



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et Equations Différentielles »

Présenté Par :
BELARBI Mohamed kheireddine

Sous l'intitulé :

Une étude sur l'équation logistique

Soutenu publiquement le 26 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

M. Baghdad Said	MCA Université de Tiaret	Président
M. Maazouz Kadda	MCA Université de Tiaret	Encadreur
Meme Sabit Souhila	MCA Université de Tiaret	Examineur
M. Moussa Zaak	PhD Université de Tiaret	Co-encadreur

Année universitaire :2022/2023

REMERCIEMENT

✓ Nous remercions avant tout **ALLAH** qui nous a donné la force et la volonté pour élaborer cette œuvre.

✓ Nous devons exprimer notre gratitude a **Dr MAAZOUZ KADDA** Co-encadreur **Dr Moussa Zaak** d'avoir accepter de nous encadrer avec beaucoup d'attention ainsi que sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, non seulement dans le cadre du mémoire, mais aussi dans nos études.

✓ Nous tenons a remercier chaleureusement **Dr BAGHDAD SAID** pour l'honneur qu'il nous fait de présider le jury de ce mémoire.

✓ Nous remercions également **Dr SABIT SOUHILA** d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos enseignants, nos familles, nos amis.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciment	i
Introduction	iv
1 Préliminaires	1
1.1 Systèmes dynamiques	1
1.1.1 Systèmes dynamiques continues	1
1.1.2 Systèmes dynamiques discrets	2
1.2 Fonctions spéciales	3
1.2.1 La fonction Gamma	3
1.2.2 La fonction Beta	4
1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler	5
1.3 Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire	5
1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens du Riemann-Liouville	5
1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	7
2 Modèles de base en dynamique de population	9
2.1 Modèle de croissance linéaire(Malthus 1798)	9
2.2 Modèle de croissance logistique (Verhulst 1838)	10
2.3 Deux populations en interaction	11
2.4 Modèle de Lotka-Volterra (1925)	12
2.4.1 Les points d'équilibres	13
2.4.2 Stabilité des points d'équilibre	13
2.5 Modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique	17
2.5.1 Les points d'équilibres	18

2.5.2	Stabilité des points d'équilibre	18
2.6	Modèle proie-prédateur de Holling	20
2.6.1	Les points d'équilibres	20
2.6.2	Stabilité des points d'équilibre	21
3	Équation logistique d'ordre fractionnaire	25
3.1	Équilibre et stabilité	25
3.2	Équation logistique d'ordre fractionnaire	26
3.3	Existence et unicité	27
3.4	Méthodes numériques et résultats	29
	Conclusion	31

TABLE DES FIGURES

2.1	La solution de l'équation linéaire avec $r = 2$, $x_0 = 0.5$	10
2.2	Portrait de phase de l'équation logistique.	11
2.3	La solution du modèle de Lotka-Volterra montrant un pic dans l'effectif des proies suivi d'un pic dans l'effectif des prédateurs.	17
2.4	Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra présentant des trajectoires fermées (centres) autour de l'équilibre (x^*, y^*)	17
2.5	Isoclines zéros du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. (a) : $Kb > m$, (b) : $Kb < m$	19
2.6	Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. Cas où il y a coexistence des proies et des prédateurs, $r = 0.2$, $K = 20$, $a = 0.2$, $m = 0.4$, $b = 0.1$	20
2.7	Fonctions réponse de Lotka-Volterra et de Holling, cette dernière présentant un effet de saturation.	21
2.8	Isoclines zéros du modèle de Holling. (a) $\frac{mD}{b-m} < K$, il existe un équilibre non trivial positif. (b) $\frac{mD}{b-m} > K$, aucun équilibre non trivial positif.	22
2.9	Isoclines zéros du modèle de Holling. (a) Le point (x^*, y^*) est instable. (b) Le point (x^*, y^*) est stable.	23
2.10	Cas du cycle limite. $r = 0.2$, $K = 20$, $D = 6$, $a = b = 2$, $m = 1$. La trajectoire intérieure issue de A ainsi que la trajectoire extérieure issue de B spiralent vers le cycle limite.	24

La compréhension de la croissance des populations a toujours été un sujet d'intérêt majeur dans divers domaines, tels que la biologie, l'écologie, l'économie et la démographie. Au fil des années, de nombreux modèles ont été développés pour tenter de décrire et de prédire le comportement des populations dans le temps. L'un de ces modèles, largement utilisé et étudié, est l'équation logistique.

L'équation logistique, également connue sous le nom d'équation de Verhulst, est un modèle mathématique qui permet de décrire la croissance d'une population dans un environnement limité en ressources. Elle a été initialement proposée par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst au XIXe siècle. Depuis lors, cette équation a été largement étudiée et appliquée dans divers domaines.

L'objectif de ce mémoire est d'analyser en profondeur l'équation logistique et de comprendre ses implications dans l'étude de la croissance des populations. Nous examinerons les bases mathématiques de l'équation, son interprétation géométrique, ainsi que son utilisation dans différents contextes.

À cet égard, ce mémoire est divisé en trois chapitres :

- **Premier chapitre :**

Nous présenterons les théoriques fondamentales de l'équation logistique avec les concepts mathématiques principaux utilisés pour étudier cette équation, en expliquons également les différentes formes de l'équation logistique et leurs significations.

- **Deuxième chapitre :**

Nous intéresserons à l'interprétation biologique de l'équation logistique, et examinerons les hypothèses sous-jacentes au modèle et les facteurs biologiques qui influencent la croissance des populations. Nous discuterons également des limites de l'équation logistique et des extensions qui ont été proposées pour tenir compte de situations plus complexes.

- **Troisième chapitre :**

Nous présenterons des applications concrètes de l'équation logistique d'ordre fractionnaire qui trouvent nombreuses utilisations dans différents domaines, comme l'utilisation en écologie

pour modéliser la dynamique des populations animales, en économie pour étudier la croissance des marchés, et en démographie pour analyser l'évolution des populations humaines.

En somme, ce mémoire est consacré pour fournir une analyse approfondie de l'équation logistique et de sa rôle dans l'étude de la croissance des populations. Il vise à contribuer vers l'enrichissement des connaissances dans ce domaine et à ouvrir des perspectives pour de nouvelles recherches et applications.

Nous consacrons ce premier chapitre de notre travail à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques continus et discrets. Nous illustrons ensuite toutes ces notions par l'exemple de l'application logistique.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1. *Un système dynamique est défini par un triplet (X, T, φ) , constitué de l'espace d'états X , du domaine temporel T et d'une fonction de transition d'état $\varphi : X \times T \rightarrow X$, qui possède la propriété, pour tout $x \in X$ et $t_1, t_2 \in T$:*

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) & = x \\ \varphi(\varphi(x, t_1), t_2) & = \varphi(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

On distingue deux grandes catégories de systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret. Si $T = \mathbb{R}^+$ ou \mathbb{R} , le système est dit à temps continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , le système est dit à temps discret.

1.1.1 Systèmes dynamiques continus

Dans le cas général, un système dynamique continu peut être représenté par une équation différentielle. Selon l'équation, on distingue quelques types différents de systèmes. Une équation différentielle de type :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} & = F(X(t)) \\ X(0) & = X_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

- $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
- $\frac{dX(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)^T$.
- $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in D \subset \mathbb{R}^n$.

permet de définir un système dynamique autonome à temps continu $(D, \mathbb{R}^+, \varphi)$ où φ est la solution de (1.1). Cette solution est donnée par :

$$\varphi(X_0, t) = X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds.$$

Si la fonction F est une fonction de l'état $X(t)$ et de la variable du temps t i.e : $\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t))$, on dit que le système dynamique est non autonome.

Exemple. *Oscillateur de Duffing*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos(t) \end{cases}$$

Où $\delta; \gamma$ sont des paramètres physiques réels.

L'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 , ce système est non linéaire, non autonome.

1.1.2 Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.1.2. Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence. On appelle système dynamique discret autonome d'ordre 1 l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n), & n \in \mathbb{N} \\ X_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (1.2)$$

Où :

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable.
- $X_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: Valeur initiale.
- $X_n \in D$: Vecteur des états du système.

De (1.2) on obtient :

$$X_1 = f(X_0).$$

$$X_2 = f(X_1) = f(f(X_0)) = f^2(X_0).$$

En général : $X_n = f^n(X_0)$ où $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

- $f(X_0)$ est appelée première itération de X_0 par la fonction f .
- $f^2(X_0) = f(f(X_0))$ est appelée seconde itération de X_0 par la fonction f .
- $f^n(X_0)$ est appelée $n^{\text{ième}}$ itération de X_0 par la fonction f .
- Donc, le triplet (D, \mathbb{N}, φ) définit un système dynamique discret autonome, où φ est donnée par : $\varphi(X_0, t) = f^t(X_0)$.

Exemple. Application de Hénon

$$\begin{cases} x_{k+1} &= a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} &= x_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètres réels, l'espace des phases est \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

Exemple. Soit x_0 un capital placé à un taux d'intérêt r composé annuellement et pour $n \geq 1$ désignons par x_n le capital après n années. Alors on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + rx_0 = (1+r)x_0 \\ x_2 &= x_1 + rx_1 = (1+r)^2x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= (1+r)^nx_0 \end{aligned}$$

on obtient le système dynamique discret

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, n) &\longrightarrow (1+r)^nx \end{aligned}$$

Il est obtenu en itérant la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (1+r)^nx \end{aligned}$$

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est considéré comme étant l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire.

Définition 1.2.1. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$ La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{z-1}dt$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (1.3)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par partie

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^z dt = [-\exp(-t)t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

la fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation 1.3 nous obtenons :

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

.

.

.

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!.$$

1.2.2 La fonction Beta

Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.2.2. La fonction Beta est un type d'intégration d'Euler définie pour des nombres z et w par

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

La fonction Beta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (1.4)$$

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Définition 1.2.3. Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

En particulier :

$$E_1(z) = e^z, E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

1.3 Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire

Le but de cette partie est d'introduire l'intégrale et les dérivées d'ordre fractionnaire au sens du Riemann-Liouville.

1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens du Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n -fois.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$. Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_0^t I^1 f(u) du = \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau) d\tau \right) du = \int_0^t \left(\int_0^u du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la n^{ieme} primitive de la fonction f sous la forme :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, x \in \mathbb{N}^*. \quad (1.5)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann s'est rendu compte que le second membre de (1.5) pourrait avoir un sens même quant n prenant une valeur non-entière, il a défini l'intégrale fractionnaire de la manière suivante

Définition 1.3.1. Soit $f \in L([0, T])$, $T > 0$, L'intégrale fractionnaire de Riemman-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\text{Re}(\alpha) > 0)$ notée I^α est définie par

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma.

Exemple. Intégrale de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$, alors on a :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau.$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = ts,$$

où $s = 0$ quant $\tau = 0$ et $s = 1$ quant $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors on obtient

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-ts)^{\alpha-1} (ts)^\beta tds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t(1-s))^{\alpha-1} t^{\beta+1} s^\beta ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Beta (1.4)

$$\begin{aligned} T^\alpha f(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par

$$I^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.2. Soit $f \in L([0, T])$, $T > 0$ une fonction intégrable sur $[0, T]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction d'ordre $\alpha \in C(\operatorname{Re}(\alpha) > 0)$ notée $D^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^\alpha I^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \end{aligned}$$

où $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$D^0 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t),$$

et si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$$D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, t > 0$$

Exemple. La dérivée de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

soit $\alpha > 0$ tel que $n - 1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, on a :

$$D^\alpha t^\beta = D^n I^{n-\alpha} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n I^{\beta+n-\alpha}.$$

D'où

$$\begin{aligned} D^n t^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

On substitue le résultat dans la formule précédente, pour obtenir

$$\begin{aligned} D^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par

$$D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

CHAPITRE 2

MODÈLES DE BASE EN DYNAMIQUE DE POPULATION

Ce chapitre présente une revue des modèles les plus classiques qui sont utilisées dans nombreux modèles de dynamique comme Biomathématiques et Modélisation. Dans le cas d'une population isolée, la variable d'état est l'effectif de la population, c'est-à-dire le nombre d'individus $x(t)$ de cette population à un instant t . Parfois, la variable utilisée est la densité d'individus qui représente le nombre d'individus par unité de surface. La forme générale de la loi de croissance de la population est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2.1 Modèle de croissance linéaire(Malthus 1798)

Le cas le plus simple est le cas du modèle linéaire. Soit n le taux de natalité par unité de temps et par individu. Soit de même m le taux de mortalité. Les taux de natalité et de mortalité sont supposés être constants, ce qui conduit au modèle linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx = (n - m)x = rx; \quad (2.1)$$

où r est le taux de croissance de la population.

La solution est donnée par :

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

On a trois cas :

- si $r > 0$ ($n > m$) la population va croître exponentiellement.

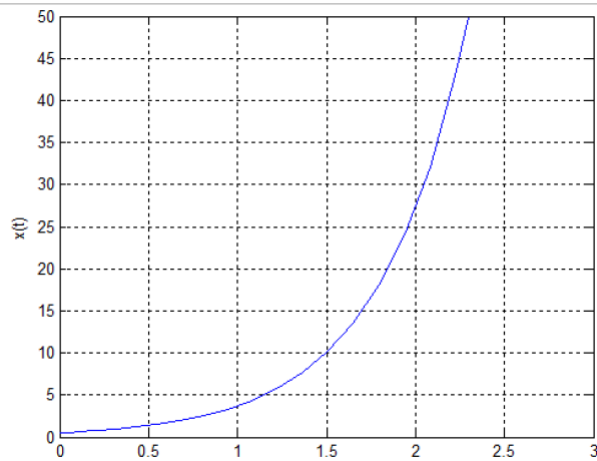


FIGURE 2.1 – La solution de l'équation linéaire avec $r = 2$, $x_0 = 0.5$

- si $r < 0$ ($n < m$) la population va décroître (extinction de la population).
- si $r = 0$ ($n = m$) la population reste constante (égale à x_0).

2.2 Modèle de croissance logistique (Verhulst 1838)

Une hypothèse plus réaliste consiste à supposer que le taux de natalité n'est pas constant mais diminue avec l'effectif. En effet, lorsque le nombre d'individus d'une population augmente, les ressources étant limitées, on peut penser que la natalité va diminuer. Dans le cas le plus simple on choisit pour le taux de natalité une fonction linéaire décroissante de l'effectif :

$$n(x) = \alpha - \beta x, \quad \alpha, \beta > 0$$

Même chose pour le taux de mortalité est une fonction linéaire croissante de l'effectif :

$$m(x) = \gamma + \delta x, \quad \gamma, \delta > 0$$

D'après (2.1) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (n(x) - m(x))x = (\alpha - \beta x - \gamma - \delta x)x = (\alpha - \gamma)x - (\beta + \delta)x^2 \\ &= (\alpha - \gamma) \left(1 - \frac{\beta + \delta}{\alpha - \gamma} x\right) = (\alpha - \gamma)x \left(\frac{x}{\frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}}\right) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \end{aligned}$$

alors, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{2.2}$$

où r est le taux de croissance intrinsèque de la population, on suppose qu'il est positif ($\alpha > \gamma$), K s'appelle la capacité limite du milieu qui est positif dès que $r > 0$.

1. Les états d'équilibre

Cette équation différentielle s'appelle l'équation logistique. Elle admet deux points d'équilibre, l'origine et K .

2. La stabilité

Pour déterminer la stabilité des équilibres, calculons le signe de ces deux points d'équilibre :

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

$f(0) = r > 0 \Rightarrow$ l'origine est un équilibre instable.

$f(K) = r < 0 \Rightarrow K$ est un équilibre stable .

La solution de l'équation différentielle (2.2) est :

$$f(x) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}.$$

Pour toute condition initiale positive, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K.$$

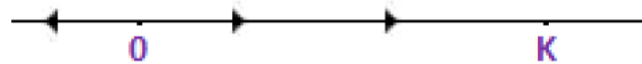


FIGURE 2.2 – Portrait de phase de l'équation logistique.

2.3 Deux populations en interaction

Soit les deux populations d'effectifs respectifs $x(t)$ et $y(t)$ en interaction. La forme générale d'un modèle qui décrit les interactions entre deux populations peut prendre les trois aspects suivants :

- Chaque espèce exerce un effet positif sur l'autre (mutualisme).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y) + k(x, y). \end{cases}$$

- Une espèce exerce un effet positif sur l'autre mais l'effet inverse dans l'autre sens (proie-prédateur).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y) - k(x, y). \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y) + k(x, y). \end{cases}$$

- Chaque espèce exerce un effet négatif sur l'autre (compétition).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y) - k(x, y). \end{cases}$$

où les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ représentent les croissances des populations isolées et ne dépendent que de l'effectif de cette population alors que les termes $h(x, y)$ et $k(x, y)$ qui sont positifs correspondent aux interactions entre les populations et dépendent des effectifs des deux populations.

Ce qui nous intéresse est le deuxième type, on va étudier quelques modèles de type proie-prédateur .

2.4 Modèle de Lotka-Volterra (1925)

La forme générale du système de Lotka-Volterra est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy, \\ \frac{dy}{dt} = -my + eaxy. \end{cases} \quad (2.3)$$

tel que :

$x(t)$: représente la population des proies,

$y(t)$: représente la population des prédateurs,

r : taux de croissance des proies en absence des prédateurs,

a : taux de prédation (efficacité des prédateurs dans leurs attaque),

m : taux de mortalité des prédateurs en absence des proies,

e : taux de conversion des proies consommées en progénitures.

On note par $b = ea$, le modèle devient alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy & x(0) = x_0 > 0, \\ \frac{dy}{dt} = -my + bxy & y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

On pose $f(x, y) = rx - axy$ et $g(x, y) = -my + bxy$.

2.4.1 Les points d'équilibres

Pour trouver les points d'équilibres, il faut chercher les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} rx - axy = 0 \\ -my + bxy = 0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{m}{b} \\ y = \frac{r}{a}. \end{cases}$$

par conséquent il y a deux points d'équilibres : l'origine $(0, 0)$ correspondant à l'absence de proie et de prédateur, et un point $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$ non trivial et appartenant au cadran positif.

2.4.2 Stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la propriété de stabilité locale des équilibres, il faut calculer la matrice Jacobienne :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}$$

1. Le point $(0, 0)$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ by & -m \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres $\lambda_1 = r$ et $\lambda_2 = -m$ sont de signe opposé ($\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$), alors l'équilibre $(0, 0)$ est instable (point selle).

2. Le point $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$

$$J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-am}{b} \\ \frac{br}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{cases} \text{tr } J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = 0, \\ \det J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = rm > 0. \end{cases}$$

alors λ_1 et λ_2 sont des imaginaires pures. Le système prévoit donc un centre. Mais on ne peut pas conclure, par la linéarisation, quand à l'existence de solutions périodiques, il faut donc chercher une intégrale première.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-m + bx)}{x(r - ay)}$$

Par séparation des variables on obtient :

$$\frac{-m + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

On intègre les deux côtés :

$$\begin{aligned} -m \ln x + bx &= r \ln y - ay + c \quad c \in \mathbb{R}, \\ \implies ay + bx - r \ln y - m \ln x &= c, \end{aligned}$$

Soit $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par : $\forall x, y \geq 0$

$$H(x, y) = ay + bx - r \ln y - m \ln x$$

H est une intégrale première car :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left(b - \frac{m}{x}\right) x(r - ay) + \left(a - \frac{r}{y}\right) y(-m + bx) \\ &= (bx - m)(r - ay) + (ay - r)(m - bx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maintenant, on démontre que le point fixe $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$ est un extremum pour H :

$$\nabla H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - \frac{m}{x} \\ a - \frac{r}{y} \end{pmatrix} \implies \nabla H\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne

$$\text{Hess}H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{r}{y^2} \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{Hess}H\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{b^2}{m} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{a^2 b^2}{mr} > 0. \end{cases} \implies H\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) \text{ est dfinie positive,}$$

alors : $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$ est un minimum local de H.

Les courbes se referment bien autour de ce point d'où l'existence de solutions périodiques.

Les solutions sont donc périodiques avec une période T qui est déterminée par les parties imaginaires des valeurs propres de la Jacobienne calculée à l'équilibre non trivial $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right)$. La période vérifie donc la relation suivante :

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{rm}$$

Démonstration

$$J\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-am}{b} \\ \frac{br}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

cherchons les valeurs propres

$$\det\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{-am}{b} \\ \frac{br}{a} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + rm = 0$$

alors :

$$\lambda = i\sqrt{rm} \text{ ou } \lambda = -i\sqrt{rm}$$

on obtient une solution de la forme :

$$x(t) = c_1 \cos t\sqrt{rm} + c_2 \sin t\sqrt{rm} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = c_3 \cos t\sqrt{rm} + c_4 \sin t\sqrt{rm} \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

la solution $x(t), y(t)$ est périodique alors

$$x(0) = x(T) \implies c_1 = c_1 \cos T\sqrt{rm} + c_2 \sin T\sqrt{rm}$$

$$y(0) = y(T) \implies c_3 = c_3 \cos T\sqrt{rm} + c_4 \sin T\sqrt{rm}$$

donc, il faut que

$$T\sqrt{rm} = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\sqrt{rm}}.$$

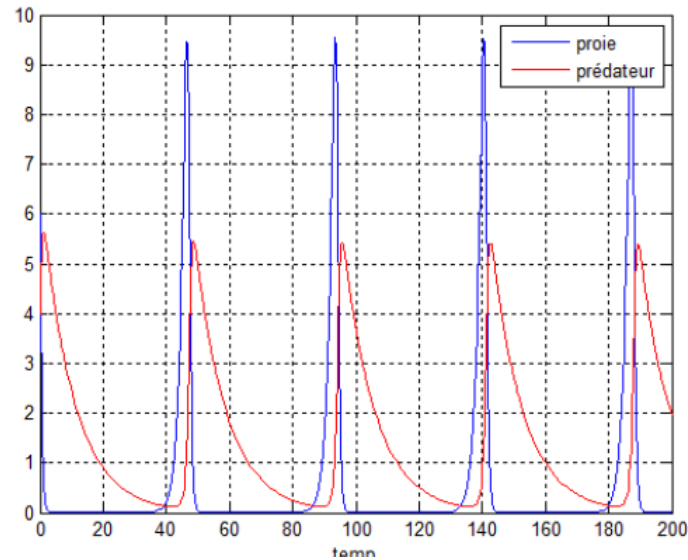


FIGURE 2.3 – La solution du modèle de Lotka-Volterra montrant un pic dans l'effectif des proies suivi d'un pic dans l'effectif des prédateurs.

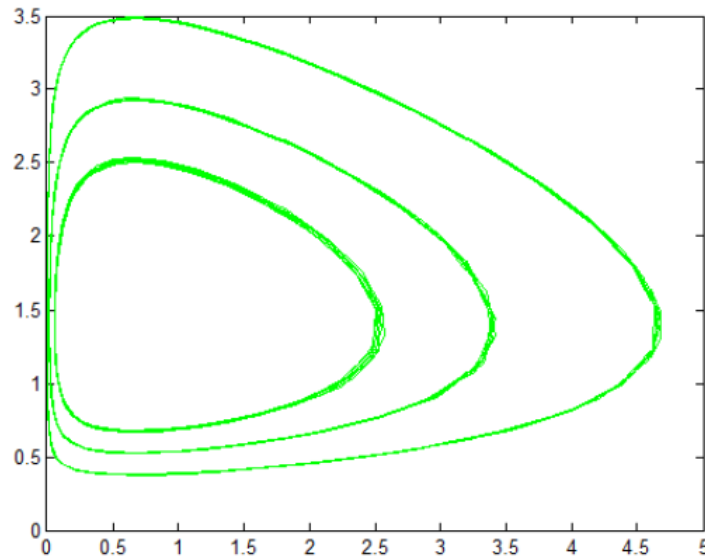


FIGURE 2.4 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra présentant des trajectoires fermées (centres) autour de l'équilibre (x^*, y^*) .

2.5 Modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique

En général si on ajoute une petites perturbation au modèle de Lotka-Volterra, les effectifs des proies et des prédateurs ne sont pas conservés. De plus, en absence de prédateur, la croissance des proies est illimitée ce qui est irréaliste. Par conséquent, une modification du modèle consiste à choisir une loi de croissance de type logistique pour la population des proies, ce qui conduit au modèle

suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy, \\ \frac{dy}{dt} = -my + bxy, \end{cases}$$

telle que K est la capacité limite de la population des proies.

2.5.1 Les points d'équilibres

Isoclines zéro sont données par :

- Isocline vertical : $\frac{dx}{dt} = 0 \implies rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy = 0 \implies x = 0$ où $y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{K}\right)$,
- Isocline horizontale : $\frac{dy}{dt} = 0 \implies y = 0$ où $x = \frac{m}{b}$.
- Si $\frac{m}{b} > K$, alors on a deux points fixe : $(0, 0)$ et $(K, 0)$.
- Si $\frac{m}{b} < K$, alors on a trois points fixe : $(0, 0)$, $(K, 0)$ et $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{m}{bK}\right)\right)$.

2.5.2 Stabilité des points d'équilibre

La matrice Jacobienne du système (2.3) est la suivante :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}$$

1. Le point $(0, 0)$

Évaluons la partie linéaire du modèle à l'origine. Il vient :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres $\lambda_1 = r$ et $\lambda_2 = -m$ sont de signe opposé ($\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$), alors l'équilibre $(0, 0)$ est instable (point selle).

2. Le point $(K, 0)$

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} r & -aK \\ 0 & -m + bK \end{pmatrix}$$

- Si $-m + bK > 0$ c-à-d $K > \frac{m}{b} \implies (K, 0)$ est instable (point selle).
- Si $-m + bK < 0$ c-à-d $K < \frac{m}{b} \implies (K, 0)$ est stable.

3. Le point $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{m}{bK}\right)\right)$

On pose

$$x^* = \frac{m}{b}$$

$$y^* = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{m}{bK}\right)$$

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x^* - ay^* & -ax^* \\ by^* & -m + bx^* \end{pmatrix}$$

Puisque (x^*, y^*) vérifie que :

$$rx^* \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - ax^*y^* = 0 \implies r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - ay^* = 0$$

$$-my^* + bx^*y^* = 0 \implies -m + bx^* = 0$$

donc la matrice Jacobienne au point (x^*, y^*) devient :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{K}x^* & -ax^* \\ by^* & 0 \end{pmatrix}$$

quand $K > \frac{m}{b}$ on a :

$$\begin{cases} \text{tr } J(x^*, y^*) = -\frac{r}{K}x^* < 0, \\ \det J(x^*, y^*) = abx^*y^* > 0. \end{cases} \implies (x^*, y^*) \text{ est stable (foyer stable) :}$$

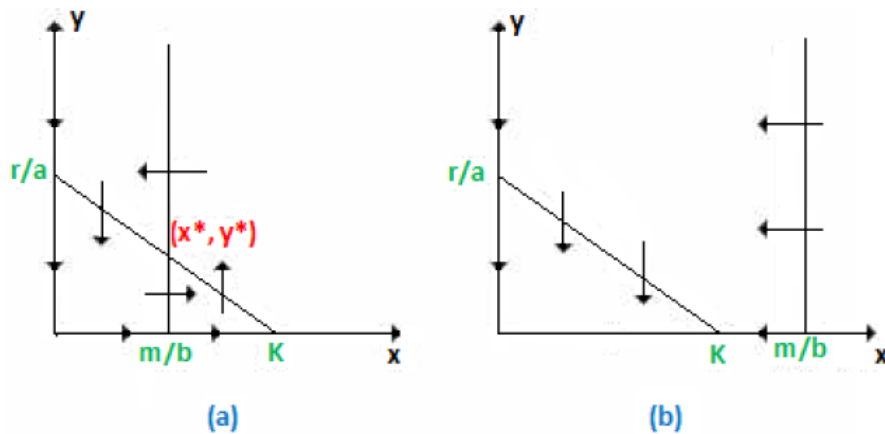


FIGURE 2.5 – Isoclines zéros du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. (a) : $Kb > m$, (b) : $Kb < m$.

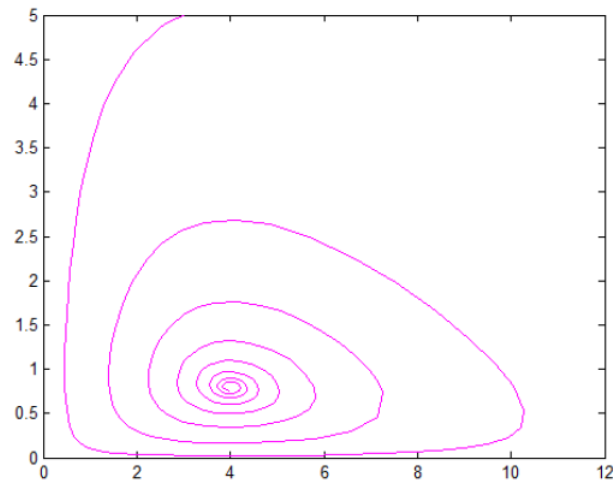


FIGURE 2.6 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies. Cas où il y a coexistence des proies et des prédateurs, $r = 0.2$, $K = 20$, $a = 0.2$, $m = 0.4$, $b = 0.1$.

2.6 Modèle proie-prédateur de Holling

Dans le modèle de Lotka Volterra la réponse fonctionnelle qui représente le nombre de proies consommées par un seul prédateur par unité de temps, nommée Holling I, est de la forme suivante :

$$\phi(x, y) = ax.$$

Si x est assez grand, ϕ va être assez grande c-à-d un prédateur va consommer un nombre assez grand des proies ce qui n'est pas réaliste. Holling en 1959 a proposé une réponse fonctionnelle dite Holling II :

$$\phi(x, y) = \frac{ax}{x + D} \quad a > 0, D > 0.$$

D : une constante positive.

Dans ce cas on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{x + D}, \\ \frac{dy}{dt} = -my + \frac{bxy}{x + D}. \end{cases}$$

2.6.1 Les points d'équilibres

On cherche les points d'équilibre qui sont les intersections des isoclines du système au dessus :

- Isocline vertical : $\frac{dx}{dt} = 0 \implies rx\left(1 - \frac{x}{K} - \frac{axy}{x+D}\right) = 0 \implies x = 0$ ou $r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ay}{x+D} = 0 \implies y = \frac{r}{a}(x + D)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$,

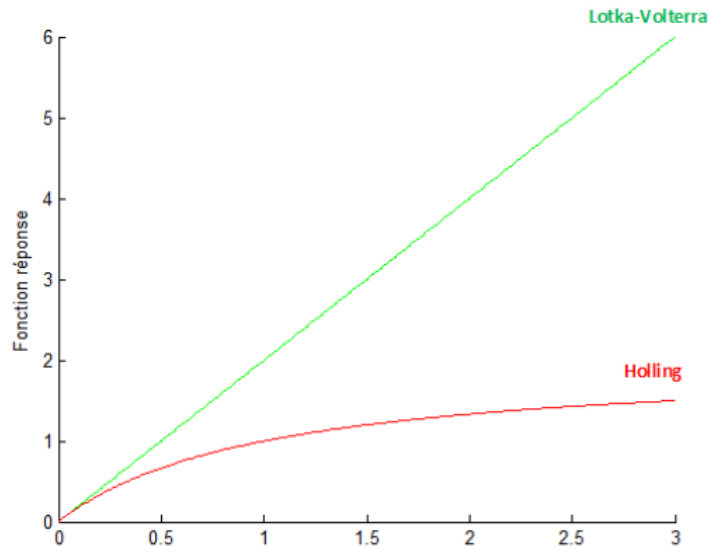


FIGURE 2.7 – Fonctions réponse de Lotka-Volterra et de Holling, cette dernière présentant un effet de saturation.

- Isocline horizontale : $\frac{dy}{dt} = 0 \implies y = 0$ où $-m + \frac{bx}{x+D} = 0 \implies x = \frac{mD}{b-m}$ (on suppose que $b > m$),

Notons que le sommet de la parabole $y = \frac{r}{a}(x+D)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ qui annule la dérivée de l'équation de la parabole se trouve à la position \hat{x} :

$$\hat{x} = \frac{K-D}{2}$$

Nous ferons l'hypothèse réaliste que $K > D$.

On a deux cas possibles :

- Si $\frac{mD}{b-m} < K$, alors on a trois points fixe : $(0, 0)$, $(K, 0)$ et (x^*, y^*) telle que $x^* = \frac{mD}{b-m}$,
 $y^* = \frac{r}{a}(x^* + D)\left(1 - \frac{x^*}{K}\right)$.
- Si $\frac{mD}{b-m} > K$, il y a seulement deux points d'équilibre : $(0, 0)$, $(K, 0)$, puisque le point d'équilibre $(-D, 0)$ sera supprimé, vu qu'il n'a pas de signification biologique.

2.6.2 Stabilité des points d'équilibre

On calcule la matrice Jacobienne du système (2.4) :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x - \frac{aDy}{(x+D)^2} & -\frac{ax}{x+D} \\ \frac{bDy}{(x+D)^2} & -m + \frac{bx}{x+D} \end{pmatrix}$$

1. Le point $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres $\lambda_1 = r$ et $\lambda_2 = -m$ sont de signe opposé ($\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$), alors l'équilibre $(0,0)$ est instable (point selle).

2. Le point $(K,0)$

$$J(K,0) = \begin{pmatrix} -r & \frac{-aK}{K+D} \\ 0 & -m + \frac{bK}{K+D} \end{pmatrix}$$

on a les valeurs propres $\lambda_1 = -r < 0$ et $\lambda_2 = -m + \frac{bK}{K+D}$, donc la stabilité du point $(K,0)$

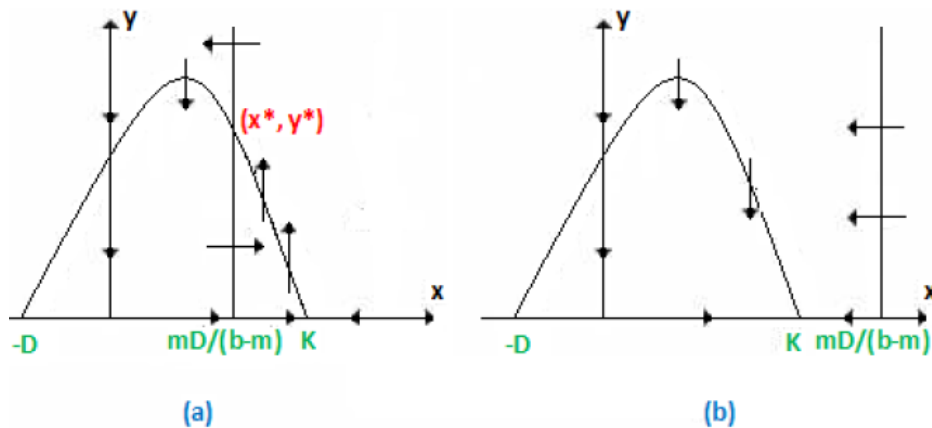


FIGURE 2.8 – Isoclines zéros du modèle de Holling. (a) $\frac{mD}{b-m} < K$, il existe un équilibre non trivial positif. (b) $\frac{mD}{b-m} > K$, aucun équilibre non trivial positif.

dépend du signe de λ_2 , alors on a deux cas :

- Si $\frac{mD}{b-m} > K$ alors $\lambda_2 < 0 \implies (K, 0)$ est stable (un noeud stable).
- Si $\frac{mD}{b-m} < K$ alors $\lambda_2 > 0 \implies (K, 0)$ est instable (point selle).

3. Le point (x^*, y^*) ; La Jacobienne vaut :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x^* - \frac{aDy^*}{(x^*+D)^2} & -\frac{ax^*}{x^*+D} \\ \frac{bDy^*}{(x^*+D)^2} & -m + \frac{bx^*}{x^*+D} \end{pmatrix}$$

puisque (x^*, y^*) est un point d'équilibre pour les système 2.4, donc il vérifie :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} rx^* \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{ax^*y^*}{x^*+D}\right) = 0, \\ -my^* + \frac{bx^*y^*}{x+D} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{ay^*}{x^*+D}\right) = 0, \\ -m + \frac{bx^*}{x^*+D} = 0. \end{cases}$$

la matrice précédente devient :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}x^* - \frac{aDy^*}{(x^*+D)^2} & -\frac{ax^*}{x^*+D} \\ \frac{bDy^*}{(x^*+D)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{tr } J(x^*, y^*) = r - \frac{2r}{K}x^* - \frac{aDy^*}{(x^*+D)^2}, \\ \frac{abDx^*y^*}{(x^*+D)^3} > 0, \quad (x^* > 0 \text{ et } y^* > 0). \end{cases}$$

En remplaçant y^* par sa formule, il vient :

$$\text{tr } J(x^*, y^*) = r - \frac{2r}{K}x^* - \frac{Dr}{(x^*+D)} + \frac{Drx^*}{K(x^*+D)} = \frac{rx^*(K - D - 2x^*)}{K(x^*+D)}$$

il faut que $\text{tr}J(x^*, y^*)$ soit de signe négatif pour assurer la stabilité de l'équilibre (x^*, y^*) :

$$\text{tr } J(x^*, y^*) < 0 \Leftrightarrow x^* > \frac{K - D}{2}.$$

si la trace est positive alors (x^*, y^*) est instable, nous pouvons conclure dans ce cas par le théorème de Poincaré-Bendixon qu'il existe au moins un cycle limite. Pour plus de détail voir [1 ; p :127].

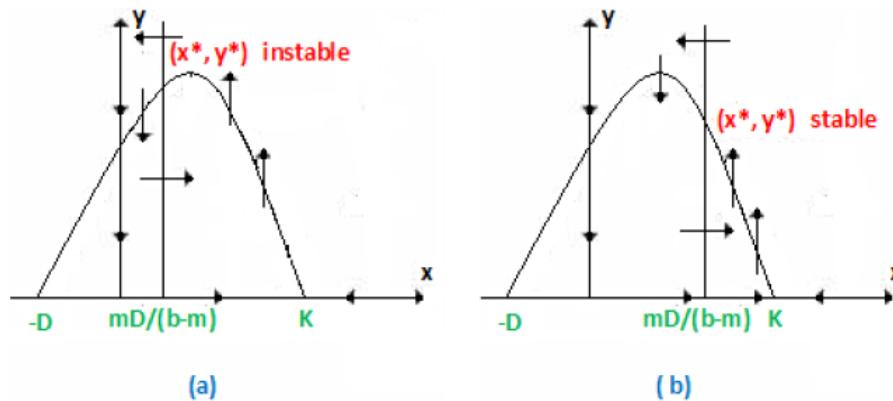


FIGURE 2.9 – Isoclines zéros du modèle de Holling. (a) Le point (x^*, y^*) est instable. (b) Le point (x^*, y^*) est stable.

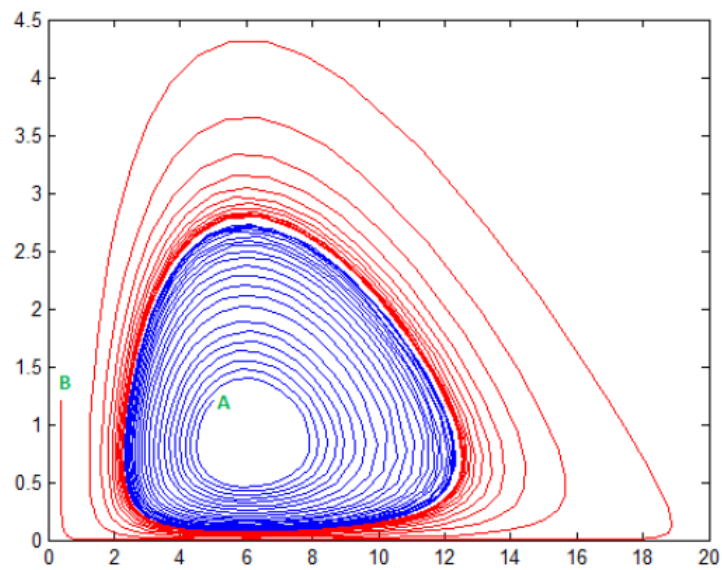


FIGURE 2.10 – Cas du cycle limite. $r = 0.2$, $K = 20$, $D = 6$, $a = b = 2$, $m = 1$. La trajectoire intérieure issue de A ainsi que la trajectoire extérieure issue de B spiralent vers le cycle limite.

CHAPITRE 3

ÉQUATION LOGISTIQUE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

la modélisation fractionnaire est très utile dans description des phénomènes naturels. Mais la dérivée fractionnaire est plus approprié pour décrire la croissance de population parce que son noyau est non local. Par conséquent, nous remplacer la dérivée temporelle dans l'équation (1.1) par une nouvelle dérivé rationnel découvert par Caputo, et l'équation (1.1) se convertit en un modèle fractionnaire de temps de l'équation logistique exprimée de la manière suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Équilibre et stabilité

Soit $\alpha \in [0, 1]$ et considérons le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour évaluer les points d'équilibre de (3.2) soit

$$D^\alpha x(t) = 0,$$

alors

$$f(x_{eq}) = 0.$$

Pour évaluer la stabilité asymptotique, soit

$$x(t) = x_{eq} + \varepsilon(t),$$

alors

$$D^\alpha(x_{eq} + \varepsilon) = f(x_{eq} + \varepsilon)$$

ce qui implique que

$$D^\alpha \varepsilon(t) = f(x_{eq} + \varepsilon) \tag{3.3}$$

mais

$$\begin{aligned} f(x_{eq} + \varepsilon) &\simeq f(x_{eq}) + f'(x_{eq})\varepsilon + \dots \longrightarrow \\ f(x_{eq} + \varepsilon) &\simeq f'(x_{eq})\varepsilon \end{aligned}$$

où $f(x_{eq}) = 0$, puis

$$D^\alpha \varepsilon(t) \simeq f'(x_{eq})\varepsilon(t), \quad t > 0 \text{ et } \varepsilon(0) = x_0 - x_{eq}. \tag{4}$$

Supposons maintenant que la solution $\varepsilon(t)$ de (3.3) existe. Donc si $\varepsilon(t)$ est croissant, alors le point d'équilibre x_{eq} est instable et si $\varepsilon(t)$ est décroissant, alors le point d'équilibre x_{eq} est localement asymptotiquement stable.

Il faut noter que ces résultats sont les mêmes résultats que pour l'étude de la stabilité du problème de la valeur initiale de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

3.2 Équation logistique d'ordre fractionnaire

Nous étudions maintenant les points d'équilibres et leurs stabilités de l'équation logistique d'ordre fractionnaire.

Soit $\alpha(0, 1], \rho > 0$ et $x_0 > 0$; le problème de la valeur initiale de l'équation logistique d'ordre fractionnaire est donné par

$$D^\alpha x(t) = \rho x(t)(1 - x(t)), \quad t > 0 \text{ et } x(0) = x_0, \tag{5}$$

et pour évaluer les points d'équilibre, soit

$$D^\alpha x(t) = 0;$$

alors $x = 0, 1$ sont les points d'équilibre.

Or, pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on a (voir section 2)

$$f'(x(t)) = \rho(1 - 2x(t)) \implies f'(0) = \rho \text{ et } f'(1) = -\rho.$$

Maintenant la solution du problème de la valeur initiale

$$D^\alpha \varepsilon(t) = f'(x_{eq} = 0)\varepsilon(t) = \rho\varepsilon(t), \quad t > 0 \text{ et } \varepsilon(0) = x_0.$$

est donnée par

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} x_0$$

et alors le point d'équilibre $x = 0$ est instable.

Aussi pour le point d'équilibre $x = 1$, nous avons le problème de la valeur initiale

$$D^\alpha \varepsilon(t) = f'(x_{eq} = 1)\varepsilon(t) = -\rho\varepsilon(t), \quad t > 0 \text{ et } \varepsilon(0) = x_0 - 1$$

qui est (si $x_0 > 1$) l'équation de relaxation d'ordre fractionnaire et a la solution [13]

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\rho)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} (x_0 - 1)$$

et alors le point d'équilibre $x = 1$ est asymptotiquement stable.

3.3 Existence et unicité

Soient $I = [0, T], T < \infty$ et $C(I)$ la classe de toutes les fonctions continues définies sur I , de norme

$$\|x\| = \sup_{t \in I} |e^{-Nt} x(t)|, \quad N > 0$$

qui est équivalente à la norme $\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$. Lorsque $t > \sigma \geq 0$ on écrit $C(I_\sigma)$.

Considérons le problème de la valeur initiale de l'équation logistique d'ordre fractionnaire (3.2).

Définition 3.3.1. *Nous définirons $x(t)$ comme une solution du problème de la valeur initiale (3.2)*

si

- $(t, x(t)) \in D, t \in I$ où $D = I \times B, B = \{x \in R : |x| \leq b\}$.
- $x(t)$ satisfait (3.2).

Théorème 3.3.1. *Le problème à valeur initiale (3.2) admet une unique solution $x \in C(I), x' \in X = \{x \in L_1[0, T], \|x\| = \|e^{-Nt}x(t)\|_{L_1}\}$.*

Preuve. *À partir des propriétés du calcul fractionnaire, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire dans (3.2) peut être écrite comme*

$$I^{1-\alpha} \frac{d}{dt} = \rho x(t)(1 - x(t)).$$

Intégrant les deux membres de équation avec I^α on obtient

$$x(t) = x_0 + I^\alpha \rho(x(t) - x^2(t)). \quad (3.4)$$

Soit maintenant l'opérateur $F : C(I) \longrightarrow C(I)$ défini par

$$Fx(t) = x_0 + I^\alpha \rho(x(t) - x^2(t)). \quad (3.5)$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{-Nt}(Fx - Fy) &= \rho e^{-Nt} I^\alpha [(x(t) - y(t)) - (x^2(t) - y^2(t))] \\ &\leq \rho \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} (x(s) - y(s))(1 + x(s) + y(s)) e^{-Ns} ds \\ &\leq \frac{(1+2b)\rho}{N^\alpha} \|x - y\| \int_0^t \frac{s^{\alpha-1} e^{-Ns}}{\Gamma(\alpha)} ds. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|Fx - Fy\| \leq \frac{(1+2b)\rho}{N^\alpha} \|x - y\|$$

et on peut montrer que si on choisit N tel que $N^\alpha > (1+2b)\rho$, on obtient

$$\|Fx - Fy\| < \|x - y\|$$

et l'opérateur F donné par (3.5) a un unique point fixe.

Par conséquent l'équation intégrale (3.4) admet une unique solution $x \in C(I)$. On peut aussi en déduire que $I^\alpha(x - x^2)|_{t=0} = 0$.

Maintenant à partir de l'équation (3.4) on a formellement

$$x(t) = x_0 + \rho \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} (x_0 - x_0^2) + I^{\alpha+1}(x'(t) - 2x(t)x'(t)) \right]$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \rho \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (x_0 - x_0^2) + I^\alpha(x'(t) - 2x(t)x'(t)) \right], \\ e^{-Nt}x'(t) &= \rho e^{-Nt} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (x_0 - x_0^2) + I^\alpha(x'(t) - 2x(t)x'(t)) \right] \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire que $x' \in C(I_\sigma)$ et $x' \in X$.

Maintenant à partir de l'éq. (9), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} I^\alpha [x(t) - x^2(t)] \\ I^{1-\alpha} \frac{dx}{dt} &= \rho I^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I^\alpha [x(t) - x^2(t)] \\ I^{1-\alpha} \frac{dx}{dt} &= \rho I^{1-\alpha} I^{\alpha-1} [x(t) - x^2(t)] \\ D^\alpha x(t) &= \rho [x(t) - x^2(t)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 + I^\alpha \rho [x(t) - x^2(t)]|_{t=0} \\ x(0) &= x_0 + 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Alors l'équation intégrale (3.4) est équivalente au problème à valeur initiale (3.2) et le théorème est prouvé.

3.4 Méthodes numériques et résultats

Une méthode prédicteur-correcteur de type Adams a été introduite dans [4,5] et étudiée plus en détail dans [1,6–10,14].

Dans ce travail, nous utilisons une méthode prédicteur-correcteur de type Adams pour la solution numérique d'une intégrale fractionnaire équation.

La clé de la dérivation de la méthode consiste à remplacer l'équation différentielle fractionnaire

originale dans (3) par la équation intégrale fractionnaire (11)

$$x(t) = x_0 + I^\alpha f(x(t)).$$

La formule de quadrature trapézoïdale du produit est utilisée avec des nœuds $t_j (j = 0, 1, \dots, k + 1)$, pris par rapport au fonction de poids $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha - 1}$. Autrement dit, on applique l'approximation

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - u)^{\alpha-1} g(u) du &= \int_{t_0}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - u)^{\alpha-1} g_{k+1}(u) du \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j), \end{aligned}$$

où

$$a_{j,k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} [k^{\alpha+1} - (k - \alpha)(k + 1)^\alpha] & \text{if } j = 0, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & \text{if } j = k + 1 \end{array} \right\}$$

et h est une taille de pas, et pour $1 \leq j \leq k$

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)} [(k - j + 2)^{\alpha+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha+1} + (k - j)^{\alpha+1}].$$

Cela donne la formule correcte, c'est-à-dire la variante fractionnaire de la méthode en une étape Adams-Moulton

$$x_{k+1} = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j) + a_{k+1,k+1}, f(x_{k+1}^p) \right)$$

Le problème restant est la détermination de la formule de prédiction nécessaire pour calculer la valeur x_{k+1}^p .

L'idée utilisée pour généraliser la méthode Adams-Bashforth en une étape est la même que celle décrite ci-dessus pour la technique d'Adams-Moulton : l'intégrale du côté droit de l'équation. (11) est remplacé par la règle du rectangle produit, e.e,

$$\int_{t_0}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - u)^{\alpha-1} g(u) du \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_j).$$

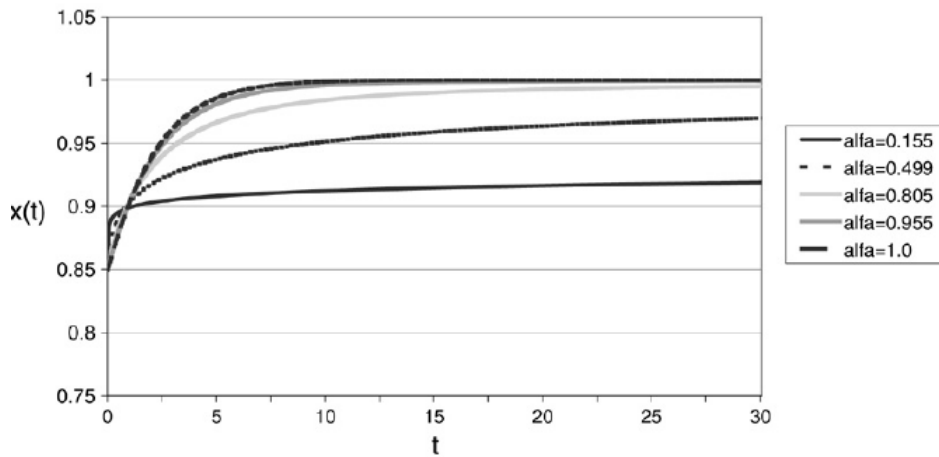


Fig. 1.

où

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} [(k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha].$$

Ainsi, le prédicteur x_{k+1}^p est déterminé par la méthode fractionnaire d'Adams-Bashforth :

$$x_{k+1}^p = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j).$$

Ceci complète la description de l'algorithme de base, à savoir la version fractionnaire de l'algorithme Adams-Bashforth en une étape. Méthode Moulton. En récapitulant, on calcule d'abord le prédicteur x_{k+1}^p selon l'éq. (13), puis évalue $f(x_{k+1}^p)$, l'utilise pour déterminer le correcteur x_{k+1} au moyen de l'Eq. (12), et évalue finalement $f(x_{k+1})$ qui est ensuite utilisé dans la prochaine étape d'intégration. Les méthodes de ce type sont généralement appelées prédicteur-correcteur ou, plus précisément, PECE (Predict, Evaluer, Corriger, Evaluer).

Maintenant, nous appliquons la méthode PECE à l'équation logistique fractionnaire dans (5). Les solutions approximatives sont affichées sur la figure 1 pour le pas de 0,05 et différentes valeurs de α . Dans la figure 1, nous prenons $\rho = 0,5$ et $x_0 = 0,85$.

CONCLUSION

En conclusion, ce mémoire a examiné en profondeur l'équation logistique et son rôle essentiel dans l'étude de la croissance des populations. Nous avons exploré les bases mathématiques de l'équation, son interprétation biologique et ses applications dans différents domaines.

Au cours de notre analyse, nous avons constaté que l'équation logistique fournit un cadre mathématique puissant pour modéliser la croissance des populations. Son utilisation répandue dans divers domaines témoigne de son efficacité et de sa pertinence, et elle reste un outil précieux pour comprendre les dynamiques de population. Elle permet de représenter des schémas généraux de croissance et prédire des tendances sur le long terme. En combinaison avec d'autres modèles et approches, elle peut contribuer à une meilleure compréhension des systèmes écologiques, économiques et démographiques.

En définitive, l'équation logistique reste un modèle essentiel dans l'étude de la croissance des populations. Sa simplicité mathématique et sa capacité à décrire les schémas généraux de croissance en font un outil précieux pour les chercheurs et les décideurs. En continuant à explorer ses nuances, ses limites et ses applications, nous pourrions améliorer notre compréhension des systèmes complexes et contribuer à des solutions plus durables dans divers domaines.

- [1] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka, Numerical solution for the fractional replicator equation, *Internat. J. Modern Phys. C.* 16 (7) (2005) 1–9.
- [2] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rossler, Chua and Chen systems, *Phys. Lett. A* 358 (1) (2006).
- [3] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models, *J. Math. Anal. Appl.* 325 (2007) 542–553.
- [4] K. Diethelm, A. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modelling of viscoplasticity, in : F. Keil, W. Mackens, H. Voß, J. Werther (Eds.), *Scientific Computing in Chemical Engineering II—Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering, and Molecular Properties*, Springer, Heidelberg, 1999, pp. 217–224.
- [5] K. Diethelm, A. Freed, The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order, in : S. Heinzl, T. Plesser (Eds.), *Forschung und wissenschaftliches Rechnen 1998*, Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen, 1999, pp. 57–71.
- [6] K. Diethelm, N.J. Ford, The numerical solution of linear and non-linear fractional differential equations involving fractional derivatives several of several orders, *Numerical Analysis Report 379*, Manchester Center for Numerical Computational Mathematics.
- [7] K. Diethelm, Predictor–corrector strategies for single- and multi-term fractional differential equations, in : E.A. Lipitakis (Ed.), *Proceedings of the 5th Hellenic–European Conference on Computer Mathematics and its Applications*, LEA Press, Athens, 2002, pp. 117–122 [Zbl. Math. 1028.65081].
- [8] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, A predictor–corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dyn.* 29 (2002) 3–22.

- [9] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Detailed error analysis for a fractional Adams method, *Numer. Algorithms* 36 (2004) 31–52.
- [10] E.M. El-Mesiry, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations, *Appl. Math. Comput.* 160 (3) (2005) 683–699
- [11] A.M.A. El-Sayed, Fractional differential–difference equations, *J. Fract. Calc.* 10 (1996) 101–106.
- [12] A.M.A. El-Sayed, Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders, *Nonlinear Anal.* 33 (2) (1998) 181–186.
- [13] A.M.A. El-Sayed, F.M. Gaafar, Fractional order differential equations with memory and fractional-order relaxation–oscillation model, *Pure Math. Appl.* 12 (2001).
- [14] A.M.A. El-Sayed, E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka, Numerical solution for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations, *Comput. Appl. Math.* 23 (1) (2004) 33–54.
- [15] A.M.A. El-Sayed, F.M. Gaafar, H.H. Hashem, On the maximal and minimal solutions of arbitrary orders nonlinear functional integral and differential equations, *Math. Sci. Res. J.* 8 (11) (2004) 336–348.
- [16] R. Gorenflo, F. Mainardi, Fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer, Wien, 1997, pp. 223–276.
- [17] D. Matignon, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, in : *Computational Engineering in System Application*, vol. 2, Lille, France, 1996, p. 963.
- [18] I. Podlubny, A.M.A. El-Sayed, *On Two Definitions of Fractional Calculus*, Slovak Academy of science-institute of experimental phys, ISBN : 80-7099-252-2, 1996. UEF-03-96.
- [19] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.