RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
« Analyse fonctionnelle et Application»

Présenté Par :
FEDOUL Dalila
BENSAID Haouaria

Sous L'intitulé :

Equations différentielles fractionnaires d'ordre variable au sens de Riemann_Liouville avec conditions aux limites

Soutenu publiquement le 25 /06/ 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr MAHROUZ Tayeb	MCB	Université de Tiaret	Président
Mme BOUAZZA Zoubida	MCB	Université de Tiaret	Encadrant
Mme SABIT Souhila	MCA	Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

★ Remerciements ★

Nous tenons tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout-puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements

★ à notre encadreur de mémoire ***Mme :BOUAZZA ZOUBIDA*** pour la confiance qu'il m'accordait en acceptant de m'encadrer, pour sa disponibilité tout au long de l'élaboration de ce mémoire, pour son aide, ses critiques et ses suggestions, qui ont été pour moi d'un grand apport.

★ Un remerciement spécial et sincère à ***Mr : MAHROUZ TAYEB*** qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ce mémoire.

★ Un grand merci à ***Mme : SABIT SOUHILA*** qui nous a accordé l'honneur d'accepter l'examination de notre mémoire

★ Finalement, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

★ *À vous tous un grand merci* ★

★ Dédicace ★

Je remercie avant tout **ALLAH** de m'avoir donnée le courage, la patience et surtout la santé de mener à réaliser ce modeste travail, je dédie cet mémoire

À mes chèrs parents :≪***Rokaya, Benhalima***≫

À mes soeurs :≪***Fatima, Saâdia, Khadidja, Aicha***≫

À mes frères :≪***Abdelkader, Mohamed, Ismail, Ibrahim, Ilyes*** ≫

À toute la famille :≪ ***Bensaid***≫

À mon binôme :≪ ***Fedoul Dalila***≫

À mes chères amies et mes camarades

À tout le promotion :≪ ***Master 2 math*** ≫

À tous les professeurs qui m'ont enseigné.

◀***B.Haouaria***▶

★ Dédicace ★

Je remercie avant tout **ALLAH** de m'avoir donnée le courage, la patience et surtout la santé de mener à réaliser ce modeste travail, je dédie cet mémoire

À mes chèrs parents :≪***Khadidja,Larbi***≫

À mes soeurs :≪***Lina, Fatima***≫

À mes frères :≪***Mohamed, Abdenour, Abdelmoumen, Abdellah, Youcef***≫

À mes mères ≪ ***Labdia ,Souad, Aicha***≫

À toute la famille :≪ ***Fedoul et kamel***≫

À mon binôme :≪***Bensaid Haouaria***≫

À mes chères amies et mes camarades

À toute le promotion :≪ ***Master 2 math*** ≫

À tous les professeurs qui m'ont enseigné.

◀***F.Dalila***▶

Table des matières

Notation

$\| . \|$	La norme.
E	Espace de Banach.
S	Un opérateur linéaire borné.
$\Gamma(.)$	La fonction Gamma.
$\beta(.,.)$	La fonction Bêta.
I_a^u	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville
D_a^u	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.
$C([a.b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ a valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C^n([a.b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions n fois continuments défférentiables.
$G(t,s)$	La Fonction de Green.
(H)	Homogène.
(NH)	Non-Homogène.

Introduction

En 1695, Leibniz dans une lettre à l'Hospital, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non-entière d'une fonction. Dans sa réponse, l'Hospital s'est interrogé sur la signification qu'on pourrait donner à la dérivée d'ordre 1/2. En effet, 1/2 est à égale distance de l'ordre 0 qui est censé désigner la continuité et l'ordre 1 censé désigner la dérivabilité classique. La réponse de Leibniz contenait à peu près cette phrase :"cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on pourra tirer des conséquences utiles".

Depuis cette époque, la dérivation d'ordre non-entier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens célèbres, tels Euler (1730), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville (1832-1873), Riemann (1847), et Laurent (1884). C'est seulement lors de ces dernières décennies que cette théorie commence a toucher un nombre important de domaines mathématiques et autres grâce à une exposion des activités de recherche sur l'application du calcul fractionnaire touchant la physique, la mécanique, la diffusion fractale, la biologie, l'électrotechnique. l'électrrochimie,...

La théorie du calcul fractionnaire est presque aussi vieille que le calcul lui-même. Mais aujourd'hui, un certain nombre de manuels ont été publiés sur ce domaine et ses applications, on cite par exemple le livre de S. G. Samko, et al [4], qui considéré comme une encyclopédie de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire. On peut citer également les travaux de K. Diethelm [2], A. A. Kilbas et al. [5] et K. B. Oldham et al. [7].

D'autre part, le concept de la stabilité d'une équation fonctionnelle apparaît lorsqu'on remplace cette équation par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation. Ainsi, la question de la stabilité des équations fonctionnelles est de savoir comment les solutions de l'inégalité différentes de celles de l'équation fonctionnelle donnée ?. Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers-Rassias de toute sorte d'équation fonctionnelles, pour plus de détails sur ces informations voir les références [4,5,6,7].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit en général dans ce contexte particulier. Il porte fondamentalement sur la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias d'une équation différentielle fractionnaire sous certaines conditions. Afin de vérifier la validité des méthodes étudiées, nous présentons quelques exemples illustratifs.

Notre travail est réparti en trois chapitres. **Le premier chapitre** est consacré à la présentation de quelques définitions de base du calcul fractionnaire.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D^{u(t)}x(t) = f(t, x(t), I^{u(t)}x(t)), t \in [0, T], \\ D^{u(t)-2}x(0) = -D^{u(t)-2}x(T), \\ D^{u(t)-1}x(0) = -D^{u(t)-1}x(T). \end{cases} \tag{1}$$

où D^u, I^u désignent la dériveé et l'intégrale fractionnaire d'ordre u au sens de Riemann-Liouville et $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-

Rassias d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire sous certaines conditions. Nous présentons également quelques exemples illustratifs pour vérifier la validité du schéma de la stabilité étudie.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion.

Chapitre 1

Notions de calcul fractionnaire

Ce chapitre rassemblent les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire et quelques théorèmes classiques de point fixe. La dernière section est consacrée à la présentations de quelques types de stabilité.

1.1 Analyse fonctionnelle

Définition 1.1. *(**Espace véctoriel normé**)[14] : Une application* $\| \ . \ \| : E \to I\!R_+$ *est une norme si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \| \ x \ \| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in E. \\ \\ \| \ \lambda . x \ \| = | \ \lambda \ | \| \ x \ \|, \forall \lambda \in I\!R, x \in E. \\ \\ \| \ x + y \ \| \leq \| \ x \ \| + \| \ y \ \|, \forall x, y \in E. \end{cases}$$

Le couple $(E, \|.\|)$ *est alors appelé un espace vectoriel normé.*

Définition 1.2. *(**Espace fonctionnel**)[10] : Soit* $J := [0,T], T > 0$*. Notons* $C(J, I\!R)$ *l'espace de Banach des fonctions continues définies de* J *dans* $I\!R$*, muni de la norme*

$\| y \|_\infty = sup\{\| y(t) \| : t \in J\}$*, où* $\| . \|$ *est une norme sur* $I\!R$*.*

Définition 1.3. *(**Ensemble convexe**)[3] : Soit* E *un espace vectoriel sur un corp* K *(*$I\!R$ *ou* $\mathbb{C}$*) et* $K \subset E$*, on dit que* K *est convexe si :*

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

Définition 1.4. *(**Ensemble compact**)[3] : Soit* E *un espace vectoriel normé et* $K \subset E$*, on dit que* K *est compact si toute suite d'élément de* K *admet une sous-suite convergente vers un point dans* K*.*

Définition 1.5. *([10]) : Soit* E *un espace topologique, et* K *un sous espace de* E*, on dit que* K *est relativement compact si* $\bar{K}$ *est compact.*

Définition 1.6. *(**Ensemble uniformement borné**)[14] : Soit* K *un ensemble relativement compact,* C *(*K *,* $I\!R$*) est l'espace des fonctions continues de* K *dans* $I\!R$*.*

Soit $M \subset K$*, on dit que* M *est uniformément borné si :* $\exists c > 0, \forall x \in M, |x(t)| \leqslant c, \forall t \in K$*.*

Définition 1.7. *(**Opérateur contractant**)[14] : Soit* S *un opérateur d'un espace normé* E *dans lui-même . On dit que* U *est un opérateur contractant (ou simplement une contraction) s'il existe une constante* $k, 0 \leqslant k < 1$ *telle que pour tout* x *et* y *de* E*, on a :*

$\| S(x) - S(y) \|_E \leqslant k \| x - y \|_E$ *.*

Définition 1.8. *([13]) Soit* $K \in C(\Omega)$*.* K *est dit équicontinue si*

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in \Omega, |x - y| < \delta(\varepsilon)$ *on a* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$*, pour tout* f *de* K*.*

Théorème 1.1. ***(Arzéla-Ascoli[13])***

$K \subset C(\bar{\Omega})$ est relativement compact si et seulement si

1. K est bornée.
2. K est équicontinue.

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Pour généraliser la factorielle d'un entier naturel à la factorielle d'un nombre non-entier, le mathématicien suisse Leonhard Euler introduit la fonction Gamma en 1729. Cette fonction a été étudiée par plusieurs mathématicien comme Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christof Gudermann (1798-1852) et Joseph Liouveille (1809-1882). La fonction Gamma apparâit dans plusieurs domaines comme la théorie des nombres, les séries hyper-géométriques et l'intégration définie. Voir [2] et [31] pour plus amples détails sur la fonction Gamma.

Définition 1.9. *([17]) La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivant :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)dt, \forall x \in]0, +\infty[.$$

Théorème 1.2. *Pour tout réel $x > 0$, la fonction Gamma est bien définie.*

Démonstration 1.1. *On peut écrire la fonction Gamma comme suit :*

$$\Gamma(x) = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt$$

et

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt.$$

Puisque la fonction $\exp(-t)$ est décroissante sur $[0.1]$, on a

$$\int_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt < \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}, x \in]0. + \infty[.$$

Donc I_1 est converge pour réel $x > 0$. D'autre part, on a

$$1 \leq t \Longrightarrow t^{x-1}\exp(-t) \leq \exp(\frac{-t}{2}) \Longleftrightarrow t^{x-1} \leq \exp(\frac{t}{2}) \Longleftrightarrow \frac{t^{x-1}}{\exp(\frac{t}{2})} \leq 1.$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt \leq \int_1^{+\infty} \exp(\frac{-t}{2})dt = 2\exp(\frac{-1}{2}).$$

Par conséquence I_2 est convergé pour $x > 0$. D'où , la fonction Gamma est convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Proposition 1.1. *1. Relation fonctionnelle : une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante, pour tout nombre réelle, strictement positive x on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

2. *Lien avec la fonction factorielle : la fonction Gamma prolonge(généralise) la notion de la factorielle car on a :*

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in I\!N.$$

3. $\forall n \in I\!N, \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ *et pour* $n = 0$ *on obtient* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. *La fonction Gamma est continue sur* $]0, +\infty[$.

5. *La fonction Gamma est strictement convexe sur* $]0, +\infty[$.

6. *La fonction Gamma est de class* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$ *et on a*

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \exp(-t)dt.$$

7. $\exists x_0 \in]1.2[$ *où la fonction Gamma est strictement décroissante sur* $]0, x_0]$ *et strictement croissante sur* $[x_0, +\infty[$.

Démonstration 1.2. 1. *Par une intégration par partie, on obtient*

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t)dt \\ &= \Big[-t^x \exp(-t)\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

2. *De* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *et puisque* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)dt = 1$, *on déduit,*

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!. \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!. \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!.\end{aligned}$$

Alors, par récurrence on obtient

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n!.$$

3. *On a :* $\forall n \in I\!N$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) &= (n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{2n-1}{2} \times \tfrac{2n-3}{2} \times ... \times \frac{1}{2} \times \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \tfrac{(2n)(2n-1)...3\times 2}{2^n(2n)(2n-2)...3\times 2}\sqrt{\pi} \\ &= \tfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Donc, pour $n = 0$*. On trouve*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Pour la démonstration d'autres points voir [11].

1.2.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.10. *([9]) La fonction Bêta est donnée par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y-1}dt, Re(x) > 0, Re(y) > 0.$$

Propriétes de la fonction Bêta :

1. La fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

   $$\beta(x,y) = \beta(y,x).$$

2. Elle peut prendre aussi la forme intégrale

   $$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt.$$

Proposition 1.2. *Les fonction Gamma et Bêta sont relieés par la relation :*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.2.3 Fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a,b])$ où $p \in C^1([a,b]), (a < b) et (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall i = 1,2, |\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0$ et $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. On considère les équations différentielles ordinaires :

$$(H) \qquad (py')' + py = 0$$

$$(NH) \qquad (py')' + py = f$$

Ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \Gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.11. *([12]) On appelle fonction de Green associée au problème homogène $(H) - (CB)_h$ une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \in I\!R$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. G est continue sur $[a,b] \times [a,b]$;
2. G est symétrique :$G(x,y) = G(y,x), \forall (x,y) \in [a,b]^2$;
3. $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ est continue pour tout $x \neq y$;
4. $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-,y) = \frac{1}{p(y)}$ pour tout $y \in [a,b]$;
5. La fonction partielle $x \mapsto G(x,y)$ est solution de l'équation (H) pour tout $x \neq y$;
6. La fonction partielle $x \mapsto G(x,y)$ vérifie les conditions $(CB)_h$ pour tout $y \in [a,b]$.

Théorème 1.3. ***(Existence et unicité de la fonction de Green)*** *([10])*

Supposons que le problème homogène $(H)-(CB)_h$ n'admet pas de solution non-triviale. Alors, il existe une(et une seule) fonction G ne dépendant pas de f, et dite fonction de Green, tel que pour toute fonction f, la solution y du problème non-homogène $(NH)-(CB)_h$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)ds.$$

1.3 L'intégration et la dérivation

1.3.1 L'intégrale et la dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre constant

Dans cette section, nous donnons quelque définition et résultats concernant le calcul intégrale et dérivée fractionnaires de type Riemann-Liouville d'ordre constant.

Définition 1.12. *([14]) On appelle intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre u, et on la note I_a^u, la fonction définie par*

$$I_a^u f(x) = \frac{1}{\Gamma(u)} \int_a^x (x-t)^{u-1} f(t)dt.$$

Remarque 1.1. *On peut écrire I_a^u sous la forme suivante*

$$I_a^u f(x) = \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^{x-a} t^{u-1} f(x-t)dt.$$

Définition 1.13. *([14]) On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre u, et on la note D_a^u la fonction définie par*

$$\begin{aligned} D_a^u f(x) &= D^n I_a^{(n-u)} f(x) \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(n-u)} \left(\tfrac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-u-1} f(s) ds \end{aligned}$$

Où $n = [u] + 1$ et $[u]$ désigne la partie entière de u.

Exemple 1.1. *Soit f la fonction sur $I\!R$ par*

$$f(x) = \exp(kx), k > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^u \exp(kx) &= \tfrac{1}{\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} t^{u-1} \exp(k(x-t)) dt \\ &= \tfrac{\exp(kx)}{\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} t^{u-1} \exp(-kt)) dt. \end{aligned}$$

Posons $y = kt$, alors $dy = kdt$.

Par suite

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^u \exp(kx) &= \tfrac{\exp(kx)}{\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} (\tfrac{y}{k})^{u-1} \exp(-y) \tfrac{dy}{k} \\ &= \tfrac{\exp(kx)}{\Gamma(u)} (\int_0^{+\infty} y^{u-1} \exp(-y) dy) \tfrac{k^{-u+1}}{k} \\ &= k^{-u} \exp(kx), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^u \exp(kx) &= D^{(n)} I_{-\infty}^{(n-u)} \exp(kx) \\ &= \tfrac{d^n}{dx^n} I_{-\infty}^{(n-u)} \exp(kx) \\ &= \tfrac{d^n}{dx^n} k^{u-n} \exp(kx) \\ &= k^{u-n} k^n \exp(kx) \\ &= k^u \exp(kx). \end{aligned}$$

C'est d'ailleurs cette dernière relation, extension de l'intégralité suivante

$$D^{(n)} \exp(kx) = k^n \exp(kx),$$

avec n un entier naturel.

Exemple 1.2. *Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par*

$$f(x) = (x-a)^u, x > a.$$

Dans ce cas on a

$$\begin{array}{rcl} I_a^u f(x) & = & \frac{1}{\Gamma(u)} \int_a^x (x-t)^{u-1} f(t) dt \\ & = & \frac{1}{\Gamma(u)} \int_a^x (x-t)^{u-1} (t-a)^u dt. \end{array}$$

Posons $t = a + (x-a)v.$, alors $dt = (x-a)dv$.

Par suite, il résulte que

$$\begin{array}{rcl} I_a^u f(x) & = & \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^1 (x-a)^{u-1} (1-v)^{u-1} (x-a)^u v^u (x-a) dv \\ & = & \frac{(x-a)^{2u}}{\Gamma(u)} \int_0^1 (1-v)^{u-1} v^u dv \\ & = & \frac{(x-a)^{2u}}{\Gamma(u)} \beta(u, u+1), \end{array}$$

et comme

$$\beta(r_1, r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1 + r_2)}.$$

Alors, il résulte que

$$I_a^u f(x) = \frac{(x-a)^{2u}}{\Gamma(u)} \frac{\Gamma(u)\Gamma(u+1)}{\Gamma(2u+1)},$$

C'est-à-dire

$$I_a^u f(x) = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(2u+1)} (x-a)^{2u}.$$

Proposition 1.3. *Soient f une fonction intégrable et bornée, et u et u' deux nombres réels strictement positifs. Alors on a*

$$I_a^u [I_a^{(u')} f(x)] = I_a^{(u+u')} f(x).$$

Démonstration 1.3. *Soient f une fonction intégrable et bornée, et u et u' deux nombres réels strictement positifs. Alors on a*

$$\begin{array}{rcl} I_a^u[I_a^u f(x)] & = & \frac{1}{\Gamma(u)}\int_0^{x-a} t^{u-1} I_a^u f(x-t)dt \\ & = & \frac{1}{\Gamma(u).\Gamma(u')}\int_0^{x-a} t^{u'-1}dt \int_a^{x-t}(x-t-u)^{u-1}f(u)du \\ & = & \frac{1}{\Gamma(u).\Gamma(u')}\int_a^{x} f(u)du \int_0^{x-u} t^{u'-1}(x-u-t)^{u-1}dt. \end{array}$$

Posons $t = v(x-u).$, alors $dt = (x-u)dv$.

Par suit, il résulte que

$$\begin{array}{rcl} I_a^u[I_a^u f(x)] & = & \frac{1}{\Gamma(u).\Gamma(u')}\int_a^{x} f(u)du \int_0^{1}(v(x-u))^{u'-1}(x-u-v(x-u))^{u-1}(x-u)dv \\ & = & \frac{1}{\Gamma(u).\Gamma(u')}\int_a^{x}(x-u)^{u+u'-1} f(u)du \int_0^{1} v^{u'-1}(1-v)^{u-1}dv \\ & = & \frac{1}{\Gamma(u).\Gamma(u')}\int_a^{x}(x-u)^{u+u'-1} f(u)du.\beta(u',u) \\ & = & \frac{1}{\Gamma(u+u')}\int_a^{x}(x-u)^{u+u'-1} f(u)du \\ & = & I_a^{(u+u')}f(x). \end{array}$$

Proposition 1.4. *Si la dérivée D_a^u existe en un point x_0, il en est de même de $D_{a'}^u$, quel que soit $a' < x_0$, et on a*

1.

$$I_a^{(n-u)}f(x) = I_{a'}^{(n-u)}f(x) + \frac{1}{\Gamma(n-u)}\int_a^{a'}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt.$$

preuve :

$$\begin{array}{rcl} I_a^{(n-u)}f(x) & = & \frac{1}{\Gamma(n-u)}\displaystyle\int_a^{x}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt \\ & = & \frac{1}{\Gamma(n-u)}\left(\displaystyle\int_a^{a'}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt + \int_{a'}^{x}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt\right) \\ & = & \frac{1}{\Gamma(n-u)}\displaystyle\int_{a'}^{x}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt + \frac{1}{\Gamma(n-u)}\int_a^{a'}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt \\ & = & I_{a'}^{(n-u)}f(x) + \frac{1}{\Gamma(n-u)}\displaystyle\int_a^{a'}(x-t)^{n-u-1}f(t)dt. \end{array}$$

2.

$$D_a^u f(x) = D_{a'}^u f(x) + \frac{1}{\Gamma(-u)} \int_a^{a'} (x-t)^{u-1} f(t)dt.$$

D'après 1*, on a*

$$\begin{aligned} D_a^u f(x) &= D^{(n)} I_a^{(n-u)} f(x) \\ &= D^{(n)} I_{a'}^{(n-u)} f(x) + D^{(n)} \tfrac{1}{\Gamma(n-u)} \int_a^{a'} (x-t)^{n-u-1} f(t)dt \\ &= D_{a'}^u f(x) + \tfrac{1}{\Gamma(-u)} \int_a^{a'} (x-t)^{u-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

3.

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, (\beta \geq 0).$$

Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} I_a^{(\beta)}(1) &= \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} dt \\ &= \tfrac{1}{\beta\Gamma(\beta)} [-(x-t)^\beta]_a^x \\ &= \tfrac{(x-a)^\beta}{\beta\Gamma(\beta)}, \end{aligned}$$

Comme

$$\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta+1).$$

Alors, il résulte que

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, (\beta \geq 0).$$

4.

$$D_a^u \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-u}}{\Gamma(\beta-u+1)}.$$

On a

$$D_a^u \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = D^{(n)} I_a^{(n-u)} I_a^{(\beta)}.1 = D^{(n)} I_a^{(n-\beta-u)} = D^{(n)} \frac{(x-a)^{n+\beta-u}}{\Gamma(n+\beta-u+1)}.$$

par suite

$$D_a^u \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-u}}{\Gamma(\beta-u+1)}.$$

Remarque 1.2.

En général, pour tout fonctions $u(t), v(t)$, nous remarquons que la propriété de semi-groupe n'est pas vérifiée : i, e

$$I_{a^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} f(t) \neq I_{a^+}^{u(t)+v(t)} f(t).$$

Exemple : Soient

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in]1,2], \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ 3, & t \in]1,2], \end{cases}$$

et $\quad f(t) = \frac{t}{3}, \quad t \in [0,2]$, alors

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f(t) &= \int_0^1 \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(s)-1}}{\Gamma(v(s))} f(\tau) d\tau ds \\ &+ \int_1^t \frac{(t-s)^{u(t)-1}}{\Gamma(u(t))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(s)-1}}{\Gamma(v(s))} f(\tau) d\tau ds, \\ &= \int_0^1 \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \frac{\tau}{3} d\tau ds \\ &+ \int_1^t \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} \Big[\int_0^1 \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \frac{\tau}{3} d\tau + \int_1^s \frac{(s-\tau)^2}{\Gamma(3)} \frac{\tau}{3} d\tau \Big] ds, \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \Big(\frac{s^3}{2} - \frac{s^3}{3} \Big) ds + \int_1^t \Big[\frac{1}{3} \Big(\frac{s^3}{2} - \frac{s^3}{3} \Big) + \frac{1}{6} \Big(\frac{s^4}{12} - \frac{s^2}{2} + \frac{2}{3} s - \frac{1}{4} \Big) \Big] ds. \end{aligned}$$

On sait que les équations suivantes sont satisfaites .

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f(t)|_{t=2} &= \frac{1}{72} + \frac{1}{3}\int_1^2 \Big(\frac{s^4}{24} + \frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4} + \frac{s}{3} - \frac{1}{24}\Big) ds, \\ &= \frac{96}{360}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)+v(t)} f(t)|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)} \frac{s}{3} ds + \int_1^2 \frac{(2-s)^{1+3-1}}{\Gamma(1+3)} \frac{s}{3} ds, \\ &= \frac{11}{72} + \frac{3}{180} = \frac{61}{360}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} f(t)|_{t=2} \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)} f(t)|_{t=2}.$$

1.3.2 L'intégration et la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

Définition 1.14. *([14]) Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $u(t) : [a, b] \to (0, +\infty)$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable $u(t)$ de la fonction $f(t)$ est définie par :*

$$I_{a^+}^{u(t)} f(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} h(s) ds, t > a.$$

Définition 1.15. *([14]) Soit $-\infty < a < b < +\infty$,$n \in I\!N$, $u(t) : [a, b] \to (n-1, n)$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable $u(t)$ de la fonction $f(t)$ est définie par :*

$$D_{a^+}^{u(t)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-u(t)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-u(s)-1}}{\Gamma(n-u(s))} f(s) ds, t > a. \tag{1.3}$$

1.3.2.1 Quelques proporiétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

Lemme 1.1. *([5]) Soit $0 \leq \delta < 1$, $u : J \to (1,2]$ une fonction continue, alors pour*

$$y \in C_\delta(J, I\!R) = \{y(t) \in C(J, I\!R), t^\delta y(t) \in C(J, I\!R)/t \in \min \mid u(t) \mid\},$$

l'intégrale fractionnaire d'ordre variable $I_{a^+}^{u(t)}$ existe pour tout point sur J.

Lemme 1.2. *([5]) Soit $u : J \to (1,2]$ une fonction continue ; alors*
$I_{a^+}^{u(t)} \in C(J, I\!R)$ pour tout $y \in C(J, I\!R)$.

1.3.2.2 Répartition

Définition 1.16. *([5]) Un intervalle généralisé est un sous-ensemble I de $I\!R$ qui est soit un intervalle (c'est-à-dire un ensemble de la forme :$[a_1, a_2],]a_1, a_2[, [a_1, a_2[,]a_1, a_2]$), un point $\{a_1\}$, ou l'ensemble vide $\emptyset$.*

Définition 1.17. *([5]) Si I est un intervalle généralisé. Une partition de I est un ensemble fini P d'intervalles généralisés contenus dans I, tels que pour tout x dans I se trouve exactement dans l'un des intervalles généralisés E dans P.*

Exemple : L'ensemble $P = \{\{2\},]2,5[, [5,6[, \{6\},]6,9[\}$ d'intervalles généralisés est une partition de $[2,9]$.

Définition 1.18. *([5]) Soit I un intervalle généralisé, soit $g : I \longrightarrow I\!R$ une fonction, et soit P une partition de I. f est dite constante par morceaux par rapport à P si pour chaque $E \in P$, f est constante sur E.*

Exemple 1.3. *La fonction* $f : [1,4] \longrightarrow I\!R$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 1 \leq x < 2, \\ 2, & x = 2, \\ 5, & 2 < x < 4, \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

est constante par morceaux par rapport à la partition $\{[1,2), \{2\}, (2,4), \{4\}\}$ *de* $[1,4]$.

1.4 Théorèmes du point fixe

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit (X, d) un espace métrique complet. Une application $F : X \to X$ est une contraction avec la constante de Lipshitz k ($k \in]0,1[$). Alors F a un point fixe unique $x \in X$.

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Soit K un sous-ensemble non-vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet au moins un point fixe.

1.5 Types de stabilité

1.5.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 1.19. *([21]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyres s'il existe un nombre réel* $C_f > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, I\!R)$ *de l'inégalité :*

$$| D^u x(t) - f(t, x(t), I^u x(t)) | \leq \varepsilon, t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, I\!R)$ *de l'équation (1) vérifiant :*

$$| x(t) - y(t) | \leq C_f, t \in J.$$

1.5.1.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyres généralisée

Définition 1.20. *([21]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyres généralisée, s'il existe une fonction* $\psi_f \in C(I\!R_+, I\!R_+)$, $\psi_f(0) = 0$, *tel que pour tout* $\varepsilon < 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, I\!R)$ *de l'inégalité :*

$$| D^u x(t) - f(t, x(t), I^u x(t)) | \leq \varepsilon, t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, I\!R)$ *de l'équation (1) vérifiant :*

$$| x(t) - y(t) | \leq \psi_f(\varepsilon), t \in J.$$

1.5.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyres-Rassias

Définition 1.21. *([19]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyres-Rassias par rapport à $\varphi \in C(J, I\!R_+)$, s'il existe un nombre réel $C_f > 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(J, I\!R)$ de l'inégalité :*

$$| D^u x(t) - f(t, x(t), I^u x(t)) | \leq \varepsilon \varphi(t), t \in J, \tag{1.4}$$

il existe une solution $y \in C^1(J, I\!R)$ de l'équation (1) vérifiant :

$$| x(t) - y(t) | \leq C_f \varepsilon \varphi(t), t \in J.$$

Chapitre 2

Étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une équation differentielle fractionnaire

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{u(t)}x(t) = f(t, x(t), I^{u(t)}x(t)), t \in [0, T], \\ D^{u(t)-2}x(0) = -D^{u(t)-2}x(T), \\ D^{u(t)-1}x(0) = -D^{u(t)-1}x(T). \end{cases} \tag{2.1}$$

où D^{α}, I^{α} représentent la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre u et l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre u, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et $C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|$ tel que

$\|x\| = sup\{\|x(t)| : t \in J\}$.

2.1 Existence de solutions

Supposons l'hypothèse suivante :

(H1) Soient $\mathcal{P} = \{J_0 := (T_0, T_1], J_1 := (T_1, T_2], J_2 := (T_2, T_3], ..., J_n := (T_n, T_{n+1}]\}$ une partition de l'intervalle J (avec $T_0 = 0, T_{n+1} = T$) et soit $u(t) : J \to (1, 2]$ est une fonction constante par morceau par rapport à $\mathcal{P}$ définie comme suit :

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n} u_m I_m(t) = \begin{cases} u_0, & si\ t \in J_0, \\ u_1, & si\ t \in J_1, \\ . \\ . \\ . \\ u_n, & si\ t \in J_n, \end{cases}$$

où $1 < u_m \leq 2$ sont des constantes et I_m est un indicateur de l'intervalle $J_m, m = 1, \ldots, n$:

$$I_m(t) = \begin{cases} 1, & pour\ t \in J_m, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Par conséquent, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre variable $u(t)$ pour $x(t) \in C(J, \mathbb{R})$, peut être formuler comme une somme des dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche d'ordres constants $u_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ qui prend la forme :

$$D_{0^+}^{u(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - u(t))} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t (t-s)^{1-u(t)} x(s) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2 - u(t))} \Big(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^2}{dt^2} \int_{T_{k-1}}^{T_k} (t-s)^{1-u_k} x(s) ds + \frac{d^2}{dt^2} \int_{T_{m-1}}^{t} (t-s)^{1-u_m} x(s) ds \Big). \tag{2.2}$$

Ainsi, l'équation différentielle fractionnelle de Riemann-Liouville d'ordre variable (2.1) peut être reformuler pour chaque $t \in J_m,\ m = 1, 2, \ldots, n$ dans la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(2-u(t))}\Big(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^2}{dt^2}\int_{T_{k-1}}^{T_k}(t-s)^{1-u_k}x(s)ds + \frac{d^2}{dt^2}\int_{T_{m-1}}^{t}(t-s)^{1-u_m}x(s)ds\Big) \\ = \ & f(t, x(t), I_{0^+}^{u_m}x(t)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Soit la fonction $\tilde{x} \in C(J_m, \mathbb{R})$ telle que $\tilde{x}(t) \equiv 0$ sur $[0, T_{m-1}]$, et qu'elle satisfasse l'equation différentielle fractionnaire suivante :

$$D_{T_{m-1}^+}^{u_m}\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t), I_{T_{m-1}^+}^{u_m}\tilde{x}(t)), \quad t \in J_m.$$

Conformément à l'équation ci-dessus, pour chaque $m = 1, 2, \ldots, n$, nous avons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{T_{m-1}^+}^{u_m}x(t) = f(t, x(t), I_{T_{m-1}^+}^{u_m}x(t)),\ t \in J_m, \\ D_{T_{m-1}^+}^{u_m-2}x(T_{m-1}) = -D_{T_{m-1}^+}^{u_m-2}x(T_m), \quad D_{T_{m-1}^+}^{u_m-1}x(T_{m-1}) = -D_{T_{m-1}^+}^{u_m-1}x(T_m). \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1.1 Lemmes Auxiliaires

Dans la présente section, on présente quelques lemmes qui seront utilisés dans ce chapitre.

Lemme 2.1. *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $[0, b]$, alors la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire $D^\alpha f(x) = 0$ est donneé par :*

$f(x) = w_0 t^{\alpha-n} + w_1 t^{\alpha-n-1} + ... + w_{n-2}t^{\alpha-2} + w_{n-1}t^{\alpha-1}$,

où $w_i \in I\!R, i = 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1,$ avec $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Lemme 2.2. *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[0, b]$, alors*

$I^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) + w_0 t^{\alpha-n} + w_1 t^{\alpha-n-1} + ... + w_{n-2}t^{\alpha-2} + w_{n-1}t^{\alpha-1}$, *où*

$w_i \in I\!R, i = 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1.$

proposition :

1. *si* $\alpha < 0$, *alors* $D^\alpha f = I^{-\alpha} f$.

2. *soit* $\beta \in [0,\alpha]$, *alors* $D^\beta I^\alpha f = I^{\alpha-\beta} f$.

3. *si* $\lambda > -1, \lambda \neq \alpha-1, \alpha-2, ..., \alpha-n$, *alors*

   .$D^\alpha t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}$.

   .$D^\alpha t^{\lambda-i} = 0, i = 1,2,...,n$.

4. .*si* $\alpha \notin I\!N$, *alors :* $D^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$.

   . *si* $\alpha \in I\!N$, *alors* $D^\alpha 1 = 0$.

Lemme 2.3. *[7, 8] Soient* $f \in C(J_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, *et il exsiste un nombre* $\delta \in (0,1)$ *tel que* $t^\delta f \in C(J_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si x *est la solution de l'équation integrale*

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} (t-s)^{u_m-1} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)) ds - \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)) ds$$

$$- \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} (T_m - T_{m-1} - 2s) f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)) ds. \tag{2.5}$$

Alors la fonction $x \in E_m$ *est une solution de probleme (2.4).*

Preuve : Soit $x \in E_m$ une solution de problème (2.4). En appliquant l'opérateur $I^{u_m}_{T^+_{m-1}}$ aux deux cotés de (2.4), on trouve :

$$x(t) = w_1 t^{u_{m-1}} + w_0 t^{u_{m-2}} + I^{u_m}_{T^+_{m-1}} f(t, x(t), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)), \tag{2.6}$$

où w_0 et w_1 sont des constants arbitraire. Maintenant, on cherche les constantes w_0 et w_1 . En appliquant $D^{u_m-1}_{T^+_{m-1}}$ au deux cotés de (2.6), on trouve

$$D^{u_m-1} x(t) = w_1 \Gamma(u_m) + I^1 f(t, x(t), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)).$$

À partir de la condition aux limites

$D^{u_m-1}_{T^+_{m-1}}x(T_{m-1}) = -D^{u_m-1}_{T^+_{m-1}}x(T_m)$, on obtient

$$w_1 = -\frac{1}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}x(t))ds,$$

puisque $I^{2-u_m}(t^{u_m-1}) = \Gamma(u_m)t$ et $I^{2-u_m}(t^{u_m-2}) = \Gamma(u_m-1)$, à partir de la condition aux limites $D^{u_m-2}_{T^+_{m-1}}x(T_{m-1}) = -D^{u_m-2}_{T^+_{m-1}}x(T_m)$, on obtient

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{(T_m + T_{m-1})}{4\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}x(t))ds \\ &- \frac{1}{2\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}(T_m - s)f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}x(t))ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$x(t) = \int_{T_{m-1}}^{T_m} G_m(t,s)f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}x(t))ds,$$

où $G_m(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G_m(t,s) = \begin{cases} -\frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)} - \frac{(T_m-T_{m-1}-2s)t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)} + \frac{1}{\Gamma(u_m)}(t-s)^{u_m-1}, \\ \hfill T_{m-1} \le s \le t \le T_m, \\ \hfill -\frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)} - \frac{(T_m-T_{m-1}-2s)t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)}, \\ \hfill T_{m-1} \le t \le s \le T_m, \end{cases}$$

où $m = 1, 2, ..., n$.

Hypothèse

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du probléme (2.4), on considère l'hypothèse suivante :

(H2) Soit $t^\delta f \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il existe des constantes $K, L > 0$ tel que

$$t^\delta |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \le K|x_1 - x_2| + L|y_1 - y_2|,$$

pour tout $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$, $t \in J$ et $\delta = 2 - u$.

2.1.2 Existence et unicité de solutions

Unicité de solutions

En se basant sur le principe de contraction de Banach, l'unicité de la solution du problème (2.4) sera prouvée.

Théorème 2.1. *Supposons que les deux conditions (H1) et (H2) sont vérifiées et si*

$$\Big(\frac{K(T_m^{1-2\delta}-T_{m-1}^{1-2\delta})}{(1-2\delta)\Gamma(u_m)}+\frac{L(T_m-T_{m-1})^{u_m}}{\Gamma(u_m+1)}\Big)\Big[T_m^{\delta}(T_m-T_{m-1})^{u_m-1}+\frac{T_m}{2}+\Big|\frac{(T_m-T_{m-1})(u_m-1)}{4}\Big|$$

$$+\Big|\frac{(u_m-1)}{2}\Big|\Big(\frac{(1-2\delta)(T_m^{2-2\delta}-T_{m-1}^{2-2\delta})}{(2-2\delta)(T_m^{1-2\delta}-T_{m-1}^{1-2\delta})}\Big)\Big]<1. \tag{2.7}$$

Alors le problème (2.4) a une solution unique dans $C_\delta(J_m, I\!R)$.

Preuve : On va essayer de transformer le problème (2.4) en un problème de point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur : $S : C_\delta([T_{m-1},T_m]) \to C_\delta([T_{m-1},T_m])$ défini par

$$\begin{aligned} Sx(t) &= \frac{1}{\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{t}(t-s)^{u_m-1}f(s,x(s),I_{T_{m-1}^+}^{u_m}x(t))ds-\frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}f(s,x(s),I_{T_{m-1}^+}^{u_m}x(t))ds. \\ &- \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}(T_m-T_{m-1}-2s)f(s,x(s),I_{T_{m-1}^+}^{u_m}x(t))ds. \end{aligned}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur S sont les solutions du problème (2.4). L'opérateur S est bien défini. En effet, si $x \in C_\delta([T_{m-1},T_m])$ alors $Sx \in C_\delta([T_{m-1},T_m])$.

Pour démontrer que S admet un point fixe, il suffit de démontrer que S est un opérateur contractant.

Soient $x, y \in C_\delta([T_{m-1}, T_m])$ et $t \in [T_{m-1}, T_m]$, on a alors :

$$t^\delta|(Sx)(t) - (Sy)(t)|$$

$$\leq \frac{t^\delta}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} (t-s)^{u_m-1} \Big| f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s)) - f(s, y(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} y(s)) \Big| ds$$

$$+ \frac{t}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} \Big| f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s)) - f(s, y(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} y(s)) \Big| ds$$

$$+ \frac{1}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} |-T_m + T_{m-1} + 2s| \Big| f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s)) - f(s, y(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} y(s)) \Big| ds$$

$$\leq K \Big[\frac{t^\delta}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} s^{-\delta} (t-s)^{u_m-1} |x(s) - y(s)| ds + \frac{t}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-\delta} |x(s) - y(s)| ds$$

$$+ \frac{1}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-\delta} \Big| T_m - T_{m-1} - 2s \Big| |x(s) - y(s)| ds \Big]$$

$$+ L \Big[\frac{t^\delta}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} s^{-\delta} (t-s)^{u_m-1} I^{x_m}_{T^+_{m-1}} (|x(s) - y(s)|) ds + \frac{t}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-\delta} I^{x_m}_{T^+_{m-1}} (|x(s) - y(s)|) ds$$

$$+ \frac{1}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-\delta} \Big| T_m - T_{m-1} - 2s \Big| I^{x_m}_{T^+_{m-1}} (|x(s) - y(s)|) ds \Big]$$

par la définition de $\|.\|_\delta$, on obtient

$$\|(Sx)(t) - (Sy)(t)\|_\delta$$

$$\leq K \Big[\frac{t^\delta}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} s^{-2\delta} (t-s)^{u_m-1} |x(s) - y(s)| ds + \frac{t}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-2\delta} |x(s) - y(s)| ds$$

$$+ \frac{1}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-2\delta} \Big| T_m - T_{m-1} - 2s \Big| |x(s) - y(s)| ds \Big]$$

$$+ L \Big[\frac{t^\delta}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} s^{-2\delta} (t-s)^{u_m-1} I^{x_m}_{T^+_{m-1}} (|x(s) - y(s)|) ds + \frac{t}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-2\delta} I^{x_m}_{T^+_{m-1}} (|x(s) - y(s)|) ds$$

$$+ \frac{1}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-2\delta} \Big| T_m - T_{m-1} - 2s \Big| I^{x_m}_{T^+_{m-1}} (|x(s) - y(s)|) ds \Big]$$

$$\leq \left(\frac{T_m^{1-2\delta} - T_{m-1}^{1-2\delta}}{(1-2\delta)\Gamma(u_m)} \right) \left(K + \frac{L(T_m - T_{m-1})^{u_m}}{\Gamma(u_m+1)} \right) \Big[T_m^\delta (T_m - T_{m-1})^{u_m-1} + \frac{T_m}{2} + \left| \frac{(T_m - T_{m-1})(u_m-1)}{4} \right|$$

$$+ \left| \frac{(u_m-1)}{2} \right| \left(\frac{(1-2\delta)(M_m^{2-2\delta} - T_{m-1}^{2-2\delta})}{(2-2\delta)(T_m^{1-2\delta} - T_{m-1}^{1-2\delta})} \right) \Big] \|x - y\|_\delta.$$

D'après (2.7), S est un opérateur contractant, donc d'après le théorème du point fixe de Banach, nous pouvons conclure que S possède un point fixe unique, qui est en réalité une solution unique au problème (2.4).

D'où la démonstration du Théorème 2.1.

Existence de solution :

Le théorème suivant établit l'existence d'une solution au moins du problème (2.4), la preuve du ce théorème est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.2. *Supposons que lemme(2.3) est vérifiée et s'il existe une constante $N > 0$ tel que*

$$t^{\delta}|f(t, x, I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t))| \leq N, \quad \forall t \in J_m,$$

avec $\delta = 2 - u$. Alors, le problème (2.4) admet au moins une solution dans $C_{\delta}([T_{m-1}, T_m])$.

Preuve Transformons le problème (2.4) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $S : C_{\delta}([T_{m-1}, T_m]) \to C_{\delta}([T_{m-1}, T_m])$, défini par

$$\begin{aligned} Sx(t) &= \frac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} (t-s)^{u_m-1} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)) ds - \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)) ds \\ &- \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} (T_m - T_{m-1} - 2s) f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(t)) ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

On déduire, à partir des propriétés des intégrales fractionnaires et de la continuité de la fonction $t^{\delta} f$ que l'opérateur S défini dans (2.8) est bien défini.

On considère l'ensemble

$$B_{R_m} = \{x \in C_{\delta}([T_{m-1}, T_m]), \ \|x\|_{\delta} \leq R_m\}.$$

où

$$\begin{aligned} R_m &\geq \frac{N(T_m^{1-\delta}-T_{m-1}^{1-\delta})}{(1-\delta)\Gamma(u_m)}\Big[T_m^{\delta}(T_m-T_{m-1})^{u_m-1}+\frac{T_m}{2}+\Big|\frac{(T_m-T_{m-1})(u_m-1)}{4}\Big| \\ &+ \Big|\frac{(u_m-1)(1-\delta)(T_m^{2-\delta}-T_{m-1})^{2-\delta}}{2(2-\delta)(M_m^{1-\delta}-T_{m-1})^{1-\delta}}\Big|\Big], \end{aligned}$$

Il est clair que B_{R_m} non vide , bornée, fermé et convexe.

Maintenant, on démontre que S vérifié les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder.

La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 :

pour $x \in B_{R_m}$ et $t \in [T_{m-1}, T_m]$, on a

$$\begin{aligned} & t^{\delta}|(Sx)(t)| \\ \leq \quad & \frac{Nt^{\delta}}{\Gamma(u_m)}\int_{T_m-1}^{t} s^{-\delta}(t-s)^{u_m-1}ds+\frac{Nt}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m} s^{-\delta}ds \\ + \quad & \frac{N}{4\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}\Big|T_m-T_{m-1}-2s\Big|s^{-\delta}ds \\ \leq \quad & \frac{N(T_m^{1-\delta}-T_{m-1}^{1-\delta})}{(1-\delta)\Gamma(u_m)}\Big[T_m^{\delta}(T_m-T_{m-1})^{u_m-1}+\frac{T_m}{2}+\Big|\frac{(T_m-T_{m-1})(u_m-1)}{4}\Big| \\ + \quad & \Big|\frac{(u_m-1)(1-\delta)(T_m^{2-\delta}-T_{m-1})^{2-\delta}}{2(2-\delta)(T_m^{1-\delta}-T_{m-1})^{1-\delta}}\Big|\Big], \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|(Sx)\|_{\delta} \leq \tfrac{N(T_m^{1-\delta}-T_{m-1}^{1-\delta})}{(1-\delta)\Gamma(u_m)}\Big[T_m^{\delta}(T_m-T_{m-1})^{u_m-1}+\tfrac{T_m}{2}+\Big|\tfrac{(T_m-T_{m-1})(u_m-1)}{4}\Big| \\ +\Big|\tfrac{(u_m-1)(1-\delta)(T_m^{2-\delta}-T_{m-1})^{2-\delta}}{2(2-\delta)(T_m^{1-\delta}-T_{m-1})^{1-\delta}}\Big|\Big]. \end{aligned}$$

Alors $S(B_{R_m})$ est uniformément borné.

Étape 2 : On montre que $S(B_{R_m})$ est relativement compact, ce qui signifie que S est compact. clairement $S(B_{R_m})$ est uniformément borné car à l'étape 1.

Pour $t_1, t_2 \in J_m$, et $x \in B_{R_m}$, on a :

$$\left|t_1^\delta (Sx)(t_1) - t_2^\delta (Sx)(t_2)\right|$$

$$= \Big|\tfrac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t_1} \Big[t_1^\delta (t_1 - s)^{u_m-1} - t_2^\delta (t_2 - s)^{u_m-1}\Big] f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s))ds$$

$$-\tfrac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{t_1}^{t_2} t_2^\delta (t_2 - s)^{u_m-1} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s))ds - \tfrac{(t_1-t_2)}{2\Gamma(u_m-1)} \int_{T_m-1}^{T_m} f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s))ds\Big|$$

$$\leq N\Big(\Big|\tfrac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t_1} \Big[t_1^\delta (t_1 - s)^{u_m-1} - t_2^\delta (t_2 - s)^{u_m-1}\Big] ds$$

$$-\tfrac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{t_1}^{t_2} t_2^\delta (t_2 - s)^{u_m-1} ds\Big| + \Big|\tfrac{(t_1-t_2)}{2\Gamma(u_m-1)} \int_{T_m-1}^{T_m} ds\Big|\Big).$$

D'où $\left|t_1^\delta (Sx)(t_1) - t_2^\delta (Sx)(t_2)\right| \to 0$ quand $|t_1 - t_2| \to 0$. Cela implique $t^\delta S(B_{R_m})$ est équi-continu .

Étape3 : Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R} \setminus x = \alpha Sx, 0 < \alpha < 1\},$$

et on montre que l'ensemble Λ est borné .

Pour tout $t \in [T_m - 1, T_m]$, on a :

$$|x(t)| \leq \alpha\Big[\tfrac{1}{\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{t} (t-s)^{u_m-1} |f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s))|ds + \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)} \int_{T_{m-1}}^{T_m} |f(s, x(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}} x(s))|ds$$

$$+\tfrac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1} \int_{T_{m-1}}^{T_m} \Big|T_m - T_{m-1} - 2s\Big|ds\Big].$$

Alors

$$\|(Sx)\|_\delta \leq \frac{N(T_m^{1-\delta}-T_{m-1}^{1-\delta})}{(1-\delta)\Gamma(u_m)}\Big[T_m^\delta(T_m-T_{m-1})^{u_m-1}+\frac{T_m}{2}+\Big|\frac{(T_m-T_{m-1})(u_m-1)}{4}\Big|$$
$$+\Big|\frac{(u_m-1)(1-\delta)(T_m^{2-\delta}-T_{m-1})^{2-\delta}}{2(2-\delta)(T_m^{1-\delta}-T_{m-1})^{1-\delta}}\Big|\Big].$$

D'après le théorème du point fixe de Schauder, on démontre que l'opérateur S admet au moins un point fixe, ce qui implique que le problème (2.4) admet au moins une solution.

Théorème 2.3. *Si les conditions (H1), (H2), et (2.7) sont satisfaites. Alors, le problème (2.1) admet une unique solution dans* $C_\delta([0,T])$.

Preuve. Pour tout $m \in \{1,2,\ldots,n\}$, D'après le théorème (2.1), le problème des équations différentielles fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre constant (2.4) possède une solution unique $\widetilde{x}_m \in C_\delta([T_{m-1},T_m])$.

Pour tout $m \in \{1,2,\ldots,n\}$, nous définissons la fonction

$$x_m = \begin{cases} 0, & t \in [0,T_{m-1}], \\ \widetilde{x}_m, & t \in J_m. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ainsi, la fonction $x_m \in C_\delta([T_{m-1},T_m])$ résout l'équation d'intégrale (2.3) pour $t \in J_m$, ce qui signifie que $x_m(0)=0,\ x_m(T_m)=\widetilde{x}_m(T_m)=0$.

Alors la fonction

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), \quad t \in J_1, \\ x_2(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in J_1, \\ \widetilde{x}_2, \quad t \in J_2, \end{cases} \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [0, T_{n-1}], \\ \widetilde{x}_n, \quad t \in J_n, \end{cases} \end{cases} .$$

est une solution de l'équation différentielle fractionnelle de Riemann-Liouville d'ordre variable (2.1) dans $C_\delta([0, T])$.

Chapitre 3

Stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Ce chapitre est consacrée à l'étude de stabilité au sens d'Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias de l'équation différentielle fractionnaire (2.1).

3.1 Stabilité d'Ulam-Hyers

Théorème 3.1. *Supposons que les deux conditions (H1) et (H2) sont satisfaites, alors le problème (2.1) est stable au sens d'Ulam- Hyers.*

Démonstration 3.1. *Soient $\varepsilon > 0$ et $z \in C(J, I\!R)$ une fonction vérifiant :*

$$| D_{0^+}^{u(t)} z(t) - f(t, z(t), I_{0^+}^{u(t)} z(t)) | \leq \varepsilon, t \in J$$

et aussi $x \in C(J, I\!R)$ l'unique solution du problème (2.1)

En utilisant le lemme (2.3), on obtient :

$$\widetilde{x}_m(t) = \int_{T_{m-1}}^{t_m} G_m(t,s) f(s, \widetilde{x}_m(s), I_{T_{m-1}^+}^{u_m} \widetilde{x}_m(s)) ds$$

En effet,

$| z(t) - x(t) |=| z(t) - x_m(t) |=| z_m(t) - \widetilde{x}_m(t) |$

$=| z_m(t) - \int_{T_{m-1}}^{t_m} G_m(t,s) f(s, \widetilde{x}_m(s), I_{T_{m-1}^+}^{u_m} \widetilde{x}_m(s)) ds |$

$\leq| z_m(t) - \int_{T_{m-1}}^{t_m} G_m(t,s) f(s, z_m(s), I_{T_{m-1}^+}^{u_m} z_m(s)) ds |$

$+ | \int_{T_{m-1}}^{t_m} G_m(t,s) f(s, z_m(s), I_{T_{m-1}^+}^{u_m} z_m(s)) ds - \int_{T_{m-1}}^{t_m} G_m(t,s) f(s, \widetilde{x}_m(s), I_{T_{m-1}^+}^{u_m} \widetilde{x}_m(s)) ds |$

$\leq \frac{\varepsilon (T_m - T_{m-1})^{u_m}}{\Gamma(u_m+1)} \Bigg[\frac{(t-T_{m-1})^{u_m-1}(t^{1-\delta} - T_{m-1}{}^{1-\delta})}{(1-\delta)\Gamma(u_m)} + \frac{t^{u_m-1}(T_m^{1-\delta} - T_{m-1}{}^{1-\delta})}{2(1-\delta)\Gamma(u_m)}$

$+ \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)} \Bigg(\Bigg(T_m - T_{m-1} \Bigg) \Bigg(\frac{T_m^{1-\delta} - T_{m-1}{}^{1-\delta}}{1-\delta} \Bigg)$

$- \Bigg(\frac{T_m^{2-\delta} - T_{m-1}{}^{2-\delta}}{2-\delta} \Bigg) \Bigg) \Bigg] \Bigg(K + \frac{L(T_m - T_{m-1})^{u_m}}{\Gamma(u_m+1)} \Bigg) \| z_m - \widetilde{x}_m \|_{E_m})$

$\leq \frac{\varepsilon (T_m - T_{m-1})^{u_m}}{\Gamma(u_m+1)} \mu \| z - x \|_J.$

Alors pour chaque $t \in J_m$

$| z(t) - x(t) |\leq \| z - x \| \leq \frac{\varepsilon (T_m - T_{m-1})^{u_m}}{(1-\Gamma)\Gamma(u_m+1)} := C_f \varepsilon.$

Donc le problème (2.1) est Ulam-Hyers stable .

Exemple 3.1.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{u_t} x(t) = \frac{1}{15(t+1)^{1/4}\exp(t)(1+|x(t)|+|I_{0^+}^{u(t)}x(t)|)}, \\ \\ D_{0^+}^{u_m-2}x(0) = -D_{0^+}^{u_m-2}x(2), \qquad D_{0^+}^{u_m-1}x(0) = -D_{0^+}^{u_m-1}x(2). \end{cases} \tag{3.1}$$

Posons

$$f(t,x,z) = \frac{1}{15(t+1)^1/4\exp(t)(1+|x|+|z|)}, \qquad (t,x,z) \in [0,2].$$

Il est clair que la fonction f et continue sur $\mathbb{R} * \mathbb{R}$ et

$$u(t) = \begin{cases} 3/2, & t \in J_1 = [0,1], \\ \\ 6/5, & t \in J_2 =]1,2]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Par (3.2), le problème (3.1) est divisée en deux expressions comme suit :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{3/2} x(t) = \frac{1}{15(t+1)^{1/4}\exp(t)(1+|x(t)|+|I_{0^+}^{3/2}x(t)|)} \\ \\ D_{0^+}^{-1/4}x(0) = -D_{0^+}^{-1/4}x(1), \qquad D_{0^+}^{1/2}x(0) = -D_{0^+}^{1/2}x(1). \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{cases} D_{1^+}^{6/5} x(t) = \frac{1}{15(t+1)^{1/4}\exp(t)(1+|x(t)|+|I_{0^+}^{6/5}x(t)|)} \\ \\ D_{2^+}^{-4/5}x(1) = -D_{2^+}^{-4/5}x(2), \qquad D_{1^+}^{1/5}x(1) = -D_{1^+}^{1/5}x(2). \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour tout $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,2]$,

on a : $t^\delta |f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| = \dfrac{t^(1/4)}{15(t+1)^{1/4}\exp(t)} \left| \dfrac{(|\bar{u}| - |u|) + (|\bar{v}| - |v|)}{1 + |x(t)| + |I_{0^+}^{u(t)} x(t))} \right|$

$$\leq \frac{1}{15\exp(t)} \left| \frac{(|\bar{u}| - |u|) + (|\bar{v}| - |v|)}{1 + |x(t)| + |I_{0^+}^{u(t)} x(t)|)} \right|,$$

d'autre par, pour $t \in [0.3]$ on a :

$$\frac{1}{15\exp(t)} \leq \frac{1}{15\exp(0)},$$

finalement :

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq \frac{1}{15}[|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|],$$

comme $K = L = \dfrac{1}{15}$, alors (H_2) est satisfaite.

De plus, pour $m = 1$, on a :

$$\Big(\frac{\frac{1}{15}(T_1^{1-2\delta} - T_0^{1-2\delta})}{(1-2\delta)\Gamma(3/2)} + \frac{\frac{1}{15}(T_1 - T_0)^{3/2}}{\Gamma(3/2+1)}\Big)\Big[T_1^\delta (T_1 - T_0)^{3/2-1} + \frac{T_1}{2} + \Big|\frac{(T_1 - T_0)(3/2-1)}{4}\Big|$$

$$+\Big|\frac{(3/2-1)}{2}\Big|\Big(\frac{(1-2\delta)(T_1^{2-2\delta} - T_0^{2-2\delta})}{(2-2\delta)(T_1^{1-2\delta} - T_0^{1-2\delta})}\Big)\Big] < 1. \tag{3.5}$$

Pour $m = 2$, on a :

$$\Big(\frac{\frac{1}{15}(T_2^{1-2\delta} - T_1^{1-2\delta})}{(1-2\delta)\Gamma(6/5)} + \frac{\frac{1}{15}(T_2 - T_1)^{6/5}}{\Gamma(6/5+1)}\Big)\Big[T_2^\delta (T_2 - T_1)^{6/5-1} + \frac{T_2}{2} + \Big|\frac{(T_2 - T_1)(6/5-1)}{4}\Big|$$

$$+\Big|\frac{(6/5-1)}{2}\Big|\Big(\frac{(1-2\delta)(T_2^{2-2\delta}-T_1^{2-2\delta})}{(2-2\delta)(T_2^{1-2\delta}-T_1^{1-2\delta})}\Big)\Big] < 1. \tag{3.6}$$

Alors la condition (2.7) est satisfaite pour $m = 2$.

D'après le théorème (2.1), le problème (3.1) a une unique solution , et sa solution est stable au sens d' Ulam-Hyers.

3.2 Stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) soient vérifiées et*

(H3) *la fonction $\kappa \in C(J, \mathbb{R}_+)$ est croissante et il existe $\lambda_\kappa > 0$ tel que*

$$I^{u_m}_{T_{m-1}^+}\kappa(t) \leq \lambda_\kappa\ \kappa(t), \quad \textit{for}\ \ t \in J_m, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors, le problème (2.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à κ.

Preuve :

Soit $z \in E_m$ est une solution de l'inégalité (1.4) et $\widetilde{x}_m \in E_m$ est une solution de problème (2.4). En utilisant le lemme (2.3), on a :

$$\widetilde{x}_m(t) = \frac{1}{\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{t}(t-s)^{u_m-1}f(s,\widetilde{x}(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}\widetilde{x}(s))ds - \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}f(s,\widetilde{x}(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}\widetilde{x}(s))ds \tag{3.7}$$

$$-\frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}(T_m - T_{m-1} - 2s)f(s,\widetilde{x}(s), I^{u_m}_{T^+_{m-1}}\widetilde{x}(s))ds.$$

Par intégration de (1.4) et à partir de (H2), On obtient

$$
\begin{aligned}
&|z(t)-x(t)| = |z(t)-x_m(t)| = |z_m(t)-\widetilde{x}_m(t)| \\
\leq\ & \left|z_m(t) - \frac{1}{\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{t}(t-s)^{u_m-1}f(s,z_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}z_m(s))ds\right. \qquad (3.8)\\
+\ & \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m} f(s,z_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}z_m(s))ds \\
+\ & \left.\frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}(T_m-T_{m-1}-2s)f(s,z_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}z_m(s))ds\right| \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{t}(t-s)^{u_m-1}\Big|f(s,z_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}z_m(s)) - f(s,\widetilde{x}_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}\widetilde{x}_m(s))\Big|ds \\
+\ & \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}\Big|f(s,z_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}z_m(s)) - f(s,\widetilde{x}_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}\widetilde{x}_m(s))\Big|ds \\
+\ & \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(w_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}(T_m-T_{m-1}-2s)\Big|f(s,z_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}z_m(s)) - f(s,\widetilde{x}_m(s),I^{u_m}_{T^+_{m-1}}\widetilde{x}_m(s))\Big|ds \\
\leq\ & \lambda_\kappa\ \epsilon\ \kappa(t) + \frac{1}{\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{t}s^{-\delta}(t-s)^{u_m-1}(K|z_m(s)-\widetilde{x}_m(s)| + LI^{u_\ell}_{T^+_{\ell-1}}|z_m(s)-\widetilde{x}_m(s)|)ds \\
+\ & \frac{t^{u_m-1}}{2\Gamma(u_m)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}s^{-\delta}(K|z_m(s)-\widetilde{x}_m(s)| + LI^{u_\ell}_{T^+_{\ell-1}}|z_m(s)-\widetilde{x}_m(s)|)ds \\
+\ & \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)}\int_{T_{m-1}}^{T_m}(T_m-T_{m-1}-2s)s^{-\delta}(K|z_m(s)-\widetilde{x}_m(s)| + LI^{u_\ell}_{T^+_{\ell-1}}|z_m(s)-\widetilde{x}_m(s)|)ds \\
\leq\ & \lambda_\kappa\ \varepsilon\ \kappa(t) + \Big[\frac{(t-T_{m-1})^{u_m-1}(t^{1-\delta}-{T_{m-1}}^{1-\delta})}{(1-\delta)\Gamma(u_m)} + \frac{t^{u_m-1}(T_m^{1-\delta}-{T_{m-1}}^{1-\delta})}{2(1-\delta)\Gamma(u_m)} \\
+\ & \frac{t^{u_m-2}}{4\Gamma(u_m-1)}\bigg(\Big(T_m-T_{m-1}\Big)\Big(\frac{T_m^{1-\delta}-{T_{m-1}}^{1-\delta}}{1-\delta}\Big) \\
-\ & \Big(\frac{T_m^{2-\delta}-{T_{m-1}}^{2-\delta}}{2-\delta}\Big)\bigg)\Big]\Big(K + \frac{L(T_m-T_{m-1})^{u_m}}{\Gamma(u_m+1)}\Big)\|z_m-\widetilde{x}_m\|_{E_m}) \\
\leq\ & \lambda_\kappa\ \varepsilon\ \kappa(t) + \mu\|z-x\|_J.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|z-x\|_J\Big(1-\mu\Big) \quad \leq \quad \lambda_\kappa\varepsilon\ \kappa(t)
$$

Alors, pour chaque $t \in J_m$

$$
|z(t)-x(t)| \leq \frac{\lambda_\kappa}{1-\mu}\varepsilon\kappa(t).
$$

Alors, Le problème (2.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à κ.

Exemple 3.2. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D_{0^+}^{u(t)}x(t) = \sin x(t) + 2\cos(t)sin(I_{0^+}^{u_m}x(t)), \quad t \in J, \\ D_{0^+}^{u(t)-2}x(0) = -D_{0^+}^{u(t)-2}x(2), \ D_{0^+}^{u(t)-1}x(0) = -D_{0^+}^{u(t)-2}x(2), . \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit

$$f(t,x,z) = sinx + 2\cos(t)sin(z), \ (t,x,z) \in [0,2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

et

$$u(t) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & t \in J_1 := [0,1], \\ \frac{7}{4}, & t \in J_2 :=]1,2]. \end{cases} \tag{3.10}$$

par (3.10), *le problème* (*3.9*) *est divisée en deux expressions comme suit :*

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{5}{4}}x(t) = \sin x(t) + 2\cos(t)sin(I_{0^+}^{\frac{5}{4}}x(t)), \quad t \in J_1, \\ D_{0^+}^{-\frac{3}{4}}x(0) = -D_{0^+}^{-\frac{3}{4}}x(1), \ D_{0^+}^{\frac{1}{4}}x(0) = -D_{0^+}^{\frac{1}{4}}x(1), \end{cases} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{cases} D_{1^+}^{\frac{7}{4}}x(t) = \sin x(t) + 2\cos(t)sin(I_{1^+}^{\frac{7}{4}}x(t)), \quad t \in J_2, \\ D_{1^+}^{-\frac{1}{4}}x(1) = -D_{1^+}^{-\frac{1}{4}}x(2), \ D_{1^+}^{\frac{3}{4}}x(1) = -D_{1^+}^{\frac{3}{4}}x(2). \end{cases} \tag{3.12}$$

Pour $m = 1$, on a :

$$t^{\delta}\Big|f(t,x)\Big| \quad \leq \quad t^{\frac{3}{4}}\Big|\sin x(t) + 2\cos(t)sin(I_{0^+}^{\frac{5}{4}}x(t))\Big| \leq 3 = N.$$

Soit $\kappa(t) = t^{\frac{1}{2}}$. Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u_1}\kappa(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{4})}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{4}} s^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \tfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{4})}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{4}} ds \\ &\leq \tfrac{4}{5\Gamma(\frac{5}{4})}\kappa(t) := \lambda_{\kappa(t)}\kappa(t), \end{aligned}$$

où $\lambda_\kappa = \frac{4}{5\Gamma(\frac{5}{4})}$. Alors, la condition (H3) est satisfaite.

D'après le Théorème 2.1, le problème (3.11) admet une solution unique $\widetilde{x}_1 \in E_1$.

pour $m = 2$. *On a :*

$$t^{\delta}\Big|f(t,x)\Big| \quad \leq \quad t^{\frac{1}{4}}\Big|\sin x(t) + 2\cos(t) sin(I_{0^+}^{\frac{7}{4}} x(t))\Big| \leq 3(2)^{\frac{1}{4}} = N.$$

Soit $\kappa(t) = t^{\frac{1}{2}}$. *Ensuite, nous obtenons*

$$\begin{aligned} I_{1^+}^{u_2}\kappa(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(\frac{7}{4})}\int_1^t (t-s)^{\frac{3}{4}} s^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \tfrac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{7}{4})}\int_1^t (t-s)^{\frac{3}{4}} ds \\ &\leq \tfrac{4\sqrt{2}}{7\Gamma(\frac{7}{4})}\kappa(t) := \lambda_{\kappa(t)}\kappa(t), \end{aligned}$$

où $\lambda_\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{7\Gamma(\frac{7}{4})}$. *ainsi, la condition (H3) est satisfaite.*

D'après le Théorème 2.1, le problème (3.12) admet une solution unique $\widetilde{x}_2 \in E_2$.

Par Théorème 2.3, le problème (3.9) possède une solution

$$x(t) = \begin{cases} \widetilde{x}_1(t), & t \in J_1, \\ x_2(t), & t \in J_2, \end{cases}$$

où

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in J_1, \\ \widetilde{x}_2(t), & t \in J_2, \end{cases}$$

et par Théorème (3.2), le problème (3.9) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a appliqué les théorèmes de point fixe pour étudiée un problème aux limites au sens de Riemann-Liouville dans un espace de Banach et en particulier pour démontrer l'existence et l'unicité des solution du problème fractionnaire posé.

En effet, on a d'abord transformé l'ordre fractionnaire d'une variable en un ordre constante en utilisant la fonction constante par morceaux, puis on a établit les hypothesès assurant l'existence et l'unicité de solutions et on a étudié la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias.

Bibliographie

[1] Akgül, A. ; Inc, M. ; Baleanu, D. On solutions of variable-order fractional differential equations, *Int. J. Opt. Control : Theories & Appl.* **7**(1), 112-116 (2017)

[2] Albadarneh, R, B. Zerqat, M. et Batiha, I, B. Numerical solutions for linear and non-linear fractional differential equations international. *Journal of pure and Applied Mathématics*, 106, 859-871 (2016)

[3] Baleanu, D. ; Etemad, S. ; Rezapour, Sh. A hybrid Caputo fractional modeling for thermostat with hybrid boundary value conditions, *Bound. Value Probl.* **2020**, 64 (2020)

[4] Bashir, A. ; Juan, J.N. ; *Riemann-Liouville fractional differential equations with fractional boundary conditions*, *Fixed Point Theory.* **13**(2), 329-336 (2012)

[5] Benkerrouche, A. ; Souid, M. S. ; Chandok, S. ; Hakem, A. *Existence and stability of a Caputo variable-order boundary value problem*, *Journal of Mathematics*, **2021** (2021)

[6] Benkerrouche, A. ; Souid, M. S. ; Sitthithakerngkiet, K. ; Hakem, A. *implicit nonlinear fractional differential equations of variable order*, *Boundary Value Problems*, **2021**(64), 1-16 (2021)

[7] Bouazza, Z ; Etemad, S ; Souid, M. S ; Rezapour, S ; Matinez, F ; and Kaabar, M. K. A. *A Study on the Solutions of a Multiterm fractional boundary value problem of Variable*

Order, *Journal of Function Spaces*, **2021**(2021), 1-9.

[8] Bouazza, Z ; Souid, M. S and Günerhan. H. *Multiterm Boundary Value Problem of Caputo Fractional Differential Equations of Variable Order*, *Advances in Difference Equations*, **2021**(2021), 1-17.

[9] Coimbra, C.F.M. Mechanics with variable-order differential operators, *Annalen der physik.* **12**(11), 692–703 (2003)

[10] Djebali, S. Problèmes aux limites Associés aux E, D, O, du second ordre. 17-19 .

[11] Granas, A. ; Dugundji, J. *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, (2003)

[12] Hristova, S. ; Benkerrouche, A. ; Souid, M. S ; Hakem, A. Boundary value problems of Hadamard fractional differential equations of variable order, *Symmetry*, **13**(5), 1-16 (2021),

[13] Khan, S.A. ; Shah, K. ; Zaman, G. ; Jarad, F. Existence theory and numerical solutions to smoking model under Caputo Fabrizio fractional derivative, *Chaos, Interdiscip. J. Nonlinear Sci.* **29**, 013128 (2019)

[14] Kilbas, A.A. ; Srivastava, H.M. ; Trujillo, J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, Vol. **204**. Elsevier, Amsterdam (2006)

[15] Lin, R. ; Liu, F. ; Anh, V. ; Turner, I. Stability and convergence of a new explicit finite-difference approximation for the variable-order nonlinear fractional diffusion equation. *Appl. Math. Comput.* **212**(2), 435-445 (2009)

[16] Mohammadi, H. ; Kumar, S. ; Rezapour, Sh. ; Etemad, S. A theoretical study of the Caputo-Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to Mumps virus with optimal control. *Chaos, Solitons & Fractals*, **144**.

[17] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, New York, USA (1999)

[18] Raminia, A. ; Dizaji, A. F. ; Majd, V. J. Solution existence for nonautonomous variable-order fractional differential equations. *Math. Comput. Model.* **55**(3), 1106-1117 (2012)

[19] Refice, A. ; Souid, M. S. ; Stamova, I. On the boundary value problems of Hadamard fractional differential equations of variable order via Kuratowski MNC technique, *Mathematics*, **9**, 1134,(2021), 1-16.

[20] Rezapour, Sh. ; Etemad, S. ; Mohammadi, H. A mathematical analysis of a system of Caputo-Fabrizio fractional differential equations for the anthraxdisease model in animals. *Adv. Differ. Equ.* **2020**, 481 (2020)

[21] Rus, I. A. Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space. *Carpath. J. Math.* **26**, 103–107 (201O)

[22] Samko, S.G. Fractional integration and differentiation of variable order. *Anal. Math.*, **21**, 213–236 (1995)

[23] Samko, S. G. ; Boss, B. Integration and differentiation to a variable fractional order. *Integr. Transforms Spec. Funct.*, **1**, 277-300 (1993)

[24] Smart, D. R. Fixed point theorems, *Cambridge University Press.* **66**(1980)

[25] Sousa, J. V. D. C. ; de Oliverira, E. C. Two new fractional derivatives of variable order with non-singular kernel and fractional differential equation. *Comput. Appl. Math.*, **37**, 5375-5394 (2018)

[26] Sun, H. G. ; Chang, A. ; Zhang, Y. ; Chen, W. A review on variable-order fractional differential equations : Mathematical, foundations, physical models, and its applications. *Fract. Cal. Appl. Anal.* **22**(1) (2018)

[27] Thabet, S.T.M. ; Etemad, S. ; Rezapour, Sh. On a coupled Caputo conformable system of pantograph problems. *Turk. J. Math.* **45**(1), 496-519 (2021)

[28] Valerio, D. ; Costa, J. S. Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations. *Signal Process* **91**, 470–483 (2011)

[29] Zhang, S. Existence of solutions for two point boundary value problems with singular differential equations of variable order. *Elect. J. Differ. Equ.* **245**, 1-16 (2013)

[30] Zhang, S. ; Sun, S. ; Hu, L. Approximate solutions to initial value problem for differential equation of variable order. *J. Fract. Cal. Appl.* **9**(2), 93–112 (2018)

[31] Chargpin, L. et Fanhi, Z. Numerical methods for fractional calculus. *Volume 24 CRC press* (2015)