RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
Mathématiques

Option :
Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Présenté Par :
Kecir Khaoula
Trari Aicha

Sous l'intitulé :

Équations intégrales fractionnaires

Soutenu publiquement le 22 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mme SABIT souhila	MCA	Université Tiaret	Président
M. MAAZOUZ kadda	MCA	Université Tiaret	Encadreur
Mme BOUAZZA zoubida	MCB	Université Tiaret	Examinateur
M.HALLOUZ abdelhamid	DOCTORANT	Université Tiaret	Co-encadreur

Année universitaire :2022/2023

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout Puissant et Miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

En second lieu; ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de ***Dr.MAAZOUZ Kadda****; on le remercie pour la qualité de son encadrement, pour sa patience, sa rigueur tout le long de la période de réalisation de ce modeste travail.*

Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait en étant ***Dr.SABIT Souhila*** *président du jury et* ***Dr.BOUAZZA Zoubida*** *d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

Nos vifs remerciements sont adressés à nos parents pour nous avoir toujours soutenu et guidé dans la bonne direction pour l'éducation qui nous a permis de devenir que nous sommes aujourd'hui et aussi pour l'aide et les encouragements pour arriver au bout de cette formation.

Nos remerciements s'adresse également à tout nos enseignants pour leur générosité et la grande patience.

Nous adressons nos vifs remerciements à tous les employés de l'université.

DÉDICACE

Trari Aicha

Je dédie ce modeste travail

★ Mes chers parents ma mère et mon père pour leur patience, leur amour et leur soutien.

★ Mes frères et sœurs.

★ Mes amis et mes camarades.

★ Vos chers lecteurs.

Kecir Khaoula

Je dédie ce modeste travail

★ A mes chers parents qui m'ont ramené à cette vie d'abord et grâce à eux que j'ai vécu ce succès inoubliable.

★ A mes sœurs et mon frère ainsi à toute ma famille pour leur encouragements permanentes et leur soutien moral.

★ Mes amis qui m'encouragent à tout moments.

★ Tout mes enseignants.

★ Et en fin à toute personne qui voulait voir mon sucées.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solutions de certaines équations intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Les résultats obtenus ont été via l'approche des théorèmes du point fixe (Banach, Schauder, Leray-Schauder et Mönch) et la mesure de non compacité, on a illustré ces résultats par des exemples.

NOTATIONS GÉNÉRALES

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\chi(A)$	Mesure de non-compacité de Kuratowski.
L^p	Espace des fonctions intégrables.
$L^p_{loc}([0,a],E)$	Espace des fonctions localement intégrables sur $[0,a]$.
$L^p_{loc}([0,\infty[,E)$	Espace des fonctions localement intégrables sur $[0,\infty[$.
$C([0,a],E)$	Espace de Banach des fonctions continues bornées de $[0,a]$ dans E.
$C(J,\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$.
$BC(\mathbb{R}_+)$	Espaces de Banach de toutes les fonctions bornées et continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
P.P	Presque partout.
$\overline{A}$	Fermeture de A.
$conv(A)$	Enveloppe convexe de A.
$\overline{conv}(A)$	Enveloppe convexe fermé de A.
$B(u_0,\eta)$	Boule de centre u_0 et de rayon η.

Mots clés : Équations intégrales, solution L^p, mesure de non-compacité, existence et unicité, équation intégrales quadratiques, point fixe, applications de contraction, espace de Fréchet.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'existence et d'unicité des solutions pour quelques types d'équations intégrales fractionnaires.

Les équations intégrales sont l'un des outils mathématiques utiles dans l'analyse fonctionnelle et appliquée. Cela est particulièrement vrai pour les problèmes de vibrations, mécaniques, l'ingénierie et de la physique. On trouve de nombreuses applications des équations différentielles et intégrales d'ordre fractionnaire en viscoélasticité, électrochimie, contrôle, milieux poreux, électromagnétique, etc. Il y a eu un développement significatif dans les équations différentielle ordinaires et partielles d'ordre fractionnaire ces dernières années.

Parfois, il y a intérêt à réduire la résolution d'un problème à valeur initiale ou bien aux limites avec des conditions locales ou non locales à la résolution d'une équation intégrale équivalente, qui facilite la preuve d'existence de solution d'une celle équation différentielle, en utilisant les théorèmes de point fixe comme le théorème de Banach, Schauder, Leray Schauder et de Mönch puisqu'ils fournitent les outils nécessaires pour avoir des résultats d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents.
Ce mémoire se compose en quatre chapitres.

- **Premier chapitre**, nous donnons quelques définitions, théorèmes et rappels sur les espaces fonctionnels et quelques théorèmes de points fixes.

- **Deuxième chapitre**, on a étudié l'existence de solution dans l'espace des fonctions intégrables de l'équation fractionnaire suivante

$$u(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds,\ p.p,\ t > 0$$

  où P et Q sont des opérateurs de Volterra.

- **Troisième chapitre**, on a étudié l'existence et l'unicité de solution des équations intégrales quadratiques avec modification linéaire de l'argument.

$$x(t) = f(t) + (Ax)(t) \int_0^T u(t, s, x(s), x(\alpha s))ds, \quad t \in J,$$

et

$$x(t) = f(t) + g(t, x(t)) \int_0^T u(t, s, x(s), x(\alpha s))ds, \quad t \in J,$$

- **Quatrième chapitre**, nous obtenons l'existence et la stabilité asymptotique locale des solutions d'équations intégrales d'ordre fractionnaire

$$u(t) = f(t, u(\alpha(t))) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} g(t, s, u(\gamma(s)))ds; \ si \ t \in \mathbb{R}_+$$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.
Soit $C = ([0, a], E)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées de $[0, a]$ dans E muni de la norme

$$\|u(.)\|_E = \sup_{0 \leq t \leq a} \|u(t)\|_E.$$

$L^p([0, a], E)$ désigne la classe des fonctions intégrables de Lebesgue sur l'intervalle $[0, a]$ muni de la norme

$$\|u(.)\|_p := \left(\int_0^a \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p}$$

1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

Définition 1.1.1. ***(Espace de Banach)***
Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 1.1.2. ***(Espace*** $C[a, b]$***)***
L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$*, muni de la norme :*

$$\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Définition 1.1.3. ***(Espace de Fréchet)***
Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique réel complet dont la topologie induite par une famille dénombrable et séparant de semi-normes.

Remarque 1.1.1. *Il est bien connu que* $L^p_{loc}([0,\infty[,E)$ *est un espace de Fréchet par rapport aux semi-normes.*

$$\|u(.)\|_{p,k} := \left(\int_0^{t_k} \|u(t)\|^p dt\right)^{1/P} \quad pour \quad 1 < p < \infty,$$

avec $t_k \in [0,\infty[, k = 1,2,....$

Définition 1.1.4. *Soient* $(E,d),(F,d')$ *deux espaces métriques et* $f : E \longrightarrow F$ *une fonction. On dit que f lipschitzienne sur E, s'il existe une constante* $M \geq 0$ *telle que*

$$d'(f(x),f(y)) \leq Md(x,y), \forall x,y \in E$$

On dit aussi que f est M-lipschitzienne.

On dit que f est contractante si elle vérifie $M < 1$*.*

Définition 1.1.5. *(**Espaces des fonctions intégrables de Lebesgue** L^p) Soit* $L^1(J,\mathbb{R})$ *l'espace de Banach des fonctions u Lebesgue intégrables muni de la norme*

$$\|u\|_{L^1} = \int_J |u(t)|dt.$$

Tandis que $L^p(J,\mathbb{R})$ *désigne l'espace des fonctions intégrables de Lebesgue sur J où* $|u|^p$ *appartient à* $L^1(J,\mathbb{R})$*, muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_J |u(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},\ 1 < p < \infty.$$

En particulier, si $p = \infty, L^\infty(J,\mathbb{R})$ *est l'espace de toutes les fonctions u qui sont essentiellement bornées sur J avec un sup essentiel*

$$\|u\|_{L^\infty} = ess\sup_{t\in J}|u(t)| = \inf\{c > 0 : |u(t)| \leq c \quad p.p\}$$

1.2 Quelque définitions et théorèmes

Définition 1.2.1. ***(Semi norme)*** *Une semi norme est une application d'un espace vectoriel dans l'ensemble des réels positifs. C'est presque une norme mais une propriété est manquante, la semi norme d'un vecteur non nul peut être nulle.*

Définition 1.2.2. ***(Ensemble convexe)*** *Une partie C d'un espace vectoriel réel E est dite convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \alpha \in [0,1] :\ \alpha x + (1-\alpha) y \in C.$$

Définition 1.2.3. *Soit $C(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M est un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$.*
1. On dit que M est ***équicontinu*** *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in M, \forall t_1, t_2 \in J : \|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que M est ***uniformément borné*** *si et seulement si :*

$$\exists c > 0 : \|f(t)\| \leq c, \quad \forall t \in J, \quad \forall f \in M.$$

Lemme 1.2.1. *[10](**Lemme de Gronwall**) Soit $u : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ une application continue, positive. On suppose qu'il existe λ et μ deux fonctions continues $(\lambda \geq 0)$ satisfait*

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s) u(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, b].$$

Alors, u satisfait l'estimation suivante

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\mu(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \lambda(y) dy\right) ds.$$

Dans le cas particulier $\mu(t) \equiv C$, on obtient la majoration suivante :

$$u(t) \leq C\, exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds\right).$$

Définition 1.2.4. *[5] Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite* ***Carathéodory*** *si :*
(i) *La fonction $t \to f(t, x, y)$ est mesurable pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*
(ii) *La fonction $(x, y) \to f(t, x, y)$ est continue presque partout $t \in J$.*

Définition 1.2.5. *[4](**Théorème de convergence dominée de Lebesgue**) Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que*
(i)$f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
(ii) *il existe une fonction $g \in L^1$ telle que chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.*
Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Définition 1.2.6. *[4](**Inégalité de Hölder**)*
Soient p et q deux exposants conjugué (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p, g \in L^q$ alors,

$$f.g \in L^1 \quad et \quad \int |fg| \leq \|f\|_p.\|g\|_q.$$

Une cas particulier de l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$, on a

$$\int |f.g| \leq (\int |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.2.7. *[2] (**Mesure de non Compacité de Kuratowski**) La mesure de Kuratowski de la non-compacité d'un ensemble borné non vide $A \subset E$ est défini par :*
$\chi(A) = \inf\{\delta > 0;$ *A peut être exprimé comme l'union d'un nombre fini d'ensembles tel que la diamètre de chaque ensemble ne dépasse pas* $\delta\}$.
On rappelle quelques propriétés de χ. Si A,B sont des sous-ensembles bornés de E, alors :
(1) $\chi(A) = 0$ *si et seulement si* $\overline{A}$ *est compact.*
(2) $\chi(A) = \chi(\overline{A}) = \chi(\overline{conv}(A))$.
(3) $\chi(\lambda A) = |\lambda|\chi(A)$ *pour chaque* $\lambda \in \mathbb{R}^n$.
(4) $\chi(A) \leq \chi(B)$ *si* $A \subset B$.
(5) $\chi(A + B) \leq \chi(A) + \chi(B)$.
(6) $\chi(A \cup B) = max\{\chi(A), \chi(B)\}$.

Dans la suite, on note χ_p les mesures de Kuratowski de la non-compacité des ensembles dans l'espace $L^p([0, a], E)$.

Lemme 1.2.2. *[2]Soit A un ensemble dénombrable de fonctions fortement mesurable $u : [0, a] \to E$ tel qu'il existe un $m(.) \in L^1([0, a], \mathbb{R}_+)$ tel que $\|u(t)\| \leq m(t)$ pour chaque $u(.) \in A$ et pour presque tout $t \in [0, a]$. Alors la fonction $t \to v(t) := \chi(\{u(t); u(.) \in A\})$ est intégrable sur[0,a] et pour chaque $t \in [0, a]$, on a*

$$\chi\left(\left\{\int_0^t u(s)ds; u(.) \in A\right\}\right) \leq 2\int_0^t v(s)ds.$$

Lemme 1.2.3. *[8] Soit $A \subset L^p([0, a], E)(1 < p < \infty)$ dénombrable tel qu'il existe un $m(.) \in L^1([0, a], \mathbb{R}_+)$ tel que $\|u(t)\| \leq m(t)$ pour chaque $u(.) \in A$ et pour presque tout $t \in [0, a]$.*
(i) Si

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u(.)\in A} \int_0^a \|u(t + h) - u(t)\|^p dt = 0 \tag{1.1}$$

alors

$$\chi_p(A) \leq 2\left(\int_0^a [\chi(A(t))]^p dt\right)^{1/P}$$

(ii) A est relativement compact si et seulement si (1.1) est satisfait et $A(t)$ est relativement compact (en E) pour presque tout $t \in [0, a]$.

Définition 1.2.8. ***(Dérivation Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville)*** *Soit α un nombre fractionnaire tel que $\alpha \in [m-1, m]$, $m = [\alpha] + 1$, on appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville la fonction noté :*

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = (\frac{d}{dt})^m[(I_a^{m-\alpha})f](t)$$

Définition 1.2.9. ***(Dérivation Fractionnaire au sens de Caputo)*** *Soit α un nombre fractionnaire tel que $\alpha \in [m-1, m]$, $m = [\alpha] + 1$ et $f \in C^m([a, b], \mathbb{R})$ on appelle dérivée fractionnaire au sens de Caputo la fonction définie comme suite :*

$$({}^{c}D_a^\alpha f)(t) = ([I^{m-\alpha} \circ (\frac{d}{dt})^m]f)(t)$$

1.3 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales sont classées par leurs caractéristiques selon trois caractéristiques de base décrient leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

1.3.1 Équations intégrales de Volterra

Dans les équations intégrales de Volterra, au moins une des bornes de l'intégration est une variable et la fonction inconnue $u(x)$ apparaît seulement á l'intérieur du signe intégral sous la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt. \tag{1.2}$$

(1.2) est appelée **équation intégrale de Volterra non homogène du premier type**.

Exemple 1.

$$xe^{2x-1} = \int_0^x e^{xt}u(t)dt.$$

Cependant,dans les équations intégrales de Volterra, où la fonction inconnue $u(x)$ apparaît á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt. \tag{1.3}$$

(1.3) est appelée **équation intégrale de Volterra non homogène du deuxième type**.

Exemple 2.

$$u(x) = e^{2x} + \frac{1}{4}\int_0^x \ln\left(\frac{t}{x}\right) u(t)dt.$$

1.3.2 Équation intégrales de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm, les bornes de l'intégration sont fixées. La fonction inconnue $u(x)$ peut apparaître seulement á l'intérieur de l'équation intégrale sous la forme :

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{1.4}$$

(1.4) est appelée **équation intégrale de Fredholm non homogène du premier type**.

Exemple 3.

$$\cos(x) = \int_0^1 (x-t)u(t)dt.$$

Pour les équations intégrales du second type de Fredholm, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{1.5}$$

(1.5) est appelée **équation intégrale de Fredholm non homogène du deuxième type**.

Exemple 4.

$$u(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{x+1} u(t)dt$$

Remarque 1.3.1. *On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.*

1.4 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 1.4.1. *Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.*

Théorème 1.4.1. *[6] (**Théorème de point fixe de Banach**) Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow F$ une application K-contractante. Alors il existe un unique point fixe $x' \in E$ de f dans E (c-à-d une unique solution de $f(x') = x'$).*

Théorème 1.4.2. *[6] (**Théorème de point fixe de Schauder**) Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé, borné et non vide, et soit $T : K \to K$ un opérateur complètement continue. Alors T admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.4.3. *[3](**Alternative non linéaire de Leray-Schauder**) Supposons que $\boldsymbol{U}$ un ouvert d'un espace de Fréchet $\boldsymbol{X}$, $0 \in U$, et $F : \bar{U} \to X$ soit une contraction telle que $F(\bar{U})$ soit bornée. Alors on a l'arternatif suivant*

(C1) F admet un point fixe unique dans $\bar{U}$.

(C2) il existe $\lambda \in (0, 1)$ et $u \in \partial U$ avec la propriété $u = \lambda F(u)$.

Théorème 1.4.4. *[9] **Théorème de point fixe de Mônch***
Soit E un espace de Banach, $K \subset E$ un ensemble non vide fermé et convexe, et $F : K \to K$ continue avec la propriété supplémentaire que, pour certains $x \in K$, on a

$$C \subset K \text{ dénombrable, } \overline{C} \subset \overline{conv}(\{x\} \cup F(C)) \Rightarrow C \text{ est relativement compact.}$$

Alors F admet un point fixe dans K.

Lemme 1.4.1. *Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach $C(J, E)$, G une fonction continue sur $J \times J$ et $f : J \times E \longrightarrow E$ une fonction de Carathéodory, et supposons qu'il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ tel que, pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble bornée $B \subset E$, on a*

$$\lim_{h \to 0^+} \mu(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\mu(B), \text{ avec } J_{t,h} = [t-h, t] \cap [0, T].$$

Si V est un sous-ensemble équi-continu de D, alors

$$\mu\left(\left\{\int_J G(s,t)f(s,y(s))ds : \ y \in V\right\}\right) \leq \int_J ||G(s,t)||p(s)\mu(V(s))ds.$$

CHAPITRE 2

SOLUTIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DANS L^P

Dans ce chapitre, on considérons l'existence de solution dans L^p pour une classe d'équations intégrales fractionnaires en impliquant des opérateurs abstraits de Volterra dans un espace de Banach séparable.

Considérons l'équation intégrale fractionnaire dans un espace de Banach E :

$$u(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds,\ p.p,\ t > 0, \tag{2.1}$$

où P,Q :$L^p_{loc}([0,a],E) \to L^p_{loc}([0,a],E),\ 1 < p < \infty$, sont des opérateurs Volterra abstraits continues, $(Pu)(0) = u_0$ pour tous $u \in L^p_{loc}([0,a],E)$ pour un donné $u_0 \in E,\ \alpha > 0$ et $0 < a \leq \infty$. On rappelle qu'un opérateur $Q : L^p_{loc}([0,a],E) \to L^p_{loc}([0,a],E)$ est un opérateur causal ou un opérateur de Volterra abstrait si, pour chaque $\tau \in [0,a]$ et pour tous $u(.), v(.) \in L^p_{loc}([0,a],E)$ avec $u(t) = v(t)$ pour chaque $t \in [0,\tau]$, nous avons $Qu(t) = Qv(t)$ pour $t \in [0,\tau]$ presque partout.

Le contenu de ce chapitre est basé sur la référence [2].

2.1 Existence de solutions dans L^p sur des intervalles finis.

Dans cette section, nous obtenons un résultat de l'existence de solution dans l'espace pour l'équation fractionnaire intégrale suivante

$$u(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds \tag{2.2}$$

presque partout $t \in [0, a]$, oú P,Q :$L^p([0, a], E) \to L^p([0, a], E)$ sont des opérateurs de Volterra $a \in [0.\infty[$ et $1 < p < \infty$ est un nombre réel tel que $p > 1/\alpha$ avec $\alpha \in [0, 1]$. On suppose aussi que :

(H1) P : $L^p([0, a], E) \to L^p([0, a], E)$ est un opérateur de Volterra abstrait complètement continue tel que $b(.) \in L^p([0, a], \mathbb{R}_+)$ existe avec

$\|(Pu)(t)\| \leq b(t)$ pour presque tout $t \in [0, a]$

(H2) Q :$L^p([0, a], E) \to L^p([0, a], E)$ est un opérateur de Volterra abstrait continue tel que $c(.) \in L^p([0, a], \mathbb{R}_+)$ et $d > 0$ existe avec

$\|(Qu)(t)\| \leq c(t) + d\|u(t)\|$ pour presque tout $t \in [0, a]$,
et pour tout $u(.) \in L^p([0, a], E)$.

(H3) Il existe un $K_1 > 0$ tel que

$$\chi((QH)(t)) \leq K_1 \chi(H(t)) \tag{2.3}$$

pour $t \in [0, a]$ et pour chaque sous-ensemble bornée $H \subset L^p([0, a], E)$.

Remarque 2.1.1. *La mesure de non-compacité ne peut être éliminée des hypothèses à cause des critères de compacité dans les espaces $C([0, a], E)$ et $L^p([0, a], E)$, lorsque E est un espace de Banach de dimension infinie. On sait que l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre $a > 0$, donnée par*

$$(I^\alpha)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} u(s) ds$$

définit un opérateur linéaire bornée I^α à partir de $L^p([0, a], E)$ en lui-même, et aussi de $C([0, a], E)$ en lui-même.
Cependant, dans le cas d'espaces de Banach de dimension infini, cet opérateur ne cartographie pas les ensembles compacts sur des intervalles bornés. Par exemple, si on considère la boule $B(0, \Gamma(\alpha + 1)/a^\alpha)$ dans $C([0, a], E)$, alors $I^\alpha(B(0, \Gamma(\alpha + 1)/a^\alpha)) = B(0, 1) \subset C([0, a], E)$.
Or, la boule unité n'est pas un compact dans $C([0, a], E)$.

Théorème 2.1.1. *Supposons que les conditions (H1)-(H3) soient satisfaites, alors l'équation intégrale fractionnaire (2.2) admet une solution dans $L^p([0,a],E)$, pourvu que*

$$\gamma := \tfrac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\tfrac{1}{\alpha p}\right)^{1/p} \left(\tfrac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-1/p} \leq \tfrac{1}{d}. \tag{2.4}$$

Preuve Premièrement nous allons montrer que chaque solution de (2.2) est a priori bornée dans $L^p([0,a],E)$. En effet, depuis

$$\|u(t)\| \leq \|(Pu)(t))\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|(Qu)(s)\| ds$$

alors, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|(Pu)(t))\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{q(\alpha-1)}\right)^{1/q} \|(Qu)(.)\|_p \\ &\leq b(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-1/p} t^{\alpha-1/p} [\|c(.)\|_p + d\|u(.)\|_p], \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|u(.)\|_p \leq \|b(.)\|_p + \gamma[\|c(.)\|_p + d\|u(.)\|_p].$$

Alors, en utilisant (2.4), on a $\|u(.)\|_p \leq r$, oú

$$r \geq \frac{\|b(.)\|_p + \gamma\|c(.)\|_p}{1-d\gamma}.$$

Ensuite on considère l'opérateur A défini par

$$(Au)(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (Qu)(s) ds \ p.p\ t \in [0,a]. \tag{2.5}$$

Si on pose $B := \{u(.) \in L^p([0,a],E) : \|u(.)\|_p \leq r\}$, alors il facile de vérifier que $A(B) \subset B$, c'est-à-dire A est un opérateur de B dans lui-même.

Montrons maintenant que A est un opérateur continue. Pour cela, soit $\{u_n(.)\}_{n\geq 1}$, une suite convergente dans $L^p([0,a],E)$ tel que $u_n(.) \to u(.)$ lorsque $n \to \infty$.

Puis

$$\begin{aligned}\|(Au_n)(t)-(Au)(t)\| &\le \|(Pu_n)(t)-(Pu)(t)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|(Qu_n)(s)-(Qu)(s)\|ds\\ &\le \|(Pu_n)(t)-(Pu)(t)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-1/p}.t^{\alpha-(1/p)}\|(Qu_n)(.)-(Qu)(.)\|_p\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\|(Au_n)(.)-(Au)(.)\|_p \le \|(Pu_n)(.)-(Pu)(.)\|_p+\gamma\|(Qu_n)(.)-(Qu)(.)\|_p.$$

Puisque P et Q sont des opérateur continue, $\|(Au_n)(.)-(Au)(.)\|_p \to 0$ lorsque $n\to\infty$, de sorte que A est un opérateur continue.
Dans l'étape suivante, nous montrons que

$$\lim_{h\to 0}\sup_{u(.)\in B_0}\int_0^a \|(Au)(t+h)-(Au)(t)\|^p dt=0$$

pour tout sous-ensemble dénombrable B_0 in B. Si $t\in[0,a]$ et $h>0$ sont tels que $t+h\in[0,a]$, alors, pour tout $u(.)\in B_0$ on a

$$\begin{aligned}\|(Au)(t+h)-(Au)(t)\| &\le \|(Pu)(t+h)-(Pu)(t)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t+h-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}|.\|(Qu)(s)\|ds\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{t+h}(t+h-s)^{\alpha-1}\|(Qu)(s)\|ds\\ &= \|(Pu)(t+h)-(Pu)(t)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\eta_1(t,h)+\eta_2(t,h)].\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}\eta_1(t,h) &\le \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}-(t+h-s)^{\alpha-1}|\|(Qu)(s)\|ds\\ &\le \left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-1/p}.\left(h^{(p-1)/(\alpha p-1)}+t^{(p-1)/(\alpha p-1)}-(t+h)^{(p-1)/(\alpha p-1)}\right)^{1-1/p}.\|(Qu)(.)\|_p\\ &\le \eta\left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-1/p}h^{\alpha-1/p},\end{aligned}$$

et

$$\eta_2(t,h)=\int_t^{t+h}(t+h-s)^{\alpha-1}\|(Qu)(s)\|ds \le \eta\left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-1/p}h^{\alpha-1/p},$$

oú $\eta := \|c(.)\|_p+dr$.

Puis,

$$\int_0^a \eta_i^p(t,h)dt \leq a\eta^p \left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{p-1} h^{\alpha p-1} \to 0,\ \textit{comme}\ h \to 0, \quad i=1,2. \tag{2.6}$$

Puisque P est un opérateur compact, en utilisant le lemme 1.2.3, on a

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u(.)\in B_0} \int_0^a \|(Pu)(t+h)-(Pu)(t)\|^p dt = 0 \tag{2.7}$$

par conséquent, puisque

$$\begin{aligned}\int_0^a \|(Au)(t+h)-(Au)(t)\|^p dt \leq 2^{p-1} &\int_0^a \|(Pu)(t+h)-(Pu)(t)\|^p dt \\ &+ \frac{2^{p-1}}{[\Gamma(\alpha)]^p} \int_0^a [\eta_1(t,h)+\eta_2(t,h)]^p dt,\end{aligned}$$

et on utilisant (2.6) et (2.7), on obtient

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u(.)\in B_0} \int_0^a \|(Au)(t+h)-(Au)(t)\|^p dt = 0 \tag{2.8}$$

Ensuite, soit H un sous-ensemble dénombrable de B tel que $H \subset \overline{conv}((AH)\cup\{0\})$. Nous utiliserons les critère de compacité du lemme 1.2.3 pour montrer que H est un ensemble relativement compact dans $L^p([0,a],E)$. Premièrement à partir de (2.8), on a

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u(.)\in H} \int_0^a \|u(t+h)-u(t)\|^p dt = 0 \tag{2.9}$$

Puisque H est un ensemble borné dans $L^p([0,a],E)$ à partir de (2.9) et du lemme 1.2.3, on a

$$\chi_p(H) \leq 2\left(\int_0^a [\alpha(H(t))]^p dt\right)^{1/p} \tag{2.10}$$

d'autre part, en utilisant les propriétés des mesures de non-compacité de Kuratowski et (2.3), on a

$$\chi(H(t)) \leq \chi(\overline{conv}(((AH)(t))\cup\{0\})) = \chi((AH)(t))$$

En utilisant la compacité de l'opérateur P, on a

$$\begin{aligned}\chi(H(t)) &\leq \chi\left((PH)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(QH)(s)ds\right)\\ &\leq \chi((PH)(t)) + \chi\left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(QH)(s)ds\right)\\ &\leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\chi(H(s))ds,\end{aligned}$$

et donc, il s'ensuit que $\chi(H(t)) = 0$ pour tout $t \in [0,a]$, maintenant, par (2.10), on obtient $\chi(H(t)) = 0$, c'est-à-dire que H est un ensemble relativement compact dans $L^p([0,a],E)$, en résumé, nous avons montré que $A : B \to B$ est un opérateur continu avec la propriété que, pour un sous-ensemble dénombrable H de B tel que $H \subset \overline{conv}((AH)(t)) \cup \{0\})$, H est relativement compact. Puisque B est un ensemble fermé et convexe dans $L^p([0,a],E)$ alors d'après le théorème du point fixe de Mönch, il s'ensuit qu'il existe $u(.) \in B$ tel que $u(.) = (Au)(.)$, c'est-à-dire que l'équation intégrale (2.2) admet au moins une solution $u(.) \in B$.

Théorème 2.1.2. *Soient les conditions(H1)et(H2)satisfaites. Supposons également qu'il existe $0 < L_1 < 1$ et $L_2 > 0$ tels que les conditions de type Lipschitz suivants soient satisfaites :*

$$\|(Pu)(t) - (Pv)(t)\| \leq L_1\|(u)(t) - (v)(t)\| \tag{2.11}$$

et

$$\|(Qu)(t) - (Qv)(t)\| \leq L_2\|(u)(t) - (v)(t)\|, \tag{2.12}$$

pour presque tout $t \in [0,a]$ et $u(.), v(.) \in L^p([0,a],E)$. Ensuite, (2.2) a une solution unique, pourvu que (2.4) soit vérifiée et

$$L_1 + \gamma L_2 < 1 \tag{2.13}$$

Preuve Soit $A : L^p([0,a],E) \to L^p([0,a],E)$ l'opérateur défini par (2.5). Alors, pour tout $u(.), v(.) \in L^p([0,a],E)$, et pour presque tout $t \in [0,a]$, on a

$$\begin{aligned}\|(Au)(t) - (Av)(t)\| &\leq \|(Pu)(t) - (Pv)(t)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|(Qu)(s) - (Qv)(s)\|ds\\ &\leq L_1\|(u)(t) - (v)(t)\|\end{aligned}$$

de sorte que

$$\|(Au)(.) - (Av)(.)\|_p \leq (L_1 + \gamma L_2)\|(u)(.) - (v)(.)\|_p.$$

Puisque $L_1 + \gamma L_2 < 1$, il s'ensuit que A est une contraction de $L^p([0,a],E)$. Par conséquent, A admet un unique point fixe, et donc, (2.2) admet une unique solution $u(.) \in L^p([0,a],E)$.

Remarque 2.1.2. *Soit $g(.) \in L^p([0,a],E)$ une fonction donnée l'opérateur constant $P : L^p([0,a],E) \to L^p([0,a],E)$, défini par $(Pu)(.) = g(.)$ pour tout $u(.) \in L^p([0,a],E)$, est évidemment un opérateur de Volterra compact et abstrait ou. Aussi, il est bien connu que le problème de valeur initial suivant impliquant la dérivée fractionnaire de Caputo*

$$\begin{cases} ({}^C D^\alpha u)(t) = (Qu)(t), & \text{pour presque tout}, t \in [0,a] \\ u(o) = u_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

est équivalente à l'équation suivant

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds \text{ pour presque tout } t \in [0,a].$$

par conséquent, les résultats suivants sont valables.

Corollaire 1. *Si $g(.) \in L^p([0,a],E)$ et*

$$Q : L^p([0,a],E) \to L^p([0,a],E),$$

sont des opérateur de Volterra abstraits continues vérifiant les conditions du Théorème 2.1.1, alors l'équation intégrale fractionnaire

$$u(t) = g(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds$$

admet au moins une solution dans $L^p([0,a],E)$ pourvu que $1 - d\gamma > 0$.

Corollaire 2. *Si $Q : L^p([0,a],E) \to L^p([0,a],E)$ est un opérateur de Volterra abstrait continue vérifiant les conditions du Théorème 2.1.1, alors le problème aux valeurs initiales (2.14) admet au moins une solution dans $\Omega^{p,\alpha}([0,a],E)$ pourvu que $1 - d\gamma > 0$.*

2.2 Existence de solutions dans L^p sur des intervalles infinis

On obtient une résultat de l'existence de solution globale à l'équation intégrale fractionnaire dans l'espace $L^p_{loc}([0,\infty[,E)$ pour l'équation intégrale fractionnaire suivante

$$u(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds, \text{ pour presque tout}, \ t > 0 \tag{2.15}$$

où $P, Q : L^p([0,\infty[, E) \to L^p([0,\infty[, E)$ sont des opérateurs abstraits de Volterra.

Théorème 2.2.1. *Soit $p \geq 1$ tel que $p > 1/\alpha$ avec $\alpha \in (0,1)$. Supposons que, pour tout $\alpha \in [0,\infty[$, les opérateurs $P, Q : L^p([0,\infty[, E) \to L^p([0,\infty[, E)$ satisfont(H1)(H3). Alors, l'équation intégrale fractionnaire (2.15) admet au moins une solution dans $L^p_{loc}([0,\infty[, E)$ pourvu que $1 - d\gamma > 0$.*

Preuve Soit $0 < t_1 < t_2 < t < ... < t_n < ...$ tel que $t_n \to \infty$ comme $n \to \infty$. Alors, d'après le Théorème 2.1.1, pour tout $n = 1, 2, ...$, il existe $u(.)_n \in L^p([0, t_n], E)$ qui résout

$$u_n(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Qu)(s)ds \tag{2.16}$$

presque partout $t \in [0, t_n]$. De plus, il existe des constantes $r_k \in [0,\infty[,\ k = 1, 2, ...$, telles que $n \geq k$ implique

$$\|u(.)\|_{p,k} = \left(\int_0^{t_k} \|u_n(t)\|^p dt\right)^{1/p} \leq r_k.$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.1.1, il est facile de montrer que $\{u_n(.)\}_{n\geq k}$ est relativement compact dans $L^p([0, t_k], E)$ pour $k = 1, 2, ...,$. En particulier,$\{u_n(.)\}_{n\geq 1}$ est relativement compact dans $L^p([0, t_1], E)$. Donc il existe un ensemble infini $N_1 \subset \{1, 2, ...\}$ et une fonction $v_1(.) \in L^p[0, t_1]$ telle que

$$\int_0^{t_1} \|u_n(t) - v_1(t)\|^p dt \to 0 \textit{ comme } n \to \infty \textit{ dans } N_1.$$

Puisque $\{u_n(.)\}_{n\in N_1}$, est une suite de Cauchy dans $L^p([0, t_1], E)$, et elle converge vers $v_1(.)$, il existe un ensemble infini $N_1^1 \subset N_1$ tel que $u_n(t) \to v_1(t)$ presque partout sur $[0, t_1]$ lorsque $n \to \infty$ dans N_1^1. Soit $N_1^{12} = N_1^1 \backslash \{1\}$. Comme précédemment, $\{u_n(.)\}_{n\in N_1^{12}}$ est relativement compact dans $L^p([0, t_2], E)$. Donc, il existe un ensemble infini $N_2 \subset N_1^{12}$ et une fonction $v_2(.) \in L^p[0, t_2]$ telle que

$$\int_0^{t_2} \|u_n(t) - v_2(t)\|^p dt \to 0 \textit{ comme } n \to \infty \textit{ dans } N_2.$$

Puisque $\{u_n(.)\}_{n\in N_2}$, est une suite de Cauchy dans $L^p([0, t_2], E)$, il existe un ensemble infini $N_2^1 \subset N_2$ tel que $u_n(t) \to v_2(t)$ presque partout sur $[0, t_2]$ lorsque $n \to \infty$ dans N_2^1.
Ensuite, prenez $N_2^{12} = N_2^1 \backslash \{2\}$, et continuez l'argument par induction. Depuis $N_2^1 \subset N_1^1$, il s'ensuit que $v_1(.) = v_2(.)$ presque partout sur $[0, t_1]$. Maintenant, on définit la fonction $u(.) : [0,\infty[\to E$ par $u(t) = v_k(t)$

pour presque tout $t \in [0, t_k]$ et $k = 1, 2, ...$ puisque

$$\int_0^{t_n} \|u(t)\|^p dt = \int_0^{t_n} \|v_n(t)\|^p dt \leq r_n \; pour \; n = 1, 2, ...$$

il s'ensuit que $u(.) \in L^p_{loc}([0, \infty[, E)$.

Ensuite, nous montrons que la fonction $u(.)$ est solution de l'équation intégrale. Puisque $Q : L^p([0, t_k], E) \to L^p([0, t_k], E)$ est continue et $u_n(.) \to y_k(.)$ dans $L^p([0, t_k], E)$ comme $n \to \infty$ dans N_k, il existe un ensemble infini $M_k \subset N_k$ tel que $(Qu_n)(.) \to (Qy_k)(.)$ presque partout sur $[0, t_k]$ comme $n \to \infty$ dans M_k. D'autre part, si $t \in (0, t_k]$ est donné, alors il est facile de voir que

$$s \to m_k(s) := (t - s)^{\alpha - 1}(b(t) + \gamma \|c(.)\|_p + dr_k)$$

appartiennent $L^p([0, t_k], E)$, et $(t - s)^{\alpha - 1}\|(Qu_n)(s)\| \leq m_k(s)$ pour presque tout $s \in [0, t_k]$. Donc, en prenant $n \to \infty$ dans M_k dans (2.16). Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$v_k(t) = (Pv_k)(t) + \int_0^t \frac{(t - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} (Qv_k)(s) ds.$$

Puisque $v_k(t) = u(t)$ pour presque tout $t \in [0, t_k]$, on trouve

$$u(t) = (Pu)(t) + \int_0^t \frac{(t - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} (Qu)(s) ds$$

presque tout $t \in [0, t_k]$, et donc, $u(.)$ est une solution de (2.15) dans $L^p_{loc}([0, \infty[, E)$.

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE SOLUTIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES QUADRATIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence d'une solution sur un intervalle semi-infini $J := [0, \infty[$ pour les équations intégrales quadratiques suivante avec modification linéaire de l'argument dans les espaces de Fréchet.

$$x(t) = f(t) + (Ax)(t) \int_0^T u(t, s, x(s), x(\alpha s))ds, \quad t \in J, \tag{3.1}$$

et

$$x(t) = f(t) + g(t, x(t)) \int_0^T u(t, s, x(s), x(\alpha s))ds, \quad t \in J, \tag{3.2}$$

où $f := J \to \mathbb{R}, g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u : J \times J_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, $0 < \alpha < 1$, $J_T := [0, T]$, et $A : C(J; \mathbb{R}) \to C(J; \mathbb{R})$ est un opérateur approprié.

Le résultat basé sur alternative non linéaire de type Leray-Schauder pour les application dans les espaces de Fréchet.

Le contenu de ce chapitre est basé sur la référence [3].

3.1 Existence de solutions

Dans cette section, nous étudierons l'équation (3.1) en supposant que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a1) $f : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(a2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $L_n > 0$ tel que

$$|(Ax)(t) - (A\bar{x})(t)| \leq L_n|x(t) - \bar{x}(t)| \quad x, \bar{x} \in C(J;\mathbb{R}) \quad et \quad t \in [0,n]$$

(a3) Il existe des constantes non négatives a et b telle que

$$|(Ax)(t)| \leq a + b|x(t)|$$

pour chaque $x \in C(J,\mathbb{R})$ et $t \in J$.

(a4) $u : J \times J_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $L_n^* > 0$ telle que

$$|u(t,s,x,y) - u(t,s,\bar{x},\bar{y})| \leq L_n^*(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)$$

pour tout $t \in [0,n]$, $s \in J_T$, et $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$.

(a5) Il existe une fonction continue croissante $\Psi : J^2 \to [0,+\infty[$ et $p \in C(J;\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\tfrac{M_n}{\|f\|_n + T(a+bM_n)\Psi(M_n,M_n)p^*} > 1 \tag{3.3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $p^* = \sup p(s) : s \in J_T$.

Théorème 3.1.1. *Soit les hypothèses (a1)-(a5) satisfaite. Si, de plus, l'inégalité*

$$2(a + bM_n)L_n^*T + TL_n\Psi(M_n,M_n)p^* < 1 \tag{3.4}$$

est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors l'équation (3.1) admet une solution unique.

Preuve Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $C(J,\mathbb{N})$ les semi-normes par la formule

$$\|y\|_n := \sup |y(t)| : t \in [0,n].$$

Alors $C(J,\mathbb{N})$ est un espace la famille des semi-normes $\{\|.\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Transformer le problème (3.1) en un problème à point fixe. Considérons l'opérateur $\Delta : C(J;\mathbb{R}) \to C(J;\mathbb{R})$ défini par la relation

$$(\Delta y)(t) = f(t) + (Ay)(t)\int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds, \quad t \in J.$$

Soit y une solution possible du problème (3.1). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, donnés, compte tenu de (a1),(a2) et (a5), on a

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |f(t)| + |(Ay)(t)| \int_0^T |u(t,s,y(s),y(\alpha s))|ds \\
&\leq |f(t)| + (a + b|y(t)|) \int_0^T p(s)\Psi(|y(s)|, |y(\alpha s|)ds \\
&\leq \|f\|_n + T(a + b\|y\|_n)\Psi(\|y\|_n, \|y\|_n)p^*
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\|y\|_n}{\|f\| + T(a + b\|y\|_n)\Psi(\|y\|_n, \|y\|_n)p^*} \leq 1.$$

De (3.3) il s'ensuit que $\|y\|_n \neq M_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, maintenant, posez

$$\Omega y \in (J;\mathbb{R}) : \|y\|_n < M_n \quad pour\ tout \quad n \in \mathbb{N}$$

Clairement, Ω est un sous-ensemble ouvert $C(J,\mathbb{R})$, nous allons montrer que $\Delta : \bar{\Omega} \to C(J;\mathbb{R})$ est un opérateur de contraction. En effet, considérons $y, \bar{y} \in C(J;\mathbb{R})$, pour chaque $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$, de (a2)-(a5) on obtient

$$\begin{aligned}
|(\Delta y)(t) - (\Delta \bar{y})(t)| &\leq \left|(Ay)(t) \int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds - (A\bar{y})(t) \int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds\right| \\
&\leq \left|(Ay)(t) \int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds - (Ay)(t) \int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds\right| \\
&+ \left|(Ay)(t) \int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds - (A\bar{y})(t) \int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds\right| \\
&\leq |(Ay)(t)| \int_0^T |u(t,s,y(s,y(\alpha s)) - u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))|ds \\
&+ |(Ay)(t) - (A\bar{y})(t)| \int_0^T |u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))|ds \\
&\leq (a + b|y(t)|)L_n^* \int_0^T (|y(s) - \bar{y}(s)| + |y(\alpha s) - \bar{y}(\alpha s)|)ds \\
&+ L_n|y(t) - \bar{y}(t)| \int_0^T p(s)\Psi(|\bar{y}(s)|, |\bar{y}(\alpha s)|)ds \\
&\leq [2(a + bM_n)L_n^*T + TL_n\Psi(M_n, M_n)p^*]\|y - \bar{y}\|_n.
\end{aligned}$$

Conséquent

$$\|\Delta y - \Delta \bar{y}\|_n \leq [2(a + bM_n)L_n^*T + TL_n\Psi(M_n, M_n)p^*]\|y - \bar{y}\|_n.$$

Donc d'aprés (3.4) l'opérateur Δ est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du choix de Ω il n'y a pas de $y = \partial\Omega$ tel que $y = \lambda\Delta(y)$ pour un certain $\lambda \in (0,1)$, alors l'énonce (C2) de théorème 1.4.3 n'est pas vérifie une conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder donne que (C1) est vérifiée et donc on en déduit que l'opérateur Δ admet un point fixe dans $\bar{\Omega}$, qui est une solution de l'équation (3.1).

Théorème 3.1.2. *Soit les hypothèses satisfaite :*

(b1) $f : J \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*

(b2) $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $L_n > 0$ *tel que*

$$|g(t,x) - g(t,\bar{x})| \leq L_n|x - \bar{x}|, \quad \text{pour tout} \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in [0,n].$$

(b3) $u : J \times J_T \times \mathbb{R}^2$ *est une fonction continue, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe une constante* $L_n^* > 0$ *telle que*

$$|u(t,s,x,y) - u(t,s,\bar{x},\bar{y})| \leq L_n^*(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)$$

pour tout $(t,s) \in [0,n] \times J_T$ *et* $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$.

(b4) Il existe une fonction continue non décroissante $\Psi : J^2 \to [0, \infty[$ *et* $p \in C(J; \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$|u(t,s,x,y)| \leq p(s)\Psi(|x|,|y|)$$

pour chaque$(t,s) \in J \times J_T$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$*, et de plus il existe des constantes* $M_n \in J, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{M_n}{\|f\|_n + T(L_nM_n + m_n)\Psi(M_n,M_n)p^*} > 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$*, ou* $p^* = \sup\{p(s) : s \in J_T\}$ *et* $m_n = \sup\{g(t,0) : t \in [0,n]\}$
Si, en plus l'inégalité

$$2(L_nM_n + m_n)TL_n^* + TL_n\Psi(M_n,M_n)p^* < 1 \tag{3.5}$$

Alors l'équation (3.2) a une solution unique.

Preuve La preuve est similaire à celles du Théorème 3.1.1.

3.2 Exemple

Considérons l'équation intégrale quadratique de type Urysohn

$$n(t) = 1 + \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|} \int_0^T \frac{ts}{t^3+1} \left(x(s) + x(\frac{s}{2})\right) ds, \; t \in J := [0, +\infty). \tag{3.6}$$

On fixons $f(t) = 1$ pour chaque $t \in J, \; \Psi(x, y) = x + y \; pour \; tout \; x, y \geq 0$,

$$(Ax)(t) = \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}, \; t \in J \; et \; x \in C(J, \mathbb{R}),$$

et

$$u(t, s, x, y) = \frac{ts}{t^3 + 1}(x + y)$$

pour tout $(t, s) \in J \times J_T$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Il est clair que (3.6) est un cas particulier de l'équation (3.1). Montrons que les condition (a1)-(a5) sont vérifiées.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}, \; t \in [0, n], \; et \; x, \bar{x} \in C(J, \mathbb{R}_+)$, on a

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (A\bar{x})(t)| &= \left| \frac{|x(t)|}{1 + |\bar{x}(t)|} - \frac{|\bar{x}(t)|}{1 + |\bar{x}(t)|} \right| = \left| \frac{|x(t)| - |\bar{x}(t)|}{(1 + |x(t)|)(1 + |\bar{x}(t)|)} \right| \\ &\leq \frac{|x(t) - \bar{x}(t)}{(1 + |x(t)|)(1 + |\bar{x}(t))} \leq |x(t) - \bar{x}(t)|. \end{aligned}$$

Donc (a2) se satisfait de $L_n = 1$.

Pour chaque $t \in J$ et $x \in C(J, \mathbb{R})$, on a

$$|(Ax)(t)| = \left| \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} \right| \leq |x(t)|.$$

Donc (a3) tient avec $a = 0 \; et \; b = 1$ pour chaque $n \in \mathbb{N}, (t, s) \in [0, n] \times J_T, et, x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, ona$

$$\begin{aligned} |u(t, s, x, \bar{x}) - u(t, s, y, \bar{y})| &= \left| \frac{ts}{t^3 + 1} [(x + \bar{x}) - (y + \bar{y})] \right| \\ &\leq \left| \frac{ts}{t^3 + 1} [(x + y) - (\bar{x} + \bar{y})] \right| \\ &\leq \frac{nT}{n^3 + 1} [|x + y| - |\bar{x} + \bar{y}|] \\ &\leq T[|x - y| + |\bar{x} + \bar{y}|]. \end{aligned}$$

Donc (a4) se satisfait de $L_n^* = T$.

Pour tout $x \in \mathbb{N}, (t, s) \in [0, n] \times J_T,\ et\ x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |u(ts, x, y)| &= \left| \frac{ts}{t^3 + 1}(x + y) \right| \\ &\leq s(|x| + |y|) = s\Psi(|x|, |y|). \end{aligned}$$

Pour conclure que (a5) est vérifié, nous allons montrer que (3.3) est vérifiée. En effet

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{\|f\|_n + T(a + bM_n)\Psi(M_n, M_n)p^*} > 1 &\Longleftrightarrow \frac{M_n}{1 + 2T^2 M_n^2} > 1 \\ &\Longleftrightarrow 2T^2 M_n^2 - M_n + 1 < 0. \end{aligned}$$

Remarquer que la dernière inégalité est vraie pour $\mathbf{T}$ tel que $1 - 2T^2 > 0, i.e.,$

$$T < \tfrac{1}{2\sqrt{2}}. \tag{3.7}$$

Donc pour $T > 0$ satisfaisant (3.7), il existe $M_n > 0$ satisfaisant (3.3). Montrons enfin que (3.4) est satisfait

$$\begin{aligned} 2(a + bM_n)L_n^* T + TL_n\Psi(M_n, M_n)p^* - 1 &= 2M_n T^2 + 2T^2 M_n - 1 \\ &= 4M_n T^2 - 1. \end{aligned}$$

Donc (3.4) est satisfaite pour T ou M_n vérifie $4M_nT^2 - 1 < 0, i.e.,$ pour

$$0 < T < \frac{1}{2\sqrt{M_n}}$$

où $0 < M_n < \frac{1}{4}T^{-2}$. Par conséquent, si vérifie les inégalités

$$0 < T < \min\{\frac{1}{2\sqrt{M_n}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\}.$$

Alors il résulte du Théorème 3.1.1 que l'équation (3.6) a une solution unique.

CHAPITRE 4

EXISTENCE ET STABILITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE DES SOLUTIONS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats concernant l'existence et la stabilité asymptotique locale des solutions pour une équation intégrale fractionnaire.
On considérons l'équation intégrale quadratique non linéaire suivante de Volterra d'ordre fractionnaire

$$x(t) = f(t, x(\alpha(t))) + \int_0^{\beta(t)} g(t, s, x(\gamma(s)))ds; \quad t \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty[, \tag{4.1}$$

où α, β, $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. L'outil principal utilisé est la technique associée à une certaine mesure de non-compacité liée à la monotonie, et l'existence de solutions à l'équation intégrale quadratique non linéaire suivante de Volterra d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville

$$u(t) = f(t, u(\alpha(t))) + \tfrac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} g(t, s, u(\gamma(s)))ds; \ si\ t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.2}$$

où α, β, γ, f, g sont comme dans (4.1), $r \in [0, \infty[$ et $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma(d'Euler) définie par

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} t^{\xi-1} e^{-t} dt, \quad \xi > 0$$

On prouve l'existence de solutions d'équation(4.2) en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, et nous obtenons des résultats sur la stabilité asymptotique locale des solutions.

Le contenu de ce chapitre est basé sur la référence [1].

Définition 4.1.1. *Soit $r > 0$ pour $u \in L^1([0,b])$, $b > 0$ l'expression*

$$(I_0^r u)(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} u(s) ds,$$

est appelée intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre r.
En particulier,

$$(I_0^0 u)(t) = u(t), \quad (I_0^1 u)(t) = \int_0^t u(s) ds; \quad \textit{pour presque tout } t \in [0,b]$$

Par exemple, $I_0^r u$ existe pour tout $r > 0$ quand $u \in L^1([0,b])$. On note aussi que quand $u \in C([0,b])$, alors $(I_0^r u) \in C([0,b])$,

Exemple 5. *Soit $\omega \in [-1, \infty[$ et $r \in [0, \infty[$, alors*

$$I_0^r t^\omega = \frac{\Gamma(1+\omega)}{\Gamma(1+\omega+r)} t^{\omega+r}, \textit{ pour presque tout } t \in [0,b].$$

Soit G un opérateur de $\Omega \subset BC$; $\Omega \neq \emptyset$ dans lui-même et considérons les solutions de l'équation

$$(Gu)(t) = u(t). \tag{4.3}$$

Passons maintenant en revue le concept d'attractivité des solutions pour l'équation (4.2).

Définition 4.1.2. *Les solutions de l'équation (4.3) sont localement attractives s'il existe une boule $B(u_0, \eta)$ dans l'espace BC telle que pour des solutions arbitraires $v = v(t)$ et $\omega = \omega(t)$ des équation (4.3) appartenant à $B(u_0, \eta) \cap \Omega$ on a que*

$$\lim_{t \to \infty} (v(t) - \omega(t)) = 0. \tag{4.4}$$

Lorsque la limite(4.4) est uniforme par rapport à $B(u_0, \eta) \cap \Omega$ les solutions de l'équation(4.3)sont dites uniformément localement attractives(ou de manière équivalente que les solutions de(4.3) sont localement asymptotiquement stables)

Lemme 4.1.1. *Soit $D \in BC$. Alors D est relativement compact en BC si les conditions suivantes sont remplies :*

(a) D est uniformément borné en BC.

(b) La fonction sont appartenant à D sont presque équicontinus sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire équicontinus sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+$.

(c) Les fonctions de D sont équiconvergentes, c'est-à-dire que étant donné $\epsilon > 0$, il correspond $T(\epsilon) > 0$ tel que $|u(t) - u(+\infty)| < \epsilon$ pour tout $t \geq T(\epsilon)$ et $u \in D$.

4.2 Existence de solutions

Dans cette section, nous intéressons à l'existence et à la stabilité asymptotique locale des solutions de l'équation(4.2). Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite.

(H1) Les fonctions α, β, γ : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont continues et $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$.

(H2) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et il existe des constantes positives M,L telles que $M < L$ et

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq \frac{M|u-v|}{(1+\alpha(t))(L+|u-v|)}, \textit{ pour } t \in \mathbb{R}_+ \textit{ et pour } u,v \in \mathbb{R}.$$

(H3) La fonction $t \to f(t,0)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ avec $f^* = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} f(t,0)$ et $\lim_{t\to\infty} |f(t,0)| = 0$.

(H4) La fonction $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et il existe des fonctions $p, q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$|g(t,s,u)| \leq \frac{p(t)q(s)}{1+\alpha(t)+|u|}, \textit{ pour } t,s \in \mathbb{R}_+ \textit{ et pour } u \in \mathbb{R}.$$

De plus, supposons que

$$\lim_{t\to\infty} p(t) \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} q(s) ds = 0.$$

Théorème 4.2.1. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H4) soient vérifiées. Alors l'équation (4.2) admet au moins une solution dans l'espace BC. De plus, les solutions de l'équation(4.2) sont localement asymptotiquement stables.*

Preuve Ensemble $d^* := \sup_{t\in\mathbb{R}_+} d(t)$ où

$$d(t) = \frac{p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} q(s) ds.$$

De l'hypothèse(H4), nous déduisons que d^* est fini. Définissons l'opérateur N, tel que pour tout $u \in BC$

$$(Nu)(t) = f(t, u(\alpha(t))) + \tfrac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} g(t, s, u(\gamma(s)))ds; \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.5}$$

En considérant les conditions du théorème, on déduit que N(u) est continue sur $\mathbb{R}_+$. Maintenant nous prouvons que $N(u) \subset BC$ pour tout $u \in BC$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ arbitrairement fixé, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t)| &= \left| f(t, u(\alpha(t))) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} g(t, s, u(\gamma(s)))ds \right| \\
&\leq |f(t, u(\alpha(t))) - f(t, 0) + f(t, 0)| \\
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} g(t, s, u(\gamma(s)))ds \right| \\
&\leq \frac{M|u(\alpha(t))|}{(1 + \alpha(t))(L + |u(\alpha(t))|)} + |f(t, 0)| \\
&+ \frac{p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} \frac{(\beta(t) - s)^{r-1} q(s)}{1 + \alpha(t) + |u(\gamma(s))|} ds \\
&\leq \frac{M\|u\|}{L + \|u\|} + f^* + d^*.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|N(u)\| \leq M + f^* + d^*. \tag{4.6}$$

D'où $N(u) \subset BC$. L'équation(4.6) implique que N transforme la boule $B_\eta := B(0, \eta)$ en lui-même où $\eta = M + f^* + d^*$. Nous allons montrer que $N : B_\eta \to B_\eta$ vérifie le théorème du point fixe[7]. La preuve sera donnée dans les hypothèses des plusieurs étapes de Schauder.

Étape 1 N est continue.

Soit $\{u_n\}_{n \in N}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans B_η. Alors, pour chaque $t \in R_+$, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)| &\leq |f(t, u_n(\alpha(t))) - f(t, u(\alpha(t)))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} |g(t, s, u_n(\gamma(s))) - g(t, s, u(\gamma(s)))| ds \\
&\leq \frac{M\|u_n - u\|}{(1 + \alpha(t))(L + \|u_n - u\|)}
\end{aligned}$$

$$+ \tfrac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} \|g(t, s, u_n(\gamma(s))) - g(t, s, u(\gamma(s)))\| ds \tag{4.7}$$

Cas 1 Si $t \in [0,T] : T > 0$ alors, puisque $u_n \to u$ comme $n \to \infty$ et g est continue, (4.7) donne

$$\|N(u_n) - N(u)\|_{BC} \to 0 \quad comme\ n \to \infty.$$

Cas 2 Si $t > T; T > 0$, alors de(H1) et (4.7) on obtient

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)| &\leq \frac{M\|u_n - u\|}{L + \|u_n - u\|} \\
&+ \frac{p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} \frac{(\beta(t)-s)^{r-1} q(s)(|u_n(\gamma(s))| + |u(\gamma(s))|)}{(1+\alpha(t)+|u_n(\gamma(s))|)(1+\alpha(t)+|u(\gamma(s))|)} ds \\
&\leq \frac{M\|u_n - u\|}{L + \|u_n - u\|} \\
&+ \frac{2\eta p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} q(s) ds
\end{aligned}$$

$$\leq \tfrac{M\|u_n - u\|}{L + \|u_n - u\|} + 2\eta d(t). \tag{4.8}$$

Puisque $u_n \to u$ comme $n \to \infty$, alors (4.8) donne

$$\|N(u_n) - N(u)\|_{BC} \to 0 \quad comme\ n \to \infty.$$

Étape 2 $N(B_\eta)$ est uniformément borné.

Clair puisque $N(B_\eta) \subset B_\eta$ et B_η est borné.

Étape 3 $N(B_\eta)$ est equicontinu sur tout intervalle compact I de R_+.
Soit $t_1, t_2 \in I,\ t_1 < t_2$ et soit $u \in B_\eta$. Aussi, sans perdre de généralité, supposons que $\beta(t_1) \leq \beta(t_2)$, nous avons donc

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t_2) - (Nu)(t_1)| &\leq |f(t_2, u(\alpha(t_2))) - f(t_2, u(\alpha(t_1)))| + |f(t_2, u(\alpha(t_1))) - f(t_1, u(\alpha(t_1)))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\left|\int_0^{\beta(t_2)} (\beta(t_2) - s)^{r-1}[g(t_2, s, u(\gamma(s))) - g(t_1, s, u(\gamma(s)))]ds\right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\left|\int_0^{\beta(t_2)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} g(t_1, s, u(\gamma(s)))ds\right. \\
&\left. - \int_0^{\beta(t_1)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} g(t_1, s, u(\gamma(s)))ds\right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\left|\int_0^{\beta(t_1)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} g(t_1, s, u(\gamma(s)))ds\right. \\
&\left. - \int_0^{\beta(t_1)} (\beta(t_1) - s)^{r-1} g(t_1, s, u(\gamma(s)))ds\right| \\
&\leq \frac{M|u(\alpha(t_2)) - u(\alpha(t_1))|}{(1 + \alpha(t_2))(L + |u(\alpha(t_2)) - u(\alpha(t_1))|)} \\
&+ |f(t_2, u(\alpha(t_1))) - f(t_1, u(\alpha(t_1)))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\beta(t_2)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} |g(t_2, s, u(\gamma(s))) - g(t_1, s, u(\gamma(s)))| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{\beta(t_1)}^{\beta(t_2)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} |g(t_1, s, u(\gamma(s)))| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\beta(t_1)} \left|(\beta(t_2) - s)^{r-1} - (\beta(t_1) - s)^{r-1}\right| \times |g(t_1, s, u(\gamma(s)))| ds \\
&\leq \frac{M|u(\alpha(t_2)) - u(\alpha(t_1))|}{L + |u(\alpha(t_2)) - u(\alpha(t_1))|} + |f(t_2, u(\alpha(t_1))) - f(t_1, u(\alpha(t_1)))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\beta(t_2)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} |g(t_2, s, u(\gamma(s))) - g(t_1, s, u(\gamma(s)))| ds \\
&+ \frac{p(t)}{\Gamma(r)}\int_{\beta(t_1)}^{\beta(t_2)} (\beta(t_2) - s)^{r-1} q(s)ds \\
&+ \frac{p(t)}{\Gamma(r)}\int_0^{\beta(t_1)} \left|(\beta(t_2) - s)^{r-1} - (\beta(t_1) - s)^{r-1}\right| q(s)ds.
\end{aligned}$$

De la continuité de α, β, f, g et lorsque $t_1 \to t_2$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Étape 4 N(B) est équiconvergent.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $u \in B_\eta$, alors on a

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t)| &\le |f(t,u(\alpha(t))) - f(t,0) + f(t,0)| \\
&+ \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} g(t,s,u(\gamma(s)))ds \right| \\
&\le \frac{M|u(\alpha(t))|}{(1+\alpha(t))(L+|u(\alpha(t))|)} + |f(t,0)| \\
&+ \frac{p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} \frac{(\beta(t)-s)^{r-1} q(s)}{1+\alpha(t)+|u(\gamma(s))|} ds \\
&\le \frac{M}{1+\alpha(t)} + |f(t,0)| \\
&+ \frac{1}{1+\alpha(t)} \left(\frac{p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} q(s) ds \right) \\
&\le \frac{M}{1+\alpha(t)} + |f(t,0)| + \frac{d^*}{1+\alpha(t)}.
\end{aligned}$$

ainsi

$$|(Nu)(t)| \to 0, \quad comme\ t \to +\infty.$$

par conséquent, nous obtenons

$$|(Nu)(t) - (Nu)(+\infty)| \to 0, \quad lorsque\ t \to +\infty.$$

En conséquence des étapes 1 à 4 avec le lemme 4.1.1, on peut conclure que $N : B_\eta \to B_\eta$ est continue et compact. D'une application du théorème de Schauder, on déduit que N admet au moins un point fixe u solution de l'équation(4.2).

Nous devons maintenant étudier l'attractivité locale uniforme pour les solutions de l'équation (26). Supposons que u_0 est une solution de l'équation(4.2) avec conditions du Théorème 4.2.1. Considérons la boule $B(u_0, \eta^*)$ avec $\eta^* = \frac{LM^*}{L-M}$, où

$$M^* := \frac{1}{\Gamma(r)} \sup_{t \in R_+} \left\{ \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} |g(t,s,u(\gamma(s))) - g(t,s,u_0(\gamma(s)))| ds; \quad u \in BC \right\}.$$

Soit $u \in B(u_0, \eta^*)$, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t) - u_0(t)| &= |(Nu)(t) - (Nu_0)(t)| \\
&\leq |f(t, u(\alpha(t))) - f(t, u_0(\alpha(t)))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} |g(t, s, u(\gamma(s))) - g(t, s, u_0(\gamma(s)))| ds \\
&\leq \frac{M\|u - u_0\|}{L + \|u - u_0\|} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} |g(t, s, u(\gamma(s))) - g(t, s, u_0(\gamma(s)))| ds \\
&\leq \frac{M}{L}\|u - u_0\| + M^* \\
&\leq \frac{M}{L}\eta^* = \eta^*.
\end{aligned}$$

On observe donc que N est une fonction continue telle que $N(B(u_0, \eta^*)) \subset B(u_0, \eta^*)$. De plus, si u est une solution de l'équation(4.2) alors

$$\begin{aligned}
|u(t) - u_0(t)| &= |(Nu)(t) - (Nu_0(t))| \\
&\leq |f(t, u(\alpha(t))) - f(t, u_0(\alpha(t)))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} |g(t, s, u(\gamma(s))) - g(t, s, u_0(\gamma(s)))| ds \\
&\leq \frac{M|u(\alpha(t)) - u_0(\alpha(t))|}{L + |u(\alpha(t)) - u_0(\alpha(t))|} \\
&+ \frac{p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} \left(\frac{(\beta(t) - s)^{r-1} q(s)}{1 + \alpha(t) + |u(\gamma(s))|} + \frac{(\beta(t) - s)^{r-1} q(s)}{1 + \alpha(t) + |u_0(\gamma(s))|} \right) ds \\
&\leq \frac{M|u(\alpha(t)) - u_0(\alpha(t))|}{L + |u(\alpha(t)) - u_0(\alpha(t))|} + \frac{2p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} q(s) ds
\end{aligned}$$

$$\leq \tfrac{M}{L}|u(\alpha(t)) - u_0(\alpha(t))| + \tfrac{2p(t)}{\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} q(s) ds. \tag{4.9}$$

Puisque $\alpha(t) \to \infty$ aussi $t \to \infty$, alors

$$\lim_{t\to\infty} |u(\alpha(t)) - u_0(\alpha(t))| = \lim_{t\to\infty} |u(t) - u_0(t)|.$$

Ainsi, en utilisant (4.9), en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - u_0(t)| \leq \lim_{t\to\infty} \frac{2Lp(t)}{(L - M)\Gamma(r)} \int_0^{\beta(t)} (\beta(t) - s)^{r-1} q(s) ds = 0.$$

Par conséquent, toutes les solutions de l'équation(4.2) sont localement asymptotiquement stables.

4.3 Exemple

Comme application de nos résultats, nous considérons l'équation intégrale suivante d'ordre fractionnaire

$$u(t) = \frac{1}{2(1+t)(1+|u(t)|)} + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})}\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{3}} \frac{\ln(1+s|u(t)|)}{(1+t+|u(s)|)^2(1+t^4)} ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.10)$$

où $r = \dfrac{2}{3}$, $\alpha(t) = \beta(t) = \gamma(t) = t$.

$$f(t,u) = \frac{1}{2(1+t)(1+|u|)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$g(t,s,u) = \frac{\ln(1+s|u|)}{(1+t+|u|)^2(1+t^4)}; \quad t,s \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ et $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq \frac{|u-v|}{2(1+t)(1+|u-v|)}.$$

Alors nous pouvons facilement vérifier que les hypothèses du Théorème 4.2.1 sont satisfaites. En fait, nous avons que la fonction f est continue et satisfait l'hypothèse (H2), avec $M = \frac{1}{2}$ et $L = 1$. Aussi f satisfait l'hypothèse (H3) avec $f^* = \frac{1}{2}$. Remarquons ensuite que la fonction g satisfait l'hypothèse (H4), où $p(t) = \frac{1}{1+t^4}$ et $q(s) = s$. Aussi,

$$\int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} q(s) ds = \frac{9}{10} t^{\frac{5}{3}},$$

et

$$\lim_{t\to\infty} p(t) \int_0^{\beta(t)} (\beta(t)-s)^{r-1} q(s) ds = \lim_{t\to\infty} \frac{9t^{\frac{5}{3}}}{10(1+t^4)} = 0.$$

Donc d'après le Théorème 4.2.1, l'équation (4.10) admet une solution définie sur R_+ est les solutions de cette équation sont localement asymptotiquement stables.

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a présenté l'existence et l'unicité de solutions de quelques classes des équations intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Ces résultats ont été obtenu par l'application du théorie de point fixe, en particulier on utilise le théorème de point fixe de Banach, Schauder, Leray-Schauder et Mönch.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABBAS, M. BENCHOHRA, *On the existence and local asymptotic stability of solutions of integral equations, Commentations mathematicae Vol. 52, No. 1 (2012), 91-100.*

[2] R. AGARWAL, A. VASILE LUPULESCU AND D. O'REGAN L^p-Solutions for a class of fractional integral equation, Journal of integral equations and applications. Volume 29, Number 2,Summer 2017.

[3] M. BENCHOHRA AND M. ABDALLA DARWISH On unique solvability of quadratic integral equations with linear modification of the argument, Miskolc Mathematical Notes Vol. 10(2009), No 1, pp. 3-10.

[4] H. Brezis Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[5] Ruch F. Curtain A.J Pritchard , Functional Analysis in Moderan Applied Mathematics Academic press. 1977.

[6] N. Dunford et J.Schwars, Linear Opérateur, Part I : General Theory, John Wiley et Sons, New York, 1958.

[7] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] D. Guo, V. Lakshmikantham and X. Liu, Nonlinear integral equations in abstract spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[9] H. Mönch, Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, Nonlin. Anal. 4 (1980), 985-999.

[10] H. Ye, Gae and Y. Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation J. Math. Anal. Appl. 328(2007), 1075-1081.