RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Applications»

Présenté Par :

OUM ELKHEIR CHAIMA Hakoum
et
FOUZIA Hallali

Sous l'intitulé:

Équations d'évolution non homogènes d'ordre fractionnaire

Soutenu publiquement le : 04 /07 / 2023

Membres du jury :

Mr. MOHAMED Ziane	Université Ibn Khaldoun –Tiaret	Président
Mr. ISMAIL Zitouni	Université Ibn Khaldoun –Tiaret	Encadreur
Mr. OUALID Zentar	Université Ibn Khaldoun –Tiaret	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu ***Allah*** *qui ma donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

Mes plus vifs remerciements vont aussi à mon encadreur ***Mr. ZITOUNI Ismail****, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement. Je remercie vivement* ***Mr. ZIANE Mohamed*** *de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.*

J'adresse mes remerciements à ***Mr. ZENTAR Oualid*** *qui ma fait l'honneur de juger ce travail.*

Nous adressons également un grand merci à tous les enseignants de département de Mathématiques ainsi que l'administration en général.

Et en fin j'adresse mes sincère remerciement à mes parents, mes frères et sœurs, mes amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

je dédie ce travail :

À mes chèrs parents pour leur soutien, leur patience

et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.

*À mes frères, ainsi ma famille **HAKOUM** .*

À mes Amis. À Tous mes professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

CHAIMA

je dédie ce travail :

À mes chères parents pour leur soutien, leur patience

et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.

*À mes frères, ainsi ma famille **HALLALI** .*

À mes Amis. À Tous mes professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

FOUZIA

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

Dans tout ce qui suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers naturelle.
$\mathbb{Z}$	:	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{R}, (\mathbb{R}_+)$	:	Ensemble des nombres réels (positive).
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes .
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma.
$B(.;.)$	:	La fonction Beta.
$E_\alpha(.); (E_{\alpha,\beta}(.))$	:	La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre (à deux paramètres)
$I_a^\alpha u$	:	L'intégrale fractionnaire de u d'ordre α ;
${}^{RL}D_a^\alpha u$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens Rieman-Liouville
${}^{c}D_a^\alpha u$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens Caputo
$\delta(t)$	:	La fonction de Dirac
$L^p([a,b],\mathbb{R})$	:	Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$.
$C([a;b],\mathbb{R})$	:	Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$
$AC([a;b],\mathbb{R})$	:	Espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions u.
X	:	Espace de Banach
X'	:	Le dual topologique de l'espace X
$\{S^\alpha(t)\}_{t\geq 0}$	:	Une famille de paramètre
$D(A)$	:	La domaine de l'opérateur A
p.p	:	presque partout

INTRODUCTION

Ce mémoire se concentre sur l'étude des équation d'évolution non homogènes d'ordre fractionnaire, qui sont des équation différentielles partielles généralisées utilisant des dérivées d'ordre non entier.

Ce travail est divisée en trois chapitres :

- Dans le première chapitre, nous présenterons quelques définitions et théorèmes ainsi que quelques fonctions spéciales (Gamma, Beta...) avec leurs propriétés, nous avons mentionné les intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, que nous avons utilisé dans ce mémoire, Après nous allons présenter quelques notions sur les équations différentielles fractionnaires, nous allons résoudre des équations fractionnaires avec les dérivées de Caputo.
- Dans le deuxième chapitre, nous étudions et caractérisons la compacité des familles résolvants d'opérateurs associés à des équations fractionnaire différentielle. Nous montrons une application dans l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour une classe d'équations fractionnaire non homogène avec des conditions locales.
- Dans le troisième chapitre, nous présentons des différentes approches pour le problème abstraites de Cauchy, et nous considérons le problème de Cauchy linéaire d'ordre fractionnaire, Après nous expliquons l'existante et l'unicité des solutions faible pour équations d'évolution non homogènes, et nous présentons un exemple de l'équation.

Mots-clés : Résolvants fractionnaire,famille résolvant fractionnaire, problème de Cauchy abstrait, génération, perturbation, approximation, compacité, C0 semi-groupe, solution forte, solution faible. **Classement** :35R11 ; 26A33 ; 47A58 ; 47B07.

CHAPITRE 1

CALCUL FRACTIONNAIRES

La formule de Dirichlet Si l'une des deux intégrales suivantes est absolument convergente, alors on a :

$$\int_a^b \left[\int_a^x f(x,y)dy\right] dx = \int_b^a \left[\int_y^b f(x,y)dx\right] dy \tag{1.1}$$

Remarque 1.1. *: Comme cas particulier de la formule* (1.1)*, on obtient*

$$\int_a^b (x-t)^\alpha \left[\int_a^t (t-s)^\beta g(t,s)ds\right] dt = \int_a^b \left[\int_s^b (x-t)^\alpha (t-s)^\beta g(t,s)dt\right] ds$$

1.1 Fonctions élémentaire

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1 (**Seconde type d'Euler**). *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. On définie la fonction Gamma d'Euler par l'expression :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Pour $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}'$, on a

$$\Gamma(z) - \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Proposition 1.1. *La fonction Gamma possédé les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;
3. $\Gamma(2) = 1$;
4. $\Gamma(0) = +\infty$;
5. *Pour tout* $z > 0 : \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
6. *Pour tout* $z < 0 : \Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$;
7. *Pour tout* $n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$;
8. *Pour* $z > 0 : \lim\limits_{z\to 0^+} z\Gamma(z) = 1$;
9. *Pour* $n \in \mathbb{N}, Re(z) > 0 : \Gamma(z) = \lim\limits_{n\to 0} \dfrac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n-1)}$ *(formule d'Euler)* ;
10. $\Gamma'(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ln t dt, \forall z > 0$;

1.1.2 Fonction Beta

Définition 1.2 (Premier type d'Euler). *La fonction Beta est une type d'intégrale d'Euler définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \ \ (p,q \in \mathbb{C}, Re(p) > 0, Re(q) > 0)$$

Proposition 1.2. *La fonction Beta vérifier les propriétés suivants :*

1. $B(p,q) = B(q,p)$ *(symétrique)* ;
2. $(p+q)B(p,q+1) = qB(p,q)$;
3. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$;
4. *Pour tout* $p, q > 0 : B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p)+\Gamma(q)}$;

1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Proposition 1.3. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, l'intégrale d'ordre* n *est donnée par la formule suivante :*

$$\int_1^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 ... \int_a^{x_{n-1}} u(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}u(t)dt \tag{1.2}$$

où $u \in L^1([a,b])$

On peut généraliser, d'une manière naturelle, la formule précédente pour $n = \alpha$ *qui est nombre réel quelconque par la définition suivante :*

Définition 1.3. *L'intégrale fractionnaire de R-L* $u \in ([a,b],\mathbb{R})$ *à gauche d'ordre* $\alpha > 0$ *de* u *est définie par* $\forall t \in [a,b], t > a$ *on a :*

$$(I^{\alpha}_{a^+}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds$$

Et à droit, $t < b$ *on a :*

$$(I^{\alpha}_{b^-}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}u(s)ds$$

pour $\alpha = 0 : (I^0_{a^+}) = (I^0_{b^-}) = Id_{[a,b]}$

alors l'opérateur identité.

Exemple 1.1. *Pour* $t > a, \alpha > 0, \beta > -1$*, on a :*

1. $(I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1})(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}$;
2. $(I^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta-1}(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}$;

Preuve.

1. $(I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1})(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}dx$

   posons $x - a = s(t-a)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a) - s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1+\beta-1+1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta), \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta))}$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}$$

2. même idée, le changement de variable est $(b-x) = s(b-t)$

□

Remarque 1.2. *Si* $a = 0$*, on écrit :*

$$I^{\alpha}_{a^+}u(t) = \begin{cases} [u * \varphi_\alpha](t) & , si \;\; t > 0 \\ 0 & , si \;\; t \leq 0 \end{cases}$$

avec $\varphi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *et* $u*\varphi_\alpha$ *est le produit de convolution qui est définie par la formule suivante :*

$$(u * \varphi_\alpha)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)\varphi_\alpha(y)dy$$

Théorème 1.1. *Si* $u \in L^p([a,b])$*, alors* $I^\alpha_{a^+}u$ *existe pour presque par tout* $x \in [a,b]$ *et de plus :* $I^\alpha_{a^+} \in L^p([a,b])$

Lemme 1.1. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $1 \le p < \infty$*. Pour tout* $u \in L^p([a,b])$*, on a*

$$\|I^\alpha_{a^+}u\|_{L^p([a,b])} \le \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{L^p([a,b])} \tag{1.3}$$

Preuve. Si $p = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\|I^\alpha_{a^+}u\|_{L^1([a,b])} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left|\int_a^\varepsilon (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau\right| d\varepsilon \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left[\int_a^\varepsilon (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1}|u(\tau)|d\tau\right] d\varepsilon \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |u(\tau)| \left[\int_\tau^b (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1}d\varepsilon\right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |u(\tau)|(b-\tau)^\alpha d\tau \\
&\le \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{L^1([a,b])} \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Maintenaient supposons que $1 < p < \infty$ et $v \in L^q([a,b])$, ou $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

On a, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b v(\varepsilon)\int_a^\varepsilon (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau d\varepsilon\right| &= \left|\int_a^b v(\varepsilon)\int_a^\varepsilon \tau^{\alpha-1}u(\varepsilon-\tau)d\tau d\varepsilon\right| \\
&\le \int_a^b |v(\varepsilon)|\int_a^\varepsilon \tau^{\alpha-1}|u(\varepsilon-\tau)|d\tau d\varepsilon \\
&= \int_a^b \tau^{\alpha-1}d\tau \int_\tau^b |v(\varepsilon)|.|u(\varepsilon-\tau)|d\varepsilon \\
&\le \int_a^b \tau^{\alpha-1}d\tau(\int_\tau^b |v(\varepsilon)|^q d\varepsilon)^{\frac{1}{q}}(\int_\tau^b |u(\varepsilon-\tau)|^p d\varepsilon)^{\dfrac{1}{p}} \\
&\le \frac{b^\alpha}{\alpha}\|u\|_{L^p([a,b])}\|v\|_{L^q([a,b])} \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

On considéré la fonctionnelle $G_u : L^q([a,b])$, définie par

$$G_u(\nu) = \int_a^b \left[\int_a^\varepsilon (\varepsilon - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau \right] \nu(\varepsilon) d\varepsilon \tag{1.6}$$

D'après 1.5, est évident que $G_u \in (L^q([a,b],\mathbb{R}))'$ ou $G_u \in (L^q([a,b],\mathbb{R}))'$ désigne le dual de l'espace $G_u \in (L^q([a,b],\mathbb{R}^n))'$. De plus, par 1.5 (1.6) est le théorème de représentation de Riez, il existe $\omega \in L^p([a,b],\mathbb{R})$ tel que

$$\int_a^b \omega(\varepsilon)\nu(\varepsilon) d\varepsilon = \int_a^b \left[\int_a^\varepsilon (\varepsilon - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau \right] \nu(\varepsilon) d\varepsilon$$

et

$$\|\omega\|_{L^p([a,b])} \leq \frac{b^\alpha}{\alpha} \|u\|_{L^p([a,b])} \tag{1.8}$$

Pour tout $\nu \in (L^q([a,b],\mathbb{R}^n))$, ainsi, on a par (1.7)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\varepsilon (\varepsilon - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau = I^\alpha_{0^+} u(\varepsilon)$$

Pour $\varepsilon \in [a,b]$ ce qui signifie que

$$\|I^\alpha_{0^+} u\|_{L^p}([a,b]) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|\omega\|_{L([a,b])} \leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{L^p([a,b])} \tag{1.9}$$

et ceci d'après (1.8). En combinant 1.4 et (1.9) on obtient l'inégalité (1.3) la démonstration est achevée. □

Proposition 1.4. *Soit $\alpha > 0$, on a*

a) Pour $u \in C([a,b]) : I^\alpha_{a^+} u(a) = \lim_{t \to a} I^\alpha_{a^+} = 0$.

b) $I^\alpha_{a^+} : C([a,b]) \to C([a,b])$ est bien définie.

Preuve. 1. D'après la définition de l'intégrale fractionnaire :

$$I^\alpha_{a^+} u(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a)^{\alpha-1} u(a) da = 0$$

2. Soit $u \in C([a,b])$ et $x, y \in [a,b]$ tels que $x \to y$ et $x < y$

   alors

$$\begin{aligned}
&|I_{a^+}^{\alpha} u(x) - I_{a^+}^{\alpha} u(y)| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y (y-s)^{\alpha-1} u(s) ds \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^y (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds + \int_y^x (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds - \int_a^y (y-s)^{\alpha-1} u(s) ds \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y ((x-s)^{\alpha-1} - (y-s)^{\alpha-1}) \|u\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\int_y^x (x-s)^{\alpha-1} ds) \|u\|_\infty \\
&\leq \frac{\|u\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(x-a)^\alpha - (y-s)^\alpha \right]
\end{aligned}$$

d'où $|I_{a^+}^{\alpha} u(x) - I_{a^+}^{\alpha} u(y)| \to 0 \quad$ quand $x \to y$ □

Proposition 1.5. *L'opérateur $I_{a^+}^{\alpha} AC([a,b]) \to AC([a,b])$ est bien défini*

Preuve. Soit $u \in AC([a,b])$

étape 1 puisque

$$I_{a^+}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{a^+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds$$

Comme $f \in AC([a,b])$,on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} I_{a^+}^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[u(a) + \int_a^s u'(\tau) d\tau \right] ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(a) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\int_a^s u'(\tau) d\tau \right] ds
\end{aligned}$$

Et d'après cas particulier de la formule Dirichlet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} I_{a^+}^{\alpha} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(a) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t u'(\tau) ds \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right] d\tau \\
&= \frac{u(a)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{(t-a^{\alpha})}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t u'(\tau) ds \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right] d\tau \\
&= \frac{u(a)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t u'(t) \left[\int_\tau^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} ds \right] d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u'(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2} d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(a) + I_{a^+}^{\alpha} u'(t)
\end{aligned}$$

Et utilisant (1.1)

Etape 2

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{a^+}^{\alpha} u(t) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(a) + I_{a^+}^{\alpha} u'(t)$$

On pose $k(t) = \dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(a)$ et $j(t) = I_{a^+}^{\alpha} u'(t)$ des fonctions intégrable sur $[a, b]$

alors : $\dfrac{\partial}{\partial t} I_{a^+}^{\alpha} u(t) = k(t) + j(t)$,

donc $D(I_{a^+}^{\alpha})$ est intégrable. □

Propriété 1.1. *Soit $\alpha, \beta \geq 0$ et $u \in L^1([a, b])$ on a*

1. $I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} u) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} u$ *(propriété de semi-groupe)*
2. $I_{b^-}^{\alpha}(I_{b^-}^{\beta} u) = I_{b^-}^{\alpha+\beta} u$

Preuve. On a

$$I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^t (s-\tau)^{\beta-1} u(\tau d\tau \right) ds$$

En vu (1) , les intégrales existent, et par la formule de **Dirichlet** , on obtient

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} u(\tau) ds d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t u(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right) d\tau
\end{aligned}$$

On utilisant le changement de variable $s = \tau + \mu(t-\tau)$ alors

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta}u(t)) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha\Gamma(\beta))}\int_a^t u(\tau)\left(\int_0^1 [(t-\tau)(1-\mu)]^{\alpha-1}\left[\mu(t-\tau)^{\beta-1}(t-\tau)\right]d\mu\right)d\tau \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t u(\tau)(t-\tau)^{\beta+\alpha-1}\left(\int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}d\mu\right)d\tau \end{aligned}$$

D'après (1.2),on a

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}d\mu = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

d'où

$$I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta}u(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 u(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau = I_{a^+}^{\alpha+\beta}u \;\; \text{p.p}[a,b]$$

D'après (1.5), si $u \in C([a,b])$ alors $I_{a^+}^{\alpha}u \in C([a,b])$, par conséquence $I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta}) \in C([a,b])$ et $I_{a^+}^{\alpha+\beta}u \in C([a,b])$. Puisque ces deux fonctions continues considèrent presque partout, il doivent considère part tout de la même manière, on montre que $I_{b^-}^{\alpha}(I_{b^-}^{\beta}) = I_{b^-}^{\alpha+\beta}u(t)$ □

Proposition 1.6. *Si $0 < \alpha < 1, 1 < p < \frac{1}{\alpha}$ alors les opérateurs d'intégrations fractionnaires $I_{a^+}^{\alpha}$ et $I_{b^-}^{\alpha}$ sont bornés de L^p dans L^q avec $q = \dfrac{p}{1-\alpha p}$*

Proposition 1.7 (Intégrale Par Parties). *Soit $u \in L^p([a,b]), v \in L^q([a,b])$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ alors on a*

$$\int_a^b \left(I_{a^+}^{\alpha}u(t)\right)v(t)dt = \int_a^b \left(I_{b^-}^{\alpha}v(t)\right)u(t)dt$$

Preuve. **Étape 1**

les deux intégrales précédents sont convergentes

En effet, d'après l'inégalité de **Hölder**

$$\left|\int_a^b \left(I_{b^-}^{\alpha}v(t)\right)u(t)dt\right| \leq \|u\|_{L^p}\|I_{b^-}^{\alpha}v\|_{L^{p'}}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$

Mais le question qui se pose est : $\|I_{b^-}^{\alpha}\|_{L^{p'}} < \infty$

alors

$$v \in L^q([a,b]) \Rightarrow I_{b^-}^{\alpha}v \in L^{\frac{p}{1-\alpha p}}\|I_{b^-}^{\alpha}v\|_{L^{\frac{p}{1-\alpha p}}} < \infty$$

Où on sait que si $p_1 > p_2 > 1$, alors $L^{p_1} \subset L^{p_2}$ et $\|u\|_{L^{p_2}} \leq c\|u\|_{L^{p_1}}$

Étape 2 On a

$$\int_a^b (I_{a^+}^{\alpha} u(t))v(t)dt = \int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)ds\right] v(t)dt$$

On utilise la formule **Dirichlet**, donc on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)ds\right] v(t)dt &= \int_a^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u(s) \left[\int_a^b (t-s)^{\alpha-1} v(t)dt\right] ds \\
&= \int_a^b u(s) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-s)^{\alpha-1} v(t)dt\right] ds \\
&= \int_a^b u(s)[I_{b^-}^{\alpha} v(s)]ds
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2. *Soit $\alpha > 0$. Supposons que $(U_n)_{n>1}$ une fonction continue uniformément convergente sur [a,b], alors*

$$(\lim_{n\to\infty} I_{a^+}^{\alpha} u_n)(t) = (I_{a^+}^{\alpha} \lim_{n\to\infty} u_n)(t)$$

en particulier la suite de fonction $(I_{a^+}^{\alpha} u_n)_{n\geq 1}$ est uniformément convergente.

Preuve. On note la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$ par u. Il est bien connu que u est continue on trouve alors

$$\begin{aligned}
|I_{a_+}^{\alpha} u_n(t) - I_{a^+}^{\alpha} u(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t [u_n(s) - u(s)](t-s)^{\alpha-1} ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t |u_n(s) - u(s)|(t-s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

□

1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Proposition 1.8. *Soit $u \in L^1([a,b])$ une fonction intégrale sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L de la fonction u d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re > 0)$ notée $D_a^{\alpha} u$ est définie par :*

$$^{RL}D_a^{\alpha} u(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}(I_a^{n-\alpha} u(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s)ds \tag{1.10}$$

Avec $(n-1) < (Re(\alpha)) < n$ *et* $t > 0$ *en particulier , pour* $\alpha = m \in \mathbb{N}$ *on a*

$$({}^{RL}D_a^0 u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_a^t u(s)ds = u(t) \tag{1.11}$$

$$({}^{RL}D_a^m u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}\right) \int_a^t u(s)ds = \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m}\right) u(t) \tag{1.12}$$

Définition 1.4. *Dérivée fractionnaire de R-L a gauche d'ordre* $0 < \alpha < 1$ *de* u *est définie par* $\forall t \in [a,b]$ *on a*

$${}^{RL}D_{a^+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} u(s)ds = \frac{\partial}{\partial t} I_{a^+}^{1-\alpha} u(t)$$

De le même manière on définit dérivée fractionnaire a droit de u est définie

$${}^{RL}D_{b^-}^{\alpha} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^b (s-t)^{\alpha} u(s)ds = -\frac{\partial}{\partial t} I_{b^-}^{1-\alpha} u(t)$$

Notation Pour $\beta < 0$, on introduit la notation suivante :

$$D_{a^+}^{\beta} = I_{a^+}^{-\beta}$$

Remarque 1.3. *Si* $u \in AC([a,b])$, *alors* $D_{a^+}^{\alpha} u$ *existe presque partout. En effet :d'après la proposition , si* $g \in AC([a,b])$ *alors* $I_{a^+}^{1-\alpha} u \in AC([a,b])$ *et donc* $DI_{a^+}^{1-\alpha} u = D_{a^+}^{\alpha} u$ *a existe presque partout.*

Lemme 1.2. *Soit* $u \in AC([a,b])$ *et* $0 < \alpha < 1$ *alors* $D^n u$ *existe presque partout sur*$[a,b]$ *. De plus* $\mathrm{D}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha} u \in L^p([a,b])$ *pour* $0 < p < \dfrac{1}{\alpha}$ *et*

$$D_{a^+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^{\alpha}} + \int_a^t u'(s)(t-s)^{-\alpha} ds \right) \tag{1.13}$$

Preuve. **Étape 1 :** Si $u \in AC([a,b])$

$$
\begin{aligned}
D_{a^+}^{\alpha}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t (t-s)^{\alpha}u(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t \left[u(a)+\int_a^s u'(\tau)d\tau\right](t-s)^{-\alpha}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t \left[u(a)+\int_a^t \frac{\partial t}{(t-s)^{\alpha}}\int_a^t\int_a^s u'(\tau)(t-s)^{-\alpha}d\tau ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{u(a)}{(t-a)^{\alpha}}+\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t\int_a^s u'(\tau)(t-s)^{\alpha}d\tau ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{u(a)}{(t-a)^{\alpha}}+\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t u'(s)\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{u(a)}{(t-a)^{\alpha}}+\int_a^t u'(s)(t-s)^{-\alpha}ds\right]
\end{aligned}
$$

Et en utilisant la formule de **Dirichlet**

Étape 2 : $D_{a^+}^{\alpha}u \in L^p([a,b],\mathbb{R})$ pour $1 \le p \le \frac{1}{a}$

On a

$$
\int_a^b |D_{a^+}^{\alpha}u(t)|^p dt = \int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{u(a)}{(t-a)^{\alpha}}+\int_a^t u'(s)(t-s)^{\alpha}ds\right]^p dt
$$

et puisque

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\left[\int_a^t u'(s)(t-s)^{-\alpha}\right]^p dt &\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\left[\int_a^b u'(s)(t-s)^{-\alpha}\right]^p dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b (b-a)^{-\alpha p}\left[\int_a^b ds\right]^p dt \\
&\le \frac{1}{1-\alpha}\int_a^b (b-a)^{-\alpha p+1}\|u'\|_{L^1}^p dt \\
&= \frac{(b-a)^{-\alpha p+1}}{\Gamma(1-\alpha)}\|u'\|_{L^1}^p < \infty
\end{aligned}
$$

De plus

$$
\|D_{a^+}^{\alpha}\|_{L^p}^p \le \frac{u(a)}{t-a}^{\alpha} dt + \frac{(b-a)^{-\alpha p+1}}{\Gamma(1-\alpha)}\|u'\|_{L^1}^p < \infty
$$

□

1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.5. *La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens Caputo d'une fonction $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ est définie par* *à gauche* $t > a$

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = I^{n-\alpha}_{a^+}D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds$$

à droit $t < b$

$$^{c}D^{\alpha}_{b^-}f(t) = (-1)^n I^{n-\alpha}_{a^+}D^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds$$

Proposition 1.9. *Soit* $\alpha > 0$

1. $({}^{c}D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t)$
2. $({}^{c}D^{\alpha}_{a}c) = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$
3. ${}^{c}D^{\alpha}_{a}({}^{c}D^{\beta}_{a}f(t)) = ({}^{c}D^{\alpha+\beta}f)(t) =^{c} D^{\beta}_{a}({}^{c}D^{\alpha}_{a}f(t))$ *ou* $f \in C([a,b]), 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ *et* $0 < \alpha+\beta < 1$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}_{a}(I^{\alpha}_{a^+}f)(t) &= I^{n-\alpha}_{a^+}D^n_a I^{\alpha}_{a^+}f(t) \\ &= I^{n-\alpha}_{a^+}D^n_a I^{n}_{a^+}I^{\alpha-n}_{a^+}f(t) \\ &= I^{n-\alpha}_{a^+}I^{\alpha-n}_{a^+}f(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}_{a}c &= I^{n-\alpha}_{a^+}D^n_a c \\ &= I^{n-\alpha}0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet,

$$ {}^{c}D^{\alpha}_{a}({}^{c}D^{\beta}_{a}f(t)) = I^{1-\alpha}_{a^+}D^{1-\alpha}_{a}I^{1-\beta}_{a^+}D^1_a f(t)$$

On sait que $I^{\beta}_{a^+}(D^1_a f(t)) = ({}^{c}D^{1-\beta}_{a})(t)$,

alors

$$\begin{aligned} I^{1-\alpha-\beta}_{a^+}I^{\beta}_{a^+}D^1_a D^1_a I^{1-\beta}_{a^+}D^1_a f(t) &= I^{1-\alpha-\beta}_{a^+}D^{1-\beta}_{a}I^{1-\beta}_{a}D^1_a f(t) \\ &= I^{1-\alpha-\beta}D^1_a f(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^cD_a^{\alpha}({}^cD_a^{\beta}f(t)) &= {}^cD_a^{\alpha+\beta}f(t) \\ &= {}^cD_a^{\beta}({}^cD_a^{\alpha}f(t)) \end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

RÉSOLVANTES FRACTIONNAIRES

2.1 Résolvantes Fractionnaires

Soit X un espace de Banach et $\alpha > 0$.

2.1.1 La théorie de α - résolvantes

*** La définition de α-résolvante**

Pour une fonction f définie par $f : \mathbb{R}_+ \to X$,on appelle que intégrale fractionnaire de R-L d'ordre $\beta \geq 0$ est définie par :

$$I_t^\beta f(t) = (g_\beta * f)(t) := \int_0^t g_\beta(t-s)f(s)ds$$

où $g_0(t) := \delta(t)$, la fonction Dirac, et $g_\beta(t) := \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ pour $t > 0$.
On définit les notions algébrique de la théorie des α-résolvants d'opérateurs linéaires et bornés p.p.[2]

Définition 2.1. *On dit que $\{S_\alpha(t)\}_{\alpha \geq 0}$ est une famille α-résolvant si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $S_\alpha(0) = I$ *;*
2. $S_\alpha(s)S_\alpha(t) = S_\alpha(t)S_\alpha(s)$, *pour tout* $t \geq 0$ *;*

3. *L'équation fonctionnelle*

$$S_\alpha(s)I_s^\alpha S_\alpha(t) - I_t^\alpha S_\alpha(s)S_\alpha(t) = I_t^\alpha S_\alpha(t) - I_s^\alpha S_\alpha(s)$$

Pour tout $(t,s) \geq 0$.

*** * Uniformément continue**

Définition 2.2. *Une famille* α*-résolvante* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *et dit uniformément continue si :*

$$\lim_{t\to s} \|S_\alpha(t) - S_\alpha(s)\| = 0 \tag{2.1}$$

pour tout $s \geq 0$.

L'opérateur linéaire de A *définie par :*

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{t^\alpha} \text{ existe}\} \tag{2.2}$$

et

$$Ax := \Gamma(\alpha+1) \lim_{t\to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{t^\alpha} \text{ pour } x \in D(A) \tag{2.3}$$

et appelé le générateur de la famille α*-résolvant* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, $D(A)$ *est la domaine de* A*. Cette formule a été proposée pour la première fois dans [3]*

Théorème 2.1. *[3] A est générateur d'une famille* α*-résolvant uniformément continue ssi* A *est un opérateur borné.*

*** * * Fortement continue**

Définition 2.3. *Une famille* α*-résolvants d'opérateurs bornés* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *sur* X *est appelée une famille* α*-résolvant fortement continue si*

$$\lim_{t\to s} \|S_\alpha(t)x - S_\alpha(s)x\| = 0$$

pour tout $s > 0$ *et* $x \in X$.

Théorème 2.2. *[3] Soit* $\alpha > 0$ *. Soit* A *un opérateur linéaire dans* X *avec un domaine* $D(A)$*. Une famille fortement continue* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0} \subseteq B(X)$ *d'opérateurs linéaires bornés dans* X *est une famille* α*-résolvant engendrée par* A *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $S_\alpha(0) = I$;
2. $S_\alpha(t)x \in D(A)$ *et* $S_\alpha(t)Ax = AS_\alpha(t)x$, $x \in D(A)$, $t \geq 0$;
3. $S_\alpha(t)x = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)AS_\alpha(s)xds, \quad t \geq 0$, $x \in D(A)$;

Proposition 2.1. *[3] Soit* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *une famille* α*-résolvant fortement continue et soit* A *sont générateur. Alors :*

1. *Pour tout* $x \in X$, $\int_0^t g_\alpha(t-s)S_\alpha(s)xds \in D(A)$ *et*
$$S_\alpha(t)x = x + A\int_0^t g_\alpha(t-s)S_\alpha(s)xds, \;\; t \geq 0, \;\; x \in X. \tag{2.4}$$
2. $D(A)$ *, le domaine de* A*, est dense dans* X *et* A *est un opérateur fermé.*

Corollaire 2.1. *Soit* A *le générateur d'une famille* α*-résolvant* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$*, bornée et fortement continue c'est-a dire satisfaisant :*

1. $\|S_\alpha(t)\| \leq M$ *pour tout* $t \geq 0$;
2. *Si* $x \in D(A^2)$*, alors*
$$\|Ax\|^2 \leq 8M^2 \frac{\Gamma(\alpha+1)^2}{\Gamma(2\alpha+1)}\|x\|.\|A^2x\|$$

2.1.2 α-résolvant intégrés

***La définition des familles α-résolvantes**

Définition 2.4. *Soit* $\beta > 0$*. Une famille a deux paramètres* $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ *est appelée une famille* (α,β)*-résolvante si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\lim_{t\to 0} t^{1-\beta}R_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}I$*, si* $0 < \beta < 1, R_{\alpha,1}(0) = I$ *et* $R_{\alpha,\beta}(0) = 0$ *si* $\beta > 1$;
2. $R_{\alpha,\beta}(s)R_{\alpha,\beta}(t) = R_{\alpha,\beta}(t)R_{\alpha,\beta}(s) \quad$ *pour tout* $s, t > 0$;
3. *L'équation fonctionnelle*
$$R_{\alpha,\beta}(s)I_t^\alpha R_{\alpha,\beta}(t) - I_s^\alpha R_{\alpha,\beta}(s)R_{\alpha,\beta}(t) = g_\beta(s)I_t^\alpha R_{\alpha,\beta}(t) - g_\beta I_s^\alpha R_{\alpha,\beta}(s),$$
pour tout $t, s > 0$

*** * Uniformément continue**

Notation 2.1. *Dans ce qui suite, une famille* (α, α)*-résolvant* $\{R_{\alpha,\alpha}(t)\}_{t>0}$ *sera simplement notée* $\{R_\alpha(t)\}_{t>0}$ *et une famille* $(\alpha, 1)$*-résolvant par* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.

L'opérateur linéaire A défini par :

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{R_{\alpha,\beta}(t)x - g_\beta(t)x}{g_{\alpha+\beta}(t)} \quad pour x \in D(A)$$

tel que

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{R_{\alpha,\beta}(t)x - g_\beta(t)x}{g_{\alpha+\beta}(t)} \ existe\} \tag{2.6}$$

est appelé le générateur de la famille (α, β)*-résolvant* $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$.

Si A est un opérateur borné, alors

$$R_{\alpha,\beta}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} g_{\alpha n+\beta}(t)A^n = t^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)} = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(At^\alpha), t > 0 \tag{2.7}$$

définit une famille de (α, β)*-résolvants uniformément continus. Étant donné* $\beta > 1$*, observons que la famille* $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ *est* $(\beta-1)$*-fois intégrée a par rapport a* $\{R_{\alpha,1}(t)\}_{t\geq 0}$ *parce que l'identité*

$$R_{\alpha,\beta}(t) = g_{\beta-1} * R_{\alpha,1}(t) = I_t^{\beta-1}R_{\alpha,1}(t), \quad t > 0$$

Plus généralement , si A est générateur d'une famille (α, β)*-résolvant, alors pour tout* $\gamma \geq 0$ *on a que A est le générateur d'une famille* $(\alpha, \beta+\gamma)$*-résolvant [11] . La caractérisation suivante est souvent utilisée comme définition.*

*** * * Fortement continue**

Théorème 2.3. *[3] Soit* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *sont données. Une famille fortement continue* $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0} \subset B(X)$ *d'opérateurs linéaires bornés dans X est une famille* (α, β)*-résolvante engendrée par A si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\lim_{t\to 0} t^{1-\beta}R_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}I$ *si* $0 < \beta < 1$,$R_{\alpha,1}(0) = I$ *et* $R_{\alpha,\beta}(0) = 0$ *si* $\beta > 1$;
2. $R_{\alpha,\beta}(t)x \in D(A)$ *et* $R_{\alpha,\beta}(t)Ax = AR_{\alpha,\beta}(t)x \quad x \in D(A)$ *et* $t \geq 0$;

3. $R_{\alpha,\beta}(t)x = g_\beta(t)x + \int_0^t g_\alpha(t-s)AR_{\alpha,\beta}(s)xds, t \geq 0, x \in D(A)$ *;*

Remarque 2.1. *Il existe des concepts plus faibles de fonctions d'opérateur de résolvant fractionnaire dans la littérature. Par exemple, [19] ont introduit la notion de fonctions résolvantes C-régularisées.*

2.2 Les Propriétés des résolvants fractionnaires

2.2.1 Perturbations

Un résultat classique pour les C_0 semi-groupes est le suivant : Si A est le générateur d'un C_0 semi-groupe et $B \in \mathfrak{B}(X)$,alors $A + B$ est à nouveau le générateur dans C_0 semi-groupes. Ce n'est pas vrai en général pour les familles α-résolvantes avec $0 < \alpha < 1$. Voir[4] pour un exemple.Cependant, dans le cas $1 \leq \alpha \leq 2$ des perturbations par des opérateurs bornés sont toujours possibles. Dans le théorème suivant, prouvé par Lizama, nous le montrons même dans le cas de perturbations bornées dépendant du temps. Pour $\alpha = 2$, un théorème analogue a été présenté par [3]

Théorème 2.4. *[3] Soit $1 < \alpha < 2$ et A le générateur d'une famille α-résolvante fortement continue $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ de type (M, ω) et pour tout $t > 0, B(t) \in B(X)$. Si la fonction $t \to B(t)$ est continue dans la topologie des opérateurs uniformes, alors $A + B(t)$ engendre une famille α-résolvante fortement continue $\{Q_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ donnée par la formule*

$$Q_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{\alpha,n}(t), \tag{2.8}$$

où

$$S_{\alpha,0}(t) := S_\alpha(t), \;\; S_{\alpha,n}(t) := \int_0^t K_\alpha(t-s)B(s)S_{\alpha,n-1}(s)ds, \;\; n \in \mathbb{N}$$

avec

$$K_\alpha(t) := \int_0^t g_{\alpha-1}(t-s)S_\alpha(s)ds,$$

De plus , si $K_T = \max_{t\in[0,T]} \|B(t)\|$ on a pour tout $t \in [0, T]$ les bornes

$$\|Q_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}E_\alpha(MK_Tt^\alpha)$$

et

$$\|Q_\alpha(t) - S_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}(E_\alpha(MK_T t^\alpha) - 1)$$

Un traitement du problème de perturbation du point de vue du sous-jacent Le problème abstrait fractionnaire de Cauchy dans le cas $0 < \alpha \leq 1$ a été donné par [3].

Dans le cas des familles (α, β)-résolvantes, on a le résultat alternatif suivant qui correspond à une généralisation d'un résultat de perturbation pour les C_0 semi-groupes.

Théorème 2.5. *[3] Soit A le générateur d'une famille (α, β)-résolvante $R_{\alpha,\beta}(t)$ de type (M, ω), où $\alpha \geq \beta$ et $\overline{D(A)} = X$. Soit $B : D(B) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire tel que $D(A) \subseteq D(B)$. Supposons qu'il existe une constante $\mu > \omega$ et $\gamma \in [0, 1)$ telle que*

$$\int_0^\infty e^{-\mu r}\|(g_{\alpha-\beta} * BR_{\alpha,\beta})(r)x\|dr \leq \gamma\|x\|, \;\; x \in \|D(A)$$

alors $A + B$ engendrée une famille (α, β)-résolvant $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ sur X de type $(\frac{M}{1-\gamma}, \mu)$ dans satisfais

$$R^B_{\alpha,\beta}(t)x = R_{\alpha,\beta}(t)x + \int_0^t R^B_{\alpha,\beta}(t-r)(g_{\alpha-\beta} * BR_{\alpha,\beta})(r)xdr, \;\; x \in D(A)$$

2.2.2 Approximation

Nous considérerons deux types :

- La première est pour $\alpha \in (0, 2]$ fixé approximation des générateurs, c'est-à-dire les relations entre la convergence forte d'une suite de familles de α-résolvantes et celle des résolvantes de leurs générateurs, comme pour C_0 semi-groupes [3].
- Le second est l'approximation des ordres. Comme on le sait par le principe de subordination, si $A \in \mathcal{C}^\alpha$, alors $A \in \mathcal{C}^\beta$ pour $\beta < \alpha$, donc il est aussi naturel se demander si $S_\beta(t) \to S_\alpha(t)$ fortement lorsque $\beta \to \alpha$, où $\{S_\beta(t)\}_{t\geq 0}$ est la famille β-résolvant engendrée pour A.

Rappelons que $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ désigne l'opérateur résolvant de A chaque fois qu'il existe.

Théorème 2.6. *[19] Soit $\alpha \in (0,2]$ et soit $\{S_\alpha^0(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S_\alpha^n(t)\}_{t\geq 0}$ des familles α-résolvantes fortement continues générées respectivement par A_0 et A, respective. Il existe des constantes $M > 0$ et $\omega > 0$ telle que $\|S_\alpha^n(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour tout $t \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$. Le assertions suivantes sont équivalent :*

1. *$S_\alpha^n(t)x \to S_\alpha^0(t)x$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in X$, uniformément pour t sur tout l'intervalle bornée.*
2. *$R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda, A_0)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in X$ et $\lambda \in \omega^\alpha$.*

Remarque 2.2. *En utilisant [3], nous observons qu'un résultat analogue est vrai pour les familles (α, β)-régularisées.*

Pour le second type d'approximation, on a le résultat suivant.

Théorème 2.7. *[19] Soit A le générateur d'une famille α-résolvante fortement continue $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $\{S_\beta(t)\}_{t\geq 0}$ la famille β-résolvante engendrée par A pour $\beta \leq \alpha$. Alors $S_\beta(t)x \to S_\alpha(t)x$ lorsque $\beta \to \alpha$ pour $t \geq 0$ et $x \in X$.*

2.2.3 Ergodicité

Soit A le générateur d'une famille (α, β)-résolvant $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$. Nous analysons le comportement , lorsque $t \to \infty$, de la famille suivante d'opérateurs bornées et linéaires :

$$A_t^{\alpha,\beta}x := \frac{1}{g_{\alpha+\beta}(t)} \int_0^t g(t-s)R_{\alpha,\beta}(s)xds, \;\; t > 0, \;\; x \in X.$$

Notons que $A_t^{1,1}$ correspond à la Cesáro moyenne de la semi-groupe $R_{1,1}(t)$. La famille des opérateurs $A_t^{1,\beta}, \beta > 0$ a été étudié par [4]. La famille $A_t^{2,\beta}$ a considéré par [16]. Le résultat suivant correspond à une forte théorème ergodique avec des taux.

Théorème 2.8. *[3] Soit $\alpha, \beta > 0$ et A est le générateur d'une famille (α, β)-résolvant $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ tel que*

$$\|R_{\alpha,\beta}(t)\| \leq M_\beta t\beta^{\beta-1}, \;\; t > 0.$$

Les assertions suivantes sont :

1. *L'application* $Px := \lim_{t\to\infty} A_t^{\alpha,\beta}x$ *est une projection linéaire bornée avec* $Ran(p) = \ker(A), \ker(P) = \overline{Ran(A)}$ *et* $D(P) = \ker(A) \oplus \overline{Ran(A)}$.
2. *Pour* $0 < \gamma \leq 1$ *et* $x \in \ker(A) \oplus \overline{Ran(A)}$, *on a*

$$\|A_t^{\alpha,\beta}x - Px\| = O(t^{-\alpha\gamma}).$$

D'autres propriétés sont données dans [3]. Le résultat suivant est le théorème ergodique uniforme correspondant.

Théorème 2.9. *[3] Soient* $\alpha, \beta > 0$ *et* A *le générateur d'une famille de* (α, β)*-résolvant* $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ *tel que :* $\|R_{\alpha,\beta}(t)\| \leq M_\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0.$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $D(A) = X$ *et* $\|A_t^{\alpha,\beta} - P\| \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$.
2. $Ran(A)$ *est fermé.*
3. $Ran(A^2)$ *et fermé.*
4. $X = \ker(A) \oplus Ran(A)$.

De plus, la convergence de la limite est d'ordre $O(t^{-\alpha})$.

D'autres propriétés en terme de famille compagne $B_t x$ *sont données [3]. Nous observons également qu'il existe des théorèmes ergodiques abéliens analogues avec des taux d'approximation pour les réseaux :*

$$A_\lambda^\alpha = \lambda^\alpha(\lambda^\alpha - A)^{-1} \text{ et } B_\lambda^\alpha = (\lambda^\alpha - A)^{-1}$$

où $\lambda^\alpha \in (A)$ *pour* $\lambda > 0$. *[15]*

2.2.4 Compacité

Une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés et linéaires est dite compacte pour $t > 0$ si pour tout $t > 0$, $S(t)$ est un opérateur compact.

Le théorème suivant étend le critère de compacité pour les C_0 semi-groupes ; voir, par exemple, [3]

Théorème 2.10. *[3][23][20] Soit $0 < \alpha < 2$ et A le générateur d'une famille α-résolvante bornée exponentiellement $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.*

Supposons que $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ est immédiatement en norme continue. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$S_\alpha(t)$ est un opérateur compact pour tout $t > 0$.*
2. *$(\mu - A)^{-1}$est un opérateur compact pour tout (certains) $\mu > \omega^{1/\alpha}$.*

Soit A le générateur d'un semi-groupe analytique $S_1(t)$ pour $t > 0$ et $0 < \alpha < 1$. On considère la famille α-résolvante subordonnée engendrée par A

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty \Phi_\alpha(s) S_1(st^\alpha)ds, \ \ t > 0.$$

On sait que $S_\alpha(t)$ est analytique. Nous avons les résultats suivants.

Théorème 2.11. *[23] Soit A le générateur d'un semi-groupe analytique compact $S_1(t)$ pour $t > 0$. Si $(\mu - A)^{-1}$ est compact pour tout (certains) $\mu > 0$, alors pour tout $\alpha \in (0, 1), S_\alpha(t)$ est une famille α-résolvante analytique compacte pour tout $t > 0$.*

On considère maintenant la famille (α, α)-résolvante $R_\alpha(t) = t^{\alpha-1}P_\alpha(t)$, d'où

$$P_\alpha(t) = \int_0^\infty \alpha s\Phi_\alpha(s)S_1(st^\alpha)ds, \ \ t > 0.$$

Théorème 2.12. *[3] Soient $0 < \alpha \leq 1$ et $A \in \Theta^\gamma_\omega(X), -1 < \gamma < 0 < \omega < \pi/2$ est donnée . Si $(\mu - A)^{-1}$ est compact pour tout (certains) $\mu > 0$, alors $S_\alpha(t)$ et $P_\alpha(t)$ sont compact pour tout $t > 0$.*

Pour le cas des familles (α, β)-résolvantes, on a le résultat suivant.

Théorème 2.13. *[20] Soit A le générateur d'une famille exponentiellement bornée (α, β)-résolvante $\{R_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ pour certains $\alpha > 0$ et $1 < \beta \leq 2$. Alors $R_{\alpha,\beta}(t)$ est compact est compact pour tout $t > 0$ si et seulement si $(\lambda - A)^{-1}$ est compact pour tout (certains) $\lambda \in (A)$.*

Deux cas distingués sont les suivants.

Théorème 2.14. *[20] Soit $3/2 < \alpha < 2$ et A le générateur d'une famille exponentiellement bornée et immédiatement de norme continue $(\alpha, \alpha - 1)$-résolvante $\{R_{\alpha,\alpha-1}(t)\}_{t\geq 0}$. Alors*

$R_{\alpha,\alpha-1}(t)$ est compact pour tout $t > 0$ si et seulement si $(\lambda - A)^{-1}$ est compact pour tout (certains) $\lambda \in (A)$.

Théorème 2.15. *[20] Soit $1/2 < \alpha < 1$ et A le générateur d'une famille exponentiellement bornée et immédiatement normée (α, α)-résolvante $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Alors $R_\alpha(t)$ est compact pour tout $t > 0$ si et seulement si $(\lambda - A)^1$ est compact pour tout (certains) $\lambda \in (A)$.*
Concernant la compacité du générateur, nous avons les critères suivants.

Théorème 2.16. *[3] Soit A le générateur d'une famille de α-résolvant $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un opérateur compact.*
2. *$S_\alpha(t) - I$ un opérateur compact pour tout $t > 0$.*
3. *$\lambda R(\lambda, A) - I$ est compact un opérateur compact pour tout (certains) $\lambda \in (A)$.*

2.2.5 Régularité spatiale

Dans cette section, nous énonçons quelques résultats sur la régularité spatiale pour les familles α-résolvantes $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$; voir [14]

Théorème 2.17. *[3] Soit $\alpha \in (0, 2)$ et supposons $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, \omega_0)$ puis pour tout $x \in X$ et $t > 0$, nous avons $S_\alpha(t)x \in D(A)$ et*

$$\|AS_\alpha(t)\| \leq Ce^{\omega t}(1 + t^{-\alpha}),\ \ t > 0,\ \ \omega > \omega_0$$

Théorème 2.18. *[1] Laissez $-A$ est le générateur d'un délimitée analytique la famille α-résolvant $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ pour tout $0 < \alpha < 2$. Alors :*

1. *Si $1 \leq \alpha < 2$, alors $S_\alpha(t)x \in D(A^\infty) := \cap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ pour tout x_inX , et $\|A^\beta S_\alpha(t)\| \leq Ct^{-\alpha\beta}$.*

   Pour chaque $\beta > 0$. De plus, $D(A^\infty)$ est dense dans X.
2. *Si $0 < \alpha < \frac{1}{m}$ pour un certains $m \in \mathbb{N}$, alors pour chaque $x \in D(A^{m-1})$ on a $S_\alpha(t)x \in D(A^m)$ et $\|A^m S_\alpha(t)x\| \leq Ct^{-m\alpha}\|x\| + \sum_{k=1}^{m} g_{1-k\alpha}(t)\|A^{m-k}x\|,\ \ t > 0.$*

Théorème 2.19. *[3] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $A \in \Theta_\omega^\gamma(X), -1 < 0 < \omega < \pi/2$. Soit $< \beta < 1 - \gamma$. Pour tout $x \in D(A)$ et $t > 0$,*

$$\|AS_\alpha(t)x\| \leq Ct^{-\alpha(1+\gamma)}\|Ax\|,$$

où C est une constante dépendant de γ, α.

Pour les résultats suivants, rappelons que $R_\alpha(t)_{t\geq 0}$ désigne une famille (α, α)-résolvante.

Théorème 2.20. *[3] Soit $0 < \alpha < 1$ et $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, \omega_0)$. Alors il existe un constant $C > 0$ tel que*

$$\|R_\alpha(t)\| \leq Ce^{\omega t}(1 + t^{\alpha-1}), \;\; t > 0 \tag{2.9}$$

Théorème 2.21. *[22] Soit $0 < \alpha < 1$. Soit A le générateur d'un semi-groupe exponentiellement stable $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, c'est-à-dire qu'il existe un constant $\delta > 0$ et $M > 0$ tel que*
$\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}$.Alors

$$\|R_\alpha(t)\| \leq Mt^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\delta t^\alpha), \;\; t > 0$$

Le résultat important suivant [3]. Cependant, il convient de noter que sa notion d'opérateur sectoriel diffère de la nôtre.

Théorème 2.22. *[3] Supposons que A soit sectorielle de type négatif et d'angle $\theta \in [0, \pi(1 - \alpha/2)]$ alors il existe $C > 0$ dépendant uniquement de θ et α tel que $\|S_\alpha(t)\| \leq \dfrac{CM}{1 + |\omega|t^\alpha}$ Pour des résultats supplémentaires.*

CHAPITRE 3

QUELQUES PROBLÈMES FRACTIONNAIRES

3.1 Le problème fractionnaire abstrait de Cauchy

Rappelons que la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$^{C}D_t^{\alpha} f(t) := I_t^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t)$$

où m est le plus petit entier supérieur où égal à α. On considéré les solutions des problèmes fractionnaires de Cauchy. D'abord, nous donnons la définition des solutions au problème de la valeur initiale non homogène

$$\begin{cases} ^{C}D_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(t), & t \in (0, \tau) \\ u^{(k)}(0) = x_k, & k = 0, 1, ..., m-1 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\tau \in (0, \infty]$, $f \in L^1_{loc}([0, \tau), X)$ est A un opérateur fermé densément défini dans un espace de Banach X. Rappelons que la connexion entre $^{C}D_t^{\alpha}$ et la dérivée fractionnaire de R-L $^{RL}D_t^{\alpha}$ donnée par

$$^{C}D_t^{\alpha} u(t) =^{RL} D_t^{\alpha} \left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} g_{k+1}(t) x_k \right).$$

Définition 3.1. *Une fonction $u \in \mathtt{C}([0, \tau], X)$ est dite solution forte de 3.1 si $u(t)$ vérifie*

(a) $u \in \mathtt{C}(0, \tau), D(A) \cap \mathtt{C}^{m-1}([0, \tau], X)$;

(b) $g_{m-\alpha} * (u - \sum_{k=0}^{m-1} g_{k+1} x_k) \in \mathtt{C}^m([0, \tau), X)$;

(c) $u(t)$ satisfait 3.1 ;

Définition 3.2. *Une fonction $u \in \mathtt{C}([0,\tau],X)$ est appelée solution faible de 3.1 si $(g_\alpha * u)(t) \in D(A)$ et*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g_{k+1}(t)x_k + A(g_\alpha * u)(t) + (g_\alpha * f)(t), \;\; t \in [0,\tau).$$

Si A est générateur d'une famille α-résolvant $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, alors la solution faible 3.1 sur $\mathbb{R}_+$ peut être représentée par

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (g_k * S_\alpha)(t)X_k + \frac{d}{dt}(g_\alpha * S_\alpha * f)(t), \;\; t \geq 0, \tag{3.2}$$

chaque fois $X_k \in X$ pour tout $K = 0, ..., m-1$

3.2 le problème homogène d'ordre fractionnaire

Nous analysons brièvement le problème de Cauchy fractionnaire homogène :

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(t) = Au(t), & t \in (0,\tau) \\ u^{(k)}(0) = x_k, & k = 0,1,...,m-1. \end{cases} \tag{3.3}$$

dans le cas $\tau = \infty$ et de manière analogue aux cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, on a le concept suivant de bien-posé au sens de Hadamard [15].

Définition 3.3. *Le problème 3.3 est dit bien posé si pour tout $X_k \in D(A)$, $k = 0,1,...,m-1$, il existe un unique solution forte, $u_k(t)$ de 3.3 , et $x_{k,n} \in D(A)$, $X_{k,n} \to 0$ comme $n \to \infty$, impliquent $u_{k,n}(t) \to 0$ comme $n \to \infty$ dans X, uniformément sur des intervalles compacts.*

D'après [15] le problème 3.3 est bien posé si et seulement si A est le générateur d'une famille α-résolvante $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, et l'unique solution forte est donnée par

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (g_k * S_\alpha)(t)x_k, \;\; t \geq 0,$$

chaque fois que $X_k \in D(A)$ pour tout $k = 0,1,...,m-1$.

En particulier $u(t) = S_\alpha(t)x$ est l'unique solution forte du problème

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x, \;\; u^k(0) = 0, & k = 1,...,m-1, \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour chaque $x \in D(A)$ (rappelons que g_0 est la fonction de Dirac). Voir par exemple [1] .

3.3 Le problème non homogène d'ordre fractionnaire

Poussons maniement le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), & t \in (0,\tau) \\ u^{(k)}(0) = 0, & k = 0,1,...,m-1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour l'existence de solution forte de 3.5 on a

Théorème 3.1. *[18] Soit $\alpha \in (0,2]$. Supposons A est générateur d'une famille α-résolvant fortement continue $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ et $f \in C([0,\tau), X)$. Alors les énoncés suivants sont équivalent :*

(a) 3.5 a une solution forte sur $[0,\tau)$;

(b) $S_\alpha * f$ est différentiable sur $[0,\tau)$;

(c) $\frac{d}{dt}(g_\alpha * S_\alpha * f)(t) \in D(A)$ pour $t \in [0,\tau)$ et $A\left(\frac{d}{dt}(g_\alpha * S_\alpha * f)(t)\right)$ est confortable sur $[0,\tau)$;

Dans le cas $\alpha \in [1,2]$, la condition (3.1) peut être remplacée par

(c)' $(g_{\alpha-1} * S_\alpha * f)(t) \in D(A)$ pour $t \in [0,\tau)$ et $A(g_{\alpha-1} * S_\alpha * f)(t)$ est continue sur $[0,\tau)$.

Par conséquent, nous avons ce qui suit.

Corollaire 3.1. *[18] Soit $\alpha \in (0,2]$. Supposons que A soit le générateur d'une famille fortement continue de α-résolvants. Alors (3.1) a une solution forte sur $[0,\tau)$ si l'une des conditions suivantes est remplie :*

(a) f est fonctionnelle-ment différentiable sur $[0,\tau)$.

(b) $\alpha \in [1,2], f(t) \in D(A)$ pour $t \in [0,\tau)$ et $Af \in L^1_{\text{loc}}([0,\tau), X)$.

(c) $\alpha \in (0,1), f(t) \in D(A)$ pour $t \in [0,\tau)$ et $g_\alpha * f$ est sensiblement différentiable sur $[0,\tau)$.

(d) $a \in (1,2), (g_{\alpha-1} * f) \in L^1((0,\tau), D(A))$.

3.3.1 Le problème de Cauchy d'ordre fractionnaire : $0 < \alpha \leq 2$.

On considère le problème de Cauchy linéaire d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \ \max\{0, \alpha - 1\}\,(u'(0) - u_1) = 0, & 0 < \alpha \leq 2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Selon les sous-sections précédentes, si A est générateur d'une famille α-résolvent $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ et $0<\alpha\leq 1$ alors la solution faible de 3.6 peut être représentée par :

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0+\frac{d}{dt}\left(g_\alpha * S_\alpha * f\right)(t), \quad t\geq 0 \tag{3.7}$$

Dans le cas où A est le générateur d'une famille (α,α)-résolvent $\{R_\alpha(t)\}_{t>0}$ on obtient que $S_\alpha(t):=\left(g_{1-\alpha} * R_\alpha\right)(t)$ est une famille α-résolvent engendrée par A et la représentation

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0+\int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)ds, \;\; t\geq 0. \tag{3.8}$$

Par conséquent, commencer par A est générateur d'une famille (α,α)-résolvent est plus naturel et approprié .

Il faut que le problème 3.6 est considéré avec R-L dérivée ,alors

$$u(t)=R_\alpha(t)u_0+\int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)ds, \;\; t>0. \tag{3.9}$$

Voir aussi [3] pour des informations complémentaires et des résultats.En utilisant le principe de subordination , on peut donner des descriptions explicites des familles (α,β)-résolvent dans certains cas.Ce fait a été largement utilisé dans la littérature. Par exemple, si A est générateur d'une C_0 semi-groupe $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ et $0<\alpha<1$ alors on a que $R_\alpha(t)=t^{\alpha-1}P_\alpha(t)$, où

$$P_\alpha(t)=\alpha\int_0^\infty s\Phi_\alpha(s)S_1\left(st^\alpha\right)ds, \;\; t>0,$$

est la famille (α,α)-résolvent engendrée par A, et

$$S_\alpha(t)=\int_0^\infty \Phi_\alpha(s)S_1\left(st^\alpha\right)ds, \;\; t>0,$$

est la famille α-résolvent engendrée par A. Pour des informations à jour , des applications et des remarques historiques concernant cette formation , voir [12].

Dans le cas $1<\alpha\leq 2$ on a la représentation

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0+\left(g_1 * S_\alpha\right)(t)u_1+\left(g_{\alpha-1} * S_\alpha * f\right)(t), \;\; t\geq 0. \tag{3.10}$$

Supposons que A est générateur d'une famille α-résolvent $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ on obtient $R_\alpha(t)=\left(g_{\alpha-1} * S_\alpha\right)(t)$ est une famille (α,α)-résolvent engendrée A et

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0+\int_0^t S_\alpha(s)u_1ds+\int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)ds, \;\; t\geq 0. \tag{3.11}$$

En utilisant à nouveau le principe de subordination, on peut donner une des description : si A est le générateur d'une famille fortement continue $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ et $1<\alpha<2$ alors on a :

$$S_\alpha(t)=\int_0^\infty \Phi_{\alpha/2}(s)S_2\left(st^{\alpha/2}\right)ds$$

est la famille α-résolvent engendrée par A.

Pour compléter le tableau , on observe que pour la fractionnaire de R-L dérivée finale , nous avons la représentation suivants des solution :

$$u(t)=L_{\alpha,\alpha-1}(t)u_0+\int_0^t L_{\alpha,\alpha-1}(s)u_1ds+\int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)ds \tag{3.12}$$

où $\{L_{\alpha,\alpha-1}(t)\}_{t>0}$ est une famille $(\alpha,\alpha-1)$-résolvent engendrée par A et

$R_\alpha(t):=\left(g_1 * L_{\alpha,\alpha-1}\right)(t)$ est une famille (α,α)-résolvent. Notez que si A est opérateur borné, alors on a

$$L_{\alpha,\alpha-1}(t)=t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(At^\alpha\right),\ \ t>0,\ \ 1<\alpha\leq 2$$

3.4 Application l'équation d'évolution non homogène

Dans cet mémoire, ont étudié l'équation d'évolution homogène avec la dérivée fractionnaire de R-L dans l'espace de Banach X :

$$\begin{cases} D^\alpha u(t)=Au(t),\ \ t>0, \\ \lim_{t\to 0^+}\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}u(t)=x \end{cases} \tag{3.13}$$

et le but de cet article est de présenter l'existence et l'unicité de solutions faibles pour l'équation d'évolution non homogène :

$$\begin{cases} D^\alpha u(t)=Au(t)+f(t),\ \ 0<t\leq b, \\ \lim_{t\to 0^+}\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}u(t)=x. \end{cases} \tag{3.14}$$

3.4.1 Préliminaires

Définition 3.4. *[13] La dérivée d'ordre fractionnaire de R-L d'ordre α d'une fonction $f\in L^1([0,b],X)$ donné sur l'intervalle $[0,b]$ est définie par :*

$$D^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

où $\alpha \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$.

Puisque f prend des valeurs dans l'espace Banach X, les intégrales qui apparaissent dans le sont prises au sens de Bochner.

Par souci de commodité, nous utiliserons les notations suivants :

$$(v * u)(t) = \int_0^t v(t-s)u(s)\mathrm{d}s, \quad v, u \in L^1([0,\infty), X),$$
$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \quad (\alpha > 0) \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour $0 < \alpha < 1$ *on a :*

$$I_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t), \quad D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * f)(t)$$

Définition 3.5. *Une fonction $u \in C((0,b], X)$ est appelée solution forte de 3.14 si $u \in C((0,b], D(A)), g_{1-\alpha} * u \in C^1((0,b], X)$ et 3.14 sont vérifiées.*

Définition 3.6. *Une fonction $u \in C((0,b], X)$ est appelée solution faible de 3.14 si $I_t^\alpha u(t) \in D(A)$ et $u(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x + AI_t^\alpha u(t) + I_t^\alpha f(t)$ pour $0 < t \leq b$.*

Définition 3.7. *[16] Pour $0 < \alpha < 1$, une fonction $R_\alpha : (0,\infty) \to \mathfrak{B}(X)$ est un appelée α-résolvent fractionnaire si elle vérifie suivantes :*

1. *$R_\alpha(t)$ est continue forte sur $(0,\infty)$ et $\lim_{t\to 0^+} \Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}R_\alpha(t)x = x$ pour $x \in X$.*
2. *$R_\alpha(s)R_\alpha(t) = R_\alpha(t)R_\alpha(s)$ pour tout $t, s > 0$.*
3. *$R_\alpha(s)I_t^\alpha R_\alpha(t) - I_s^\alpha R_\alpha(s)R_\alpha(t) = \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_t^\alpha R_\alpha(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_s^\alpha R_\alpha(s)$ pour tout $t, s > 0$.*

L'opérateur linéaire A définie par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1-\alpha}R_\alpha(t)x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x}{t^\alpha} \text{ exists} \right\}$$

et

$$Ax = \Gamma(2\alpha) \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1-\alpha}R_\alpha(t)x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x}{t^\alpha}, \quad x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal de la résolvent fractionnaire $R_\alpha(t)$.

Lemme 3.1. *[16] Soit A est le générateur infinitésimal de la α-résolvent fractionnaire $R_\alpha(t)$. Alors*

(a) $R_\alpha(t)x \in D(A)$ et $AR_\alpha(t)x = R_\alpha(t)Ax$ pour tout $x \in D(A)$ et $t > 0$.

(b) Pour tout $x \in X$ et $t > 0$ on a : $R_\alpha(t)x = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x + AI_t^\alpha R_\alpha(t)x$.

(c) Pour tout $x \in D(A)$ et $t > 0$ on a : $R_\alpha(t)x = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x + I_t^\alpha R_\alpha(t)Ax$.

(d) A est fermé et densément définie .

Lemme 3.2. *[16] Soit A est le générateur infinitésimal de la α-résolvent fractionnaire $R_\alpha(t)$. Alors*

I) $R_\alpha(t)x$ est une solution faible de pour tout $x \in X$.

II) $R_\alpha(t)x$ est une solution forte de 3.13 pour tout $x \in D(A)$.

Lemme 3.3. *Pour tout $x \in X$, on a $\lim_{h\to 0^+} \Gamma(2\alpha)h^{1-2\alpha}I_h^\alpha R_\alpha(h)x = x$.*

Preuve. Pour $x \in X$

$$\begin{aligned}
\left\|\Gamma(2\alpha)h^{1-2\alpha}I_h^\alpha R_\alpha(h)x - x\right\| &= \left\|\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^h h^{1-2\alpha}(h-\tau)^{\alpha-1}R_\alpha(\tau)x \, \mathrm{d}\tau - x\right\| \\
&= \left\|\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 h^{1-\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1}R_\alpha(h\tau)x \, \mathrm{d}\tau - x\right\| \\
&= \| \frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)(h\tau)^{1-\alpha}R_\alpha(h\tau)x \, \mathrm{d}\tau \\
&\quad - \frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1}x \, \mathrm{d}\tau \| \\
&\leq \frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1} \, \mathrm{d}\tau \\
&\quad \times \sup_{\tau\in[0,1]} \left\|\Gamma(\alpha)(h\tau)^{1-\alpha}R_\alpha(h\tau)x - x\right\| \\
&\leq \sup_{\tau\in[0,1]} \left\|\Gamma(\alpha)(h\tau)^{1-\alpha}R_\alpha(h\tau)x - x\right\|.
\end{aligned}$$

En combinant l'inégalité ci-dessus avec (1) , nous avons

$$\lim_{h\to 0^+} \Gamma(2\alpha)h^{1-2\alpha}I_h^\alpha R_\alpha(h)x = x.$$

□

3.5 les principaux résultats

Dans la suite de cet article, nous supposons toujours qe $0 < \alpha < 1$ et A est le générateur infinitésimal de d'ordre α-résolvante fractionnaire $R_\alpha(t)$.

Soit u défini par :

$$u(t) = R_\alpha(t)x + \int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \;\; 0 < t \leq b.$$

Notez que la résolvante fractionnaire $R_\alpha(t)$ est illimitée lorsque t est suffisante petite, pour discuter des solutions de 3.14, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur la résolvante fractionnaire telles qe u soit bien défini dans 3.15. Un cas possible est de supposer que la résolvante fractionnaire $R_\alpha(t)$ est uniformément intégrable sur $(0, b]$, soit, $\int_0^b \|R_\alpha(t)\| \,\mathrm{d}t < \infty$. On remarque que l'intégrabilité uniforme de la famille opérateurs sur $(0, \infty)$ joue un rôle clé dans le comportent asymptotique des solutions d'équations intégrales pour plus de détails a ce sujet, nous renvoyons a [21] et [5] [14] . A la fin de ce section ,nous donnerons un exemple pour montrer que la résolvante fractionnaire satisfait l'intégrabilité .

Lemme 3.4. *Soit $f \in C([0, b], X)$ et $\int_0^b \|R_\alpha(t)\| \,\mathrm{d}t < \infty$. puis la convolution*

$$R_\alpha * f(t) := \int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \;\; t \in [0, b]$$

existe et définit une fonction continue sur $[0, b]$.

Preuve. Par l'argument standard,on voit que $R_\alpha(t-\cdot)f(\cdot)$ est mesurable $(0, t)$ pour tout $t \in (0, b]$ (voir [21]). De plus,

$$\left\| \int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)\mathrm{d}s \right\| \leq \|f\|_{C([0,b],X)} \int_0^b \|R_\alpha(s)\| \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Ainsi, $R_\alpha * f$ existe. Par contre, pour $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$ on a

$$\begin{aligned}
\|R_\alpha * f(t_2) - R_\alpha * f(t_1)\| \leq & \int_0^{t_1} \|R_\alpha(s)\| \|f(t_2 - s) - f(t_1 - s)\| \,\mathrm{d}s \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \|R_\alpha(s) f(t_2 - s)\| \,\mathrm{d}s \\
\leq & \int_0^b \|R_\alpha(s)\| \,\mathrm{d}s \cdot \sup_{0 \leq s \leq t_1} \|f(t_2 - s) - f(t_1 - s)\| \\
& + \|f\|_{C([0,b],X)} \int_{t_1}^{t_2} \|R_\alpha(s)\| \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Il résulte de la continue de f et de la continuité d'intégration absolue de R_α que $R_\alpha * f$ est continue $[0, b]$. □

Théorème 3.2. *Soit $x \in X, f \in C([0,b], X), \int_0^b \|R_\alpha(t)\| \, \mathrm{d}t < \infty$ et u une solutions faible 3.16. Alors u est donné par 1. En particulier, les solutions faibles de 3.14 sont uniques.*

Preuve. Soit u une solution faible de 3.14. Par définition des solutions faible, on a $g_\alpha * u(t) \in D(A)$ pour $t \in (0, b]$. Alors, il découle du 3.1(b) que

$$\begin{aligned} g_\alpha * u &= (R_\alpha - A g_\alpha * R_\alpha) * u \\ &= R_\alpha * u - R_\alpha * (A g_\alpha * u) \\ &= R_\alpha * (g_\alpha x + g_\alpha * f) \\ &= g_\alpha * (R_\alpha x + R_\alpha * f), \end{aligned}$$

ce qui implique que $u(t) = R_\alpha(t)x + \int_0^t R_\alpha(t-s) f(s) \mathrm{d}s, 0 < t \leq b$. □

Théorème 3.3. *Soit $x \in X, f \in C([0,b], X), \int_0^b \|R_\alpha(t)\| \, \mathrm{d}t < \infty$ et u est bien de fini dans 1. Et u alors la solution faible de 3.14.*

Preuve. D'après 3.4, u est bien défini dans 1 et $u \in C((0,b], X)$. Puisque $R_\alpha(t)x$ est la solution faible de 3.13, il suffit de montrer que v défini par :

$$v(t) = R_\alpha * f(t) = \int_0^t R_\alpha(t-s) f(s) \mathrm{d}s, \quad 0 < t \leq b \tag{3.16}$$

est la solution faible de

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < t \leq b, \\ \lim_{t \to 0^+} \Gamma(\alpha) t^{1-\alpha} u(t) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour cela, soit $0 < t \leq b$ et $0 \leq s < t$. Par (c) de3.7, on a :

$$\begin{aligned} &\left[h^{1-\alpha} R_\alpha(h) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] I_t^\alpha R_\alpha(t-s) f(s) \\ &\quad = h^{1-\alpha} I_h^\alpha R_\alpha(h) \left[R_\alpha(t-s) f(s) - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) \right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\Gamma(2\alpha)\frac{h^{1-\alpha}R_\alpha(h)I_t^\alpha v(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}I_t^\alpha v(t)}{h^\alpha}\\
=\ &\Gamma(2\alpha)\int_0^t \frac{\left[h^{1-\alpha}R_\alpha(h)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]I_t^\alpha T_\alpha(t-s)f(s)}{h^\alpha}\mathrm{d}s\\
=\ &\Gamma(2\alpha)\int_0^t \frac{h^{1-\alpha}I_h^\alpha R_\alpha(h)\left[R_\alpha(t-s)f(s)-\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s)\right]}{h^\alpha}\mathrm{d}s \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Il découle de (3.18), 3.3 et du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\Gamma(2\alpha)\frac{h^{1-\alpha}R_\alpha(h)I_t^\alpha v(t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}I_t^\alpha v(t)}{h^\alpha}\\
&=\int_0^t\left[R_\alpha(t-s)f(s)-\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

C'est,

$$AI_t^\alpha v(t)=v(t)-I_t^\alpha f(t),\ \ 0<t\le b \tag{3.19}$$

De plus, notons que v est borné dans $C([0,b],X)$ au vue du 3.4, ce qui implique

$$\left\|\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}v(t)\right\|\le\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}\sup_{t\in[0,b]}\|v(t)\|\to 0,\ \ t\to 0^+$$

C'est,

$$\lim_{t\to 0^+}\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}v(t)=0$$

Ainsi, v est la solution faible de 3.17. Par conséquent, u est la solution faible de 3.14. Donnons maintenant , les conditions nécessaires et suffisantes pour les solutions fortes de 3.14. □

Théorème 3.4. *Soit $x\in D(A)$, $f\in C([0,b],X)$, $\int_0^b\|R_\alpha(t)\|\,\mathrm{d}t<\infty$ et u,v défini par 1 et 3.16, respectivement. Alors les éléments suivants sont équivalents :*

1. *u est une solution forte de 3.14.*
2. *$v(t)\in D(A)$ pour $0<t\le b$ et $Av\in C((0,b],X)$.*

Preuve. Supposons que u est une solution forte de 3.14. Alors

$$v(t)=u(t)-R_\alpha(t)x\in D(A),\ \ 0<t\le b$$

et

$$Av(t) = Au(t) - AR_\alpha(t)x = D^\alpha u(t) - D^\alpha R_\alpha(t)x - f(t), \;\; 0 < t \leq b$$

Ce qu'implique que $Av \in C((0,b],X)$ puisque les trois termes du membres droit de l'égalité ci-dessus sont tous continus sur $(0,b]$.

D'autre part, soit $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t \leq b$ et $Av \in C((0,b],X)$. D'après 3.19, on obtient

$$AI_t^\alpha v(t) = v(t) - I_t^\alpha f(t), \;\; 0 < t \leq b$$

et

$$\lim_{t \to 0^+} \Gamma(\alpha) t^{1-\alpha} v(t) = 0.$$

Puisque $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t \leq b$ et $Av \in C((0,b],X)$, il résulte de la fermeture de A que

$$AI_t^\alpha v(t) = I_t^\alpha Av(t)$$

Ce qu'implique que

$$v(t) = I_t^\alpha Av(t) + I_t^\alpha f(t), \;\; 0 < t \leq b.$$

Ainsi,

$$g_{1-\alpha} * v(t) = \int_0^t Av(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$

Par la continuité de Av et f, on a $g_{1-\alpha} * v \in C^1((0,b],X)$ et

$$D^\alpha v(t) = Av(t) + f(t), \;\; 0 < t \leq b.$$

Donc, v est une solution forte de 3.14. En combinant ceci que avec (II) dans 3.2, on obtient finalement que u est une solution forte de 3.14. □

Corollaire 3.2. *Soit $x \in D(A), f \in C([0,b],X), \int_0^b \|R_\alpha(t)\| \,\mathrm{d}t < \infty$ et u soit défini par 1. Supposons que $f(t) \in D(A)$ pour $0 \leq t \leq b$ et $Af \in C([0,b],X)$. Alors u est une solution forte de 3.14.*

Preuve. Soit v défini par 3.16. Puisque $Af \in C([0,b],X)$, on a $R_\alpha * Af \in C([0,b],X)$. Par la fermeture de A, on obtient que$R_\alpha * Af(t) = AR_\alpha * f(t) = Av(t), \;\; 0 < t \leq b$

d'où on déduit que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t \leq b$ et $Av = R_\alpha * Af \in C((0, b], X)$. Ainsi, u est une solution forte de 3.14 d'après (3.4). □

Corollaire 3.3. *Soit $x \in D(A), f \in C([0, b], X)$, $\int_0^b \|R_\alpha(t)\| \, \mathrm{d}t < \infty$ et u défini par 1. Supposons que $g_{1-\alpha} * f \in C^1([0, b], X)$. Alors u est une solution forte de 3.14.*

Preuve. Soit v défini par 3.16. Il résulte de (3.19) et de la fermeture de A que

$$A \int_0^t v(s)\mathrm{d}s = g_{1-\alpha} * v(t) - \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \quad 0 < t \leq b$$

Puisque $g_{1-\alpha} * f \in C^1([0, b], X)$,on a $g_{1-\alpha} * v = R_\alpha * g_{1-\alpha} * f \in C^1((0, b], X)$. Ainsi,il découle de la fermeture de A encore que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t \leq b$ et $Av = (g_{1-\alpha} * v)' - f \in C((0, b], X)$. Donc, u est une solution forte de 3.14 d'après (3.4). □

Exemple 3.1. *Considérons l'équation de diffusion fractionnaire suivante pour $u = u(x, t)$*

$$D^\alpha u = e^{i\theta} u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, 0 < \alpha < 1, 0 \leq \theta < \pi \tag{3.20}$$

Avec les conditions : $u(0, t) = u(1, t) = 0$ et

$\lim_{t \to 0^+} \Gamma(\alpha) t^{1-\alpha} u(x, t) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n$ *et* πx. *Soit $X = L^2(0, 1)$ et*

$A = e^{i\theta} \partial^2 / \partial x^2$ *lorsque* $D(A) = \{v \mid v \in W^{2,2}(0, 1), v(0) = v(1) = 0\}$.

Par la théorème de la résolvante fractionnaire (3.20), est donne par

$$R_\alpha(t) h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-e^{i\theta} n^2 \pi^2 t^\alpha\right) c_n \sin n\pi x.$$

Nous affirmons que la résolvent fractionnaire $R_\alpha(t)$ est uniformément intégrable sur $(0, b]$ lorsque $|\theta| < (1- \alpha/2)\pi$. On fait, il découle des formule asymptotique de la fonction de Mittag-Leffer qu'il existent des constants $\delta > 0, M > 0$ tell que (voir [17],ou elles ont prouvé que $\sup_{t \geq 0} \|R_\alpha(t)\|$ *est borné pour $1 < \alpha < 2$)*

$$\|R_\alpha(t)h\|_{L^2} \leq M t^{\alpha-1} \|h\|_{L^2}, \quad t \in (0, \delta)$$

et

$$\|R_\alpha(t)h\|_{L^2} \leq M \|h\|_{L^2}, \quad t \in [\delta, b]$$

D'où l'on déduit que $\int_0^b \|R_\alpha(t)\| \,\mathrm{d}t \leq M\delta^\alpha/\alpha + Mb$. *Autrement, dit la résolvent fractionnaire* $R_\alpha(t)$ *est uniformément intégrable sur* $(0, b]$. *Ainsi, la théorie développé dans cet article peut être appliquée à l'équation d'évolution non homogène de* (3.20).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Chen and M. Li, Characterizations of domains of fractional powers for non-negative operators, J. Math. Anal. Appl., 435 (2016), 179–209.

[2] C. Chen and M. Li, On fractional resolvent operator functions, Semigroup Forum, 80 (2010), 121–142.

[3] C. Lizama, Abstract Linear Fractional Evolution Equations, Febrary 2019, University of Santiago, Chile.

[4] C. Lizama and H. Prado, Rates of approximation and ergodic limits of regularized operator families, J. Approx. Theory, 122 (2003), 42–61.

[5] C. Lizama, G.M. N'Guérékata, Bounded mild solutions for semilinear integro differential equations in Banach spaces, Integral Equations Operator Theory 68 (2010) 207-227.

[6] C. Lizama, Uniform continuity and compactness for resolvent families of operators, Acta Appl. Math., 38(2) (1995), 131–138.

[7] C. Lizama, On approximation and representation of k-regularized resolvent families, Integral Equ. Oper. Theory, 41(2) (2001), 223–229.

[8] C. Lizama and P. J. Miana, A Kallman-Rota inequality for generators of families of bounded operators, J. Math. Anal. Appl., 371 (2010), 614–623.

[9] C. Lizama, R. Ponce, and A. Pereira, Norm continuity for strongly continuous families of operators, Int. J. Evol. Equ., 10(2) (2017), 161–178.

[10] C. Lizama, R. Ponce, and A. Pereira, On the compactness of fractional resolvent operator functions, Semigroup Forum, 93(2) (2016), 363–374.

[11] C. Lizama, Regularized solutions for abstract Volterra equations, J. Math. Anal. Appl., 243(2) (2000), 278–292.

[12] H. Gou, andB.Li, Existence of mild solutions for fractional nonautonomous evolution equations ofSobolev type with delay, J. Inequal. Appl., 19 (2017), Paper No. 252, 20 pages.

[13] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[14] J. Prüss, Evolutionary Integral Equations and Applications, Birkhäuser, Basel, Berlin, 1993.

[15] J. Prüss, Evolutionary Integral Equations and Applications, Monographs Math., vol. 87,Birkhäuser Verlag, 1993.

[16] K. Li, J. Peng, Fractional resolvents and fractional evolution equations, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 808-812.

[17] K. Li, J. Peng, J. Jia, Cauchy problems for fractional differential equations with Riemann–Liouville fractional derivatives, J. Funct. Anal. 263 (2012) 476–510.

[18] M.Li, C. Chen, andF. Li, On fractional powers of generators of fractional resolvent families, J.Funct. Anal., 259 (2010), 2702–2726.

[19] M. Li and Q. Zheng, On spectral inclusions and approximations of α-times resolvent families, Semigroup Forum, 69 (2004), 356–368.

[20] R. Ponce, Existence of mild solutions to nonlocal fractional Cauchy problems via compactness, Abstr. Appl. Anal., 2016 (2016), Article ID 4567092, 15 pages.

[21] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems, second ed., in : Monogr. Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, 2011.

[22] Y. Zhou. Fractional Evolution Equations and Inclusions : Analysis and Control. Elsevier/Academic Press, London, 2016.

[23] Z. Fan, Characterization of compactness for resolvents and its applications, Appl. Math. Comput., 232 (2014), 60–67.