RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
« Analyse fonctionnelle & équations différentielles»

Présenté Par :

Belharache Ahmed & Neggaz Mohamed

Sous L'intitulé :

Etude de certains problèmes de diffusion avec un terme non local.

Soutenu publiquement le 10 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. LARABI Abderrahmane	MCA	Université Tiaret	Président
Mr. DELLAL Abdelkader	MCA	Université Tissemsilt	Encadreur
Mr. ZIANE Mohamed	MCA	Université Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

La réalisation de cette Thèse a été possible grâce aux efforts de plusieurs Professeurs à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

En premier temps je remercie, mon directeur de thèse Monsieur Dellal Abdelkader , Docteur à l'université de Tissemsilt , pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Travailler avec lui fut pour moi un grand honneur. Cette occasion m'a permis de profiter de son esprit vif et de sa grande culture scientifique.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur Zian Mohamed Docteur à l'Université de Tiaret pour avoir aimablement accepté de superviser ma thèse et pour avoir généreusement consacré son temps à faire partie du jury. Je suis extrêmement reconnaissant pour vos conseils avisés, votre expertise précieuse et votre soutien constant tout au long de mon parcours de recherche. Votre présence et votre contribution ont grandement enrichi mon travail, et je vous suis infiniment reconnaissant pour votre dévouement et votre encouragement.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Monsieur Larabi Abderrahmane, Docteur à l'université de Tiaret, pour avoir accepté d'évaluer ma thèse et d'en faire partie du jury. Sa participation est d'une grande valeur pour moi et je suis reconnaissant de son engagement envers mon travail de recherche. La réalisation de cette Thèse a été possible grâce aux efforts de plusieurs Professeurs à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je voudrais remercier Mme Mersali Karima, docteur à l'Université de Khemis Miliana, pour son aide dans l'achèvement de cette thèse.

A Mon Cher Père, pour le soutien constant et ses encouragements.

Dédicaces

⋆ À nos parents ⋆

⋆ À nos frères ⋆

⋆ À toutes nos familles ⋆

⋆ À chacun de nos amis.⋆

Table des matières

Notations

Notations générales

Symbole	Signification
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Élément de $I\!R^N$
$r = \|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	Module de x
$D_i u = \partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	Dérivée partielle de u par rapport à x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$	Deuxième dérivée partielle de u par rapport à x_i, x_j
$Du = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$\|A\|$	mesure de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
$\\| \cdot \\|_s$	Norme dans l'espace $L^s(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_X$	Norme dans l'espace X
B_R	Boule de $I\!R^N$ de rayon R centrée à l'origine

Symbole	Signification
E'	Espace dual de E
$p.p.$	presque pour tous les points
$\mathcal{C}(\Omega)$	Fonctions continues dans Ω
$\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$	Fonctions indéfiniment différentiables dans Ω
$\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Fonctions de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ à support compacte
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$, c.à.d espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable, $\int_{\Omega} \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^{\infty}(\Omega)$	$\{u : \Omega \to I\!R \mid u$ mesurable et $\exists C$ tel que $\|u(x)\| \leq C$ dans p.p. $x \in \Omega$ $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace zero
$W^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$

Chapitre 1

Introduction

Nous étudions une classe d'équations aux dérivées partielles sous la forme suivante :

$$-M(|u|^2_{L^2(\Omega)})\Delta u = f(x)$$

Ces équations modélisent divers phénomènes physiques.

1. Écoulement des fluides : L'équation peut être utilisée pour modéliser l'écoulement des fluides incompressibles dans un domaine donné. Ici, u représente le champ de vitesse du fluide, Δu est le laplacien de u, et $M(|u|^2_{L^2(\Omega)})$ est un coefficient qui dépend de la norme de u. Cette équation peut aider à étudier le comportement de l'écoulement, la formation de tourbillons et d'autres caractéristiques fluidiques.

2. Équation de la chaleur : Dans le contexte de la diffusion de la chaleur, l'équation $-M(|u|^2 L^2(\Omega))\Delta u$ peut être utilisée pour modéliser la répartition de la température dans un domaine Ω. Ici, u représente la température, et le terme $M(|u|^2 L^2(\Omega))$ peut représenter la conductivité thermique du matériau.

3. Mécanique des solides : Cette équation peut également être appliquée à la modélisation de la déformation des solides. Ici, u représente le déplacement du matériau, et Δu est le laplacien de u, qui décrit les variations de la déformation. Le terme

$M(|u|^2_{L^2(\Omega)})$ peut représenter des propriétés matérielles telles que la rigidité ou la densité du matériau.

4. Problèmes d'optimisation : L'équation peut également être utilisée dans des problèmes d'optimisation où l'objectif est de minimiser une certaine quantité associée à u. Par exemple, si $M(|u|^2_{L^2(\Omega)})$ représente une fonction de coût, l'équation peut être utilisée pour trouver la configuration optimale qui minimise cette fonction, sous certaines contraintes.

Ces exemples ne sont qu'une petite sélection des nombreuses applications possibles de ces équations. En fonction du contexte et des paramètres spécifiques, ces équations peuvent être adaptées à divers domaines scientifiques et techniques, tels que la physique, l'ingénierie, les sciences de la terre, etc.

Chapitre 2

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler (et de présenter) quelques espaces fonctionnels d'usage fréquent dans l'étude des équations aux dérivées partielles comme les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev ainsi que leurs propriétés les plus importantes (notions de convergence, compacité....,). Les références de bases pour ce chapitres sont les livres [1] et [2].

2.1 Espace de Sobolev.

2.1.1 Espace $H^1(a, b, V, V')$

Définition 1.1.1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on désigne par

$$L^p(a, b; X), \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

l'espace des fonction mesurable (classe de fonction) $f : (a, b) \to X$ telle que

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt < +\infty,$$

et $L^\infty(a, b; X)$ espace des fonctions borné sur (a, b) tel qu'il existe $M > 0$, avec

$$\|f(t)\|_X \leq M \quad \text{p.p} \quad t \in (a, b).$$

Il est alors facile de montrer :

Théorème 2.1 *Les espaces* $L^p(a,b;X), 1 \leq p \leq +\infty$ *sont des espaces de Banach. Lorsqu'il est équipé par des normes*

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \inf\left\{M \in \mathbb{R} \mid \|f\|_X \leq M \ \ p.p. \ t \in (a,b)\right\},$$

Dans ce qui suit on considère la situation de deux espaces séparable de Hilbert V, H tel que

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

V dense dans H

où V' est la duale de V. On notera par

$(()), \|\|$ le produit scalaire et la norme respectivement en V,

$(\ ), ||$ le produit scalaire et la norme respectivement en H.

Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, un choix approprié pourrait être :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

On peut alors définir

$\mathrm{H}^1(a,b;V,V') = \{u \quad | \ u \in L^2(a,b;V), u_t \in L^2(a,b;V')\}$

Pour définir une norme hilbertienne dans V' par le théorème de représentation de Riesz, on identifie V' et V par la formule

$$\langle f, v\rangle_{V',V} = ((f^{\sim}, v))$$

et

$$|f|_{V'} = \|f^{\sim}\| = |f^{\sim}|_V$$

cette norme est équivalente à la norme du dual fort.

Théorème 2.2 $H^1(a,b;V,V')$ *est une espace de Hilbert pour la norme*

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2(a,b;V)}^2 + \|u'\|_{L^2(a,b;V')}^2$$

Lemme 2.1 *Soit* $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, (n \in \mathbb{N}^*)$

Si f *et* g *sont différentiable en* $t_0 \in [a,b]$, *alors* $\langle f,g\rangle : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est différentiable en* t_0, *et*

$$\frac{d}{dt}(\langle f,g\rangle)(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle$$

En particulier, si f *est différentiable en* $t_0 \in [a,b]$, *alors la fonction* $\|f\|^2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est différentiable en* t_0, *et*

$$\frac{d}{dt}\left(\|f\|^2\right)(t_0) = 2\langle f'(t_0), f(t_0)\rangle$$

Proposition 2.1 *Si* $(u_k) \subset L^2(0,T;V)$, *faiblement convergent vers* u. *Suppose que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_k(t)\|_V \le C$$

avec C *indépendant de* k. *Alors aussi*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_V \le C$$

Les espaces L^P

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Rappelons que l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, est défini comme étant l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $||f||_{L^p(\Omega)} < \infty$ avec

$$||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

L'ensemble $L^p(\Omega)$ ainsi défini est un espace de Banach.

De même, pour $p=\infty$, on a

$$L^\infty(\Omega)=\Big\{f:\Omega\to\mathbb{R}; f\ mesurable\ et \exists\ une\ constante\, C\ telle\ que\,|f(x)|\le C\ \ p.p.\ sur\Omega\Big\}.$$

On note $||f||_{L^\infty}=\inf\{C;\ |f(x)|\le C\ \ p.p. sur\ \Omega\}$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p\ge 1$.

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega)=\Big\{u\in L^p(\Omega)\quad;\quad \exists g_1,g_2,\cdots,g_N\in L^p(\Omega)\quad tels\ que$$
$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\int_\Omega g_i\varphi\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)\quad\forall i=1,2,\cdots,N\Big\},$$

on note $\frac{\partial u}{\partial x_i}=g_i$.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\Big(\|u\|_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^{i=N}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^{i=N}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}\qquad si\quad 1\le p<\infty.$$

Si $p=\infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}=\|u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1\le p\le\infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif si $1<p<\infty$, il est séparable si $1\le p<\infty$.

On pose $\qquad H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)}=(u,v)_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{i=N}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{i=N}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Pour tout entier $m > 1$, on définit

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \forall \alpha \text{ multi-indice} \quad \textit{avec} \quad |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad \textit{tel que}$$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\},$$

un multi-indice α est une suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ avec $\alpha_i \geq 0$ entier ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \qquad \textit{et} \qquad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi,$$

et on note $D^\alpha u = g_\alpha$.

Notons que par récurrence, on a

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, 3, \cdots, N \Big\}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha u, D^\alpha v \Big)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note $\quad H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Il s'avère très utile de savoir comment caractériser les éléments des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2.2 *Étant donné $v \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $v \in W^{1,p}(\Omega)$

(b) Il existe une constante $C > 0$ tel que pour n'importe quel direction $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$(\forall \xi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \left| \int_\Omega v \, \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \, dx \right| \leq C \, \|\xi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

(c) Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ on a

$$(\forall h \in \mathbb{R}^N : |h| < dist(\partial\omega, \partial\Omega)) : \; \|\tau_h v - v\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$$

Noter qu'on peut prendre $C = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$ dans (b) et (c).

Le Théorème suivant permet de prolonger une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ en une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ce prolongement nécessite que le domaine Ω soit de classe C^1.

Théorème 2.3 *On considère Ω un domaine borné de classe C^1 ou bien $\Omega := \mathbb{R}^N_+$. Alors il existe un opérateur linéaire*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

en plus, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a :

1) $Pu_{|\Omega} = u$,

2) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \; \|u\|_{L^p(\Omega)}$,

3) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \; \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dans le cas où Ω est un domaine borné dans une direction(c.à.d il existe $a > 0$ et $i \in \{1, 2, ..., N\}$ tel que $|x_i| \leq a$ pour tout $x \in \Omega$,) on a l'inégalité suivante :

Théorème 2.4 *(* **Inégalité de Poincaré** *)*

Soit Ω un domaine borné dans une direction, $1 \leq p$. Alors il existe une constante $C := C(\Omega, p)$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p.$$

En particulier la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.5 *(* **Inégalité de Sobolev** *)*

Soit $1 \leq p < N$, il existe une constante $S \equiv S(p, N)$ telle que $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$S\|u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N) \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}},$$

avec $p' := \frac{p\,N}{N-p}$.

Par conséquent, l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, p']$.

Remarque 2.1

- *Pour le cas $p = N$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour $q \in [N, \infty[$.*

- *Pour le cas $p > N$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour $q \in [N, \infty]$. Dans ce cas particulier, chaque élément de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ admet un représentant continu.*
- *Lorsque Ω est borné toutes les injections précédentes (en remplaçant $\mathbb{R}^N$ par Ω) restent valables. Notons que dans ce cas l'inégalité de Sobolev devient $\|u\|_{L^{p'}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$.*

Un cadre général des injections précédentes est fourni par le théorème suivant.

Théorème 2.6 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, soient $m \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$. On a :*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $q \in [p, +\infty[$ (mais pas dans L^∞ si $p > 1$).*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$; dans ce cas si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas entier alors $W^{m,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$ avec $k := \left[m - \frac{N}{p}\right]$.*

Sans l'hypothèse de régularité de Ω, les injections précédentes restent valables localement. Elles restent globalement vraies pour $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Un résultat particulièrement important est le théorème de Rellich-Kondrachov, qui concerne l'injection compacte des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ dans certains espaces $L^q(\Omega)$.

On a besoin de la définition suivante.

Définition 2.1 ***(Opérateur compact)***
Soient E, F deux espaces de Banach et $A : E \to F$ un opérateur continu (pas forcément linéaire). On dit que A est un opérateur compact si l'image de tout borné de E par A est relativement compacte dans F. En d'autres termes, si $\{u_n\}_n \subset E$ est une suite bornée, alors la suite $\{v_n = A(u_n)\}_n \subset F$ admet une sous-suite convergente dans F.

Dans le cas où $E \subset F$, on peut considérer l'application identité $\mathbb{I}$ de E dans F. Il est clair que $\mathbb{I}$ est injective. Si $\mathbb{I}$ est continue, on dit que l'injection de E dans F est *continue et on note* $E \hookrightarrow F$. *Si en plus,* $\mathbb{I}$ *est compacte, on dit alors que l'injection de* E *dans* F *est compacte et on note* $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$.

Le théorème suivant concerne la compacité de l'injection des espaces de Sobolev dans certains espaces L^q. Il est d'une grande importance dans l'application des méthodes variationnelles.

Théorème 2.7 (Rellich-Kondrachov) *Soit* Ω *un domaine bornée de classe* $\mathcal{C}^1$, *on a les injections compactes suivantes :*

- *Si* $p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p'[$ *avec* $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
- *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.
- *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.2 *Les injections précédentes sont vraies pour* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *seulement si* Ω *est borné.*

Remarque 2.3

- *Pour le cas* $q = p'$, *l'injection n'est pas compacte, ce défaut est dû à l'invariance de la norme du gradient dans* L^p *et la norme de* u *dans* $L^{p'}$ *par le changement de variable suivant :* $v \mapsto v_1$, *où* $v_1(x) = \mu^{-\frac{p'}{p}} v(\frac{x}{\mu}), \mu > 0$.
- *Si* Ω *n'est pas borné alors l'injection de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *n'est en général pas compacte ; comme le démontre le contre exemple suivant : Soit* $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ *telle que* $\phi \geq 0$, *on pose* $\phi_n(x) = \phi(x + ne), e = (1, 1, 1..., 1)$, *il est facile de voir que* $\phi_n \to 0$ *p.p et* $||\phi_n||_{L^q} = ||\phi||_{L^q} > 0$.

corollaire soit p et q deux exposants conjugués,si $p = 2$ on a $q = 2$ et l'inégalité de Hölder réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante

$$\|f.g\|_{L^1} = \|f\|_{L^2}.\|f\|_{L^2}$$

Définition 2.2 *Soit E un espace de Banach, E' son dual et $\langle .,. \rangle$ le produit ou le crochet de dualité sur $E' \times E$.*

- *On dit que la suite $\{x_n\}_n \subset E$ converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :*
$$\langle x', x_n \rangle \to \langle x', x \rangle, \forall x; \prime \in E', \tag{2.1.1}$$
et on écrit :
$$x_n \rightharpoonup x \;\; \textit{faib. dans } E. \tag{2.1.2}$$
- *On dit que la suite $\{x'_n\}_n \subset E'$ converge faiblement$'$ vers $x' \in E'$ si et seulement si :*
$$\langle x'_n, x \rangle \to \langle x', x \rangle, \forall x \in E, \tag{2.1.3}$$
et on écrit :
$$x'_n \rightharpoonup x' \;\; \textit{faib. dans } E'. \tag{2.1.4}$$

It est clair que

- Si $x_n \to x$ (fortement dans E), alors $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans E.
- Si $x'_n \to x'$ (fortement dans E'), alors $x'_n \rightharpoonup x'$ faib.dans E'.
- Si $x'_n \rightharpoonup x'$ faib. dans E' alors $x'_n \rightharpoonup x'$ faib. dans E.
- Si $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans E et $x'_n \to x'$ (fortement dans E'), alors $\langle x'_n, x_n \rangle \to \langle x', x \rangle$.
- Si $x_n \to x$ (fortement dans E) et $x'_n \rightharpoonup x'$ faib. dans E' (ou faib dans E') alors $\langle x'_n, x_n \rangle \to \langle x', x \rangle$.

Le résultat suivant est un résultat classique en analyse fonctionnelle (pour plus de détails consulter [1]).

Théorème 2.8 *Soit E un espace de Banach, E' son dual. On a*

- *Si $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans E, alors il existe $k > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_E \leq k$ et*
$$||x||_E \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_E \,.$$
- *Si $x' \rightharpoonup x'$ faib. dans E', alors il existe $k' > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \|x'_n\|_{E'} \leq k$ et*
$$\|x'\|_{E'} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x'_n\|_{E'} \,.$$

Soit E un espace de Banach, E^{*}, E, le dual et le bi-dual de E respectivement. On définit l'application $T : E \to E$ par $\langle T(x), y^{*}\rangle_{E,E^{*}} = \langle y^{*}, x\rangle_{E,E}$. Il est clair que l'application T est linéaire, continue et injective. On est on mesure de donner la définition suivante.

Définition 2.3 ***(Espace réflexif).*** *Soit E un espace de Banach, alors E est dit réflexif si et seulement si l'application T est bijective. Dans ce cas on fera l'identification $E = E''$.*

On a la propriété suivante des espaces réflexifs.

Théorème 2.9 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}_n$ une suite bornée de E, alors il existe une sous suite $\{x_{n_j}\}_{n_j}$ de $\{x_n\}_n$ et $x \in E$ tels que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad \textit{faib. dans } E.$$

De plus si chaque sous suite de $\{x_n\}_n$ converge faiblement vers la même limite x, alors $x_n \rightharpoonup x$ faib. dans E.

Théorème 2.10 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}_n$ une suite qui converge faiblement vers $x \in E$. On suppose que $||x_n||_E \to ||x||_E$, alors $x_n \to x$ fort. dans E.*

Proposition 2.3 ***(Inégalite de Young)***

Soit $a, b \in \mathbb{R}^{+}$ et $p, q > 1$ deux nombres réels tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors

$$ab \leq \frac{a^{p}}{p} + \frac{b^{q}}{q} \tag{2.1.5}$$

Proposition 2.4 ***(Inégalite de Hölder)***

soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonction mesurable et* $p, q > 1$ *deux nombres réels tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors $f.g \in L^1$ *et* $\|f.g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^q}$

Lemme 2.2 ***(Lemme de Fatou)***

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions de* L^1 *telle que* $f_n \geq 0$ *p.p. dans* Ω*. On suppose que* $||f_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$ *et que* $f_n \to f$ *p.p. dans* Ω*. Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int f \leq \underset{n\to\infty}{lim} \inf \int f_n.$$

Si la suite $\{f_n\}_n$ est monotone en n, on a le résultat de convergence suivant.

Théorème 2.11 ***(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)*** *Soit* $\{f_n\}_n$ *une suite croissante de fonctions de* L^1 *telle que* $\underset{n}{Sup} \int f_n < \infty$*.*
Alors f_n *converge p.p. sur* Ω *vers une limite finie notée* $f(x)$ *; de plus* $f \in L^1$ *et* $||f_n - f||_{L^1} \to 0$*.*

Si la suite $\{|f_n|\}_n$ est contrôlée par une suite convergente, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.12 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions de* L^1*. On suppose que*
a) $f_n \to f$ *p.p. sur* Ω*.*
b) Il existe une suite $\{g_n\}_n \subset L^1(\Omega)$ *telle que* $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ *p.p. sur* Ω *et* $g_n \to g$ *dans* $L^1(\Omega)$*. Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $||f_n - f||_{L^1} \to 0$*.*

Le résultat suivant nous fournit "le terme manquant" dans le lemme de Fatou.

Comme application directe du Lemme de Brézis-Lieb, on déduit que si $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ est une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ *p.p.* et $||f_n||_{L^p(\Omega)} \to ||f||_{L^p(\Omega)}$, alors $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

Définition 2.4 (Fonctions équi-integrable dans L^1) *On dit qu'une suite $\{f_n\}_n$ de fonctions de L^1 est équi-integrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $mes(E) < \delta$ entraîne pour tout n,*

$$\int_E |f_n(x)|dx \leq \varepsilon.$$

On utilise souvent le résultat suivant de compacité dans L^1

Lemme 2.3 lemme de Vitali : compacité dans L^1

Soit X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$. Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui converge presque partout vers f, et qui est équi-intégrable. Alors $f \in L^1(X)$ et $\{f_n\}_n$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

Remarque 2.4

Si $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$, alors en général on n'a pas $f_n \to f$ p.p dans Ω. Mais on peut affirmer que la suite $\{f_n\}_n$ admet une sous suite qui converge presque partout vers f dans Ω.

Soit $\{f_n\}_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ avec $p \in (1, \infty)$ telle que $f_n \to f$ p.p dans Ω, alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^p(\Omega)$.

2.2 Théorèmes d'existences

Théorème 2.13 ***(formule Green)***

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1 . Alors si $u, \phi \in H^1(\Omega)$ on a la formule Green suivant :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u\phi\eta_i \, ds \quad i = 1, ..., N$$

ou $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)^T$ est la normale extérieure à Ω . Cette formule est la généralisation de l'intégration par parties dons $\mathbb{R}^n$

Corollaire 2.1 *soit* $u \in H^2(\Omega)$ *et* $\phi \in H^1(\Omega)$ *alors :*

$$\int_\Omega \triangle u.\phi dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.\phi d\sigma - \int_\Omega \bigtriangledown_u \bigtriangledown_\phi \, dx$$

avec $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, \eta \rangle$ *et de la mesure de Lebesgue sur* $\partial(\Omega)$

2.2.1 Théorème de Lax-Milgram

Définition 2.5 *Un espace de Hilbert réel* H *est un espace vectoriel réel muni d' un produit scalaire* (u, v) *tel que* $\|u\|= \sqrt{(u,u)}$ *est une norme pour laquelle* H *est un espace complet .*

Définition 2.6 *Soit* H *un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire sur* $H \times H$
1. On dit que la forme bilinéairea est continue, s'il existe une constante $M > 0$ *telle que pour tout* $u, v \in H, ona$:

$$a(u, v) \leq M\|u\|_H\|v\|_H$$

2.On dit que la forme bilinéairea est coercitive , s i'l existe une constante $D > 0$ *telle que pour tout* $u \in H, ona$:

$$a(u, u) \geq D\|u\|_H^2$$

Théoréme de laxe - Milgram

soient H une espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive et $f \in H'$.Alors le probléme suivant :

$$\begin{cases} Trouver \ \ u \in \quad H \ \ telque, \\ a(u,v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H \end{cases}$$

adment une solution unique

Théorème 2.14 ***(Théorème de Lax-Milgram modifié)***
Soit H un espace de Hilbert, $V \subset H$ un sous-espace dense et $a(u,v)$ est un forme bilinéaire sur $H \times V$ vérifiant les conditions suivantes

i) Pour quelque constant $M \geq 0$,

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_V, \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V$$

ii) Pour quelque constant $\delta > 0$,

$$a(v,v) \geq \delta\|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$$

Alors pour toute fonction linéaire bornée $F(v)$ dans H, il existe $u \in H$, tel que

$$F(v) = a(u,v) \quad \forall v \in V$$

Le théorème de J.L.Lions

Le résultat suivant permet d'établir, dans un cadre abstrait très générale, l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes paraboliques. Ce théorème joue un role comparable au théorème de LaxMilgram, pour les problème paraboliques. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $|.|$. On identifie H et son dual. Soit V un autre espace de Hilbert de norme $\|.\|$. On suppose que $V \subset H$ avec injection continue et dense, de sort que

$$V \subset H \subset V'$$

Soit $T > 0$ fixé ; pour presque toute $t \in [0, T]$ on se donne une forme bilinéaire $a(t; u, v) \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

(i) la fonction $t \to a(t; u, v)$ est mesurable $\forall u, v \in V$,

(ii) $|a(t; u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ p.p. $t \in [0, T], \forall u, v \in V$,

(iii) $a(t; v, v) \geqslant \alpha\|v\|^2 - C|v|^2$ p.p. $t \in [0, T], \forall v \in V$,

où $\alpha > 0, M$ et C sont des constantes.

Théorème 2.15 *Etant donnés $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$, il existe un unique fonction u telle que*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H) \quad et \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

$$\begin{cases} \left\langle \frac{du}{dt}(t), v \right\rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v \rangle & p.p. \quad t \in [0, T], \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Démonstration. Pour la démonstration, voir Lions-Magenes [1]

2.2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

.

Théorème 2.16 *Si $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$, alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- *L'ensemble des normes $||f||$ pour $f \in H$ est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $||f|| \leq M$ pour tout $f \in H$.*
- *Il existe un élément $x \in E$ tel que la borne supérieure des normes $|f(x)|$ pour $f \in H$ soit infinie, c'est-à-dire $\sup_{f \in H} |f(x)| = +\infty$.*

Théorème 2.17 *(**Eberlein-Smulian**)*

Si X un espace de Banach et $A \subset X$, alors les énoncés suivants sont équivalents

1. chaque suite d'éléments de A possède une sous-suite faiblement convergente en X.
2. chaque séquence d'éléments de A a un point de cluster faible dans X.
3. la fermeture faible de A est faiblement compacte

2.2.3 Éléments de la théorie du point fixe

Définition 2.7 ***(Point fixe)***
Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur. On appelle point fixe de T tout point $x \in X$ tel que $Tx = x$.

Théorème 2.18 ***(Point fixe de Brouwer)***
Toute application continue d'une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

Définition 2.8 ***(Opérateur continu)***

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est appelé continu en $x \in X$, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ qui converge par la norme vers $x, (T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge par la norme vers $T(x)$.

T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est continu en tout point $x \in A$.

Définition 2.9 ***(Opérateur complètement continu)***

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est appelé compact s'il transforme tout ensemble borné de X dans un ensemble relativement compact de Y. De plus, on dit que T est complètement continu sur X s'il est continu et compact.

Définition 2.10 *Soient $E = C([a, b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et A est un sous-ensemble de E.*

- On dit que A est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f(x)\|_\infty \leq C, \quad \forall x \in [a,b], \forall f \in A$$

- *On dit que A est équicontinue, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon, \forall f \in A$$

Théorème 2.19 *(**Shauder1930**)*

*(**(version01)***

Soit E un espace vectoriel normé, $C \neq \emptyset$ un partie de E fermée et convexe si $T: C \longrightarrow C$ continue telle que $\overline{T(c)}$ est compact alors T admet un point fixe .

(version02)

Soit E un espace normé $C \neq \emptyset$ une parte de E, compact et convexe si $T: C \longrightarrow C$ est continue alors T admet un pont fixe .

Chapitre 3

Problème de Kirchhoff

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2_{L^2(\Omega)})\Delta u & = & f(x) \;\; dans\Omega, \\ u & = & 0\, sur\, \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.0.1}$$

ou $f \in L^2(\Omega)$ *avec* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue t.q*

$$M(\xi) \geq m_0 > 0 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^+.$$

3.1 Linéarisation du problème

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{f(x)}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} \;\; dans \;\; \Omega, \\ u \quad = \;\; 0\, sur\, \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Comme 1^{er} *étape nous allons montrer que le problème 3.1.1 admet une solution unique* u *dans* $H^1_0(\Omega)$

On prend $\omega \in H_0^1(\Omega)$ *et montrons que*

$$\frac{f}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} \in L^2(\Omega)$$

Comme $\omega \in L^2(\Omega)$, *il s' en suit que* $M(\xi) \geq m_0$.
Par ailleurs, on a $f \in L^2(\Omega)$ *ceci implique que*

$$\frac{f}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} \in L^2(\Omega).$$

• *Montrons qu'il existe une unique solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$ *pour le problème 3.1.1*
On prend $\phi \in H_0^1(\Omega)$ *comme fonction test*
On a

$$-\Delta u.\phi = \frac{f(x)}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} .\phi$$

En intégrant sur Ω

$$-\int_\Omega \Delta u.\phi dx = \int_\Omega \frac{f(x)}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} .\phi dx \tag{3.1.2}$$

par la formule de green

$$\int_\Omega \Delta u.\phi dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.\phi d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx$$

Puisque $\phi/\Gamma = 0$, *alors* $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.\phi d\sigma = 0$
En substituant dans l'équation (3.1.2)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{f}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} \phi dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1.3}$$

Soit a l'application définit comme suit

$$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(u, \phi) \mapsto \ a(u, \phi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx$$

il est clair que $a(.,.)$ est bilinéaire.

- Montrons que $a(.,.)$ est continue.

En effet soit $(u,\phi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, alors

$$\begin{array}{rcl} |a(u,\phi)| & = & |\int \nabla u \nabla \phi dx| \\ & \leq & \int_\Omega |\nabla u||\nabla \phi| dx \\ & \leq & (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \text{ l'inegalités Hölder} \\ & = & \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array}$$

D'où on a la continité de $a(.,.)$.

- Montrer que $a(.,.)$ est coercive Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, il s'en suit que

$$\begin{array}{rcl} a(u,u) & = & \int_{(\Omega)} |\nabla u|^2 dx \\ & = & \|u\|^2_{H_0^1}(\Omega) \end{array}$$

D'où on a la coercivité de $a(.,.)$.

D'autre part l'application linéaire définit comme suit

$$l(\phi) = \int_\Omega \frac{f}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} \phi dx.$$

posons que $h := \frac{f}{M(||\omega||^2_{L^2(\Omega)})} \in L^2(\Omega)$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} |l(\phi)| & = & |\int_\Omega h\phi dx| \\ & \leq & C(\int_\Omega h^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega | \bigtriangledown_\phi |^2 dx)^{\frac{1}{2}} \text{ l'inegalités Hölder et poincaré} \\ & = C & \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \|h\|_{L^2(\Omega)}. \end{array}$$

D'où on a la continité de $l(.)$.

Par le Thèoréme de Lax-Milgram il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q

$$a(u,\phi) = l(\phi)$$

où u est la solution unique de problème (3.1.1)

3.2 Problème non linéaire.

Soit $\overline{B}_R = \{v \in L^2(\Omega); \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}$.

Soit $T : \overline{B}_R \to H_0^1(\Omega)$ *tel que* $T(\omega) = u$ *et montons que l'application* T *admet un point fixe .*

– *Montrons que* $T\left(\bar{B}_R\right) \subset \bar{B}_R$

Choisissons u *comme function test dans* (3.1.3), *il s'en suit que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= \int_\Omega \frac{f}{M\left(||\omega||^2_{L^2(\Omega)}\right)} u dx \\ &\leq \frac{1}{m_0} \int_\Omega |fu| dx \\ &\leq \frac{1}{m_0} \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{l'inegaite Hölder} \\ &\leq C\frac{1}{m_0} \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{l'inegalite Poincare,} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Poincaré, on obtrent

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{m_0} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Il suffit de prendre $\frac{C}{m_0}\|f\|_{L^2(\Omega)} := R$.
pour avoir $T\left(\bar{B}_R\right) \subset \bar{B}_R$.

Soit $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *t.q* $T(\omega) = u$ *où* u *est l'unique solution (3.1.1) remarquons que l'application est bien définie grace au théorème de Lax-milgrame*

3.2.1 Continuité de l'opérateur T.

Soit $\{\omega_n\}$ *une suite dans* $L^2(\Omega)$ *t q* $\omega_n \to \omega$ *converge fortement*
dans $L^2(\Omega)$ *et posons* $u_n = T(\omega_n)$ *et* $u = T(\omega)$

Par la continuite de M*, on obtient* $M\left(\|\omega_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \to M\left(\|\omega\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$ *quand* $n \to +\infty$.

On a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|\phi dx = \int_\Omega \frac{f}{(M||\omega_n||^2_{L^2(\Omega)})}\phi dx \tag{3.2.1}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|\phi dx = \int_\Omega \frac{f}{(M||\omega||^2_{L^2(\Omega)})}\phi dx \tag{3.2.2}$$

En soustrayant l'équation(3.2.2)de l'équation (3.2.1)on obtient

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|.\phi dx = \int_\Omega \left(\frac{f}{M\left(||\omega_n||^2_{L^2(\Omega)}\right)} - \frac{f}{M\left(||\omega||^2_{L^2(\Omega)}\right)}\right).\phi dx$$

On prend $\phi = (u_n - u)$

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx = \int_\Omega \left(\frac{f}{M\left(||\omega_n||^2_{L^2(\Omega)}\right)} - \frac{f}{M\left(||\omega||^2_{L^2(\Omega)}\right)}\right)(u_n - u)\, dx$$

On utilise l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_\Omega \left(\frac{f}{M\left(||\omega_n||^2_{L^2(\Omega)}\right)} - \frac{f}{M\left(||\omega||^2_{L^2(\Omega)}\right)}\right)(u_n - u)\, dx$$
$$\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{f}{M\left(||\omega_n||^2_{L^2(\Omega)}\right)} - \frac{f}{M\left(||\omega||^2_{L^2(\Omega)}\right)}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Poincaré il s'en suit que

$$\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left|\frac{1}{M||\omega_n||^2}_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{M||\omega||^2}_{L^2(\Omega)}\right| \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et de la continuité de M *,on obtient* $u_n \to u$ *converge fortement dans* $L^2(\Omega)$

3.2.2 Compacité de la boule.

Comme $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ *et* $T(\overline{B}_R) \subset \overline{B}_R \subset H_0^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *est compact ,alors* $T(\overline{B}_R)$ *est relativement compact dans* $L^2(\Omega)$

3.2.3 Résultat d'existence

D'aprés le théorème de Schauder il existe un point fixe de T *tel que* $T(u) = u$, *alors* u *est une solution du problème (3.0.1)*

Chapitre 4

Problèmes paraboliques non linéaires

L'équation que nous allons étudier est une équation aux dérivées partielles, appelée équation de réaction-diffusion. Elle est utilisée pour décrire différents phénomènes, tels que la diffusion de substances chimiques, la propagation de la chaleur ou la modélisation des réactions chimiques.

4.1 Position du problème

Soit Ω *un ouvert borné dans* $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ *avec* Γ *une frontière de Lipschitz . On*

suppose que Γ *est divisé en deux sous-ensembles mesurables* Γ_N *et* $\Gamma_D = \Gamma \backslash \Gamma_N$.

Soit a *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *borné par un certain constant* M

$$a \text{ est continue tel que}, M > a(\xi) \geq m_0 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{4.1.1}$$

Si $f = f(x)$ *une fonction définie en* Ω, *on cherche à montrer l'existence de* $u = u(x,t)$, *solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a(l(u(t)))u = f \quad \quad dans\ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,t) = 0\ \ dans\ \Gamma_D \times \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0,\ \ dans\ \Gamma_N \times \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,0) = u_0(x)\ \ dans\ \Omega. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Dans le système Δ *désigne l' Opérateur de Laplacien dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $\frac{\partial}{\partial \nu}$ *désigne la dérivée*

normale vers l'extérieur à Γ *,* ν *étant l'unité normale vers l'extérieur à* Γ, l *est une forme linéaire continue en* $L^2(\Omega)$ *définie par*

$$l(u(t)) = \int_{\Omega} g(x)u(x,t)dx, \quad \quad t.q.\ g \in L^2(\Omega) \tag{4.1.3}$$

4.1.1 Modélisation et équation de réaction-diffusion

Dans le cadre de la modélisation, nous donnons quelques significations aux différents termes de l'équation pour mieux les comprendre :

1. u_t *représente la dérivée partielle de la fonction u par rapport au temps (t). Cela décrit comment u évolue dans le temps.*

2. Δu *représente le laplacien de u, qui est la somme des dérivées partielles secondes de u par rapport à chaque variable spatiale. Cela représente le terme de diffusion, qui décrit comment u se propage spatialement.*

3. $a(l(u(t)))$ *est une fonction non linéaire qui dépend de u. Elle peut représenter une réaction chimique ou un processus physique spécifique. La lettre l est utilisée pour indiquer que cette fonction dépend de la valeur locale de u.*

4. *u est la fonction inconnue que vous souhaitez résoudre.*

5. *f est une fonction donnée qui représente une source ou un terme de forçage. Elle peut représenter une source de chaleur, une réaction externe, ou tout autre effet qui influe sur u.*

4.2 Résultat d'existence

Dans cette section on va donner le théorème d'existence et d'unicité de la solution faible du problème (4.1.2).
On introduit l'espace suivant :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \ dans \ \Gamma_D \right\} \tag{4.2.1}$$

Dans le cas où $|\Gamma_D|$(la mesure de Γ_D) s'annule, V est simplement *l'espace$H^1(\Omega)$. On note par V' le dual de V. Alors pour tout $T > 0$ on a*

Theorem 4.2.1 *Supposons que l'on soit sous l'hypothèse de l'introduction avec $g \in L^2(\Omega)$ et (4.1.1),(4.1.3). pour*

$$f \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \quad u_0 \in L^2(\Omega) \tag{4.2.2}$$

il existe u une solution de

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap C\left([0, T]; L^2(\Omega)\right), u_t \in L^2\left(0, T; V'\right) \\ u(., 0) = u_0 \\ \frac{d}{dt}(u, v) + \int_{(\Omega)} \nabla u \nabla v dx + a(l(u(t)))(u, v) = (f, v) \quad dans \quad \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Dans (4.2.3) (.,.) désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega), u(t) = u(., t), \quad l(u(t))$ est définie en (4.1.3) , $D'(0, T)$, l'espace des distributions dans $(0, T)$

4.3 Problème symétrique linéaire

On prend

$$w \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{4.3.1}$$

et

$$t \mapsto a(l(w(.,t))) \in L^\infty(0,T)$$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V)\bigcap C\left([0,T];L^2(\Omega)\right), u_t \in L^2\left(0,T;V'\right) \\ u(.,0)=u_0 \\ \frac{d}{dt}(u,v)+\int_{(\Omega)}\nabla u\nabla v dx + a(l(w(t)))(u,v)=(f,v) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

1- On va démontrer que le problème (4.3.2) admet une solution

Soit $a(.,.)$ une application définit comme suit

$$L^2(0,T,V)\cap C([0,T];L^2(\Omega))\times V \to \mathbb{R}$$

$$(u,v)\mapsto a(u,v)=\int_{\Omega)}\nabla u\nabla v dx + a(l(w(t)))(u,v)$$

il est clair que $a(.,.)$ est bilinéaire.

- Montrons que $a(.,.)$ est continue.

En effet soit $(u,v)\in L^2(0,T,V)\cap C([0,T];L^2(\Omega))\times V$

alors

$$\begin{array}{rcl} |a(u,v)| & = & |\int_{\Omega)}\nabla u\nabla v dx + a(l(w(t)))(u,v)| \\ & \leq & (\int_\Omega |\nabla u\nabla v|dx + M\int_\Omega |uv|dx \\ & \leq & (\int_\Omega |\nabla u|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |\nabla v|^2dx)^{\frac{1}{2}} + M(\int_\Omega |u|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |v|^2dx)^{\frac{1}{2}}) \text{ l'inegalités Hölder} \\ & \leq & |\nabla u|_2|\nabla v|_2 + M|u|_2|v|_2 \end{array}$$

D'où la continité de $a(.,.)$.

- Montrer que $a(.,.)$ *est coercive*

Soit $u \in L^2(0,T,V) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$

On prend $v = u$

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_{(\Omega)} |\nabla u \nabla u| dx + a(l(w(t)))|(u,u) \\ &\geq \int_{(\Omega)} |\nabla u|^2 dx + m_0 \int_\Omega |u|^2 dx \\ &\geq |\nabla u|_2^2 + m_0 |u|_2^2 \quad \textit{(l'inegalités Hölder)} \end{aligned}$$

D'où la coercivité de $a(.,.)$.

D'autre part l'application linéaire définit comme suit

$$\begin{aligned} |l(v)| &= |\int_\Omega f v dx| \\ &\leq C(\int_\Omega |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}} \ \textit{l'inegalités Hölder et poincaré} \\ &= C \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où la continité de $l(.)$.

Par le théorème (Thèoréme de J.L.Lions)(2.15) il existe une unique solution $u \in L^2(0,T,V) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ *t.q*

$$a(u,v) = l(v).$$

Considérons l'application suivante

$$R : B \to L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$
$$w \mapsto u$$

tel que $u = R(\omega)$ *est l'unique solution de l'équation (4.3.2), l'ensemble* B *sera définie ultérieurement.*

4.4 Résolution du problème non linéaire

Considérons l'ensemble suivant

$$B := \left\{ v \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \mid \|v\|_2 \leq C \right\}$$

où $C > 0$ *sera fixé plus tard.*

4.4.1 Compacité de lensemble B et $R(B) = B$

On montre que B *est compacte dans* $L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ *:*

Soit $(u_k)_k \subset B$*, de l'injection compacte* $H^1(0, T; V, V') \hookrightarrow L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$*,il existe une sous-suite* $\left(u_{k_j}\right)_j$ *tel que* $\left(u_{k_j}\right) \to u$ *dans* $L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$*. Ainsi par le théorème d'Eberlein- Smulian (2.17)* $\left(u_{k_j}\right) \to u$ *dans* $H^1(0, T; V, V')$

De plus par le théorème de Banach-Steinhaus (2.16) $\left(u_{k_j}\right)_j$ *est bornée et*

$$\|u\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq \liminf_{j\to\infty} \left\|u_{k_j}\right\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq C$$

ce qui prouve que $u \in B$ *et donc,* B *est compact.*

$R(B) = B$

- Montrons que, pour tout $u \in B, \|u\|_2 \leq C$ *c-à-d* $R(B) = B$

Pour cela on commence par établir des estimations a priori pour u*, ainsi,on prend* $v = u$ *dans (4.3.2) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + |\nabla u(t)|_2^2 + a(l(w(t)))|u(t)|_2^2 = (f(t), u(t)) \leq |f(t)|_2|u(t)|_2 \qquad (4.4.1)$$

on définie

$$|u(t)|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \|u\|_2 = \left\{ \int_0^T \int_\Omega u^2(x,t)dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

on intègre par rapport à t dans (4.4.1).

Pour $t \in (0,T)$ on obtient

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \leq \int_0^T |f(t)|_2|u(t)|_2 dt$$

$(\text{car } a(l(w(t)))|u(t)|_2^2 \geq 0$ *et* $\int_0^t \leq \int_0^T$

$$\frac{1}{2}|u(t)|_2^2+\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \leq \int_0^T |f(t)|_2|u(t)|_2 dt+\frac{1}{2}|u_0|_2^2 \leq \|f\|_2\|u\|_2+\frac{1}{2}|u_0|_2^2 \qquad \textit{(Cauchy-Schwarrz)} \tag{4.4.2}$$

alors

$$|u(t)|_2^2 \leq 2\|f\|_2\|u\|_2 + |u_0|_2^2$$

par l'intégration antre 0 et T on trouve

$$\int_0^T |u(t)|_2^2 \leq 2\int_0^T \|f\|_2\|u\|_2 + \int_0^T |u_0|_2^2$$
$$\|u\|_2^2 \leq 2T\|f\|_2\|u\|_2 + T|u_0|_2^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + 2T^2\|f\|_2^2 + T|u_0|_2^2$$

(on utilise l'inégalité de Young) (2.1.5) pou $a = \|u\|_2, \quad b = 2T\|f\|_2, \quad \alpha = 2)$)

$$\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u\|_2^2 \leq 2T^2\|f\|_2^2 + T|u_0|_2^2$$

donc

$$\frac{1}{2}\|u\|_2^2 \leq 2T^2\|f\|_2^2 + T|u_0|_2^2$$
$$\|u\|_2^2 \leq 4T^2\|f\|_2^2 + 2T|u_0|_2^2 = C_1$$

où C_1 est une constante indépendante de w. En reportant dans (4.4.2) on obtient aussi

$$\int_0^T \|\nabla u(T)\|_2^2 dt \leq C_2$$

où C_2 *est une constante indépendante de* w*. Donc*

$$|u|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)}, \quad |u|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} \leq C_3 \tag{4.4.3}$$

où C_3 *est une constante indépendante de* w*.*

Il reste à montrer que $u_t \in L^2(0,T;V')$*.on considère l'équation*

$$u_t - \Delta u + a(l(w))u = f$$

Pour le premier point on remarque que (4.3.2) peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dt}(u,v) = \langle f(t) + \Delta u(t) - a(l(w))u, v\rangle \quad dan \quad \mathcal{D}'(0,T)$$

pour chaque $v \in V$*. Cela signifie également que*

$$-\int_0^T (u(t),v)\varphi'(t)dt = \int_0^T \langle f(t)+\Delta u(t)-a(l(w))u,v\rangle\varphi(t)dt \quad \forall v \in V, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

et, en considérant des intégrales à valeurs dans V'*,*

$$-\int_0^T (u(t),.)\varphi'(t)dt = \int_0^T \langle f(t) + \Delta u(t) - a(l(w))u, .\rangle\varphi(t)dt \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

alors

$$u_t = f(t) + \Delta u(t) - a(l(w))u \in L^2(0,T;V')$$

on obtient d'apprêt le théorème de Riez

$$|u_t|_{L^2(0,T;V'} \leq C_4 \tag{4.4.4}$$

où C_4 *est une constante indépendante de* w*.*

On a

B=$\{v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad | \quad \|v\|_2 \leq C\}$

En prenant C assez grand où C est une constante telle que (4.4.3)et (4.4.4) soient vérifiées et on conclue que $u \in B$.

Cela montre que l'opérateur est définie de B dans B

4.4.2 Continuité de R

On montre que R est continu.

Alors on considère une suite $w_n \in B$ telle que

$$w_n \to w \in B$$

on note par $u_n = R(w_n)$ la solution de (4.3.2)

De (4.4.3) et (4.4.4) on peut extraite une sous suite tel que

$$w_n \to w \quad p.p.dans \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

et

$$l(w_n) \to l(w) \quad p.p.dans \quad L^2(0,T)$$

Puisque a est continue alors

$$a(l(w_n)) \to a(l(w)) \quad p.p.dans \quad t \in (0,T)$$

De plus, puisque u, satisfait les estimations (4.4.3) et (4.4.4) on a,

$$\|u_n\| \leq C$$

où C est indépendant de n. Donc on peut trouver u_n tel que - à une sous-suite près

- *on obtient*

$$\begin{cases} w_n \to w \quad p.p.\ dans \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \\ u_n \to u_\infty \quad dans \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i} \quad dans \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \\ (u_{n)t} \rightharpoonup (u_{\infty)t} \quad dans \quad L^2\left(0,T;V'\right) \end{cases} \tag{4.4.5}$$

par la troisième équation de (4.3.2), *pour quelque soit* $\varphi \in \mathcal{D}(0,T), v \in V$

$$\frac{d}{dt}\left(u_n, v\right)\varphi + \int_\Omega \nabla u_n \nabla v \varphi dx + a\left(l\left(w_n(t)\right)\right)\left(u_n, v\right)\varphi = (f,v)\varphi \quad dans \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in V$$

on intègre par rapport à t *de 0 à* T

$\int_0^T \frac{d}{dt}\left(u_n,v\right)\varphi(t)dt + \int_0^T\int_\Omega^T \nabla u_n \nabla v \varphi(t)dtdx + \int_0^T a\left(l\left(w_n(t)\right)\right)\left(u_n,v\right)\varphi(t)dt = \int_0^T (f,v)\varphi(t)dt$ *dans* $\mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in V.$

détail de calcule

$\int_0^T \underbrace{\frac{d}{dt}\left(u_n,v\right)}_{F'\cdot\varphi}\varphi(t)dt = \underbrace{[F\cdot\varphi]_0^T}_{\searrow = 0 \text{ car } \varphi \text{ nulle en bordure}} - \int_0^T F\cdot\varphi'(t)dt = -\int_0^T F\cdot\varphi'(t)dt =$
$\int_0^T \left(u_n,v\right)\cdot\varphi'(t)dt = -\int_0^T\int_\Omega u_n v \varphi'(t)dxdt \searrow$ *produit scalairen*

$\int_0^T a\left(l\left(w_n(t)\right)\right)\left(u_n,v\right)\varphi(t)dt = \int_0^T a\left(l\left(w_n(t)\right)\right)\int_\Omega u_n v\varphi(t)dxdt = \int_0^T\int_\Omega a\left(l\left(w_n(t)\right)\right)u_n v\varphi(t)dxdt$

$\int_0^T (f,v)\varphi(t)dt = \int_0^T\int_\Omega f v\varphi(t)dxdt$

Alors on obtient

-$\int_0^T\int_{\Omega)} u_n v\varphi'(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u_n\nabla v\varphi(t)dxdt + \int_0^T\int_{\Omega)} a\left(l\left(w_n\right)\right)u_n v\varphi(t)dxdt = \int_0^T \langle f,v\rangle\varphi(t)dt$
(4.4.6)

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ *et par le théorème de convergence de Lebesgue on voir que*

(I)-montons que $\int_0^T\int_\Omega u_n v\varphi'(t)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega uv\varphi'(t)dxdt$

- On montre d'abord que $\int_\Omega u_n v\varphi'(t)dx \to \int_\Omega uv\varphi'(t)dx$

on a $u_n \to u$ *dans* $L^2(\Omega)$ *d'apprêt théorème (2.12) il existe* $H \in L^2(\Omega)$ *telle que* $|u_{n_k}(x)| \leq H(x), \quad H \in L^1(\Omega)$ *alors*

$$\begin{aligned} u_n v\varphi'(t) &\longrightarrow uv\varphi'(t) \\ |u_n v\varphi'(t)| &\leq |u_n|\,|v|\,|\varphi'(t)| \\ &\leq H(x)|v|\,|\varphi'(t)| \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega H(x)|v|\,|\varphi'(t)|\,dx &\leq \left(\int_\Omega |H(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v\varphi'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|H\|_2 \cdot \left\|v^2\right\|_2^2 \qquad \left(\textit{prend} \quad \varphi' = v\right) \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

on obtient $|u_n v\varphi'(t)| \leq G(x), \quad G \in L^1(\Omega)$ *Donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n v\varphi'(t)dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} u_n v\varphi'(t)dx = \int_\Omega u_\infty v\varphi'(t)dx$$

on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_n v\varphi'(t)dx \longrightarrow \int_\Omega uv\varphi'(t)dx \\ &\left|\int_\Omega u_n v\varphi'(t)dx\right| \leq \int_\Omega H(x)|v|\,|\varphi'(t)|\,dx \\ &\leq \|H(x)\|_2^2 \cdot \left\|v^2\right\|_2^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega H(x)|v|\,|\varphi'(t)|\,dxdt &\leq \int_0^T \|H(x)\|_2^2 \cdot \left\|v^2\right\|_2^2 dt \\ &\leq \|H(x)\|_2^2 \cdot \left\|v^2\right\|_2^2 \cdot T \\ &\leq +\infty \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega H(x)|v|\,|\varphi'(t)|\,dxdt = \int_0^T \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega H(x)|v|\,|\varphi'(t)|\,dxdt$$

On a

$$\frac{d}{dt}\left(u_\infty, v\right) + \int_{\Omega)} \nabla u_\infty \nabla v dx + a(l(w))\left(u_\infty, v\right) = (f, v) \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in V$$

(4.4.7)

Bien sûr que

$$u_\infty \in L^2(0,T;V), \quad (u_\infty)_t \in L^2\left(0,T;V'\right)$$

Maintenant, on peut écrire pour p.p. $t \in (0,T), \forall v \in V$

$$(u_n(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle u_{n_t}, v\rangle\, dt$$

(4.4.8)

Notez que par la deuxième ligne de (4.4.5) on peut supposer sans perte de généralité que

$$u_n(t) \to u_\infty \quad \textit{dans} \quad L^2, \ \textit{p.p. } t \in (0,T).$$

si on passe à la limite dans (4.4.8) *on obtient*

$$(u_\infty(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle u_{\infty_t}, v\rangle \, dt = (u_\infty(t), v) - (u_\infty(0), v)$$

p.p. $t \in (0, T) \forall v \in V$. *alors*

$$u_\infty(0) = u_0 \tag{4.4.9}$$

par l'unicité de solution de (4.4.6) on obtient

$$u_\infty = u$$

En combinant (4.4.7)-(4.4.9) on voit que $u_\infty = R(w)$

et comme u_n *a une limite possible unique est* $R(w)$

$$u_n = T(w_n) \to T(w) = u_\infty = u$$

dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ *et la continuité de* R *est prouvée*

4.4.3 Existence et unicité de la solution

Existence d'un point fixe

On voit que toutes les hypothèses pour le théorème de point fixe de Schauder sont satisfaites, il existe donc $u \in B$ *tel que* $u = R(u)$

L'unicité de la solution

On suppose que l'application $a(.,.)$ *est est localement de Lipschitz et continue, c'est-à-dire pour tout constant* $z > 0$, *il existe un constant* A_z *tel que*

$$|a(\xi) - a(\xi')| \leq A_z |\xi - \xi'|, \quad \forall \xi, \xi' \in (-z, z) \tag{4.4.10}$$

Ensuite, nous pouvons montrer

Théorème 4.1 *Sous l'hypothèse du théorème 2.1 et si (4.4.10) est vérifiée, alors (4.2.3) admet une solution unique.*

Démonstration

Soit u_1, u_2 sont des deux solutions de (4.3.2).Par soustraction des équations satisfaites par u_1 et u_2 on obtient en $\mathbb{D}(0,T), \forall v \in V$:

$$\frac{d}{dt}(u_1-u_2,v)+\int_\Omega \nabla(u_1-u_2)\nabla v dx+a(l(u_1))(u_1-u_2,v)=(a(l(u_2))-a(l(u_1)))(u_2,v).$$

En prenant $v=u_1-u_2$ cela conduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2 \leq |a(l(u_2))-a(l(u_1))|\,|u_2|_2\,|u_1-u_2|_2$$

(en utilise quand a positive et l'inégalité de C-S). Comme $u_i \in C([0,T],L^2(\Omega))$ alors $l(u_i)$ reste borné et par

(4.4.10) on obtient pour quelque z

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2 \leq 2A_z\,|l(u_1-u_2)|\,|u_2|_2\,|u_1-u_2|_2 \leq 2A_z|g|_2\,|u_2|_2\,|u_1-u_2|_2^2$$
$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2 \leq C(t)\,|u_1-u_2|_2^2.$$

avec $C(t)$ une fonction positive intégrable.Donc on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\int_0^t C(s)ds}\,|(u_1-u_2)(t)|_2^2\right\} \leq 0$$

mais la fonction entre les braquet n'est pas négative et n'est pas décroissant. alors elle sa nulle pour $t=0$ et $u_1=u_2$. ce qui terminer la démonstration de théorème.

4.5 Conclusion

L'équation de réaction-diffusion que vous avez présentée, $u_t-\Delta u+a(l(u(t)))u=f$, est une équation fondamentale dans plusieurs domaines de la science et de l'ingénierie. Elle présente plusieurs perspectives et applications intéressantes :

1. *Modélisation des phénomènes de diffusion : L'équation de réaction-diffusion est couramment utilisée pour modéliser des processus de diffusion dans des systèmes physiques et chimiques. Elle peut décrire la propagation de substances chimiques, la diffusion thermique, la propagation d'espèces biologiques, la diffusion de gaz, etc.*

2. *Formation de motifs et structures : L'équation de réaction-diffusion est connue pour sa capacité à générer des motifs et des structures complexes. Des études mathématiques et numériques ont montré que certains choix de la fonction non linéaire $a(l(u(t)))$ peuvent conduire à l'émergence de motifs réguliers ou de structures auto-organisées. Cela a des applications dans des domaines tels que la biologie du développement, la modélisation des écoulements de fluides, la chimie des réactions auto-catalytiques, etc.*

3. *Systèmes dynamiques non linéaires : L'équation de réaction-diffusion est une forme d'équation différentielle partielle non linéaire. L'étude des solutions et des comportements dynamiques de cette équation a des liens étroits avec la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Des outils mathématiques tels que l'analyse de bifurcation, la stabilité des solutions, la théorie des chaos, etc., sont utilisés pour étudier les propriétés de cette équation.*

4. *Applications dans divers domaines scientifiques : L'équation de réaction-diffusion trouve des applications dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes biologiques tels que la morphogenèse, la propagation d'ondes dans le système nerveux, la modélisation de la croissance tumorale, etc. Elle est également utilisée en physique pour étudier la diffusion de particules, la propagation d'ondes dans les milieux complexes, etc.*

En résumé, l'équation de réaction-diffusion a des perspectives intéressantes en termes de modélisation de phénomènes de diffusion, de formation de motifs et de structures, d'étude des systèmes dynamiques non linéaires et d'applications dans divers domaines scientifiques. Son analyse théorique et son exploration numérique sont des sujets actifs de recherche dans plusieurs disciplines.

Bibliographie

[1] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] P. Lax, Functional Analysis, Wiley-Interscience, New York, 2002

[3] J. L. Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. *Dunod-GauthierVillards, 1969.*

[4] N. H. CHANG M. CHIPOT, On some model diffusion problems with a nonlocal lower order term, Chin. Ann. Math. **24B2** *(2003), 147-166.*

[5] Chipot, M. Molinet, L., Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems, Applicable Analysis.

[6] Y. M. Chen, S. Levine and M. Rao, Variable exponent linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. **66** *(2006), 1383-1406.*

[7] Chipot, M. Lovat, B., On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems, Positivity . **3** *(1999), 65-81.*

[8] Chipot, M. Lovat, B., Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems, DCDIS, Series A. **8 :1** *(2001), 35-51.*