RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« MATHEMATIQUES »

Option :
«ANALYSE FONCTIONNELLE ET EQUATION DIFFERENTIELLE »

Présenté Par :
BOUGHRIS Yagoub et NEKHNIMA Amel

Sous L'intitulé

THÉORÈME DU POINT FIXE DANS L'ESPACE B-MÉTRIQUE ET L'APPLICATION

Soutenu publiquement le 21 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SOUID Mohammed Said	Pr.	Université Ibn khaldoun Tiaret	Président
Mr MOKHTAR Mokhtari	MCA.	Université Ibn khaldoun Tiaret	Encadreur
Mr SOFRANI Mohamed	MCB.	Université Ibn khaldoun Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Avant tous, nous tenons à remercier de tout cœur notre dieu "ALLAH " le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

En tout premier lieu, mes profonds remerciements, ma gratitude sont destinés à mon encadreur, Mokhtar MOKHTARI Je le remercie sincèrement pour ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu’il m’a accordé.

Nous remercions les membres de jury d’avoir accepté d’évaluer notre travail.

Nous remercions vivement nos familles sur tous nos parents pour l’aide et le soutient moral , nos sœurs, nos frères et nos amis pour ses encouragements.

Je tiens a remercié mes collègues de ma promotion 2023 de Mathématiques, D’avoir passé ensemble des moments de travail agréables.

Décidace

Je dédie ce modeste travail a :

A la mémoire de ma mère que dieu ait pitié d'elle dans son vaste paradis

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père "Abdelkader".

A mes belles soeurs et mes frères qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

Tout mes enseignants

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé.

Et enfin a touts ceux qui m'aiment

Merci!

Dédicace

Je dédie ce travail :

A la mémoire de ma mère que dieu ait pitié d'elle dans son vaste paradis

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père "Abdelkader".

A mes belles soeurs et mes frères qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

Tout mes enseignants

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé. Et enfin a touts ceux qui m'aiment

Merci!

AMEL

Contents

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder , Kannan et Chatterjea et quelques-unes de leurs applications dans un espace b-métrique.

Etant donnés un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que ait un point fixe.

Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

Le théorème du point fixe de Kannan qui garantit l'existence et l'unicité de points fixes pour les application non continues.

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du théorème de point fixe de kannan

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à introduire quelques notions des théorèmes des points fixes, le reste de ce travail est décomposé en trois chapitres , d'une conclusion et d'une bibliographie comme suit:

Le premier chapitre : est consacré d'une part, à quelques définitions concernant les espaces métriques, espaces métriques partielle et espaces métriques complets, application contractante, convergence des suites et espaces Lp

Le deuxième chapitre : nous présentons quelques notions définitions concernant l'espace b-métrique et les théorèmes des points fixes (Banach, Brouwer, Schauder , Kannan et Chatterjea)

Le troisième chapitre : nous est dédit aux quelques applications du théorème du point fixe aux quelques équations (équation intégrale de fredholm , équation intégral de voltera, théorème de Picards , application aux équations intégrales).

Chapter 1

Préliminaire

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble non vide muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes:*

(a1) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(identité).*

(a2) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie).*

(a3) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*
alors le couple (X, d) est appelé un espace métrique

Exemple 1.1.1. *Soit une application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définit par :*

$$d(x, y) = |x - y|$$

alors le couple $(\mathbb{R}, d)$ est un espace métrique .
Preuve :

(1) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $\forall x, y \in X, d(x, y) = |x - y| = | - (y - x)| = |y - x| = d(y, x)$

(3) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) = |x - z| = |x - z + y - y| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.2 Espace métrique partiel

Définition 1.2.1. *Une métrique partielle sur un ensemble non vide X est une fonction $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y, z \in X$:*

(c1) $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y) \Leftrightarrow x = y$

(c2) $p(x,x) \leq p(x,y)$

(c3) $p(x,y) = p(y,x)$

(c4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

Un espace métrique partiel est une paire (X,p) telle que X est un ensemble non vide et p est une métrique partielle sur X .

Exemple 1.2.1. *La fonction $p : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbf{R}_+$ définie par :*

$$p(x,y) = d(x,y) + a$$

où $a \geqslant 0$
est un espace métrique partiel dans X
Preuve
1) $p(x,y) = d(x,y) + a$ *,* $p(x,x) = d(x,x) + a = a$
et
$p(x,y) = d(x,y) + a$ *,* $p(x,x) = d(x,x) + a \leq d(x,y) + a$
car :
$0 = d(x,x) \leq d(x,y)$.
donc :
$p(x,x) \leq p(x,y)$
2) $x = y \Longleftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$
$p(x,x) = d(x,x) + a = d(x,y) + a = d(y,y) + a$
$d(x,y) + a = a \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
La 2^{eme} condition est satisfie
3) $p(x,y) = d(x,y) + a = d(y,x) + a = p(y,x)$
$p(x,y) = p(y,x)$
4) $p(x,y) = d(x,y) + a \leq d(x,z) + d(z,y) + 2a - a \leq p(x,z) + p(z,y) - p(y,y)$
la 4^{eme} conditon est satisfie

Exemple 1.2.2. *Un simple exemple d'un espace métrique partiel est la pair $(\mathbb{R}^+, p)$ où $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est définit par :*

$$p(x,y) = max(x,y)$$

1.3 Convergence des suites

Définition 1.3.1. *Une suite (x_n) dans un espace métrique (X,d) est dite convergente s'il existe un $x \in X$ tel que :*

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$$

Ici x est appelé la limite de (x_n) et nous l'ecrivons comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = x$

1.4 Continuité , compacité et convexité

1.4.1 Continuité

Définition 1.4.1. *Soit (X , d) et (Y , d') deux espace métrique et soit $x \in X$. on dit qu'une application $f : X \to Y$ est continue au point a si :*

$$\lim_{x\to a} = f(a)$$

c'est a dire :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in X \quad d(a,x) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \epsilon$$

Définition 1.4.2. ***(Continuité sur un ensemble)*** *: On dira qu'une application $f : (X, d) \to (Y, d')$ est continue sur (X , d) si elle est continue en tout point de X.*

Définition 1.4.3. ***(Uniformément continue)*** *: Une application $f : (X, d) \to (Y, d')$ est dite Uniformément continue sur X si elle vérifiée :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, x' \in X \quad d(x,x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \epsilon$$

1.4.2 Compacité

la compacité est une notion d'une importance capitale en analyse . elle permet de s'assurer de l'existance de certains objet mathématique.

Définition 1.4.4. ***(Recouvrement)*** *: Soit (X , d) un espace métrique , une famille d'ensemble $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si :*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X$$

Définition 1.4.5. ***(Ensemble compact)*** *: Soit (X , d) un espace métrique , $K \subset X$ est dite compact si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X , on peut extraite une sous recouvrement fini . c'est a dire :*

$$\left(\bigcup_{i\in I} U_i = X\right) \Rightarrow \exists J \subset I; J fini, X = \bigcup_{i\in J} U_i$$

Proposition 1.4.1. *Pour une partie K d'un espace métrique (X , d) les deux assertions suivantes sont equivalentes :*
1) K compact
2) Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'élément de K , on peut extraire une sous suite convergente dans K .*

Proposition 1.4.2. *Tout espace métrique compact est complet .*

Preuve :
Soit (X,d) un espace métrique compact et considérons une suite de cauchy (x_n) d'élément de X alors , d'aprés la proposition précedente la suite (x_n) admet une sous suite convergente dans X . alors tout suite de cauchy posséde une sous suite convergente est converge donc X est complet .

1.4.3 Convexité

Définition 1.4.6. ***(Ensemble convexe)***
On dit que $C \subset X$ *est un ensemble convexe si :*

$$\forall\alpha \in [0,1], \forall(x,y) \in C^2, (\alpha x + (1-\alpha)y) \in C$$

A convexe *B non convexe*

A est un ensemble convexe car tous les segments $[x,y]$ *sont inclus dans A.*

B n'est pas convexe car il existe au moins un segment $[x,y]$ *qui n'est pas inclus dans B.*

Figure 1.1:

Définition 1.4.7. ***(fonction convexe)***
Soit $C \subset X$ *un ensemble convexe et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe sur C si :*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \forall x,y \in C, \forall\alpha \in [0,1]$$

1.5 Espace métrique complet

Définition 1.5.1. *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge .*

Exemple 1.5.1. *1) L'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet*
2) L'espace $\mathbb{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_1 n'est pas complet , En effet, la suite de fonction continue

$$d_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|dx$$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \textit{pour} \quad x \in [-1, \frac{-1}{n}] \\ nx & \textit{pour} \quad x \in [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \textit{pour} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

C'est une suite de cauchy pour la distance d_1,En effet , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.Il s'ensuit , pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x)| + |f_n(x)| \leq 2, \quad \forall x \in [-1,1]$$

d'ou pour $m \geq n$:

$$d_1(f_m, g_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_m(x) - f_n(x)|dx \leq 2\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx = \frac{4}{n}$$

par suite

$$\lim_{m,n\to\infty} d_1(f_m, g_n) = 0$$

ce qui signifie que $(f_n)_n$ est de cauchy dans $(\mathbb{C}([-1,1],\mathbb{R}), d_1)$
Montrons que la suite $(f_n)_n$ n'est pas convergente dans $(\mathbb{C}([-1,1],\mathbb{R}), d_1)$.
il est clair que la suite $(f_n)_n$ posséde une limite pour d_1 définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad x \in [-1, 0[\\ nx & \text{pour} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pour} \quad x \in]0, 1] \end{cases}$$

En effet on a : $d_1(f_n, f) = \int_{-1}^{\frac{-1}{n}} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |f_n(x) - f(x)|dx +$ $\int_{0}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{n} |f_n(x) - f(x)|dx = 0 + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} |nx+1|dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |nx -$ $1|dx =$

$\int_{\frac{-1}{n}}^{0}(nx+1)dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}}(1-nx)dx =$
$\frac{1}{n}$ d'ou $d_1(f_n, f) \to 0$ c'est-à-dire $f_n \to f$, mais $f \notin \mathbb{C}([-1,1],\mathbb{R})$ car f n'est pas continue

Définition 1.5.2. *Un point fixe d'une application $f : X \to X$ est un point $x \in X$ tel que:*
$f(x) = x$.

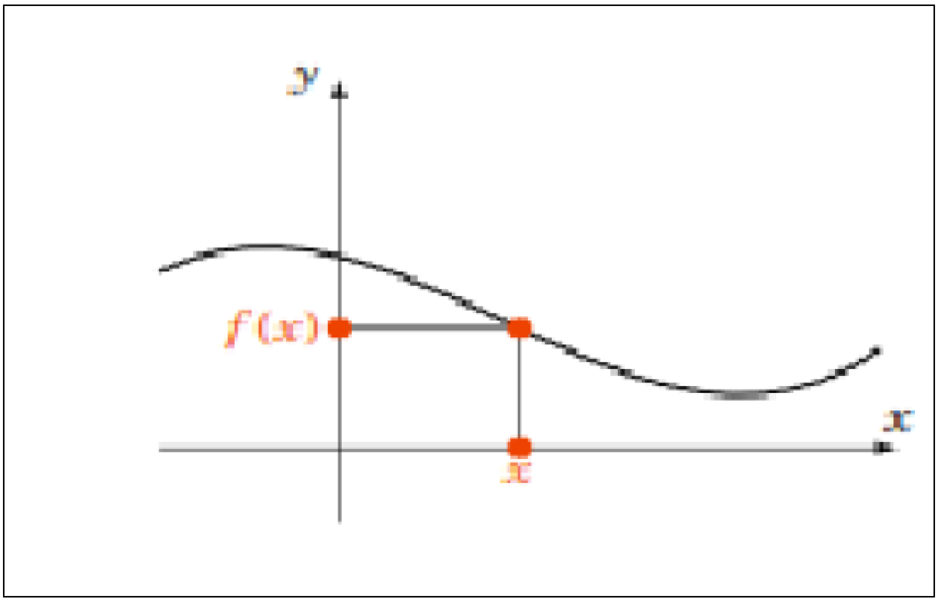


Figure 1.2:

Exemple :
1) l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par :

$$f(x) = x^2$$

Admet deux point fixe
Preuve :
$f(x) = x \Rightarrow$
$x^2 = x \Rightarrow$
$x^2 - x = 0 \Rightarrow$
$x(x-1) = 0 \Rightarrow$
$x = 1$ ou $x = 0$ a deux point fixe 0 et 1 .

2) Une rotation du plan a un point fixe unique (centre).
3) Une translation n'a pas de point fixe sauf le vecteur nul .

Définition 1.5.3. ***(Application lipschitizienne)***
On dit que f est lipschitizienne s'il existe une canstant $K \geq 0$ tel que :

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

• *si $K \leq 1$, l'application f est appelée non expansive .*
• *si $K < 1$, l'application f est appelée contraction .*

Proposition 1.5.1. *f lipschizienne$\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue . les deux réciproques sont fausse .*

Preuve :
pour la premiére implication on prendre $\alpha = \dfrac{\epsilon}{k}$ pour $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \alpha$ on a :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < k\alpha = \epsilon$$

Exemple
1) Sur $[0, 1]$, $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne
2) la fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas uniformément continue .

1.6 Application cantractante

Définition 1.6.1. *Soit (X, d) un espace métrique. l'application $T : X \to X$ est appelée contraction sur X s'il existe un nombre réel positif $k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

1.7 Espace vectoriel normé

1.7.1 Normes

Définition 1.7.1. *Soit E un espace vectoriel sur un corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifier les propriétés suivante :*
1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\forall x \in E, \forall \in K, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.
3) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
Pour $x \in E$, N(x) est Appelé norme de x. N(x) est noté $||x||$.

Exemple 1.7.1. *1) La valeur absolue est une norme sur* $\mathbb{R}$
2) Les application $\|.\|_1, \|.\|_2, ..., \|.\|_\infty$ *sont des normes sur* $E = \mathbb{R}^n$*.*
$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$, $\| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2)^{\frac{1}{2}}$

Définition 1.7.2. *On appelle espace vectoriel normé (e.v.n) le couple*$(E, \|.\|)$ *ou E est un espace vectoriel et* $\|.\|$ *est un norme sur E*

Proposition 1.7.1. *1) Tout espace normé est un espace métrique.*
2) Tout espace vectoriel normé de dimension fini est complet.

Proposition 1.7.2. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Exemple 1.7.2. $\bullet(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace de Banach*

1.8 Convergence des suites

Définition 1.8.1. *Une suite* (x_n) *dans un espace normé* X *est dite convergente si* X *contient un* x *tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} \| x_n - x \| = 0$$

- On écrit alors $(x_n) \to x$ *. Et on appelle* x *est appelée limite de* (x_n)*.*

Définition 1.8.2. ***(suite de cauchy) :***
Une suite (x_n) *dans un espace normé* X *est appelée suite de Cauchy :*
si pour chaque $\epsilon > 0$ *il existe un entier positif N tel que*

$$\forall n, m > N \qquad \| x_n - x_m \| < \epsilon.$$

1.9 Espace de Banach

Définition 1.9.1. *Un espace normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.9.2. *Un espace normé, dans lequel toute suite de Cauchy est convergente, est appelé espace de Banach. Autrement dit, pour toute suite* (x_n) *dans* X *avec* $\| x_n - x_m \| \to 0$ *et comme* $(n, m) \to \infty, \quad \exists x \in X$ *s.t* $\quad \| x_n - x \| \to 0$ *, comme* $n \to \infty$ *.*
Exemple
Tout espace de Banach est normé, mais la réciproque, en général, n'est pas vraie.
Exepmle
$\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ *sont des espaces de Banach dont la norme est définie par :*

$$\| x \| = (\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2)^{\frac{1}{2}}$$

Une application contractante dans un espace normé : Soit X un espace normé et $T : X \to X$. Alors T est appelée application contractante s'il existe un nombre réel positif $k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$:

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \|$$

Théorème 1.9.1. *Soit T une application contractante sur un espace métrique complet X, Alors T a un point fixe unique.*

Preuve : Considérons un point arbitraire $x_0 \in X$ et définissons la suite itérative (x_n) par :

$$\begin{gathered} x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, ...x_n = Tx_{n-1} \\ \text{donc , } x_2 = TTx_0 = T^2x_0 \\ x_3 = TT^2x_0 = T^3x_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = T^n x_0 \end{gathered}$$

il s'agit alors de la suite des images de x_0 sous l'application répétée de T. Nous montrons maintenant que (x_n) est une suite de cauchy.
si $n > m$, alors :

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq kd(x_m, x_{m-1}) \\ &\leq kd(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq k^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \end{aligned}$$

En procédant ainsi jusqu'à m fois, on obtient

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq k^m d(x_1, x_0)$$

Par conséquent, par l'inégalité triangulaire, nous obtenons pour $n > m$:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_{m+1}, x_m) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ...d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^m d(x_0, x_1) + k^{m+1} d(x_0, x_1) + ... + k^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &= k^m (1 + k + k^2 + ...k^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\ &= k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

puisque $0 < k < 1$ donc le nombre $1 - k^{n-m} < 1$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1)$$

Là encore $d(x_0 x_1)$, x est fixe et $0 < K < 1$, de sorte que nous pouvons rendre le côté droit aussi petit que nous le souhaitons en prenant m suffisamment grand.
Cela montre que (x_n) est une suite de cauchy. Puisque X est complet, il existe un point $x \in X$ tel que $x_n \to x$. On montre maintenant que cette limite x est fixe. montrons que cette limite x est un point fixe de la application T.
D'après l'inégalité triangulaire et par définition on a :

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_n) + d(x_n, Tx) \Rightarrow$$

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_n) + kd(x_{n-1}, x)$$

Nous savons que $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Puisque $x_n \to x$, donc $d(x, x_n) \to 0$ et $d(x_{n-1}, x) \to 0$. Il s'ensuit que $d(x, Tx) = 0$ et donc $Tx = x$. Cela montre que x est un point fixe de T.
Nous montrons maintenant que x est le seul point fixe de T. Supposons que x_1 est également un point fixe de T. Alors $Tx_1 = x_1$.

$$d(x, x_1) = d(Tx, Tx_1) \leq kd(x, x_1)$$

Puisque $k < 1$, cela implique que $d(x_1, x) = 0$. d'ou $x = x_1$, la preuve est complète.
Principe de contraction de Banach
Théorème de contraction de banach :
Toute application de contraction T définie sur un espace de Banach X vers lui-même possède un unique point fixe $x \in X$.
Preuve :
Existence d'un point fixe :
Considérons un point arbitraire $x_0 \in X$ et définissons la suite interative (x_n) :

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2 .....x_n = Tx_{n-1}$$
$$\text{donc , } x_2 = TTx_0 = T^2 x_0$$
$$x_3 = TT^2 x_0 = T^3 x_0$$

$$\begin{gathered} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = T^n x_0 \end{gathered}$$

Si $m > n$, disons $m = n + p$, $p = 1, 2, ...$ Donc :

$$\| x_{n+p} - x_n \| =$$

$$\begin{gathered} \| T^{n+p} x_0 - T^n x_0 \| = \\ \| T(T^{n+p-1} x_0 - T^{n-1} x_0) \| \leq \\ k \| T^{n+p-1} x_0 - T^{n-1} x_0 \| \end{gathered}$$

puisque T est une application de contraction Poursuivre ce processus ce processus $n - 1$ fois, nous avons :

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leq k^n \| T^p x_0 - x_0 \|$$

Pour $n = 0, 1, 2, 3, ...$ et tout p. Maintenant,

$$\begin{aligned} \| T^p x_0 - x_0 \| \quad & = \| T^p x_0 - T^{p-1} x_0 + T^{p-1} x_0 - T^{p-2} x_0 + T^{p-2} x_0 + T x_0 - x_0 \| \\ & \Rightarrow \| T^p x_0 - x_0 \| \leq \| T^p x_0 - T^{p-1} x_0 \| + \| T^{p-1} x_0 - T^{p-2} x_0 \| + ...+ \| T x_0 - x_0 \| \\ & \Rightarrow \| T^p x_0 - x_0 \| \; T^{p-1} x_1 - T^{p-1} x_0 \| + \| T^{p-2} x_1 - T^{p-2} x_0 \| + ...+ \| x_1 - x_0 \| \\ & \Rightarrow \| T^p x_0 - x_0 \| \leq k^{p-1} \| x_1 - x_0 \| + \| k^{p-2} \| x_1 - x_0 \| + ...+ \| x_1 - x_0 \| \\ & \Rightarrow \| T^p x_0 - x_0 \| \leq (k^{p-1} + k^{p-2} + ... + 1) \| x_1 - x_0 \| \\ & \Rightarrow \| T^p x_0 - x_0 \| \leq \frac{1 - k^p}{1 - k} \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

Puisque $0 < k < 1$, alors le nombre $1 - K^p < 1$. En utilisant ce résultat , on obtient :

$$\| T^p x_0 - x_0 \| \leq \frac{1}{1 - k} \| x_1 - x_0 \|$$

à l'aide de ce résultat (7) devient :

$$\| x_{n+p} - x_n \| \frac{k^n}{1 - k} \| x_1 - x_0 \|$$

lorsque $n \to \infty$ alors $m = n + p \to \infty$ alors:

$$\| x_{n+p} - x_n \| \to \infty$$

Ceci montre que (x_n) est une suite de cauchy dans X. Par conséquent, (x_n) doit être convergente, dire : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

La limite x est un point fixe de T

Puisque T est continue, on a :

$$\begin{aligned} Tx &= T(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} Tx_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= x \end{aligned}$$

Puisque la limite de (x_{n+1}) est la même que celle de (x_n)
x est donc un point fixe de T.

Unicité du point fixe

Soit y un autre point fixe de T. Alors,

$Ty = y$, On a aussi :
$\| Tx - Ty \| \leq k \| x - y \|$
puisque T est une application contractante,mais
$Ty = y$

,

On a aussi :
$\| Tx - Ty \| \leq \| x - y \|$.
$Tx = x$ et $Ty = y$

$$\| x - y \| \leq k \| x - y \|$$

. Puisque $0 < k < 1$, la relation ci-dessus n'est possible que si :

$$\begin{aligned} \| x - y \| &= 0 \\ \Rightarrow x - y &= 0 \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

Cela preuve que le point fixe de T est unique.

1.10 Les espaces L^P

Définition 1.10.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^P(\Omega) si$*
1) f est mesurable sur Ω
2) $(\int_\Omega |f(x)|^p dx) < \infty$
On definit la norme par l'expression suivante

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

1.11 Les inégalités classiques de Hölder

Définition 1.11.1. *Soient Ω un ensemble mesurable non vide de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions mesurables sur Ω tel que $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a*
1) Pour $p \geq 1$

$$\int\limits_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx \leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{p'}(\Omega)}, \tag{1.1}$$

et on écrit

$$\int\limits_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx \leq \left(\int\limits_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega \big|g(x)\big|^{p'} dx\right)^{1/p'}. \tag{1.2}$$

Chapter 2

Espace b-métrique

Dans ce chapitre , on donne quelques définition et propriétés sur les espaces b-métrique et l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commence par la plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les application contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schauder et Kannan. Enfin, nous abordons le théorème du point fixe de Chatterjea

2.1 Espace b-métrique

Définition 2.1.1. *Soit X une ensemble non vide et* $d_b : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *une application satisfait les propriétés suivants :*

(b1) $\forall x, y \in X, d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b2) $\forall x, y \in X, d_b(x,y) = d_b(y,x)$

(b3) il exists un nombre real $s \geq 1$ *telle que* $\forall x, y, z \in X$

$$d_b(x,z) \leq s[d_b(x,y) + d_b(y,z)]$$

Alors d_b *est appelé une b-métrie sur X et le couple (X,* d_b*) est appelé un espace b-métrique avec un coefficient s.*

Exemple :
Soit une application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$d_b(x,y) = (x-y)^2$$

donc le couple (R, d_b) est un espace b-métrique avec le coefficient $s = 2$

preuve :
1) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $\forall x, y \in X, d(x, y) = (x-y)^2 = (y-x)^2 = d(y, x)$
3) on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= (x-z)^2 \\ &= (x-y+y-z)^2 \\ &\leq 2(x-y)^2 + 2(y-z)^2 \\ &\leq 2[(x-y)^2 + (y-z)^2] \\ &\leq 2[d(x,y) + d(y,z)] \end{aligned}$$

Remarque :
Tout espace métrique est un espace b-métrique avec $s = 1$ mais la réciproque n'est pas toujour vraie.
si on prend $X = \mathbb{R}$ et

$$d(x, y) = (x - y)^2$$

l'application d est b-métrique mais pas métrique

2.2 Espace b-métrique partiel

Définition 2.2.1. *Une b-métrie partiel sur un ensemble non vide X est une fonction $b_p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y, z \in X$:*

(d1) $b_p(x, x) = b_p(x, y) = b_p(y, y) \Leftrightarrow x = y$

(d2) $b_p(x, x) \leq b_p(x, y)$

(d3) $b_p(x, y) = b_p(y, x)$

(d4) il existe un nombre real $s \geq 1$ telle que:

$$b(x, y) \leq s[b_p(x, z) + b_p(z, y)] - b_p(z, z)$$

Un espace b-métrique partiel est un couple (X, b_p) tel que X est un ensemble non vide et que b_p est une b-métrie partiel sur X. Le nombre s est appelé coefficient de (X, b_p).

Remarques :
1) Dans un espace b-métrique partiel (X, b_p), si $x, y \in X$ et $b_p(x, y) = 0$ alors $x = y$,
mais la réciproque n'est pas forcément vraie .
2) Il est clair que tout espace métrique partiel est un espace b-métrique partiel de coefficient $s = 1$ et que tout espace b-métrique est un espace

b-métrique partiel de coefficient $s = 1$ mais l'inverse de ce fait n'est pas obligatoirement valable

Exemple :

Soit$X = \mathbb{R}_+$, $p > 1$ constant et $b_p : X^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$b_p(x,y) = [max(x,y)]^p + |x-y|^p$$

Pour tout $x, y \in X$ alors (X,b) est un espace b-métrique partiel avec coefficient $s = 2^p > 1$

mais ce n'est ni un espace b-métrique ni un espace métrique partiel.En effet, pour tout $x > 0$.

on a :

$$b_p(x,x) = x^p \neq 0$$

par conséquent, b n'est pas une b-métrique sur X. De même, pour

$$x = 5 \text{ , } y = 1, z = 4$$

on a

$$b_p(x,y) = 5p + 4p$$

et

$$b_p(x,z) + b_p(z,y) - b_p(z,z) = 5p + 1 + 4p + 3p - 4p = 5p + 1 + 3p$$

donc

$$b_p(x,y) > b_p(x,z) + b_p(z,y) - b_p(z,z)$$

pour tout $p > 1$; par conséquent, b n'est pas une métrique partiel sur X.

Proposition 2.2.1. *Soit X un ensemble non vide tel que p est partiel et d est une focntion b-métrique de coefficient $s > 1$ sur X. Alors la fonction: $b : X^2 \to \mathbb{R}_+$ est une fonction b-métrique de coefficient $s > 1$ sur X et la fonction $b : X^2 \to \mathbb{R}_+$ definie par :*

$$b_p(x,y) = p(x,y) + d(x,y)$$

pour tout $x, y \in X$est une b-métrique partiel sur X, c'est a dire que le couple (X,b) est un espace b-métrique partiel

Preuve:
Soit (X,p) un espace métrique partiel et (X,d) un espace b-métrique avec un coefficient $s > 1$. Alors (d1),(d2),(d3) sont évidents pour la fonction b. Soient $x, y, z \in X$ arbitraires, alors, comme p est partiel et d est b-métrique sur X , on a:

$$\begin{aligned}
b_p(x,y) &= p(x,y) + d(x,y) \\
&\leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) + s[d(x,z) + d(z,y)] \\
&\leq s[p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) + d(x,z) + d(z,y)] \\
&\leq s[b_p(x,z) + b_p(z,y) - b_p(z,z)] \\
&\leq s[b_p(x,z) + b_p(z,y)] - b_p(z,z)
\end{aligned}$$

Par conséquent (d4) est égalment satisfait et donc le couple (X , b) est un espace b-métrique partiel

2.3 Quelques types du point fixe

Ce theoréme est dite principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe . ce principe garantit l'existance d'un point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-méme . ce théoreme prouvé en 1922 Par Stefan banach est basé essentiellement sur les notion d'application contractante .
Théoreme (principe de contraction de banach)
Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante de canstant K . alors il existe un point unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$ de plus pour toute point initial $x_0 \in X$ la suite itérée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$(x_n) = \begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers x.
avec

$$d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-K} d(x_0, f(x_0))$$

Preuve :
Existance :
Soit x_0 un point initial quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définit par :

$$(x_n) = \begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous allons établir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy . pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque f est contractante on a :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(fx_{n-1}, fx_n) \leq Kd(x_{n-1}, x_n) \leq ... \leq k^n d(x_0, x_1)$$

ainsi pour $m > n$ on a :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq K^n d(x_0, x_1) + \leq K^{n+1} d(x_0, x_1) + ...+ \leq k^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq K^n [1 + K + K^2 + ...K^{m-n-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq K^n \left(\frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \right) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

on a $K < 1$ donc $1 - K^{m-n} < 1$ on obtient
$d(x_n, x_m) \leq \dfrac{K^n}{1-K} d(x_0), f(x_0)) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ car $k \in [0, 1]$
ceci montre que (x_n) est une suite de cauchy et comme X est un espace complet alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \longrightarrow x$.
par ailleurs puisque f est continue on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x)$$

donc x est un point fixe de f.
Unicité :
Supposons qu'il exist deux points $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, $x = f(x)$ et $y = f(y)$.
alors on a :

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

donc :

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = 1$$

d'autre part f est contractante donc

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq K < 1$$

ce qui est cotradictoire d'ou l'unicité.
Exemple :
Soit $X = \mathbb{R}$ et l'applicaction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

alors f est contractante et f admet un unique point fixe $x = 2$

Remarque :

les exemples suivants montrent que chaqune des hypotéses du théoreme du point fixe de banach sont essentiells , si nous en négligeons seulement une , alors le point fixe n'existe pas .

X n'est pas stable par f :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0,1]$ or X fermé dans $\mathbb{R}$ et complet car $\mathbb{R}$ est complet , de plus

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Longrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f'(x)| < 1 \Longrightarrow f$ est contractante . mais f n'admet pas un point fixe car $f([0,1]) = [1,\sqrt{2}] \notin [0,1]$ ie X n'est pas stable par f.

f n'est pas contractante :

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ sur $X = [0,+\infty[$

or $f : X \longrightarrow X$ et X est fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet . mais f n'admet pas un point fixe car $\sup\limits_{x\in X}|f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante .

X n'est pas complet :

$f(x) = \dfrac{sin(x)}{2}$ sur $X =]0,\dfrac{\pi}{4}]$

or $f(]0,\dfrac{\pi}{4}]) =]0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0,\dfrac{\pi}{4}]$, et $\sup\limits_{x\in X}|f'(x)| = \dfrac{1}{2} < 1$, donc f est contractante . mais X n'admet pas un point fixe car X n'a pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc X n'est pas complet .

Théorème 2.3.1. *Soit (X,d) un espace métrique compact avec $f : X \to X$ satisfisant*

$$\forall x, y \in X, x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

Alors f admet un point fixe unique dans X.

la version locale du théoreme de banach :

Dans ce qui suite , on présente la version locale du théoreme de banach.

Théorème 2.3.2. *Soit (X,d) un espace métrique complet et soit*

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0)\} \text{ où } x_0 \in X \text{ et } r > 0$$

Supposons que $f : B(x_0,r) \to X$ est une contraction de canstante K , avec

$$d(f(x_0, x_0) < (1-k)r.$$

Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$

Preuve :
Comme $d(f(x_0, x_0) < (1-k)r$, alors il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 < r$ avec

$$d(f(x_0, x_0) \leq (1-k)r_0$$

On montre que $f : \overline{B(x_0.r_0)} \longrightarrow \overline{B(x_0.r_0)}$ alors :

$$\begin{aligned} d(f(x, x_0) &\leq d(f(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0, x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \\ &\leq Kr_0 + (1-k)r_0 \\ &\leq r_0 \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B(x_0.r_0)} \longrightarrow \overline{B(x_0.r_0)}$ est contractante avec $\overline{B(x_0.r_0)}$ est un espace complet . par suite , l'application du théoreme de banach a f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0.r)$.

2.3.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théoreme du point fixe de brouwer est un résultat de topoligique algebrique . il fait partie de la grand famille des théoreme du point fixe

Théorème 2.3.3. *Soit* $K \subset X$ *partie non vide compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue . il existe alors* $x \in X$ *tel que* $f(x) = x$
les parties compactes et convexes de $\mathbb{R}$ *sont les segments . le théoreme de brouwer prend donc dans le cas* $n = 1$ *la forme particuliére suivante :*

Théorème 2.3.4. *Si* $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *est continue , alors il exist* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = x$
De méme dans le plan , les partie convexes et compactes sont les disques fermée ou bien les boules fermée . le théoreme de brouwer prend la forme particuliére suivante :

Théorème 2.3.5. *Toute application f continue du disque fermé dans lui méme admet au moins un point fixe*

Théorème 2.3.6. *Toute application f continue de la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *dans lui- méme admet un point fixe . ce point n'est pas forcément unique .*

2.3.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théoreme prolonge le résultat du théoreme de brouwer pour montrer l'éxistence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de banach .
Le théoreme du point fixe de Schauder est plus topoligique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet une point fixe qui n'est pas néssessairement unique .

Théorème 2.3.7. *Soit K un sous-ensemble non vide convexe compact dans un espace de banach X et supposons $T : K \longrightarrow K$ une application continue . alors T admet un point fixe*

Preuve :
Soit K un sous-ensemble non vide convexe compact dans un espace de banach E , et soit $T : K \longrightarrow K$ une application continue . comme K est compact , T est uniformément continue alors si on fixe $\epsilon > 0$ il exist $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a :

$$\| x - y \| \leq \delta \Longrightarrow \| T(x) - T(y) \| \leq \epsilon$$

de plus on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouverts de rayon δ et de centres x_j ie :

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$$

Soit $L = (vec(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ alors L de dimension fini , et $K^* = K \cap L$ est compact convexe de dimension fini . pour $1 \leq j \leq p$ on définit les fonctions continues $\psi_j : X \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \| x - x_j \| \geq \delta \\ 1 - \dfrac{\| x - x_j \|}{\delta} & \text{sinon ,} \end{cases}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs . on a donc pour tout $x \in K$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$$

Ainsi , on peut définir sur K les fonctions continues positives ϕ_j par :

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$. Posant pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x)T(x_j)$$

la fonction g est continue (car elle set la somme des fonction continue) et prend ses valeurs dans K* (car g(x) est un barycentre des $T(x_j)$.
d'aprés le théoreme de brouwer la restriction $g \diagup k^* : k^* \longrightarrow k^*$ posséde un point fixe $y \in k^*$
de plus

$$T(y) - y = T(y) - g(y) =$$
$$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x)T(x_j) =$$
$$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(y)[T(y) - T(x_j)]$$

or , si $\psi_j(y) \neq 0$ alors $\parallel y - x_j \parallel < \delta$ et par suite $\parallel T(y) - T(x_j) \parallel < \epsilon$
pour tout j on a :

$$\parallel T(y) - y \parallel \leq \sum_{j=1}^{p} \psi_j(y)[T(y) - T(x_j)] \leq$$
$$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(y)\epsilon = \epsilon \ .$$

Donc pour tout entier m , en peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\parallel T(y_m) - y_m \parallel < 2^{-m}$$

Et puisque K est compact , on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ et qui converge vers un point $y^* \in k$
Alors T étant continue , la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut par la suite que $T(y^*) = y^*$ ie : y^* est un point fixe de T sur K.

2.3.3 Théorème du point fixe de Kannan

Il fut le premier resultat en littérature qui garantit l'éxistance et l'unicité de points fixes pour les application non continues

Théorème 2.3.8. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application . supposons qu'il existe $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in X$ on a :*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{2.1}$$

Alors T admet un point fixe unique dans X

Preuve :
Existance :
Soit $x_0 \in X$ arbitraire , on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_n = T(x_{n-1})$,
$n = 1.2......$

On utilise la condition (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= [d(T(x_{n-1})) + d(T(x_n))] \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^n d(x_0, x_1)$$

On pose $h = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$, si n,p sont deux entiers naturels , alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+P}) \\ &\leq (h^n + h^{n+1} + h^{n+2} + ... + h^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $h \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$
.
La suite (x_n) est alors de cauchy . Comme X est complet , il exist $x \in X$.
x est un point fixe de X car :

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n + T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x, T(x))] \end{aligned}$$

Et donc :

$$d(x, T(x)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, x_n) + \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n)$$

Soit $\epsilon > 0$ un réel arbitraire , comme (x_n) converge vers x , il existe un entier naturel $N = N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N \geq 1 \Longrightarrow d(x, x_n) \leq \epsilon \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \text{ et } d(x_n, x_{n-1})$$

Il en result comme

$$d(x, T(x)) \leq \epsilon \frac{\epsilon}{1+\lambda} + \frac{\epsilon\lambda}{1+\lambda} = \epsilon$$

Comme ϵ est arbitraire , on déduit que $T(x) = x$.
Unicité :
Supposons que y est un autre point fixe de T alors :

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq \lambda[d(x,T(x)) + d(y,T(y))] \tag{2.2}$$

A partir l'inégalité (2.2) on obtient :

$$d(x,y) \leq 2\lambda d(x,y)$$

Donc $x = y$, d'ou l'unicité .
Exemple :
Soit $X = \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définit par :

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Alors :
1) T n'est pas continue
2) T satisfait la condition (2.1) avec $\lambda = \dfrac{1}{5}$ et par conséquent , d'aprés le théoreme de kannan , T admet un point fixe unique $x = 0$ dans X.

2.3.4 Théorème du point fixe de Chatterjea :

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du théorème de point fixe de kannan suivant :

Théorème 2.3.9. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application .*
Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in X$ on a :

$$d(T(x),T(y)) \leq \lambda[d(x,T(y)) + d(y,T(x))](2.3)$$

alors T a un point fixe unique .
Preuve :
Existance :
Soit $x_0 \in X$ arbitraire , on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n x_0, n = 1.2......$$

On utilise la condition (2.3) on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= [d(T(x_{n-1})) + d(T(x_n))] \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^n d(x_0, x_1)$$

On pose $h = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ *, si n,p sont deux entiers naturels , alors :*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots.. + d(x_{n+p-1}, x_{n+P}) \\ &\leq (h^n + h^{n+1} + h^{n+2} + \ldots. + h^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ *, on a* $h \in [0, 1[$ *et donc* $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$ *.*
La suite (x_n) *est alors de cauchy . Comme X est complet , il exist* $x \in X$ *.*
x est un point fixe de X car :

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n + T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x, T(x))] \end{aligned}$$

et donc :

$$d(x, T(x)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, x_n) + \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n)$$

Soit $\epsilon > 0$ *un réel arbitraire , comme* (x_n) *converge vers x , il existe un entier naturel* $N = N(\epsilon)$ *tel que*

$$n \geq N \geq 1 \Longrightarrow d(x, x_n) \leq \epsilon \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \text{ et } d(x_n, x_{n-1})$$

Il en result comme

$$d(x, T(x)) \leq \epsilon \frac{\epsilon}{1+\lambda} + \frac{\epsilon\lambda}{1+\lambda} = \epsilon$$

Comme ϵ est arbitraire , on déduit que $T(x) = x$.
Unicité :
Supposons que y est un autre point fixe de T alors :

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq \lambda[d(x,T(x)) + d(y,T(y))]. \tag{2.3}$$

A partir l'inégalité (2.3) on obtient :

$$d(x,y) \leq 2\lambda d(x,y)$$

Donc $x = y$, d'où l'unicité

Remarque :
Dans un espace métrique (X,d) , la contraction de tupe de banach , le type e kannan , la contraction de type de chatterjea sont indépendantes et différents les unes des autres . par exemple , Soit $X = [-1,1]$ avec la métrique

$$d(x,y) = |x - y|$$

pour $x, y \in X$, et déffinissez une correspandance $T : X \to X$ par :

$$Tx = -\frac{1}{2}x \quad , \quad pour\ tout\ x \in X$$

Alors ,T n'est pas une contraction de tupe de banach , mais egalement une contraction de type de kannan . cependant T n'est pas une contaction de tupe de chattejea . on trouve a plus d'exemples de la différence entre les trois contraction dans

2.4 Comparaison entre les différents type des théorèmes du point fixe :

Les théorèmes du point fixe sont des résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet un point fixe sous certaines hypothéses, ces théorèmes révèlent être des outils très importantes en mathématiques, principalement dans le domaine mathématique. De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre. Le théorème du point fixe de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante. Ainsi, le théorème du point fixe de Brouwer garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle même et le théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer en dimension infinie pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach, et contrairement au théorème de Banach, les démonstrations de ces deux derniers résultats ne sont pas contractives. Le théorème du point fixe de Kannan garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour les applications n'est pas nécessairement continue dans un espace métrique complet.

Chapter 3

Quelques applications

3.1 Applications

Exemple 1:
Soit $X = \mathbb{R}$ l'espace de Banach des nombres réels avec $\| x \| = |x|$ et $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction différentiable tel que

$$|f'(x)| \leq k < 1$$

Trouver la solution de l'équation $f(x) = x$.
Solution :
Soit $x, y \in [a, b]$ et $y < z < x$. Alors par le théorème de la valeur moyenne de Lagrange , nous avons :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) \\
&\Rightarrow f(x) - f(y) = (x - y)f'(z) \\
&\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |(x - y)f'(z)| \\
&\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |(x - y)||f'(z)| \\
&\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|(x - y)|
\end{aligned}$$

Ainsi, f est une application contractante sur $[a, b]$ en elle-même.
Puisque $[a, b]$ est un sous-ensemble fermé de $X = \mathbb{R}$. Par conséquent, par le théorème de contraction de Banach, il existe un unique point fixe $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = x^*$. Par conséquent, x^* est la solution de l'équation équation $f(x) = x$.

Exemple 2 :
Soit la fonction $K(x, y)$ définie et mesurable dans le carré

$$A = [(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b].$$

De plus ,Si

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy < \infty, \text{ et } g(x) \in L_2(a,b)$$

Alors l'intégrale équation :

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

a une solution unique $f(x) \in L_2(a,b)$ pour toute valeur suffisamment petite du paramètre λ.
preuve :
soit $X = L_2$ et considérons l'opérateur T

$$\begin{gathered} T : L_2(a,b) \to L_2(a,b) \\ Tf = h \end{gathered}$$

où

$$h(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

Cette définition s'applique à chaque $f \in L_2(a,b), h \in L_2(a,b)$.
depuis $g \in L_2(a,b)$ et que λ est un scalaire, il suffit de montrer que :

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy \in L_2(a,b)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned}
| \quad & \psi(x)| = |\lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy| \\
& \Rightarrow |\psi(x)| \leq |\int_a^b k(x,y) f(y) dy| \\
& \Rightarrow |\psi(x)| \leq (\int_a^b |k(x,y)|^2 d(y))^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |f(y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} \\
& \Rightarrow |\psi(x)|^2 \leq (\int_a^b |k(x,y)|^2 d(y)) (\int_a^b |f(y)|^2 dy) \\
& \Rightarrow \int_a^b |\psi(x)|^2 dx \leq \int_a^b (\int_a^b |k(x,y)|^2 d(y)) dx \int_a^b (\int_a^b |f(y)|^2 dy) dx
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse :

$$\int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy < \infty$$

et

$$\int_a^b (\int_a^b |f(y)|^2 dy) dx < \infty$$

$$\Rightarrow \int_a^b |\psi(x)|^2 dx < \infty$$

ainsi,$\psi(x) \in L_2(a,b)$
Nous savons que $L_2(a,b)$ est un espace de Banach avec la norme :

$$\| f \| \leq (\int_a^b |f(y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}}$$

Nous montrons maintenant que T est une application contractante. Nous avons :

$$\| Tf - Tf_1 \| = \| h - h_1 \|$$

. où

$$h_1(x) = g_1(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f_1(y) dy$$

mais

$$\| h - h_1 \| = \| g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy - g_1(x) - \lambda \int_a^b k(x,y) f_1(y) dy \|$$
$$\| h - h_1 \| = \| [g(x) - g_1(x)] + \lambda \int_a^b [k(x,y)(f(y) - f_1(y)] \, dy \|$$
$$\Rightarrow \| h - h_1 \| \leq \| [g(x) - g_1(x)] \| + \| \lambda \int_a^b [k(x,y)(f(y) - f_1(y)] \, dy \|$$
$$\Rightarrow \| h - h_1 \| \leq \| \lambda \int_a^b [k(x,y)(f(y) - f_1(y)] \, dy \|$$
$$\Rightarrow \| h - h_1 \| \leq |\lambda| \left(\int_a^b | \int_a^b [k(x,y)(f(y) - f_1(y)] dy|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \| h - h_1 \| \leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |f(y) - f_1(y)| dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy -Schwartz-Bunyakowski

$$\Rightarrow \| h - h_1 \| \leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \| f - f_1 \|$$

D'où :

$$\| Tf - Tf_1 \| \leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \| f - f_1 \|$$

. si :

$$|\lambda| < \frac{1}{\left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}}$$

alors

$$\| Tf - Tf_1 \| \leq k \| f - f_1 \|$$

où

$$k = |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Ainsi, T est une application contractante et T possède un point fixe unique. Autrement dit, il existe un unique $f^* \in L_2(a,b)$tel que $Tf^* = f^*$. Ce point fixe f^* est une unique solution de l'équation .

3.1.1 Application (Equation intégrale de fredholm) :

Montrer que l'équation intégrale de Fredholm

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

a une solution unique sur $[a, b]$.
Avec $\mu \in \mathbb{R}$, $y \subset [a, b]$ et $k(s, t)$ noyau .

Solution :
Nous considérons que $k(s, t)$ est continue dans les deux variables $a \leq s \leq b$ et $a \leq t \leq b$

soit $y \subset [a, b]$ D'où $|k(s, t)| \leq \lambda$ pour tout $(s, t) \in [a, b] \times [a, b]$.
Nous considérons d'abord l'équation intégrale sur $C[a, b]$, l'espace de toutes les fonctions continues défini sur l'intervalle $[a, b]$ avec la métrique

$$d(x, y) = \max |x(t) - y(t)|$$

Ecrire l'équation intégrale sous la forme $x = Tx$, où

$$Tx(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

Comme le noyau K et la fonction y sont continue, il s'ensuit que l'équation définit un opérateur :

$$T : C[a, b] \to C[a, b]$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \max_{t\in[a,b]} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} |y(s) + \mu \textstyle\int_a^b k(s,t)x(t)dt - y(s) - \mu \int_a^b k(s,t)y(t)dt| \\
&= \max_{t\in[a,b]} |\mu \textstyle\int_a^b k(s,t)[x(t) - y(t)]dt| \\
&= |\mu| \max_{t\in[a,b]} | \textstyle\int_a^b k(s,t)[x(t) - y(t)]dt| \\
&\Rightarrow d(Tx,Ty) \leq |\mu| \max_{t\in[a,b]} | \textstyle\int_a^b k(s,t)[x(t) - y(t)]|dt \\
&\Rightarrow d(Tx,Ty) \leq |\mu|\lambda \max_{t\in[a,b]} |[x(u) - y(u| \textstyle\int_a^b dt \\
&\Rightarrow d(Tx,Ty) \leq |\mu|\lambda d(x,y)(b-a) \\
&\Rightarrow d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)
\end{aligned}$$

où

$$k = |\mu|\lambda(b-a)$$

si $k < 1$ alors

$$|\mu|\lambda(b-a) < 1 \Rightarrow |\mu| < \frac{1}{\lambda(b-a)}$$

alors T devient une contraction. Sous cette cette condition, on conclut que T a une unique solution x sur$[a, b]$

3.1.2 Application (Equation intégrale de voltera):

Montrer que l'équation intégrale de Voltera sur :

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^t k(s,t)x(t)dt$$

a une solution unique sur $[a, b]$ pour tout μ , où $a \leq t \leq s$ et $a \leq s \leq b$.

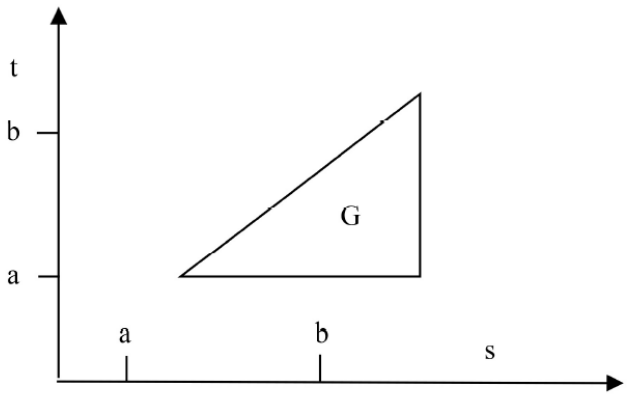


Figure 3.1:

Solution :
Nous remarquons qu'ici a est fixe et que s est la limite variable de l'intégration. Supposons que y soit continue sur $[a, b]$ et que le noyau $K(s,t)$ soit continu sur la région triangulaire G dans le plan $s-t$ donné par $a \leq t \leq s, a \leq s \leq b$. ecrire l'équation donnée sous la forme $x = Tx$.
Où $T : C[a, b] \to C[a, b]$. Défini par :

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

Puisque $K(s,t)$ est continue sur G et que G est fermé et borné, il s'ensuit que $K(s,t) \leq c$ pour tout $(s,t) \in G$.
Nous définissons la métrique :

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
|Tx(s) - Ty(s)| &= |y(s) + \mu \textstyle\int_a^b k(s,t)x(t)dt - y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)y(t)dt| \\
&= |\mu \textstyle\int_s^a k(s,t)(x(t) - y(t))dt||\mu|| \int_s^a k(s,t)(x(t) - y(t))dt| \\
&\leq |\mu| \textstyle\int_s^a |k(s,t)||(x(t) - y(t))dt| \leq |\mu| c \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \int_a^b dt \\
&= |\mu| c d(x,y)(s-a) \\
&\Rightarrow |Tx(s) - Ty(s)| \leq |\mu| c(s-a) d(x,y)
\end{aligned}$$

Par induction, nous allons prouver que :

$$|T^m x(s) - T^m y(s)| \leq |\mu^m| c^m \frac{(s-a)^m}{m!} d(x,y)$$

Pour $n = 1$, le résultat est valable, supposons qu'il soit valable pour $n = m$
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
|T^{m+1}x(s) - T^{m+1}y(s)| &= |\mu|| \textstyle\int_s^a k(s,t)(T^m x(t) - T^m y(t))dt| \\
&\leq |\mu| \textstyle\int_s^a |k(s,t)||(T^m x(t) - T^m y(t))|dt \\
&\leq |\mu| |c| |\mu|^m c^m \int_a^s \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y) \\
&\leq |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(s-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y) \\
&\leq |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(s-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y)..
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ceci complète la preuve inductive de (2.1). En utilisant $(s-a) \leq (b-a)$ du côté droit de (15), puis en prenant le maximum sur $t \in [a,b]$ à gauche, nous obtenons de :

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x,y)$$

où

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

Pour tout μ fixé et m suffisamment grand, nous avons $\alpha_m < 1$.
Par conséquent, le T^m est contractante sur $C[a,b]$.
Par conséquent, par le théorème des fixes de Banach, $C[a,b]$ a un point fixe x sur $[a,b]$. On sait que si $C[a,b]$ a un point fixe alors T a le même point fixe. Ainsi, T a une unique solution x sur $[a,b]$.

3.1.3 Application (Théorème de Picards)

Soit $f(x, y)$ une fonction continue de deux variables dans un rectangle :

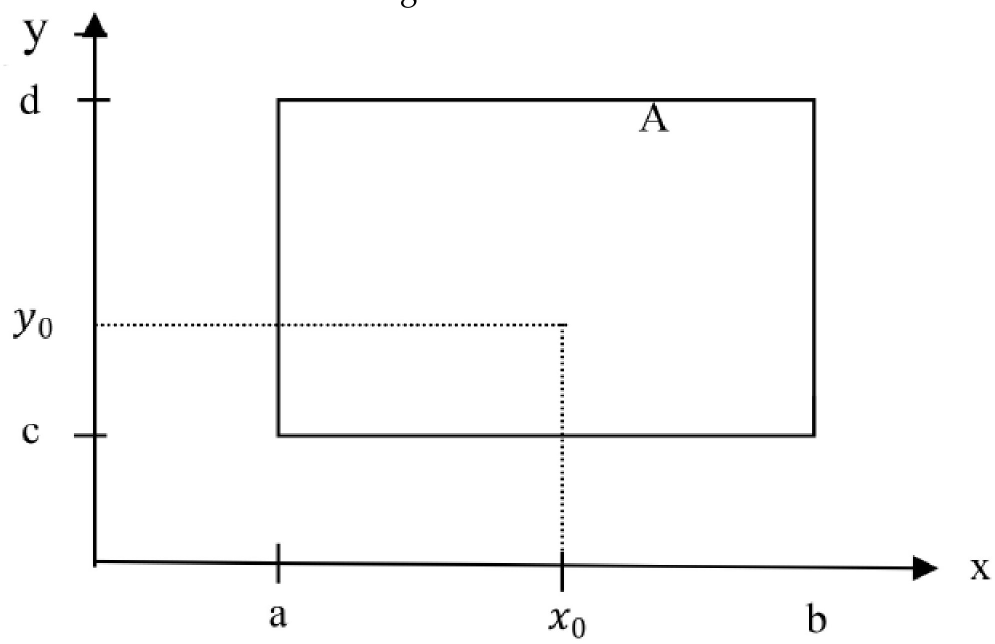
$$A = (x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

et satisfait la condition de Lipschitz sur la seconde variable y . De plus, Supposons que (x_0, y_0) soit un point intérieur quelconque de A. Alors l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

a une solution unique, disons y = g (x) qui passe par : (x_0, y_0) .

Figure 3.2:



Preuve :

L'équation différentielle étant la suivante :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.2}$$

Soit $y = g(x)$ satisfaisant (3.2) et la propriété que $g(x_0) = y_0$.
En intégrant de x_0 à x, on obtient :

$$\int_{x_0}^{x} y = \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt$$
$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt$$
$$\Rightarrow g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt$$

Ainsi, une solution unique de (3.2) est équivalente à une solution unique de (3.2). Puisque $f(x,y)$ satisfait la condition de Lipshitz en y , il existe une constante $q > 0$ telle que :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq q|y_1 - y_2|$$

où $(x,y_1),(x,y_2) \in A$.

Puisque $f(x,y)$ est continue sur un sous-ensemble compact A de R^2, elle est bornée.
Il existe donc une constante positive m telle que

$$f(x,y) \leq m \quad \forall(x,y) \in A$$

Choisissons une constante positive p telle que $pq < 1$ et le rectangle:

$$B = (x,y), x_0 - p \leq x \leq x_0 + p, y_0 - pm \leq y \leq y_0 + pm$$

est contenu dans A.
Soit X l'ensemble de toutes les fonctions continues à valeurs réels $y = g(x)$ définies sur $[x_0 - p, x_0 + p]$ tel que $\parallel g(x) - y_0 \parallel$,
c'est-à-dire que X est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach $C[x_0 - p, x_0 + p]$ avec la norme sup.
Soit $T : X \to X$ définie comme $Tg = h$ où :

$$h(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,g(t))dt$$

ici :

$$\begin{array}{l} \parallel h(x) - y_0 \parallel = \parallel \int_{x_0}^{x} f(t,g(t))dt \parallel \\ \Rightarrow \parallel h(x) - y_0 \parallel \leq \int_{x_0}^{x} |f(t,g(t))|dt \\ \Rightarrow \parallel h(x) - y_0 \parallel \leq m \int_{x_0}^{x} dt \\ \Rightarrow \parallel h(x) - y_0 \parallel \leq m(x - x_0) \leq mp \end{array}$$

$h(x) \in X$ et donc T est bien défini.
Soit $g, g_1 \in X$. Alors:

$$\begin{array}{ll} \parallel Tg - Tg_1 \parallel = & \parallel h - h_1 \parallel \\ = & \parallel y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,g(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,g_1(t))dt \parallel \\ & \parallel \int_{x_0}^{x} f(t,g(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,g_1(t))dt \parallel \\ & \leq \int_{x_0}^{x} \parallel f(t,g(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,g_1(t)) \parallel dt \\ & \leq q \int_{x_0}^{x} \parallel g(t) - g_1(t) \parallel dt \\ & = q(x - x_0) \parallel g - g_1 \parallel \\ & \leq pq \parallel g - g_1 \parallel \\ & \parallel Tg - Tg_1 \parallel \leq k \parallel g - g_1 \parallel \end{array}$$

où $k = pq < 1$
Par conséquent, T est une application de contraction de X sur lui-même. Par conséquent, par le théorème de contraction de Banach T a un point fixe unique $g* \in X$. Ce point fixe unique $g*$, est l'unique solution de l'equation .

3.1.4 Application (Equation intégrale)

Soit $X = C[a, b]$ un ensemble de toutes les fonctions continues à valeur réel sur $[a, b]$ où $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$ pour un nombre réel $p > 1$,définissons $d : X \times X \to R_+$ par :

$$d(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|^p$$

pour tout x,y dans X. donc (X, d) est un espace b-métrique complet avec $s = 2^{p-1}$
On va établir l'existence d'une solution de type fredholm définie par :

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, \tau, x)d\tau \tag{3.3}$$

où $x \in C[a, b]$ est la fonction inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tau \in [a, b], k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues
Théorème :
Nous supposons les conditions suivantes :

(i) il existe une fonction continue $\psi : [a, b]\times[a, b] \to \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathbb{R}$,on obtient :

$$|k(t, \tau, x) - k(t, \tau, y)|^p \leq \psi(t, \tau)|x - y|^p$$

(ii) $|\lambda| \leq 1$

(iii) $\max_{t\in[a,b]} \int_a^b \psi(t, \tau)d\tau \leq \dfrac{1}{(b - a)^{p-1}}$ où $s = \dfrac{1}{2^{p-1}}$. alors l'equation (3.3) a une solution $z \in C[a, b]$

Preuve :
Définir l'application $T : X \to X$ par

$$Tx(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, \tau, x)d\tau$$

Pour tout $t \in [a,b]$ donc , l'existence d'une solution de (3.3) est équivalente à l'existence d'un point fixe T .

Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ en utilisant l'inégalité du holder , et les conditions (i) , (iii) nous avons :

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \max_{t\in[a,b]} |Tx(t)-Ty(t)|^p \\ &\leq |\lambda|^p \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |k(t,\tau,x)-k(t,\tau,y)|^p d\tau\right) \\ &\leq \left[\max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b 1^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |k(t,\tau,x)-k(t,\tau,y)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\ &\leq (b-a)^{\frac{p}{q}} \left[\max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b \psi(t,\tau)|x-y|^p d\tau\right)\right] \\ &\leq (b-a)^{p-1} \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b \psi(t,\tau)\right) d(x,y) \\ &\leq (b-a)^{p-1} \frac{1}{(b-a)^{p-1}} M(x,y) \end{aligned}$$

donc

$$d(Tx,Ty) \leq M(x,y).$$

toutes les conditions du théorème (1) sont donc remplies et l'équation (3.3) a une solution $z \in C[a,b]$

Théorème :

Soit (X,d) un espace b-métrique et une application $T : X \to X$ qui satisfait la condition de contraction suivant :

$$\psi(d(Tx,Ty)) \leq F(\psi(M(x,y)), \phi(M(x,y))) \tag{3.4}$$

pour tout $x, y \in X$ où $\psi \in \Psi$, $\phi \in \Phi_n$ et $F \in C$ tel que (ψ, ϕ, F) sont monotone et

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), \frac{d^2(x,y)}{1+d(y,Ty)}, \frac{d^2(y,Ty)}{1+d(x,y)}, \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(Ty,Tx)}\right\} \tag{3.5}$$

alors T a un unique point fixe

Preuve :

Soit $x \in X$ et (x_n) une suite dans X définie comme

$$Tx_n = x_{n+1}, y_n = x_{n-1} \quad n = 0,1,2,3.....$$

En appliquant l'inégalité (3.'4), on obtient :

$$\psi(d(Tx_n, Tx_{n-1})) \leq F(\psi(M(x_n,x_{n-1})), \phi(M(x_n,x_{n-1})))$$

où

$$\begin{aligned}M(x_n, x_{n-1}) \quad &= \max\left\{d(x_n, x_{n-1}), \frac{d^2(x_n, x_{n-1})}{1 + d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}, \frac{d^2(x_{n-1}, Tx_{n-1})}{1 + d(x_n, x_{n-1})},\right.\\ &\left.\frac{d(x_n, Tx_n)d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}{1 + d(Tx_{n-1}, Tx_n)}\right\} \leq d(x_{n-1}, x_n).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\psi(d(Tx_n, Tx_{n-1})) &\leq F(\psi(d(x_n, x_{n-1})), \phi(d(x_n, x_{n-1})))\\ &\leq (\psi(d(x_n, x_{n-1}))\end{aligned}$$

puisque ψ est croissante , alors $d(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n-1})$ cela signifie que $d(x_n, x_{n+1})$ est une suite décroissante .
donc elle converge et il existe $r \geq 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r$
en prenant alors la condition de contraction implique $\psi(r) \leq F(\psi(r), \phi(r)) \leq \psi(r)$. donc $r = 0$ qui est $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$
Maintenant nous prouvons que la suite (x_n) est une suite de cauchy . supposons que (x_n) n'est pas une suite de cauchy alors il existe un $\epsilon > 0$ pour lequel nous pouvons avoir deux suites d'entiers positifs m(k) et n(k) tels que pour tout entier positif k ,$n(k) > m(k) > k$ et que $d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \epsilon$. soit n(k) le plus petit entier positif ,$n(k) > m(k) > k$ tel que $d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \epsilon$, $d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \leq \epsilon$ alors nous trouvons $\psi(\epsilon) = 0$ ce qui est une contradiction donc (x_n) est une suite de cauchy en X puisque (X,d) est un espace b-métrique complet ,alors il existe $u \in X$,tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = u$
L'unicité du point fixe :
Soit $v \neq u$ un autre point fixe de f, alors d'après la condition de contraction, nous avons

$$\psi(d(u, v)) \leq \psi(sd(u, v)) = \psi(sd(Tu, Tv)) \leq F(\psi(M(u, v)), \phi(M(u, v)))$$

où

$$M(u, v) = \max\left\{d(u, v), \frac{d^2(u, v)}{1 + d(v, Tv)}, \frac{d^2(v, Tv)}{1 + d(u, v)}, \frac{d(u, Tu)d(v, Tv)}{1 + d(Tv, Tu)}\right\}$$

alors T a un point fixe unique .

Conclusion

On a commencé par une introduction et quelques notions définitions concernant les espaces métriques, espaces métriques partiel et espace métrique complets, application contractante, convergence des suites et espaces Lp .
Puis nous présentons quelques notions définitions concernant l'espace b-métrique et les théorèmes des points fixes (Banach, Brouwer, Schauder , Kannan et Chatterjea).
et dans la partie d'application, nous avons inclus quelques problèmes pratiques des théorèmes du point fixe (équation intégrale de fredholm , équation intégral de voltera, théorème de Picards , application aux équations intégrales)

Annexe

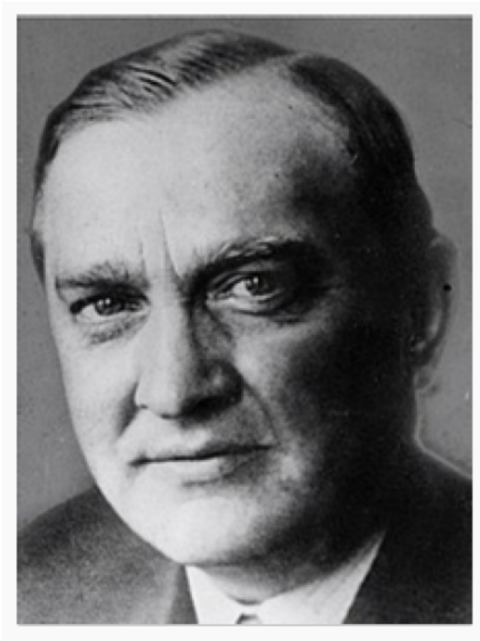


Figure 3.3:

Stefane Banach : est un mathématicien Polonais, ses travaux ont surtout prote sur l.ana- lyse fonctionnelle dont il est l.un des fondateurs. Il est né le 30 mars 1892 à Cracovie, Galicie (Autriche-Hongrie). Autodidacte, il est découvert fortuitement par Hugo Steinhaus et obtient son doctorat en 1920. Il effectue l'essentiel de sa carrière à Lwòw, où il enseigne à l'université et à l'école polytechnique. Ses publications, au nombre d'une soiscantaine, font de lui l'un des mathématiciens les plus in.uents du XXe siècle. Il est l'un des membres fondateurs de la société mathématique de pologne dont il devient vice président en 1932 et président en 1939. Son nom reste associé un certain nombre de théorèmes et a été donné entre autres aux espaces de Banach et aux algèbres de Banach et aux point .xe de Banach. Il meurt d'un cancer de 31 août 1945 (à 53 ans)

Figure 3.4:

Luitzen Egbertns Jan Brouwer (1881 - 1966) :Est un grand mathématicien hollandais qui né de 1909-1913 découvre la majeure partie des théorèmes aux quels son nom est rattaché où on peut citer le théorème de point fixe. Brouwer est le père de la topologie moderne. Après la guerre, il consacrera le reste de sa carrière aux mathématiques intuitionnistes et défendant le rôle de l'intuition pour éviter les antinomies que peuvent faire naître le développement de la science.

Figure 3.5:

Juliusz Schauder : Est un mathématicien polonais, connu pour ses travaux dans les do- maines de l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et la physique mathéma- tique. Il est né en 1899 à Lemberg, il est entré à l'université de Lwów en 1919 et a passé son doctorat en 1923. Il a continué ses recherches tout en travaillant comme enseignant dans une école secondaire, mais grâce à ses résultats remarqués, il a obtenu une bourse d.étude en 1932 qui lui permis de passer plusieurs années d.abord à Leipzig et ensuite à Paris. Vers 1953 Schauder a obtenu un poste de maître assistant à l.université de Lwów. Schauder est surtout connu pour le théorème de Banach-Schauder, le théorème du point fixe de Schauder qui est un outil majeur pour prouver l'existence de solutions dans différents problèmes. Schauder était juif. Il a été exécuté par gestapo, probablement en octobre 1943.

Bibliography

[1] Agarwal, R.P., Hussain, N. and Taoudi, M.-A. *(2012) Fixed Point Theorems in Ordered Banach Spaces and Applications to Nonlinear Integral Equations. Abstract and Applied Analysis , 2012, Article ID: 245872, 15 p.*

[2] Alfuraidan, M. and Ansari, Q. *(2016) Fixed Point Theory and Graph : Foundations and Integrative Approaches. Academic Press-Elsevier, London.*

[3] A. Malceski, K.Anevska, *Extention of Kannan and Chatterjea Fixed point theorems on complete Metric spaces, J.Math. 17(1) : 1 -10; 2016:*

[4] A. Monier, *Théorème du point .xe de Brouwer, j. des éléve, ENS Lyon, vol 1, 1998, no. 4, p 202-206.*

[5] C. W. Scal, *Topologie et Analyse fonctionnell, Hermann Éditeur, 6 Rue de la Sorbonne, 75005 Paris, 2012..*

[6] Ekeland,I . *(1974) On the variational principle . journal of Mathematical analysis and application ,47, 324-353.*

[7] Ekeland,I . *(1979) Nonconvex Minimization Problems. Bulletin of the American Mathematical Society , 1, 443-474.*

[8] E. Zeidler, *Nonlineair analysis and its application Fixed point theorem, Springer Verlage, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.*

[9] Ferreira, M.A.M. and Andrade, M. . *(2011) Hahn-Banach Theorem for Normed Spaces. International Journal of Academic Research , 3, 13-16.*

[10] Guran, L. *(2012) Ulam-Hyers Stability of Fixed Point Equations for Single Valued Operators on KST Spaces. Creative Mathematics Informatics , 21, 41-47.*

[11] Jain, S., Jain, S. and Jain, L.B. *(2012) On Banach Contraction Principle in a Cone Metric Space. Journal of Nonlinear Sciences and Applications , 5, 252-258.*

[12] Jleli, M. and Samet, B. *(2014) A New Generalization of the Banach Contraction Principle. Journal of Inequalities and Applications , 2014, Article No. 38.*

[13] J. Córnicki, *Fixed Point Theorem for Kannan type mappings. J.Fixed Point Theory, App. 19, 2145-2152(2017) :*

[14] J. J. Louis, *Espace métrique, 25030 Besançon, 16 Rue de Gray, octobre 2009.*

[15] J. Nachbar, *Fixed point theorems. Econ 511(2010); 1 -16.*

[16] Khojasteh, F., et al. *(2016) Some Applications of Caristi's Fixed Point Theorem in Metric Spaces. Fixed Point Theory and Applications , 2016, Article No. 16.*

[17] Khojasteh, F., Karapmar, E. and Radenovic, S. *(2013)θ Metric Space: A Generalization. Mathematical Problems in Engineering , 2013, Article ID 504609, 7 p.*

[18] K. Zennir, *Théorèmes du point .xe et ses applications, mémoire doctorat, Université Siences et Technologie Annab, 2010.*

[19] K. Taibi, *La théorie de point .xe et leurs applications, mémoire master 2017, Université Oum El Bouaghi.*

[20] Lu, N., He, F. and Huang, H. *(2019) Answers to Questions on the Generalized Banach Contraction Conjecture in b-Metric Spaces. Journal of Fixed Point Theory and Applications , 21, 43.*

[21] Palais, R.S. *(2007) A Simple Proof of the Banach Contraction Principle. Journal of Fixed Point Theory and Applications , 2, 221-223.*

[22] Rudin, W. *(1991) Functional Analysis. Second Edition, International Editions, Mc- Graw-Hill, New York, ISBN 0-07-100944-2.*