier. Les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème des valeurs propres. La précision du présent modèle est vérifiée en le comparant avec d'autres HSDT, la solution d'élasticité 3D et quasi-3D disponibles dans la littérature. Bien que des résultats similaires à ceux du FSDT conventionnelle soient trouvés, le nombre réduit d'inconnues de cette théorie joue un rôle important dans la performance. Par conséquent, la solution numérique peut être d'un intérêt primordial pour les futurs travaux.

Ce présent travail s'articule autour de quatre chapitres :

- Le premier chapitre est un aperçu détaillé sur les matériaux à gradient fonctionnel "FGMs", les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles des FGMs suivant l'épaisseur de la plaque et leur domaine d'application ;
- Le deuxième chapitre est réservé à la recherche bibliographique qui décrit les fameuses tendances concernant la formulation des différents modèles analytiques appliqués aux plaques FGM ;
- Le troisième chapitre sera consacré à présenter le développement analytique de la nouvelle théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour analyser la vibration libre des plaques FGM qui tien en considération les effets des déformations transversal avec l'introduction d'un coefficient de correction de cisaillement ;
- Le quatrième chapitre présente les résultats numériques obtenus des fréquences naturelles de vibration des plaques fonctionnellement graduées en utilisant le présent modèle et en les comparant avec les autres théories disponible dans la littérature afin de vérifier l'efficacité de la théorie proposée.

Ce travail se termine par une conclusion générale où l'on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution des problèmes de la vibration libre dans les plaques FGM ainsi par les perspectives envisagées pour des futurs travaux.

CHAPITRE I

*Généralités sur les matériaux à gradient
fonctionnel « FGM »*

Chapitre I

Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel

« FGM »

I.1. Introduction

La plupart des matériaux composites les plus légers avec les rapports de haute résistance/poids et rigidité/poids ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et d'autres applications de technologie. Cependant, le matériau composite traditionnel est incapable d'être utilisé sous les environnements à hautes températures. Généralement les métaux ont été utilisés dans le domaine de technologie pendant plusieurs années à cause de leur excellente force et dureté. Dans les conditions à hautes températures, la force du métal est assimilée réduite au matériau composite traditionnel. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques dans la résistance thermique. Cependant, les applications de céramique sont habituellement limitées en raison de leur basse dureté.

La récente technologie nécessite d'employer des matériaux innovants, caractérisés par les exigences en termes de performances techniques, de fiabilité, d'économie d'élaboration, de durabilité et d'impact environnemental, les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. La conception des matériaux avancés qui allient d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté est un facteur plus important. Pour atteindre ces objectifs, Les avancées industrielles mènent à l'apparition d'une nouvelle classe des matériaux dits « matériaux composites ». De plus, pour obtenir des matériaux spécifiques propices, les chercheurs et les industriels ont contribué à l'introduction d'une nouvelle génération des matériaux composites connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Matériels : FGM) qui font l'objet d'importantes recherches. Un FGM typique, avec un effet d'accouplement à haute flexion/extension, est un composé non homogène effectué à partir de différentes phases des constituants matériels (habituellement en céramique et métal). Dans un FGM les différentes phases microstructurales ont différentes fonctions, et les FGMs globaux atteignent le statut multi-structurel de leur gradation de propriété, en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, de leur objet exposé

les propriétés de matériaux, d'un changement doux et continu d'une surface à l'autre, de ce fait éliminant des problèmes d'interface et atténuant des concentrations de contrainte thermique. C'est dû au fait que les constituants des FGM en céramique peuvent résister aux environnements à hautes températures en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, alors que les constituants en métal fournissent une performance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique.

Les FGMs sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continument avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermique de la structure qu'ils constituent. Les fonctions désirées sont intégrées dès la conception au cœur même de la matière. Ceci en choisissant selon les applications spécifiques et charges environnementales le matériau adéquat pour chaque interface. Ces matériaux possèdent de multiples avantages avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très élevés qui peuvent les rendre attractifs. Du point de vue de leur potentiel d'application, il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique, en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances, telle que la réduction des contraintes locales [12, 13] ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

I.2 Définition et concept d'un matériau FGM

Un matériau à gradient fonctionnel c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables.

Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ce matériau est généralement fait à partir d'un mélange de métal et de céramique (voir Figure I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté doivent être élevés. En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions de grand gradient de la température.

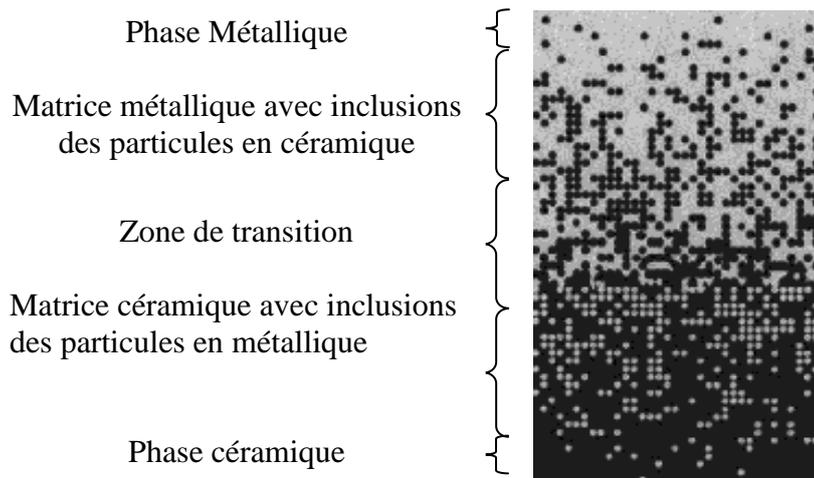


Figure I.1 : FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans la direction verticale [14]

Le concept des matériaux à gradient fonctionnel fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales et même pour les réacteurs à fusion [15, 16]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou dis-continuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [17]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, ...etc.

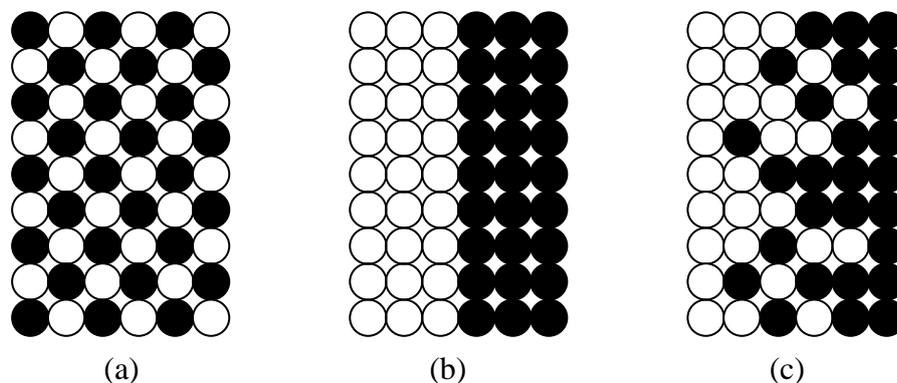
Généralement, les matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le Tableau I.1 ci-dessous. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [18]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phases	Caractéristiques mécaniques
Céramique : La face à haute température	Bonne résistance thermique ; Bonne résistance à l'oxydation ; Faible conductivité thermique.
Céramique-métal : couches intermédiaires	Élimination des problèmes de l'interface ; Relaxer les contraintes thermiques.
Métal : La face à basse température	Bonne résistance mécanique ; Conductivité thermique élevée, Très bonne ténacité.

I.3 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) et les matériaux conventionnels est illustré sur la (Figure I.2). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, tandis que le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux et les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Les FGMs attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels. Puisque les FGMs ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures du côté céramique.

**Figure I.2 :** La distribution composante des matériaux [19].

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

I.4 Domaines d'applications des FGMs

Au début du développement des FGMs, le concept était de éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui se expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface.

Tableau I.2 : Les principaux domaines d'application des FGMs.

Domaines	Applications
Systèmes optiques	Fibres optiques.
Conversion d'énergie	Générateur thermoélectrique, Convertisseur de thermoionique, Cellules de carburant, piles solaires.
Usines chimiques	Echangeur de chaleur, Pipe de chaleur.
Aérospatial	Eléments de moteur de fusée, Contrôles de vibrations, Structures adaptives.
Electroniques	Capteurs, Bras de lecture/écriture, Puces intégrées.
Energie nucléaire	Capteurs, Bras de lecture/écriture, Puces intégrées.
Matières biologiques	Implants, Peau artificielle, Prothèses.
Ingénierie	Outils de coupe, Éléments de moteur, Doublure de mur des moteurs.
Génie Civil	Chaussées rigides en béton (autoroutes) Chaussée souple en béton bitumineux Les pistes des aéroports

L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents modèles de FGM. Le type d'application étudiée détermine généralement le modèle de FGM à utiliser. Au cours des dernières décennies, cette classe de matériaux composites avancés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans le Tableau I.2, a été

initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

I.5 Procédés de fabrication des FGMs

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGMs : coulage en bande (Tape Casting), coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), compactage des couches, projection thermique (pulvérisation au plasma), frittage laser différentiel et le dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) sont les plus importants et sont énumérés en dessous.

I.5.1 Coulage en bande (Tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM Al₂O₃-TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure et en pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [20].

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes : tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour SiC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en SiC pour B₄C (problème d'usure) ; ensuite, un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit ; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant quatre heures environ pour obtenir une répartition uniforme ; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation. Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film siliconé afin de faciliter le décollement de la

bande sur un banc de coulage à l'aide d'un sabot (Figure I.3) constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μ m).

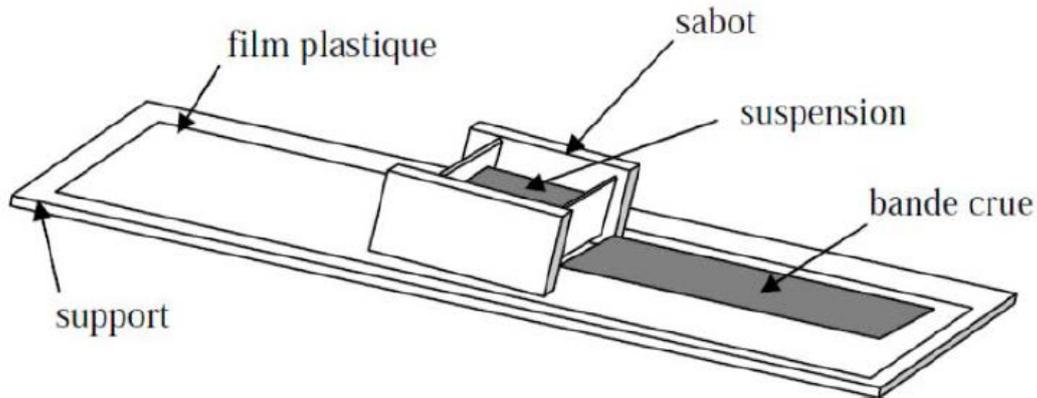


Figure I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [21].

I.5.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Morinaga [22, 23] a également réussi à fabriquer un $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{W}$ FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain. Quand il utilise une densité mince en barbotine (5% ou 10%), la couche d' Al_2O_3 et la couche de W ont été séparées, confirmant des couches inclinées continues et claires. Dans le passé, le dépôt en phase vapeur, l'implantation ionique et la diffusion ont été employées pour fabriquer des matériaux de gradient, mais cette technique a attiré l'attention et pourrait permettre pour fabriquer une série de FGM en utilisant des densités minces en barbotine et de fines particules comme matière première avec différentes densités spécifiques.

L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabriquer des pièces à plus grandes dimensions, ceci a été trouvé dans une étude réalisée par Grazzini et Wilkinson [24]. Leur travail a couvert le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Si}$ avec des formulations de coulée en barbotine basées sur les boues d'émouillage dispersées et coagulées qui ont été analysées. D'excellents résultats ont été obtenus en utilisant les boues d'émouillage coagulées, sans présence de fissuration après séchage. L'effet de la pression s'est avéré pour augmenter la densité avec une augmentation conséquente de la densité de feu. En outre, des microstructures homogènes ont été réalisées dans le système composé, malgré la grande différence de tailles des particules utilisées.

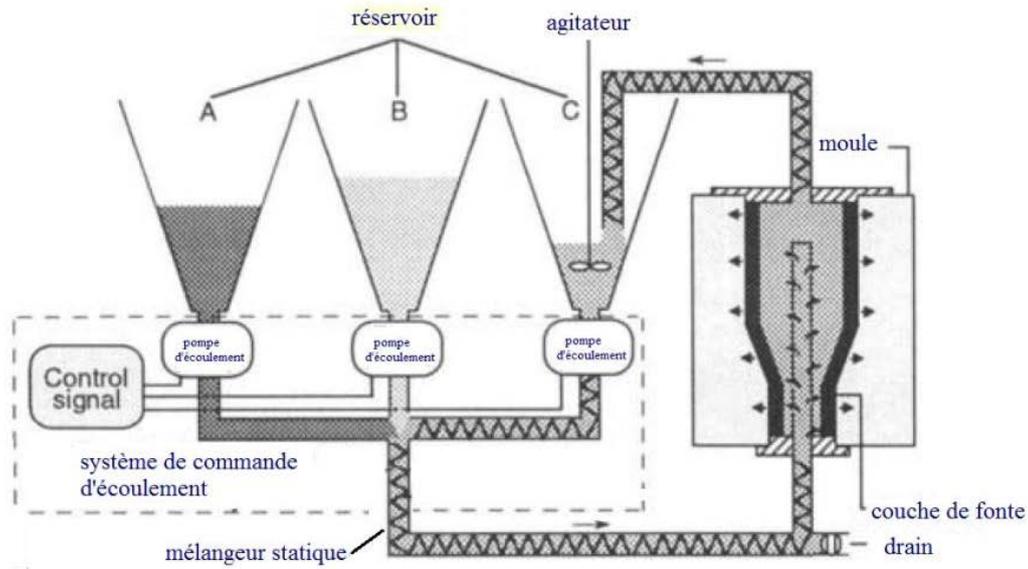


Figure I.4 : Principe de la méthode coulage séquentiel en barbotine [22].

I.5.3 Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [25]. Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100cm²) en raison des limites des forces de compaction, fabrication discontinue avec la productivité faible. Néanmoins, cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [26].

I.5.4 Frittage et infiltration

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce.

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [27]. Ce procédé peut être généralement appliqué pour plusieurs

combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5.5 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

YUKI *et al.* [28] ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La Figure I.5 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

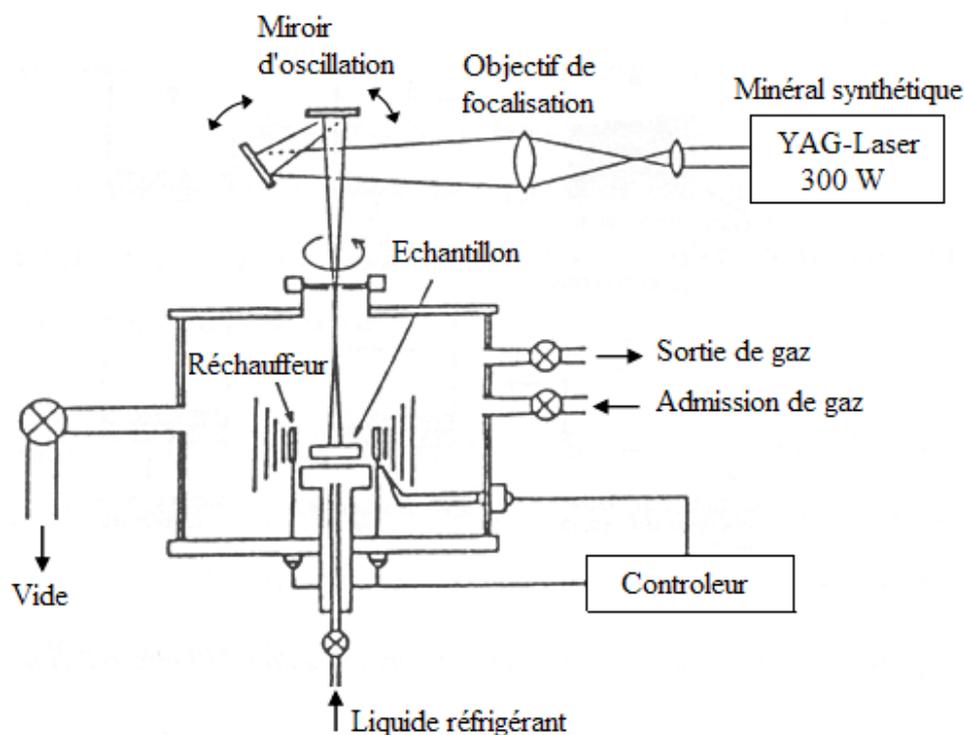


Figure I.5 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [28].

I.5.6 Pulvérisation au plasma

Les procédés de projection thermique sont généralement appelés sous des noms différents, comme la projection de plasma, la pulvérisation de métaux, la pulvérisation d'oxygène à haute vitesse (HVOF), la pulvérisation à l'arc, ...etc.

Considérant un revêtement céramique poreux qui est appliqué sur un composant peu résistant à la corrosion, ils forment un composite pour les régions chaudes dans les moteurs aéronautiques, les particules de poudre à haute vitesse possédant le point de fusion élevé est fondu et accéléré par la chaleur générée par le nuage de plasma vers le substrat. L'épaisseur de revêtement requise est obtenue par des actions successives du nuage de plasma. Des revêtements durs, à faible frottement et plus résistants à la fatigue peuvent être obtenus pour les surfaces des pistons des trains d'atterrissage des avions, en appliquant cette technique.

Il a été rapporté que les TBC conventionnels projetés thermiquement se sont effondrés lorsqu'ils ont été soumis à des charges mécaniques à ultra-haute température en raison de leur faible adhérence et de leur soulignage. Les TBC à gradation fonctionnelle sont des matériaux adaptés pour résister à de telles contraintes. Dans le travail réalisé par Khor et Gu, un revêtement fonctionnellement gradué de $ZrO_2/NiCo-CrAlY$ a été utilisé comme un TBC. Le revêtement a été appliqué par la technique de la projection thermique. Hautement un revêtement déposé avec une densité de revêtement et une homogénéité chimique accrues a été obtenu par rapport aux résultats des revêtements duplex, on a en outre observé que l'oxydation de l'enrobage des FGMs a été entravée. Les revêtements à base de zirconium sont couramment utilisés dans les pulvérisations en raison de la formation d'une phase tétragonale non transformable qui ne subit pas transformation martensitique lors du refroidissement par trempe. Une illustration schématique de la transformation martensitique La pulvérisation thermique est illustrée à la Figure I.6.

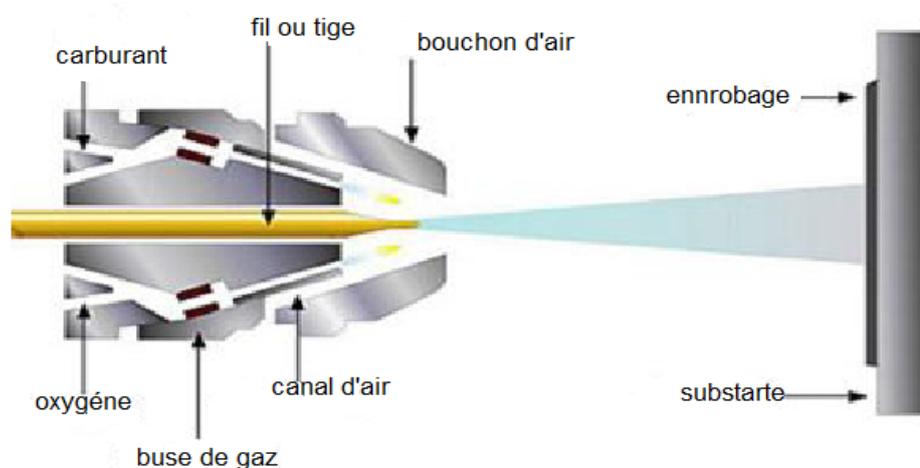


Figure I.6 : Concept de projection thermique.

I.5.7 Le coulage centrifuge

Ce coulage centrifuge a été principalement utilisé pour obtenir des pièces cylindriques de base des machines de coulée centrifuge sont : le type horizontal et le type vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées dans l'industrie des tuyaux, des tubes, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple.

Le coulage centrifuge est un procédé dans le quel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant. La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. Néanmoins, la méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans la Figure I.7 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication des FGMs contenant des particules de taille nano [29].

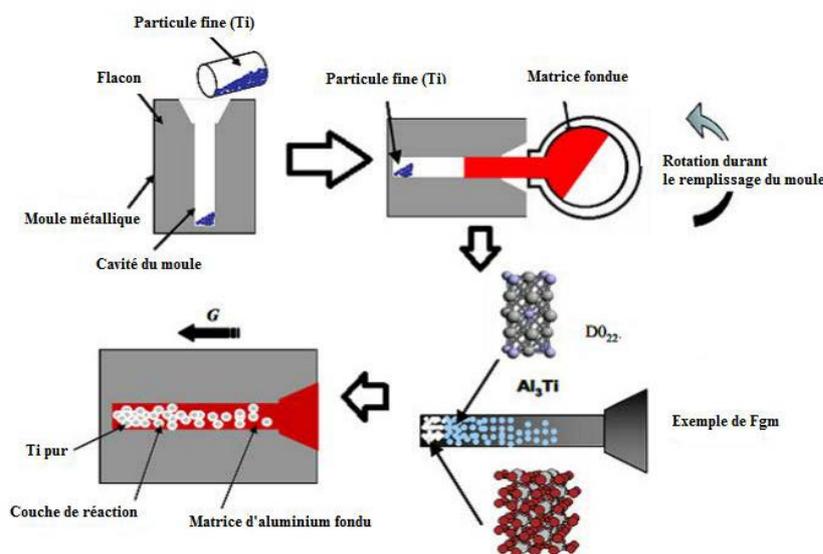


Figure I.7 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes [29].

I.5.8 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie prometteuse pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, enfin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le

chargement, le préchauffage et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [30].

I.5.9 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement à la (Figure I.8), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [30]. Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

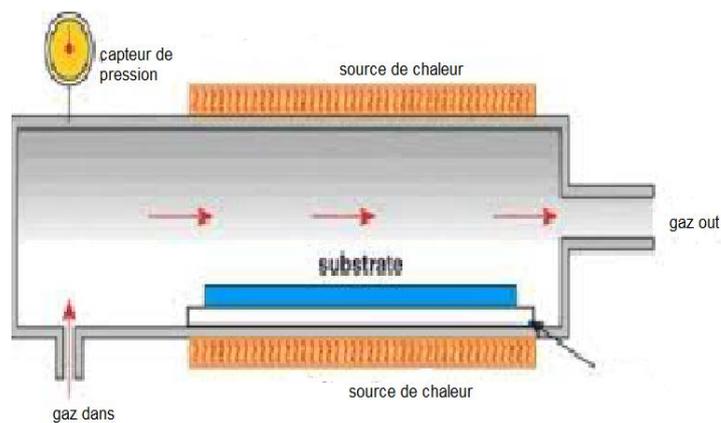


Figure I.8 : Une vue schématique du processus de dépôt chimique en phase vapeur.

I.5.10 Dépôt assisté par faisceau d'ions (IBAD)

Le dépôt assisté par faisceau d'ions IBAD (Ion Beam Assisted Deposition) peut être appelé dépôt de film mince par le mélange d'évaporation et de bombardement simultané dans des environnements à vide poussé. Les bombardements simultanés qu'implique cette technique la rendent différente des autres dépôts techniques. Une modification efficace peut être obtenue par le bombardement de films en développement avec des particules à haute vitesse de différentes morphologies, ce qui est crucial pour l'activité des films minces. Ces objectifs peuvent être atteints par : un changement d'orientation, une densification des films de développement à des basses températures, et l'altération de la taille des grains et de leurs

propriétés mécaniques. Cette technique peut être utilisée pour déposer des revêtements à forte adhérence, en faisant varier la concentration des particules pour chaque couche successive par des bombardements simultanés. Revêtements à gradation fonctionnelle fabriqués par l'IBAD sont adaptés aux applications à basse température, ayant un contrôle élevé de film/enrobage développé, tandis que le mélange chimique du substrat avec le film fournit une meilleure adhérence par rapport à ses homologues déposés en phase vapeur [31]. Dépôt assisté par faisceau d'ions peut être limité par la géométrie du substrat et la faible résistance mécanique du dépôt.

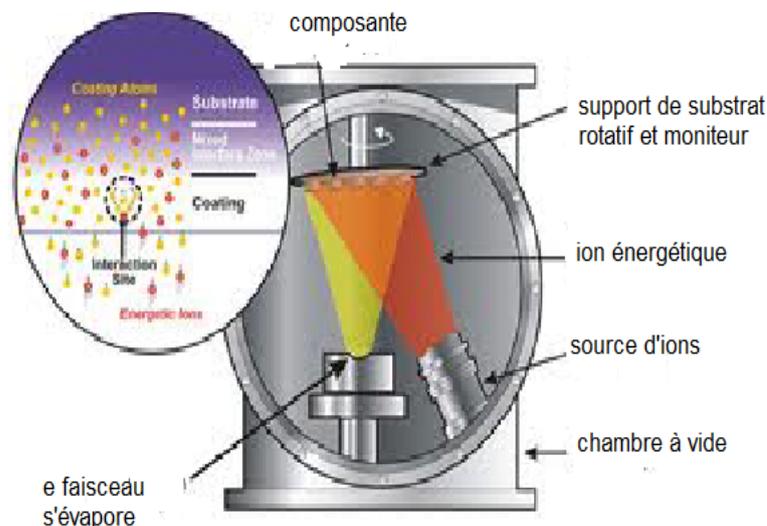


Figure I.9 : Processus de dépôt assisté par faisceau d'ions (IBAD) [31].

I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGMs

Les FGMs sont avant tout des matériaux que l'on peut définir comme des systèmes multiphasiques multi-composants, présentant des interpénétrations moléculaires effectives entre eux, mais en rajoutant la notion de variation d'un des réseaux, chimiquement ou physiquement différent des autres, selon la section de l'échantillon. Ainsi, ces matériaux fonctionnellement gradués peuvent être schématisés par un empilement d'un nombre infini de couches, chacune étant une sous-couche à part entière avec sa propre composition, sa propre séparation de phase, et donc sa propre morphologie et ses propres propriétés. Un FGM peut être définie par une fonction qui représente la variation des fractions de volume. Cette fraction est décrite par des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielle (E-FGM) ou sigmoïde (S-FGM) suivant l'application recherchée et la méthode de synthèse utilisée.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque (Figure I.10), tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Toutefois, l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young $E = E(z)$. Ainsi, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque est constant. Cependant, le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant l'une des fonctions citées au-dessus.

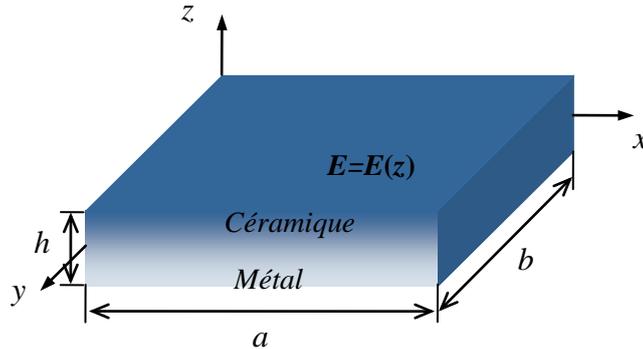


Figure I.10 : Géométrie d'une plaque en FGM.

I.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les structures P-FGM obéit à une fonction définie par une loi de puissance. En effet, cette fonction est impliquée dans ce présent travail et peut être défini sous la forme suivante :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une structure P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [32].

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface du métal (surface inférieure : $z = -h/2$) et de la surface du céramique supérieure : $z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Figure I.11 ci-dessous, il apparait clairement que la fraction volumique

change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

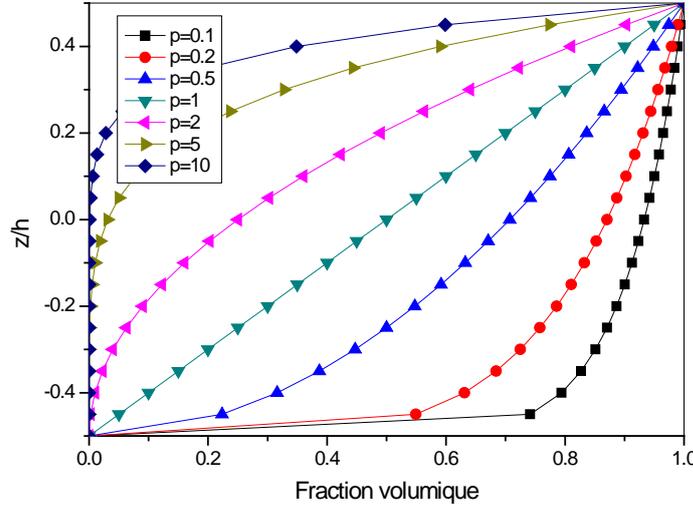


Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque "P-FGM".

I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [32]. Par conséquent, Chi et Chung [33] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces, cette fonction est appelée la fonction S-FGM.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé en utilisant les relations suivantes :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La (Figure I.12) ci-dessous montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée dans ce cas une "plaque S-FGM".

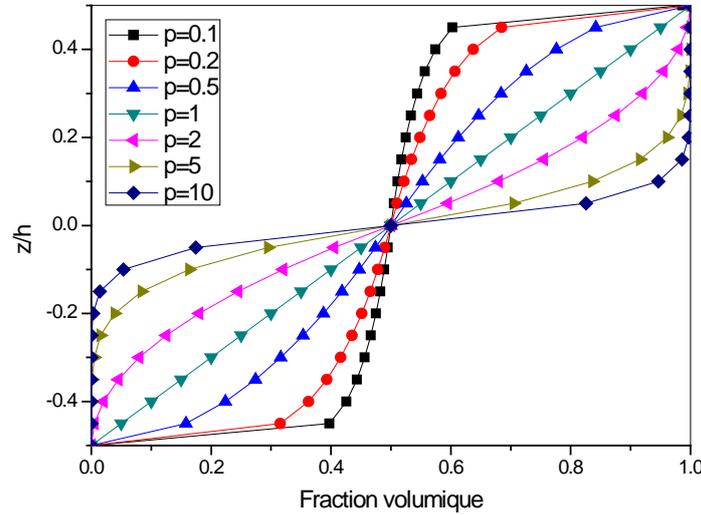


Figure I.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque "S-FGM".

I.6.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGMs, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle "E-FGM", car les propriétés du matériau varient à travers l'épaisseur avec une distribution exponentielle. La fraction de volume des constituants s'écrit sous la forme (Figure I.13) :

$$V(z) = e^{p\left(\frac{z+1}{h}\right)} \quad (\text{I.5a})$$

Et la variation du module d'élasticité à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM peut être calculée en utilisant l'expression suivante :

$$E(z) = E_c V(z) \quad (\text{I.5b})$$

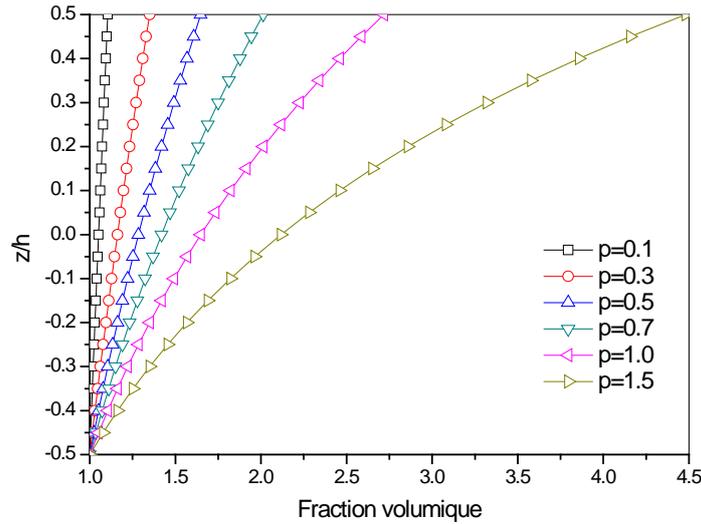


Figure I.13: Variation de la fraction volumique dans une plaque "E-FGM".

En effet, les lois de mélange citées auparavant sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. Pour cette raison, plusieurs modèles permettant l'évaluation des propriétés globales ont été développés, on peut citer le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka [11] ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill [34].

I.6.4 Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka qui permet de déterminer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues comme indiquée sur la Figure I.14). Ce modèle prend en compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matricielle dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.



Figure I.14: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière [11].

Si on note le module de compressibilité par K , le module de cisaillement par G , la fraction volumique par V et le coefficient d'expansion thermique par α , les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori-Tanaka [11], pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par Vel et Batra [3] :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1 \frac{(K_2 - K_1)}{(K_1 + 4/3G_1)}} \quad (\text{I.6})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1 \frac{(G_2 - G_1)}{(G_1 + f_1)}} \quad (\text{I.7})$$

Avec:

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} \quad (\text{I.8})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (\text{I.9})$$

I.6.5 Modèle auto-cohérent de Hill

Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue telle que montrée sur la Figure I.15.



Figure I.15: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique [34].

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K - K_2)} + \frac{V_2}{(K - K_1)} \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2}{(G - G_1)} \quad (\text{I.11})$$

Où les paramètres g et η sont définis par les relations suivantes:

$$g = \frac{K}{K_1 + (4/3)G}, \quad \eta = \frac{1}{5(3 - g)} \quad (\text{I.12})$$

A partir des équations (I.10) et (I.11), l'expression du module de compressibilité est obtenue comme suit :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + (4/3)G} + \frac{V_2}{K_2 + (4/3)G}} - 4/3G \quad (\text{I.13})$$

Le module de cisaillement G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{K_1 + (4/3)G} + \frac{V_2 K_2}{K_2 + (4/3)G} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{G - G_2} + \frac{V_2 G_1}{G - G_1} \right] + 2 = 0 \quad (\text{I.14})$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par les relations suivantes :

$$E = \frac{9KG}{(3K + G)}, \quad \nu = \frac{(3K - 2G)}{2(3K + G)} \quad (\text{I.15})$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka [11] conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

I.7 Conclusion

Dans un premier temps ce chapitre présente un aperçu sur les matériaux à gradient fonctionnel et l'histoire de leur origine, les différentes techniques modernes de fabrication ont été mis en évidence, leur domaines d'application sont aussi présentés, ces derniers qui peuvent être améliorés et élargies en abaissant les coûts de fabrication et en améliorant les méthodes d'élaboration. A la fin nous avons terminé par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique, et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque FGM, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles et sigmoïdes, ainsi que le modèle de Mori-Tanaka et auto-cohérent de Hill.

CHAPITRE II

*Différentes modèles analytiques appliquées
aux plaques FGM*

Chapitre II

Différentes modèles analytiques appliquées aux plaques FGM

II.1 Introduction

Les matériaux composites multicouches possèdent un comportement complexe et difficile à comprendre liés aux problèmes de modélisation des structures avec une forte anisotropie. Donc, la modélisation des structures composites hétérogènes en FGM "poutres, plaques, coques, ...etc." est toujours un sujet à discuter qui sollicite des théories capables de décrire leurs comportements statique et dynamique complexes avec précision. En effet, les structures multicouche à gradient fonctionnel, requièrent des théories raffinées capable de donner une bonne description de la distribution de la déformation et la contrainte du cisaillement à travers leurs épaisseurs et notamment aux interfaces. A cet effet, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement ce comportement ainsi que la méthode de résolution à appliquer. Beaucoup de chercheurs ont étudié le comportement dynamique des plaques à gradient fonctionnel (FGM) par conséquent plusieurs théories des plaques ont été proposées.

Généralement le comportement des plaques en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sous chargement mécanique, thermique et hygrothermique peut être prédit en utilisant l'une des théories tridimensionnelles (3-D) ou d'autres théories monocouches. Toutes les théories ultérieures se sont concentrées sur la réduction du problème 3D à un problème 2D en utilisant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique du champ de déplacement et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Des modèles tridimensionnels sont souvent utilisés pour bien tenir en compte de l'effet de l'interface des structures en matériaux à gradient de propriétés, cependant ces derniers sont très coûteux en termes de temps de calcul, en plus, ils sont aussi limités à certains cas simples.

Nous présentons dans ce chapitre quelques approches sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ de déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2 C'est quoi une plaque ?

Une plaque est un solide tridimensionnel défini par une surface de référence plane (x, y) et une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions à savoir sa longueur et sa largeur (Figure II.1). On définit ainsi :

- **Le plan médian** : plan situé à équidistance entre les faces ;
- **La fibre neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y) , avec $z = 0$;
- **La fibre normale** : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z ;
- **L'épaisseur h** : l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

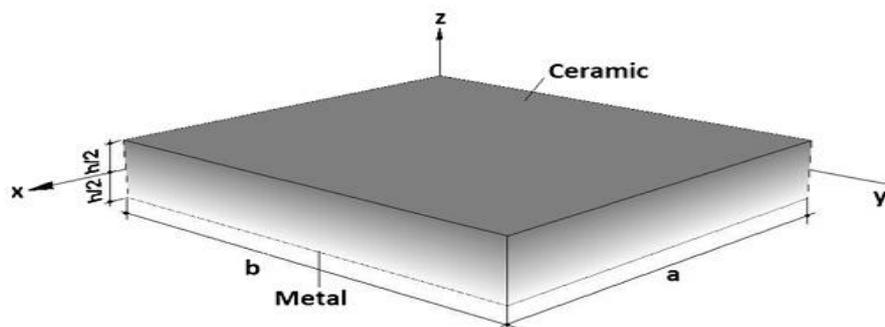


Figure II.1 : Exemple d'une plaque à gradient fonctionnel.

II.3 Vibration libre

Les vibrations libres sont des vibrations naturelles et inhérentes aux propriétés de la structure en l'absence des charges extérieures. En tout cas les vibrations libres mettent en jeu un échange permanent en l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque, où l'énergie cinétique associée aux vitesses et la masse des éléments déformés. Et la déformation associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations libres.

II.4 Différents modèles analytiques appliqués aux plaques FGMs

La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans la littérature des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque [35-37].

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models),
- Approche par couche LW (Layer-wise),
- Approche développement asymptotique

II.4.1 Approches monocouche équivalente

Parmi les différentes classes de théories, l'approche de monocouche équivalente est la plus fréquemment utilisée. Celle-ci se base sur l'idée de représenter une plaque hétérogène complexe par un seul lamina statiquement équivalent "homogénéisation", ce qui permet de réduire le problème d'élasticité 3D complexe à un problème 2D plus simple. Cette approche pose donc l'hypothèse que le champ de déplacement dans l'épaisseur peut être considéré comme continu à travers l'épaisseur de la structure multicouche.

Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère bidimensionnel de la structure. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche dans ce qui suit.

II.4.1.1 Théorie classique des plaques (CPT)

La théorie classique des plaques CPT "Classical Plate Theory" se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff. Lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque, donc on parle d'une plaque mince.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h). La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, d'où :

- ✓ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen ;
- ✓ Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal des points du plan neutre ;
- ✓ Une section droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (Figure II.2), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) ;
- ✓ L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

Basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où u_0, v_0, w_0 les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ($z=0$).

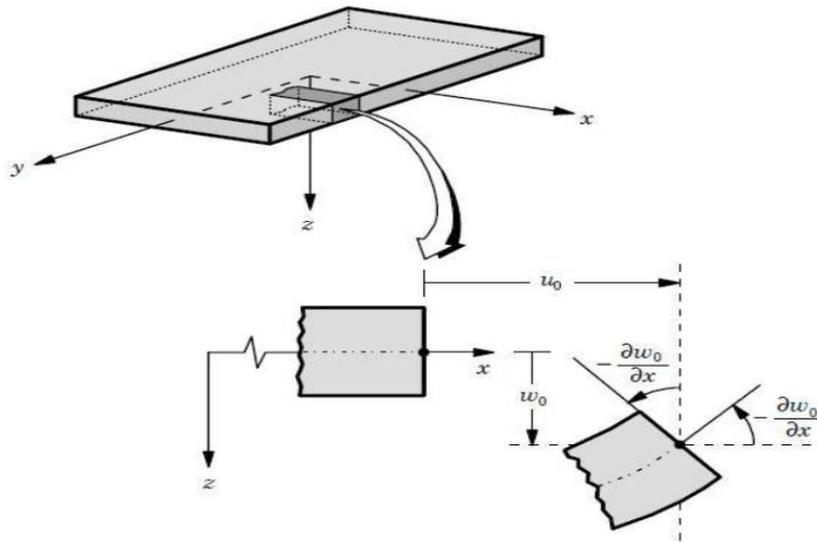


Figure II.2 : Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique de Love-Kirchhoff (CPT) [38].

II.4.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la section précédente, nous avons montré que la théorie élémentaire permettait uniquement d'analyser la dispersion des ondes à basses fréquences. Nous devons donc employer une autre théorie si l'on veut pouvoir caractériser les ondes principales et secondaires à des fréquences plus élevées. On peut donc utiliser la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT "First-Order Shear Deformation Theory" proposée par Mindlin [39] et Reissner [40] pour étudier les ondes transversales.

La théorie de déformation FSDT se base sur les hypothèses suivantes :

- ✓ Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- ✓ La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes ;
- ✓ La section droite de la plaque reste perpendiculaire au feuillet moyen en tenant compte des déformations liées au cisaillement transverse et les inerties de rotation de la section.

Du fait de ces nouvelles hypothèses, le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec: ϕ_x, ϕ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement (Figure II.3), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.3a})$$

$$\phi_y = \gamma_{yz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3b})$$

Où $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$ sont les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

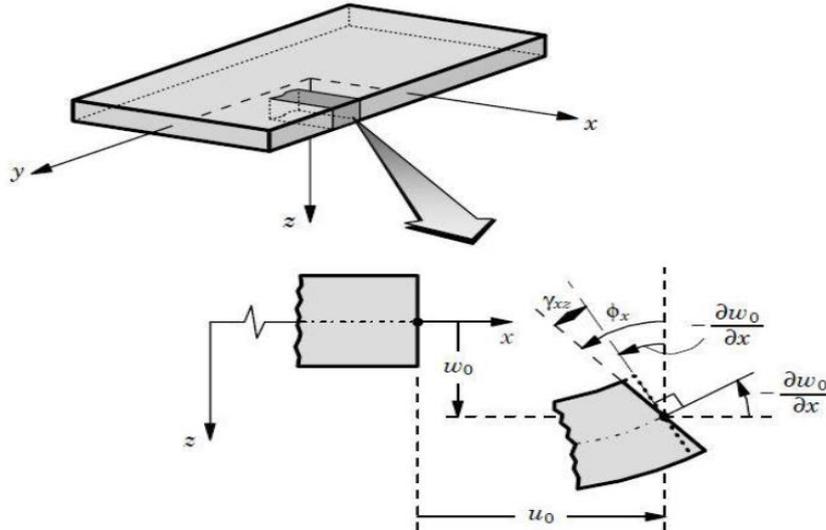


Figure II.3 : Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de cisaillement de Reissner-Mindlin (FSDT) [38].

II.4.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Les théories d'ordre élevé HSDT "Higher-Order Shear Deformation Theory" sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou coques épaisses, où la déformation en cisaillement transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des déformations en cisaillement transverse quadratiques dans l'épaisseur.

Plusieurs formes d'ordre élevé ont été proposées par Naghdi [41], Reddy [42] et autres. La plupart de ces formes utilisent un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement avec la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x a^2(x, y) + \dots + z^n \psi_x a^n(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y a^2(x, y) + \dots + z^n \psi_y a^n(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où n détermine l'ordre utilisé dans le model.

- Dans la théorie de Kirchhoff -Love ($n = 0$) ;
- Dans la théorie de Reissner-Mindlin ($n = 1$) pour les déplacements dans le plan et ($n = 0$) pour le déplacement normale.

Le concept des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé est basé sur une distribution non linéaire de champ de déplacement à travers l'épaisseur (Figure II.4), donc on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction de cisaillement. Plusieurs auteurs et chercheurs en matériaux proposent des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse le comportement des structures homogènes et en matériaux composites hétérogènes [43-47].

Pour réduire le nombre des variables indépendantes des champs de déplacement et les équations de mouvement, plusieurs modèles et des simplifications sont proposées. En effet le champ de déplacement approché basé sur la distribution non linéaire est de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \gamma_{xz}^0(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \gamma_{yz}^0(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérisant les différentes théories existantes dans la littérature. En effet, la cinématique de déplacements de la théorie classique élémentaire des plaques (CPT) est obtenue en mettant $f(z) = 0$, par contre la théorie du premier ordre en cisaillement transverse (FSDT) peut être obtenue avec $f(z) = z$.

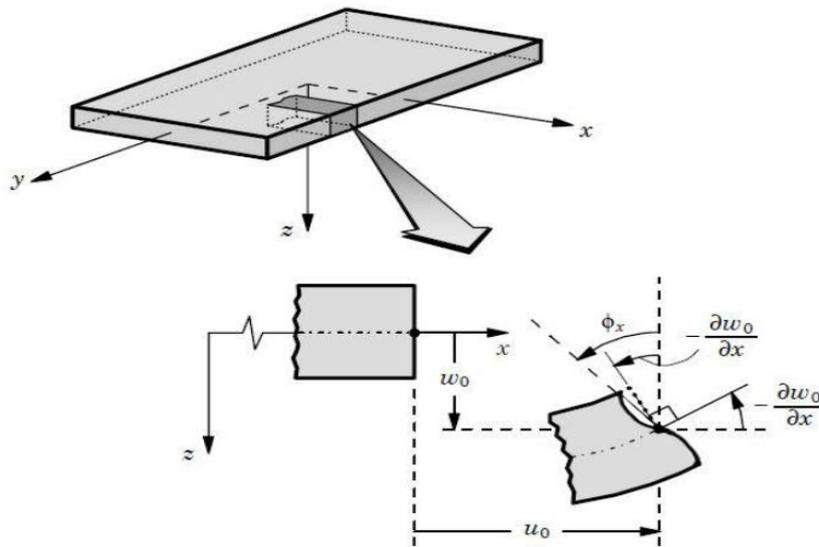


Figure II.4 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDT) [38].

Voici quelques contributions importantes de développement de la théorie d'ordre élevé qui diffèrent par la fonction de gauchissement $f(z)$:

Reddy avait proposé une théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) "Third-Order Shear Deformation Theory" qui peut être obtenue par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

Touratier a proposé un modèle SSDT "Sinusoïdal Shear Deformation Theory", par l'utilisation d'une fonction trigonométrique sinusoïdal qui peut être obtenue par [44] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.7})$$

Karama et autres ont développé la théorie ESDT "Exponential Shear Deformation Plate Theory" en prenant la fonction suivante [48] :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.8})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été proposées, emploient différentes fonctions de cisaillement transverse motionnées dans le tableau ci-dessous :

Tableau II.1 : Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour les plaques FGM.

Théories	Intitulé	Fonction de forme $f(z)$
Ambartsumyan [49]	Théorie d'ordre élevé polynômiale	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Reissner [40]	Théorie d'ordre élevé polynômiale	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Soldatos [50]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Arya <i>et al.</i> [51]	Théorie de déformation sinusoïdale	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Shimpi [52]	Théorie raffinée de déformation	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$
Aydogdu [53]	Théorie de déformation exponentielle	$z \alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$
El Meiche <i>et al.</i> [54]	Théorie raffinée de déformation	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2 - 1)}$
Zenkour [55]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Thai <i>et al.</i> [56]	Théorie de déformation trigonométrique inverse	$f(z) = \tan^{-1} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]$

II.4.1.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Shimpi [52] a développé un modèle raffiné simple et efficace sous l'appellation anglaise Refined Plate Theory (RPT) pour analyser les problèmes statiques et dynamiques des plaques isotropes RPT (Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ce modèle a été appliqué par la suite par de nombreux chercheurs [57, 58], avec succès au flambement des plaques orthotropes, à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs et à la flexion et vibration des plaques et poutres en matériaux FGM.

Cette théorie repose sur la cinématique du champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Où u_0, v_0 sont les variables de déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque. Toutefois, w_b, w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement.

II.4.2 Approche par couche

Contrairement aux modèles monocouche équivalente (ESLM), les théories par-couche supposent des champs de déplacement développés séparément d'une couche matérielle à l'autre (Figure II.5). Elles consistent donc à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes orthotropes, et permettre la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

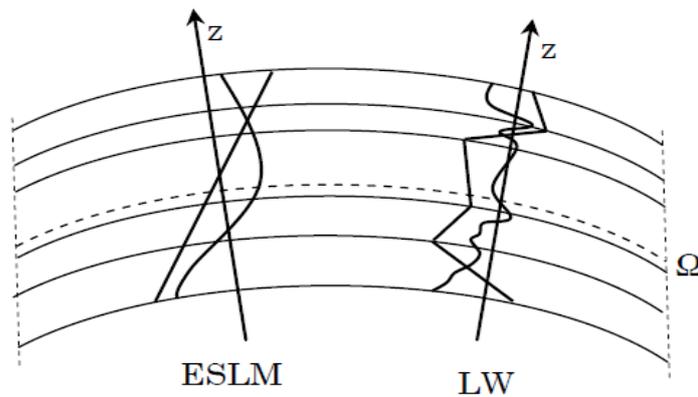


Figure II.5 : Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche.

II.4.3 Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures à priori peu épaisses où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité "équations constitutives, équations de mouvements". L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique "très petite". Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit [59, 60]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie CPT. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel (3D) de la détermination des champs "contraintes et déplacements" correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels "couches limites perpendiculaires au bord". Ensuite,

on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte [61].

II.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, un aperçu général sur les différentes approches appliquées aux plaques composites multicouches et FGM à savoir les théories qui se basent sur les notions de la théorie d'élasticité, comme par exemple la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) appliquée aux plaques moyennement épaisses et épaisses, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et la théorie raffinée RPT. Ensuite nous avons discuté sur l'approche par couche et en fin l'approche du développement asymptotique appliquée pour les structures à priori moyennement épaisses. A la base de ce qui a été montré dans ce chapitre. Dans le chapitre suivant nous nous attacherons à présenter une simple théorie de déformation en cisaillement du premier ordre qui se base sur un nouveau champ de déplacement qui comprend des termes d'intégrales indéterminés et contient moins d'inconnues (quatre variables) par rapport à la théorie conventionnelle FSDT.

CHAPITRE III

*Analyse de la vibration libre des plaques
FGM*

Chapitre III

Analyse de la vibration libre des plaques FGM

III.1 Introduction

Toutes théories employées pour traiter un problème de la mécanique des milieux continus a comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équation d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords de la structure, complétées par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Ce chapitre représente une nouvelle formulation de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre développée sur la base d'un nouveau champ de déplacement contenant des termes d'intégral indéterminés pour analyser la réponse dynamique des plaques à gradient fonctionnel (FGM) simplement appuyées. Cette théorie tient en considération l'effet de cisaillement transversal avec l'introduction d'un coefficient de correction de cisaillement afin de corriger la variation linéaire de la distribution des contraintes transversales à travers l'épaisseur des plaques. On considère que les propriétés matérielles changent de manière continue et régulière dans le sens de l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance de distribution en termes de fractions de volumes des constituants. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques de type Navier, basée sur des séries doubles de Fourier sont employées pour résoudre ces équations et déterminer les valeurs propres de la vibration libre des plaques à gradient fonctionnel simplement appuyées.

III.2 Géométrie et propriétés matérielles des plaques FGM

III.2.1 Modèle analytique

Le modèle mathématique a été conçu pour résoudre à la fois les problèmes de la vibration libre des plaques FGM et des plaques sandwich en FGM. Des plaques d'épaisseur uniforme (h), de longueur (a) et de largeur (b) sont représentées sur les Figures III.1(a) et III.1(b). Le repère cartésien rectangulaire (x, y, z) a le plan ($z = 0$), coïncidant avec la surface médiane des plaques FGM.

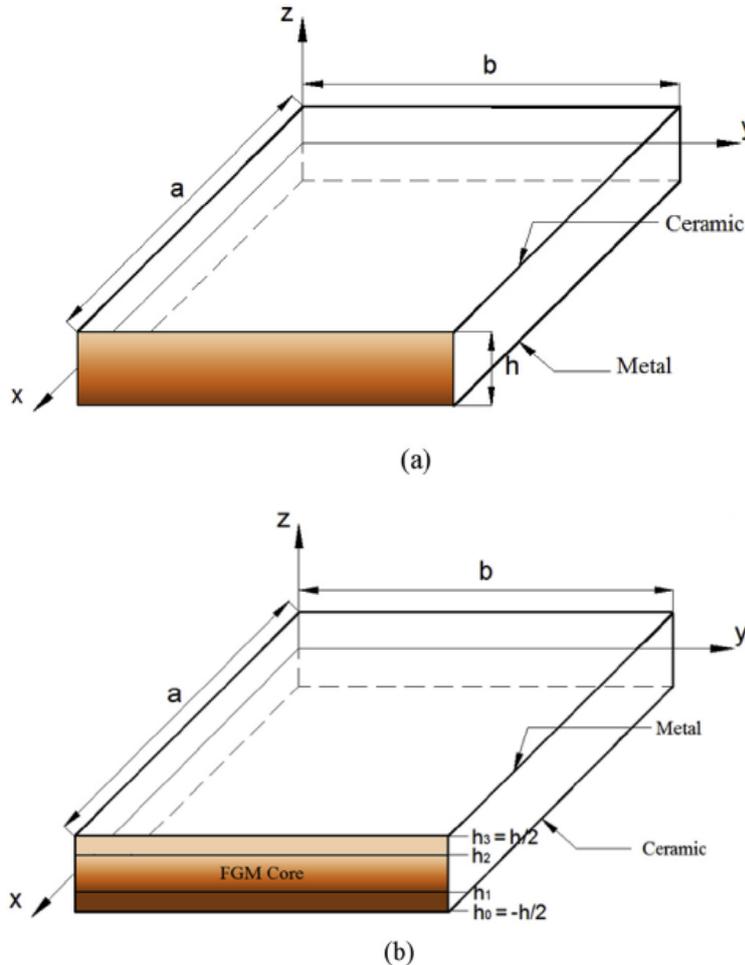


Figure III.1 : Géométrie des plaques à gradient fonctionnel :

(a)- Plaque FGM, (b)- Plaques sandwich avec un noyau FGM et peaux isotropes.

III.2.2 Propriétés matérielles

Dans notre étude, les compositions et les fractions volumiques des constituants dans les plaques FGM sont supposées changer graduellement à travers l'épaisseur selon la distribution de loi de puissance. L'influence du coefficient de Poisson (ν) sur la réponse des plaques FGM étant très faible. Par conséquent, pour des raisons de simplicité, il est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque. En effet, les propriétés matérielles comme le module d'élasticité et de la densité du matériau peuvent être trouvées pour le cas des plaques FGM en utilisant la règle classique du mélange donnée comme suit :

$$P(z) = (P_c - P_m)V(z) + P_m \quad (\text{III.1})$$

Où $P(z)$ désigne la propriété matérielle du matériau, et les indices m et c représentent les composants métalliques et céramiques, respectivement. On suppose que la fraction volumique $V(z)$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM (Figure III.1(a)) suit une simple fonction de loi de puissance, elle est exprimée comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{III.2})$$

Le paramètre p représente l'indice de loi de puissance non négatif ($0 \leq p \leq \infty$) qui contrôle la gradation de la fraction de volume des constituants à travers l'épaisseur de la plaque FGM. Quand la valeur du paramètre p est égale à zéro, la plaque devient entièrement céramique et lorsque p prend une valeur plus grand, la plaque devient entièrement métallique.

Pour le cas d'une plaque sandwich en FGM, La noyau central de ce type de plaque est gradué du métal à la céramique. La face inférieure est en métal isotrope, tandis que la face supérieure est en céramique isotrope (Figure. III.1(b)). La fonction de la fraction volumique des constituants $V(z)$ est définie par :

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } h_0 \leq z \leq h_1 \\ \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^p & \text{pour } h_1 \leq z \leq h_2 \\ 1 & \text{pour } h_2 \leq z \leq h_3 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Cette fonction est utilisée par plusieurs chercheurs pour analyser le comportement statique et dynamique des plaques sandwichs avec un noyau en FGM. Néanmoins, pour ce type de plaque les peaux sont indépendantes de la valeur p puisque ces deux couches sont constituées par un matériau isotrope (entièrement céramique ou métallique).

Les Figures III.2(a) et III.2(b) illustrées ci-dessous montrent la variation de la fraction volumique $V(z)$ pour une plaque à gradient fonctionnel (totalement graduée de $z = -h/2$ à $z = h/2$) et une plaque sandwich en FGM, respectivement, pour les différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ($p = 0.2, 0.5, 1, 5, 10$).

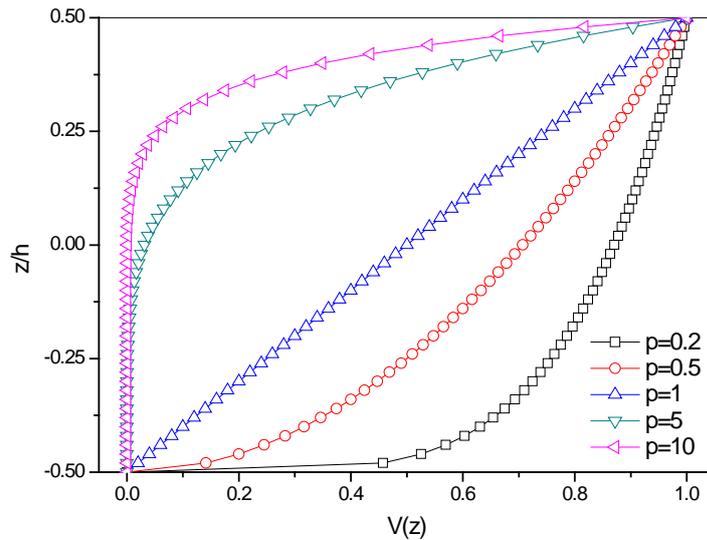


Figure III.2(a) : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque à gradient fonctionnel pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.

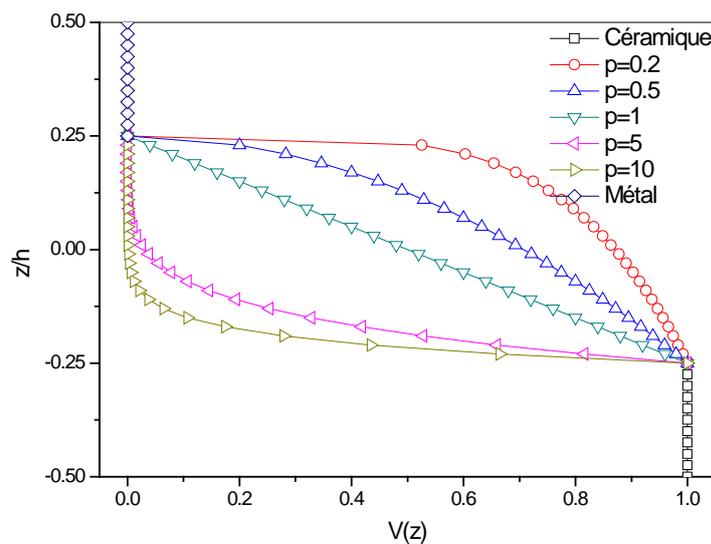


Figure III.2(b) : Variation de la fraction volumique $V(z)$ dans une plaque sandwich à gradient fonctionnel pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.

III.2.3 Hypothèses de base de la nouvelle théorie FSDT

Le champ de déplacement de la nouvelle théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est choisi en fonction des hypothèses suivantes :

1. La flèche de la plaque FGM est très petite par rapport à son épaisseur h , tel que les relations linéaires contraintes-déformations sont valides ;

2. La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes normales axiales σ_x et σ_y ;
3. Pour les plaques élastiques en FGM, le module de Young et le coefficient de Poisson sont des fonctions de la coordonnée de l'épaisseur z ;
4. Le modèle est basé sur une distribution linéaire des champs de contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, ce qui nécessite l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement ;
5. Les déplacements axiaux dans les directions x et y comprend des termes d'intégrales indéterminés.

III.3 Formulations théoriques

III.3.1 Champ de déplacement

Dans cette étude, des hypothèses simplificatrices supplémentaires sont ajoutées à la théorie conventionnelle FSDT afin de réduire le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement de la théorie conventionnelle est donné par Whitney et Pagano [62] pour l'analyse de la flexion et la vibration libre de plaques stratifiées anisotropes :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

Où $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$ et $\varphi_y(x, y, t)$ sont les variables de déplacement inconnues du plan médian de la plaque. Dans la présente étude, on considère un nouveau champ de déplacement avec seulement quatre variables inconnues au lieu de cinq dans FSDT conventionnelle, pour étudier le comportement vibratoire des plaques à gradient fonctionnel. Le champ du nouveau modèle FSDT est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - zk_1 \int \theta(x, y, t) dy, \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - zk_2 \int \theta(x, y, t) dy, \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

Où $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$ et $\theta(x, y, t)$ sont les quatre variables de déplacement de la surface moyenne de la plaque, le dernier inconnu est un terme mathématique qui permet

d'obtenir les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes x et y , respectivement. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie de la plaque.

III.3.2 Champ de déformation et équations constitutives

Les expressions de déformation linéaire dérivées du modèle de déplacement des équations (III.5), valables pour les plaques fines, moyennement épaisses et épaisses. Les déformations associées au champ de déplacement proposé sont obtenues en utilisant la loi de Hooke généralisée de la théorie de l'élasticité linéaire :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - zk_1\theta \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z\varepsilon_y^1 = \frac{\partial v_0}{\partial y} - zk_2\theta \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - zk_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx - zk_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} - k_2 \int \theta dy \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} - k_1 \int \theta dx
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Les intégrales adoptées dans les relations précédentes doivent être résolues par une solution Navier et peuvent être déterminées par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy &= B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \\
 \int \theta dx &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, & \int \theta dy &= B' \frac{\partial \theta}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

Où A' et B' et sont définis en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas au moyen de Navier. Ainsi, les paramètres A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \tag{III.8a}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \tag{III.8b}$$

Pour les plaques à gradient fonctionnel (FGM), les relations constitutives (relations contraintes-déformations) pour l'état de contrainte plane, peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont les vecteurs de contraintes et de déformations, respectivement. Alors que Q_{ij} sont les coefficients de rigidité exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.10})$$

III.3.3 Détermination des équations du mouvement

Les équations du mouvement peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie potentielle totale (principe d'Hamilton) des plaques à gradient fonctionnel considérées. Ce principe est exprimé sous la forme analytique suivante :

$$\int_0^t (\delta U - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.11})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation de la plaque FGM et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation est calculée comme suit :

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \quad (\text{III.12})$$

Où A est la surface supérieure de la plaque FGM. En substituant les expressions des déformations données par les équations (III.6) et (III.7) dans l'Equation (III.12), l'énergie de déformation peut être réécrite comme suit :

$$\delta U = \int_A \left(\begin{array}{l} N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - M_x k_1 \delta \theta - M_y k_2 \delta \theta - M_{xy} k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \\ - M_{xy} k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + S_{xz} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - S_{xz} k_1 A' \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + S_{yz} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} - S_{yz} k_2 B' \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \end{array} \right) dA \quad (\text{III.13})$$

Avec N, M et S sont les contraintes résultantes agissant sur la section transversale de la plaque, définies comme suit :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\
(M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\
(S_{xz}, S_{yz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} K_c (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz
\end{aligned} \tag{III.14}$$

Où K_c est le facteur de correction de cisaillement.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\delta K = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dA dz \tag{III.15}$$

En remplaçant les termes de déplacements donnés en équation (III.5) dans l'équation (III.15) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque FGM, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_A \left\{ I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) + I_2 k_1 A' \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. + I_2 k_2 B' \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} \right) + I_3 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + I_3 (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y \partial t} \right\} dA
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Où $\rho(z)$ est la densité de masse donnée par l'équation (III.1), et $(I_i, i = 1, 2, 3)$ sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \tag{III.17}$$

En substituant l'équation (III.6) de l'énergie de déformation et l'équation (III.9) de l'énergie cinétique dans l'équation (III.11), et en intégrant par parties, puis collectant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$, on peut obtenir les quatre équations de mouvement de la plaque FGM comme suit :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}, \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}, \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} = I_1 \ddot{w}_0, \\
\delta \theta : \quad & k_1 M_x^s + k_2 M_y^s + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - k_1 A' \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \\
& = I_2 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_3 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.18}$$

En substituant l'équation (III.6) dans l'équation (III.9), et ensuite les résultats trouvés dans l'équation (III.14), les résultantes de contraintes sont obtenues en termes de déplacements u_0 , v_0 , w_0 et θ sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{III.19a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = K_c \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{III.19b}$$

Où les composantes de rigidité sont définies comme :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \tag{III.20a}$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) dz, \quad i, j = 4, 5 \tag{III.20b}$$

En substituant l'équation (III.19) dans l'équation. (III.18), les équations régissantes peuvent être aussi exprimées en termes des déplacements u_0 , v_0 , w_0 et θ :

$$\begin{aligned} \delta u_0 = & \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) A_{11} - k_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) B_{11} + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) A_{12} - k_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) B_{12} + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) A_{66} - k_1 A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} B_{66} \\ & + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) A_{66} - k_2 B' \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial y^2 \partial x} \right) B_{66} - I_1 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + k_1 A' I_2 \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2 \partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.21a)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 = & \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) A_{12} - k_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) B_{12} + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) A_{22} - k_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) B_{22} + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) A_{66} - k_1 A' \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \right) B_{66} \\ & + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) A_{66} - k_2 B' \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \right) B_{66} - I_1 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) + k_2 B' I_2 \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2 \partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.21b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 = & -K_c k_1 A' \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) A_{s_{55}} + K_c \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) A_{s_{55}} - K_c k_2 B' \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) A_{s_{44}} \\ & + K_c \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) A_{s_{44}} - I_1 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.21c)$$

$$\begin{aligned} \delta \theta = & k_1 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) B_{11} - k_1 \theta D_{11} + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) B_{12} - k_2 \theta D_{12} \right] + k_2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) B_{12} - k_1 \theta D_{12} + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) B_{22} - k_2 \theta D_{22} \right] \\ & + (k_1 A' + k_2 B') \left[\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) B_{66} - k_1 A' \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \right) D_{66} + \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) B_{66} - k_2 B' \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \right) D_{66} \right] \\ & - K_c k_1 A' \left[A_{s_{55}} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{s_{55}} k_1 A' \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \right] - K_c k_2 B' \left[A_{s_{44}} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - A_{s_{44}} k_2 B' \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right] \\ & - k_1 A' I_2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \right) - k_2 B' I_2 \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial t^2 \partial y} \right) + k_1^2 A'^2 I_3 \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + k_2^2 B'^2 I_3 \left(\frac{\partial^4 \theta}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (III.21d)$$

III.3.4 Solution analytique pour des plaques FGM simplement appuyées

Sur la base de la procédure de Navier, dans laquelle les composants de déplacement sont développés dans une double série trigonométrique de variables inconnues pour déterminer les solutions analytiques des plaques FGM simplement appuyées et satisfait les conditions aux limites. La solution analytique est exprimée par la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où $\sqrt{i} = -1$, ω est la fréquence naturelle et U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et Φ_{mn} sont les coefficients de déplacement inconnus. En substituant la solution donnée par l'équation (III.22) dans les équations du mouvement (III.21), on obtient la forme compacte suivante :

$$([S] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.23})$$

Soit sous une forme développée :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Où $[S]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité et de masse, respectivement, $\{\Delta\}$ est le vecteur colonne des coefficients de déplacement. Les éléments S_{ij} et M_{ij} sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66}, & S_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), & S_{13} &= 0, \\ S_{14} &= -k_1\alpha B_{11} - k_2\alpha B_{12} + (k_1 A' + k_2 B')\alpha\beta^2 B_{66}, \\ S_{22} &= -\beta^2 A_{22} - \alpha^2 A_{66}, & S_{23} &= 0, \\ S_{24} &= -k_1\beta B_{12} - k_2\beta B_{22} + (k_1 A' + k_2 B')\alpha^2\beta B_{66}, \\ S_{33} &= -K_c(\beta^2 A_{44}^s + \alpha^2 A_{55}^s), \\ S_{34} &= K_c(k_2 B' \beta^2 A_{44}^s + k_1 A' \alpha^2 A_{55}^s), \\ S_{44} &= -k_1^2 D_{11} - k_2^2 D_{22} - (k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B')\alpha^2 \beta^2 D_{66} \\ &\quad - 2k_1 k_2 D_{12} - K_c(k_2^2 B'^2 \beta^2 A_{44}^s + k_1^2 A'^2 \alpha^2 A_{55}^s) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_1, & M_{12} &= 0, & M_{13} &= 0, & M_{14} &= -k_1 A' \alpha I_2, \\ M_{22} &= I_1, & M_{23} &= 0, & M_{24} &= -k_2 B' \beta I_2, \\ M_{33} &= I_1, & M_{34} &= 0, \\ M_{44} &= (k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) I_3 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution analytique des problèmes de vibration libre des plaques en FGM simplement appuyée par une nouvelle théorie de déformation en cisaillement du premier ordre avec seulement quatre variables indépendantes et quatre équations de mouvement ; car, elle est plus simple par rapport à la théorie conventionnelle FSDT à cinq variables.

Cette théorie nécessite un facteur de correction du cisaillement et donne une distribution linéaire des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories disponibles dans la littérature des plaques FGM.

CHAPITRE IV

Résultats et discussions

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous nous présentons les résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire des plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM), par l'utilisation d'une simple théorie de déformation en cisaillement FSDT repose sur un nouveau modèle du champ de déplacement avec seulement quatre variables, alors que la théorie conventionnelle FSDT prévoit cinq variables. La présente théorie tient en considération l'effet de la déformation de cisaillement transversal avec une variation linéaire, ce qui oblige l'introduction d'un coefficient de correction du cisaillement pour corriger l'erreur de cette variation.

Plusieurs exemples illustratifs liés à l'étude de la vibration libre des plaques carrées et rectangulaires en FGM, simplement appuyées sont présentés par des tableaux et des courbes et ensuite comparés aux solutions disponibles dans la littérature (Neves *et al.* [63], Thai et Choi [10], Mantari *et al.* [64], Hosseini *et al.* [6], Natarajan *et al.* [8], Nguyen *et al.* [65]) pour vérifier l'exactitude et la précision du présent modèle FSDT. On suppose que les propriétés matérielles des différentes plaques étudiées varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

IV.2 Analyse des résultats de la vibration libre des plaques FGM

Dans cette partie, la précision du présent modèle basé sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT est évaluée par un nouveau champ de déplacement avec quatre inconnues. Différents exemples numériques pour l'analyse des vibrations libres des plaques FGM et sandwichs en FGM avec divers indices de loi de puissance qui spécifient le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur et plusieurs valeurs du rapport d'épaisseur latérale a/h et de rapport géométrique a/b sont également présentés. Les propriétés mécaniques typiques du métal et de la céramique utilisées pour le calcul des exemples numériques sont énumérées dans le Tableau IV.1 ci-dessous.

Tableau IV.1: Propriétés matérielles utilisées dans les plaques FGM et les plaques sandwichs en FGM [10].

Matériaux	Propriétés		
	E (GPa)	ρ (Kg/m ³)	ν
Aluminium (Al)	70	2702	0.3
Alumine (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3
Zircone (ZrO ₂)	200	5700	0.3
Cuivre (Cu)	85	8900	0.34
Tungstène (W)	410	19300	0.28

Afin de prouver l'efficacité et la validité de la présente théorie, les deux structures en plaques sont considérées dans cette étude : plaques simples en FGM et sandwichs en FGM. Dans les calculs numériques, les relations suivantes pour la présentation des fréquences naturelles adimensionnelles ont été utilisées :

$$\bar{\beta} = wh \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad \hat{\omega} = wh \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{wa^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \bar{\omega} = \frac{wa^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

$$\rho_0 = 1 \text{ kg / m}^3, \quad E_0 = 1 \text{ GPa} \quad (\text{IV.2})$$

IV.2.1 Analyse de la vibration libre des plaques carrées en FGM Al/ZrO₂

Les résultats des fréquences propres adimensionnelles $\bar{\beta}$, pour des plaques carrées en FGM simplement supportées sont présentés dans le Tableau IV.2 pour divers indices p et rapport d'épaisseur latérale a/h . Les matériaux constituant la plaque sont l'aluminium en face inférieure et la zircone en face supérieure (voir les propriétés des matériaux dans le Tableau IV.1). Le module de Young est calculé en considérant la procédure de la loi du mélange donnée par l'équation III.1. Dans cet exemple, les résultats de la présente théorie sont comparés à la solution exacte 3D présentée par Vel et Batra [3], quasi-3D HSDT sinusoidale et hyperbolique proposés par Neves *et al.* [63, 66], des solutions analytiques basées sur HSDT développées par Mantari *et al.* [64] et la FSDT conventionnelle proposée par Thai et Choi [10]. A partir du Tableau IV.2, nous pouvons voir que les résultats des fréquences propres adimensionnelles obtenus à partir de la présente théorie sont en excellent accord avec la

solution présentée par Thai et Choi [10] et Mantari *et al.* [64]. Cependant, ces résultats sont aussi proches de la solution exacte 3D [66] en considérant un facteur de correction de cisaillement $K_c = 5/6$. Il convient de mentionner que les résultats actuels sont proches les uns des autres, lorsque l'on considère le facteur de correction de cisaillement $K_c = 5/6$ et $K_c = 1$. L'effet du facteur de correction de cisaillement est moins influent pour le grand rapport d'épaisseur $a/h = 10$.

Tableau IV.2: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles

$\bar{\beta} = wh\sqrt{\rho_m/E_m}$ d'une plaque carrée en FGM Al/ZrO₂.

Théorie	$p = 0$		$p = 1$		
	$a/h = \sqrt{10}$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$
Vel et Batra [3]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153
Thai et Choi [10]	0.4618	0.0577	0.2173	0.0592	0.0152
Neves <i>et al.</i> [66]	–	–	0.2193	0.0596	0.0153
Neves <i>et al.</i> [63]	–	–	0.2193	0.0596	0.0153
Mantari <i>et al.</i> [64]	0.4624	0.0577	0.2277	0.0619	0.0158
Présente $K_c = 1$	0.4744	0.0579	0.2307	0.0621	0.0159
Présente $K_c = 5/6$	0.4618	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158

IV.2.2 Analyse de la vibration libre des plaques carrées en FGM Al/Al₂O₃

Le Tableau IV.3 montre les résultats des deux premières fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ pour des plaques carrées en FGM simplement supportées. Les matériaux constituant la plaque sont l'aluminium en face inférieure et l'alumine en face supérieure (voir les propriétés des matériaux dans le Tableau IV.1). Les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur avec une loi de distribution de puissance. Les résultats calculés par le présent modèle mathématique sont comparés aux solutions quasi-3D présentées par Matsunaga [67] et aux solutions basées sur la théorie FSDT conventionnelle appliquée par Thai et Choi [10]. Les résultats actuels sont très proches aux solutions obtenues par Thai et Choi [10] considérant le facteur de correction de cisaillement $K_c = 5/6$, de même, ont un bon accord avec les solutions quasi-3D [67]. A nouveau, il est à noter que le facteur de correction de cisaillement a une influence sur un grand rapport d'épaisseur latérale a/h .

Tableau IV.3: Comparaison des deux premières fréquences naturelles adimensionnelles $\hat{\omega} = wh\sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque carrée en FGM Al/Al₂O₃.

Mode	a/h	Théorie	p				
			0	0.5	1	4	10
1	2	Thai et Choi [10]	0.9265	0.8062	0.7333	0.6116	0.5644
		Matsunaga [67]	0.9400	0.8233	0.7477	0.5997	0.5460
		Présente $K_c=1$	0.9673	0.8389	0.7614	0.6365	0.5907
		Présente $K_c=5/6$	0.9265	0.8062	0.7333	0.6116	0.5644
	5	Thai et Choi [10]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		Matsunaga [67]	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Présente $K_c=1$	0.2142	0.1828	0.1651	0.1416	0.1345
		Présente $K_c=5/6$	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	10	Thai et Choi [10]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		Matsunaga [67]	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		Présente $K_c=1$	0.0579	0.0492	0.0444	0.0384	0.0368
		Présente $K_c=5/6$	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
2	2	Thai et Choi [10]	1.7045	1.4991	1.3706	1.1285	1.0254
		Matsunaga [67]	1.7406	1.5425	1.4078	1.1040	1.9847
		Présente $K_c=1$	1.8097	1.5856	1.4455	1.1926	1.0906
		Présente $K_c=5/6$	1.7045	1.4991	1.3706	1.1285	1.0254
	5	Thai et Choi [10]	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		Matsunaga [67]	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		Présente $K_c=1$	0.4744	0.4076	0.3688	0.3126	0.2941
		Présente $K_c=5/6$	0.4618	0.3977	0.3604	0.3049	0.2856
	10	Thai et Choi [10]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		Matsunaga [67]	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		Présente $K_c=1$	0.1390	0.1183	0.1068	0.0920	0.0877
		Présente $K_c=5/6$	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867

IV.2.3 Analyse de la vibration libre des plaques rectangulaires en FGM Al/Al₂O₃

Le Tableau IV.4 montre les résultats des quatre fréquences adimensionnelles les plus basses pour des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées. Les matériaux constituant la plaque sont l'aluminium en face inférieure et l'alumine en face supérieure (voir les propriétés des matériaux dans le Tableau IV.1). Les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur avec une distribution de loi de puissance (équation III.1). Les résultats de cette théorie sont comparés avec des solutions basées sur HSDT présentées par Mantari *et al.* [64], des solutions basées sur la théorie conventionnelle FSDT de Thai et Choi [10] et FSDT de

Hosseini *et al.* [6]. Les résultats actuels sont en bon accord avec les autres solutions et sont égaux aux résultats obtenus par Thai et Choi [10].

T Tableau IV.4: Comparaison des quatre premières fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega} = \omega a^2 / h\sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque rectangulaire en FGM

a/h	Mode	Théorie	P						
			0	0.5	1	2	5	8	10
5	1 (1.1)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		Thai <i>et al.</i> [10]	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		Mantari <i>et al.</i> [64]	3.4414	2.9348	2.6476	2.3948	2.2264	2.1691	2.1404
		Présente $K_c=5/6$	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
	2 (1.2)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Thai <i>et al.</i> [10]	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Mantari <i>et al.</i> [64]	5.2817	4.5183	4.0784	3.6804	3.3922	3.2952	3.2507
		Présente $K_c=5/6$	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
	3 (1.3)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		Thai <i>et al.</i> [10]	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		Mantari <i>et al.</i> [64]	8.0759	6.9374	6.2670	5.6388	5.1393	4.9736	4.9045
		Présente $K_c=5/6$	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
4 (2.1)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	9.7416	8.692	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518	
	Thai <i>et al.</i> [10]	10.1089	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	6.3708	6.2683	
	Mantari <i>et al.</i> [64]	10.1182	8.7152	7.8774	7.0750	6.4030	6.1817	6.0942	
	Présente $K_c=5/6$	10.1089	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	6.3708	6.2683	
10	1 (1.1)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		Thai <i>et al.</i> [10]	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		Mantari <i>et al.</i> [64]	3.6518	3.0990	2.7937	2.5386	2.3913	2.3409	2.3109
		Présente $K_c=5/6$	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
	2 (1.2)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		Thai <i>et al.</i> [10]	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7071	3.6580
		Mantari <i>et al.</i> [64]	5.7695	4.9015	4.4193	4.0089	3.7676	3.6841	3.6366
		Présente $K_c=5/6$	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7071	3.6580
	3 (1.3)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		Thai <i>et al.</i> [10]	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		Mantari <i>et al.</i> [64]	9.1883	7.8191	7.0517	6.3884	5.9749	5.8329	5.7568
		Présente $K_c=5/6$	9.1876	7.8144	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
	4 (2.1)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Thai <i>et al.</i> [10]	11.8307	10.0737	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Mantari <i>et al.</i> [64]	11.8307	10.0813	9.0936	8.2306	7.6707	7.4795	7.3811
		Présente $K_c=5/6$	11.8307	10.0736	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639

Suite du Tableau IV.4

a/h	Mode	Théorie	p						
			0	0.5	1	2	5	8	10
20	1(1.1)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		Thai <i>et al.</i> [10]	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		Mantari <i>et al.</i> [64]	3.7123	3.1457	2.8352	2.5771	2.4402	2.3922	2.3619
		Présente $K_c=5/6$	3.7123	3.1455	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3643
	2(1.2)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		Thai <i>et al.</i> [10]	5.9199	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		Mantari <i>et al.</i> [64]	5.9199	5.0178	4.5228	4.1100	3.88	3.8106	3.7621
		Présente $K_c=5/6$	5.9199	5.0173	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7682
	3(1.3)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		Thai <i>et al.</i> [10]	9.5669	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		Mantari <i>et al.</i> [64]	9.5670	8.1131	7.3133	6.6432	6.2756	6.1472	6.0689
		Présente $K_c=5/6$	9.5669	8.1128	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
	4(2.1)	Hosseini <i>et al.</i> [6]	12.4560	10.5660	9.5261	6.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		Thai <i>et al.</i> [10]	12.4562	10.5667	9.5261	6.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		Mantari <i>et al.</i> [64]	12.4564	10.5674	9.5262	6.6508	8.1628	7.9927	7.8906
		Présente $K_c=5/6$	12.4562	10.5653	9.5261	6.6572	8.1875	8.0207	7.9166

Les Figures IV.1 et IV.2 montrent la variation des fréquences propres adimensionnelles des plaques carrées et rectangulaires FGM simplement supportées en fonction de l'indice de loi de puissance p et du rapport géométrique a/b , respectivement. Les courbes obtenues à partir de cette théorie sont comparées aux courbes obtenues par la théorie d'ordre élevé de déformation en cisaillement HSDT développée par Mantari *et al.* [64] et la théorie de déformation du premier ordre FSDT proposé par Hosseini *et al.* [6]. Dans le procédé de calcul, on considère un facteur de correction de cisaillement $K_c = 5/6$. A partir de ces figures, on peut voir que les courbes résultantes sont en excellent accord avec la solution FSDT proposée par Hosseini *et al.* [6] et très proches aux courbes obtenues par la théorie d'ordre élevé HSDT proposée par Mantari *et al.* [64]. Par conséquent, la présente théorie est en général validée avec succès.

La Figure IV.1 montre que les fréquences fondamentales des plaques carrées à gradient fonctionnel Al/Al₂O₃ diminuent avec une augmentation du paramètre matériel p . Cependant, la Figure IV.2 montre que l'augmentation de la valeur du rapport géométrique (a/b) a un effet significatif sur l'augmentation des fréquences fondamentales des plaques à gradient fonctionnel Al/Al₂O₃.

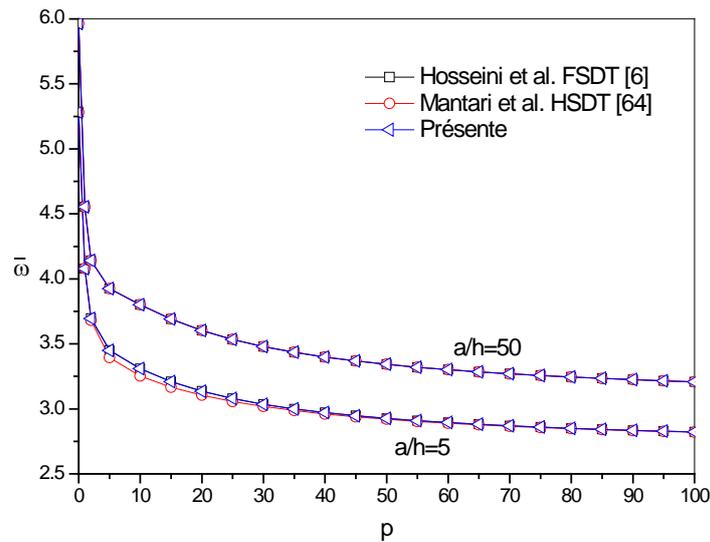


Figure IV.1: Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques carrées à gradient fonctionnel Al/Al₂O₃ avec la variation de l'indice de loi de puissance. p . $a/h = 5$ et 50

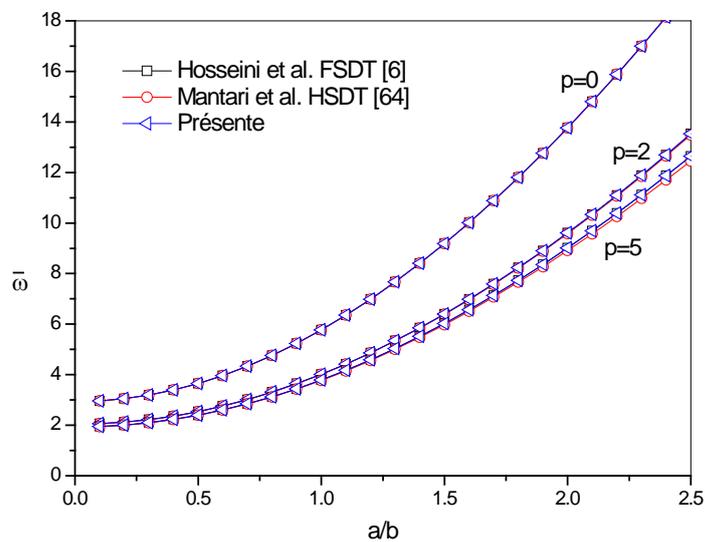


Figure IV.2: Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ des plaques à gradient fonctionnel Al/Al₂O₃ avec la variation du rapport géométrique (a/b) et pour les valeurs de $p = 0, 1$ et 5

IV.2.4 Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs en FGM

Dans cette étude, un autre exemple est ajouté pour montrer la validité de la présente théorie pour l'analyse de la réponse dynamique des plaques sandwichs carrées en FGM simplement appuyées. Les résultats des fréquences propres adimensionnelles pour ce type des plaques sont présentés dans le Tableau IV.5. Dans cet exemple, trois configurations différentes d'épaisseur peau-noyau-peau (1-1-1, 1-2-1, 2-2-1), trois valeurs d'indices matériel ($p = 0.5, 1, 5$) et trois rapports côté/épaisseur ($a/h = 5, 10, 100$) sont considérés. Les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur avec une loi de distribution de puissance.

T Tableau IV.5: Comparaison des deux premières fréquences naturelles adimensionnelles $\tilde{\beta} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_0 / E_0}$ d'une plaque sandwich carrée avec un noyau

a/h	Théorie	1-1-1			1-2-1			1-2-2		
		0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	Ref ^(a)	1.1449	1.1639	1.2113	1.1597	1.1884	1.2644	1.1965	1.2350	1.3249
	Ref ^(b)	1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
	Ref ^(c)	1.1414	1.1561	1.1996	1.1574	1.1827	1.2569	1.1916	1.2268	1.3160
	FSDT	1.1503	1.1642	1.2050	1.1660	1.1880	1.2567	1.1950	1.2299	1.3173
	Présente $K_c=1$	1.1630	1.1766	1.2173	1.1779	1.2012	1.2700	1.2079	1.2431	1.3318
	Présente $K_c=5/6$	1.1512	1.1650	1.2058	1.1670	1.1889	1.2575	1.1958	1.2307	1.3180
10	Ref ^(a)	1.2373	1.2506	1.2921	1.2578	1.2785	1.3492	1.2846	1.3216	1.4161
	Ref ^(b)	1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
	Ref ^(c)	1.2359	1.2478	1.2883	1.2567	1.2763	1.3466	1.2827	1.3187	1.4130
	FSDT	1.2394	1.2509	1.2903	1.2601	1.2786	1.3469	1.2842	1.3201	1.4136
	Présente $K_c=1$	1.2438	1.2551	1.2944	1.2649	1.2831	1.3512	1.2887	1.3245	1.4184
	Présente $K_c=5/6$	1.2400	1.2515	1.2907	1.2608	1.2792	1.3473	1.2848	1.3206	1.4140
100	Ref ^(a)	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	Ref ^(b)	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	Ref ^(c)	1.2752	1.2853	1.3238	1.2984	1.3147	1.3824	1.3198	1.3558	1.4518
	FSDT	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4518
	Présente $K_c=1$	1.2758	1.2859	1.3243	1.2986	1.3153	1.3828	1.3203	1.3562	1.4521
	Présente $K_c=5/6$	1.2758	1.2859	1.3242	1.2986	1.3153	1.3827	1.3203	1.3562	1.4520

^(a) Résultats tirés de la référence Natarajan *et al.* [8] (HSDT 9) ;

^(b) Résultats tirés de la référence Natarajan *et al.* [8] (HSDT 13) ;

^(c) Résultats tirés de la référence Nguyen *et al.* [65].

Les résultats obtenus sont comparés à des solutions basées sur des théories HSDTs à 9 et 13 inconnues proposées par Natarajan *et al.* [8], HSDT trigonométrique inverse de Nguyen *et al.* [65] et la théorie FSDT conventionnelle. A partir du Tableau IV.5 on peut observer que la comparaison des résultats montre un bon accord avec les autres théories proposées lorsque le facteur de correction de cisaillement prend la valeur $K_c = 5/6$. Cependant, en considérant un facteur de correction de cisaillement $K_c = 1$, les résultats sont proches des solutions de la théorie HSDT à 13 inconnues et dans certains cas encore plus précis que les résultats obtenus en considérant le facteur de correction de cisaillement $K_c = 5/6$ (voir Tableau IV.5, pour $a/h = 5$ et le type de configuration 2-2-1).

Le Tableau IV.6 présente les fréquences propres adimensionnelles de la vibration des plaques sandwichs carrées en FGM. Les résultats sont estimés pour trois configurations d'épaisseur peau-noyau-peau désignées par (1-1-1, 1-2-1, 2-2-1). La peau supérieure est en matériau tungstène (W), le noyau est composé par un matériau FGM et la peau inférieure est en cuivre (Cu), (voir Tableau VI.1). Plusieurs valeurs d'indices de loi de puissance ($p = 0.5, 1, 5$) et plusieurs valeurs du rapport a/h sont considérées dans cet exemple. Notez que le rapport du coefficient de Poisson a été considéré comme constant et égal à 0.31.

Tableau IV.6: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles

$\tilde{\beta} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_0 / E_0}$ d'une plaque sandwich carrée avec un noyau FGM W/Cu.

a/h	Théorie	1-1-1			1-2-1			1-2-2		
		0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	FSDT	0.603	0.601	0.605	0.613	0.612	0.622	0.611	0.618	0.641
	Présente $K_c=1$	0.612	0.608	0.611	0.620	0.618	0.622	0.617	0.624	0.649
	Présente $K_c=5/6$	0.605	0.601	0.605	0.613	0.612	0.622	0.611	0.618	0.641
10	FSDT	0.648	0.645	0.647	0.662	0.657	0.667	0.655	0.662	0.687
	Présente $K_c=1$	0.650	0.647	0.649	0.664	0.659	0.665	0.657	0.634	0.689
	Présente $K_c=5/6$	0.648	0.645	0.647	0.662	0.657	0.667	0.655	0.662	0.687
100	FSDT	0.666	0.662	0.663	0.681	0.675	0.682	0.673	0.679	0.705
	Présente $K_c=1$	0.666	0.662	0.663	0.681	0.675	0.682	0.673	0.679	0.705
	Présente $K_c=5/6$	0.666	0.662	0.663	0.681	0.675	0.682	0.673	0.679	0.705

IV.3 Conclusion

Les résultats et les discussions de l'analyse du comportement vibratoire des plaques FGM a été présentée dans ce chapitre avec la prise en compte de l'effet de la déformation en cisaillement transversal en tenant compte du facteur de correction du cisaillement. Un nouveau modèle analytique basé sur une théorie de déformation en cisaillement du premier ordre à quatre variables et une nouvelle cinématique introduisant des variables d'intégrales indéterminées sont considérés dans cette étude.

Les propriétés du matériau sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur de la plaque selon la règle classique du mélange. Pour valider ce modèle, nous avons comparés les résultats obtenus avec les résultats des autres théories existant dans la littérature. Toutes les études comparatives ont démontré que les fréquences fondamentales obtenues en utilisant cette théorie et celles proposées par Thai et Choi [10], Hosseini *et al.* [6] et Mantari *et al.* [64] sont identiques.

En conclusion, on peut dire que le modèle proposé est simple pour la résolution du comportement vibratoire des plaques FGM, en raison de leurs nombre d'inconnus réduits.

Conclusion générale

Conclusion générale

Récemment, les plaques à gradient fonctionnel occupent une grande surface dans le domaine de l'industrie des structures à la fois robustes et légères grâce à leur haute résistance mécanique et leur légèreté.

Les matériaux FGMs sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Le grand intérêt de l'emploi des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) est la possibilité de contrôler les constituants et donc d'obtenir des composants présentant les caractéristiques locales souhaitées, en ce qui concerne les caractéristiques mécaniques, thermiques et autres.

Le but principal de ce travail est de présenter une nouvelle et originale théorie de déformation en cisaillement du premier ordre qui prend en considération l'effet de déformation en cisaillement transversal pour analyser le comportement dynamique des plaques simplement appuyées en FGM. La présente théorie repose sur une nouvelle cinématique qui comporte des termes d'intégration indéterminés, de plus, elle exige un facteur de correction de cisaillement ($K_c = 5/6$) pour corriger la variation linéaire des contraintes à travers l'épaisseur. Le nombre des inconnues et les équations du mouvement du présent modèle est seulement quatre ce qui est inférieur à la théorie conventionnelle de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les autres théories d'ordre élevé.

Les équations de mouvement et les conditions aux limites associées à la présente formulation sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues en utilisant la méthode de Navier et les fréquences fondamentales de vibration sont trouvées en résolvant le problème des valeurs propres. Les résultats obtenus ont été comparés aux solutions de plusieurs théories publiés dans la littérature afin de prouver l'exactitude et la validité de la présente théorie. D'après les comparaisons, on conclut que les résultats numériques du présent modèle avec un facteur de correction de cisaillement ($K_c = 5/6$) ont un excellent accord avec les autres théories proposées. Par ailleurs, l'influence du facteur de correction de cisaillement K_c diminue avec l'augmentation du rapport côté-épaisseur a/h . La

Conclusion générale

présente formulation du champ de déplacement est résolue analytiquement et les résultats obtenus sont très proches aux résultats de la théorie conventionnelle FSDT. Par conséquent, les chercheurs dans le domaine de la modélisation recommandent de mettre en œuvre la solution numérique de cette théorie.

Nous présentons ici, un certain nombre de pistes de recherches qui peuvent être envisagées pour poursuivre la démarche de validation de la présente théorie FSDT :

- Analyse de la flexion et de la vibration des structures par la présente théorie pour les différentes conditions d'appuis,
- Application la présente théorie pour l'analyse du comportement statique des structures FGM et composites,
- Valider le présent modèle analytique avec d'autre solution numérique en utilisant un autre moyen de calcul, tel que la méthode des éléments finis.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

Indices	Références
[1]	Bever, M.B., Duwez, P.E. (1972), "Gradients in composite materials", <i>Mater Sci Eng</i> , 10, 1–8.
[2]	Koizumi, M. (1993), "The concept of FGM", <i>Ceram Trans</i> , 34, 3–10.
[3]	Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plate", <i>J Sound Vib</i> , 272, 703–730.
[4]	Birman, V., Keil, T., Hosder, S. (2013), "Functionally graded materials in engineering: Structural interfaces and attachments in biology", Springer Science, Business Media, New York, p. 19–41.
[5]	Malekzadeh, P., Alibeygi Beni, A. (2010), "Free vibration of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates in thermal environment", <i>Compos Struct</i> , 92, 2758–2767.
[6]	Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011), "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates", <i>Int J Mech Sci</i> , 53, 11–22.
[7]	Zhu, P., Liew, K.M. (2011), "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method", <i>Compos Struct</i> , 93, 2925–2944.
[8]	Natarajan, S., Ganapathi, M. (2012), "Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory", <i>Finite Elem Analysis Des</i> , 57, 32–42.
[9]	Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez, O.A., Rabczuk, T., Bui, T.Q., Bordas, S.P.A. (2013), "NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter", <i>Compos Struct</i> , 99, 309–326.
[10]	Thai, H.T., Choi, D.H. (2013), "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates", <i>Compos Struct</i> , 101, 332–340.
[11]	Mori, T., Tanaka, K. (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", <i>Acta Metall</i> , 21(5), 571–574.
[12]	Muller, E., Drasar, C., Schilz, J., Kaysser, W. A. (2003), "Functionally graded materials for sensor and energy applications", <i>J. Mater. Sci. and Eng.:</i> A, 362(1), 17–39.
[13]	Miyamoto, Y. (2016), "The Applications of Functionally Graded Materials in Japan", <i>Mater. Tech.</i> , 11(6), 230–36, published online.

[14]	Yin H.M., Sun L.Z. and Paulino, G.H., (2004), "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions", <i>Acta Materialia</i> , 52, 3535–3543.
[15]	Niino, M., Suzuki, A., Hirai, T., Watanabe, R., Hirano, T., Kuroishi, N. "Method of producing a functionally gradient material" <i>U.S. Patent</i> , 457, 1099–1988.
[16]	Chen, C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. (2009), "Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory", <i>J. Reinf. Plast. Compos.</i> , 28(10), 1215–1234.
[17]	Kawasaki, A., Watanabe, R. (1997), "Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials" <i>Ceramics International</i> , 8842(95), 73–83.
[18]	Kokini, K., Takeuchi, Y., (1990), "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads", In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, 31–36.
[19]	Yoshihisa, U., (2004), "Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications", <i>Compos. Part B</i> , 39, 39–51.
[20]	ZENG, Y.P., JIANG, D.L., WATANABE, T., (2000), "Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials", <i>Journal of the American Ceramic Society</i> , 83(12), 2999–3003.
[21]	Lostec, L., (1997), "Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L", Thèse de l'université de Limoges.
[22]	Morinaga, K., Toto, K.U. (1993), "Fabricate thick Alumina-Tungsten FGM using slip cast method", <i>Sci. Technol.</i> , p.4.
[23]	Schwartz, M. (2005), "New Materials, Processes, and Methods Technology, Consultant", Clearwater, Florida, USA.
[24]	Grazzini, H.H. and Wilkinson, D.S. (1992), "Slip Casting under pressure" Dept. of Mater. Sci. and Engrg., McMaster University, Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada.
[25]	Atarashiya, K., Ishida, Y., Nagai, T. (1993), "Functionally Gradient Materials", American Ceramic Society, Westerville, OH, pp. 141–148.
[26]	Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H. (2003), "Processing techniques for functionally graded materials", <i>Materials Science and Engineering</i> , 362, 81–105.
[27]	Takahashi, M., Itoh, Y, Kashiwaya, H. (1990), "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM", Sendai, Japan, 129–34.
[28]	Yuki, M., Murayama, T., Irisawa, T. (1991), "Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating", in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai, Japan, 203–208.
[29]	Xiong, H., Kawasaki, A., Kang, Y., Watanabe, R. (2005), "Synthesis and

	characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs", <i>Surf & Coat. Technol.</i> 194–203.
[30]	Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G. (1999), "Functionally graded materials: design, processing and applications", <i>Materials Technology Series</i> , Vol. 5.
[31]	Nakatani M., Shimizu S., and Harada Y., (2014), "Fretting Fatigue Behaviour of Titanium Alloy Coated with Functionally Graded Ti/TiN Film", <i>Advanced Materials Research</i> , 891, 897-902.
[32]	Bao, G, Wang, L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", <i>Int J Solids Struct</i> , 32(19), 2853–2871.
[33]	Chi, S.H., Chung, Y.L. (2003), "Cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings", <i>Engineering Fracture Mechanics</i> , 70 (10), 1227–1243.
[34]	Hill, R. (1995) "A self-consistent mechanics of composite materials", <i>Journal of the Mechanics and Physics of Solids</i> , 213–222.
[35]	Carrera, E. (2000), "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates composite structures", Vol. 50, p. 183–198, 2000.
[36]	Kant, T., Swaminathan, K. (2002), "analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory composite structure" 56(4), 329–344.
[37]	Noor. A. K & W. S. Burton, (1989). "Assesment of shear deformation theories for Multilayered composite plates", <i>Appl Mech Rev</i> , 42(1), pages 1–12.
[38]	Reddy, J.N. (2004), "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis", CRC Press, New York (USA).
[39]	Mindlin RD. (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates". <i>J Appl Mech</i> , 18(1), 31–38.
[40]	Reissner, E., (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", <i>Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME</i> , 69–77.
[41]	Naghdi. P. M, (1957), "On the theory of thin elastic shells", <i>Quarterly Appl. Math</i> , 14, 369–380.
[42]	Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", <i>Int. J. Numer Meth Eng</i> , 47, 663–684.
[43]	Reddy, JN. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", <i>J Appl Mech</i> , 51, 745–752.
[44]	Touratier M. (1990), "An efficient standard plate theory", <i>Int. J. Eng. Sc.</i> , 1991, 29 (8), 901–916.
[45]	Sina, S.A., Navazi, H.M., Haddadpour, H. (2009), "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", <i>Mater and Des</i> , 30(3), 741–747.
[46]	Vo, T.R., Thai, H.T., Nguyen, T.K. <i>et al.</i> (2014), "Finite element model for

	vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory", <i>Eng. Struct.</i> , 64, 12–22.
[47]	Nguyen, T.K. and Nguyen, B.D. (2015), "A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams", <i>J. Sandw. Struct. Mater.</i> , 17(6), 613–631.
[48]	Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2003), "Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité", <i>Int. J. Solids Structures</i> , 40(6), 1525–1546.
[49]	Ambartsumian, S.A. (1969), "Theory of anisotropic plate", <i>Technomic Publishing Co.</i>
[50]	Soldatos, K.P. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", <i>Acta Mech.</i> 94(3), 195–220.
[51]	Arya, H., Shimpi, R.P., Naik, N.K. (2002), "A zigzag model for laminated composite beams", <i>Compos Struct</i> , 56(1), 21–24.
[52]	Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", <i>AIAA Journal</i> , 137–146.
[53]	Aydogdu, M. (2005), "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", <i>Int. J. of Mech. Sci.</i> 47, 1740–1755.
[54]	El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle", <i>Int. J. of Mech. Sci.</i> , 237–247.
[55]	Zenkour, A.M. (2013), "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates", <i>Appl Math Model</i> , 37, 9041–9051.
[56]	Thai, H.T., Choi, D.H. (2014), "Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates", <i>Compos. B Eng.</i> , 56, 705–716.
[57]	Thai, H.T. and Kim, S.E. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", <i>Int. J. of Mech. Sci.</i> , 626–633.
[58]	Thai, H.T. et Kim, S.E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", <i>Compos. Struct.</i> , 1738–1746.
[59]	Fredrichs, K.O., Dressler, R.F. (1961), "A boundary layer theory for elastic plates", <i>Comm. on Pure Applied Mathematics</i> , 14, 1–33.
[60]	Goldenveizer, A.L., (1962), "Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity", <i>Prik. Mat. Mech.</i> , 26(4), 668–686.
[61]	Nguyen, V. T. (2004), "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque", Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées.

[62]	Whitney, J.M., Pagano, N.J. (1970), "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", <i>J Appl Mech</i> , Trans ASME, 37(4), 1031–1036.
[63]	Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., <i>et al.</i> , (2012), "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", <i>Compos Struct</i> , 94(5), 1814–1825.
[64]	Mantari, J.L., Granados, E.V., Guedes Soares, C. (2014), "Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation", <i>Compos Part B Eng</i> , 2014, 66, 407–419.
[65]	Nguyen, V.H., Nguyen, T.K., Thai, H.T., Vo, T.P. (2014), "A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates", <i>Compos Part B Eng</i> , 66, 233–246.
[66]	Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., <i>et al.</i> (2012), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", <i>Compos Part B Eng</i> , 43(2), 711–725.
[67]	Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", <i>Compos Struct</i> , , 82(4), 499–512.