RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
«Analyse fonctionnelle et application »

Présenté Par :

BENSAID Madiha et BLAHA Chaima

Sous L'intitulé :

ÉTUDE DE LA STABILISATION DE L'ÉQUATION DES ONDES

Soutenu publiquement le 26 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SOUID Mohammed Said	Professeur	Université de Tiaret	Président
Mr BENGUESSOUM Aissa	MCA	Université de Tiaret	Encadreur
Mr BENAISSA Bouharket	MCA	Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

✓ Nous remercions avant tous ALLAH qui nous ont donné la force et la volonté pour achever ce travail.

✓ Nous tenons à remercier sincèrement **Mr Bengussoum Aissa** non seulement pour avoir accepté de nous encadré et aussi nous faire profiter de sa connaissance, mais aussi pour sa patience et pour la totale confiance qu'il nous a accordée .

✓ Nous remercions vivement **Mr Souid Mohammed Said** de l'honneur qu'il nous fait en président ce jury .

✓ Nous remercions également **Mr Benaissa Bouharket** pour l'honneur qu'il fait d'avoir accepté l'examen de ce travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos familles, nos amies et nos professeurs.

Dédicace

Je rends grâce à dieu m'avoir donné le courage et la volonté pour terminer mes études.

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi.

A mon père ***Larbi*** *pour sa patience et les efforts qu'il a faits pour moi.*

A ma mère qui m'a soutenu avec tendresse et prié pour moi à chaque pas.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager, et tout ma famille ***Bensaid****.*

A mes chères frères et sœurs ***Abdelmalek, Ibrahim, Zahra, Rihab*** *et a tous mes amis* ***Chaima, Hadjer, Samia et Souria****, pour leur encouragement.*

Bensaid Madiha.

Dédicace

Je rends grâce à dieu m'avoir donné le courage et la volonté pour terminer mes études.

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi.

A mon père ***Bouziane*** *pour sa patience et les efforts qu'il a faits pour moi.*

A ma mère qui m'a soutenu avec tendresse et prié pour moi à chaque pas.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager, et tout ma famille ***Blaha*** *et* ***Derouiche.***

A mes chères frères ***Abdelrahman, Ishak, Rayan*** *et sœurs* ***Soumia, Nadia*** *et a tous mes amis* ***Hadjer, Samia et Madiha****, pour leur encouragement.*

Blaha Chaima.

Table des matières

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles (EDP) expriment et expliquent différentes lois fondamentales de la nature, et qui ont contribué à l'avancement de la recherche mathématique.

Donc, beaucoup de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par ces équations, dont les EDP classique dépendent du temps (problèmes d'évolution) par conséquent, cela a conduit au développement d'autres domaines scientifique comme l'ingénierie.

Ensuite, les problèmes d'existence globale et de la stabilité dans le temps des EDP ont fait récemment l'objet de plusieurs travaux .

Dans, ce mémoire nous nous somme intéressées à l'étude de l'existence local et globale des solutions et la stabilisation de certaines équations d'évolution.

Nous déterminerons le comportement asymptotique de la solution à l'aide de la méthode énergétique, elle consiste donc de garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation, pour le but d'atténuer les vibrations par rétroaction (Feedback).

Plus précisément, le problème de la stabilisation consiste à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ et étudier sa limite pour $t \longrightarrow +\infty$.

Il existe plusieurs type de la stabilisation comme :

- Stabilisation forte

$$E(t) \longrightarrow 0, \ lorsque \ t \to +\infty.$$

- Stabilisation polynomiale

$$E(t) \leq Kt^{-k},$$

où K et k sont des constantes positives.

- Stabilisation logarithmique

$$E(t) \leq K(log(t))^{-k},$$

où K et k sont des constantes positives.

- Stabilisation uniforme

$$E(t) \leq Ke^{-kt},$$

où K et k sont des constantes positives.

On s'intéresse à l'étude de l'existence globale de la solution ainsi que la stabilité de la solution de l'équation des ondes non-linéaire.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres partagés de la façon suivante :

• Dans le premier chapitre nous rappelons les principaux notions qui nous aurons besoins, commençons par les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Finalement nous présentons les inégalités intégrales nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire et aussi nous citons quelques théorèmes utiles.

• Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution pour l'équation suivante

$$u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t = bu|u|^{p-2},$$

dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, avec $a, b > 0$ et $m, p \geq 2$.

• On termine ce travail par le troisième chapitre, où on étudier l'existence globale et le comportement asymptotique de l'équation suivante

$$u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t + bu|u|^{p-2} = 0,$$

dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec $a, b > 0$ et $2 \leq m \leq p$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les outils fonctionnels de base pour étudier l'existence global et la stabilisation de la solution des équations différentielles aux dérivées partielles.

1.1 Quelques définitions et théorèmes

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. *[4] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ et $p \in [1, +\infty]$.*
On définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit :
Si $1 \leq p < +\infty$,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable / \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

est muni la norme

$$\|u(x)\|_p = \|u(x)\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$,

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable \ / \ \exists C > 0, |\ u(x)\ | \leqslant C,\ p.p.\ sur\ \Omega\}$$

est muni la norme

$$\|u(x)\|_{\infty} = \|u(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\{C \geq 0 \ / \ |u(x)| \leq C,\ p.p.\ sur\ \Omega\},$$

on écrit

$$\|u(x)\|_{\infty} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

Pour $p \in [1, +\infty], L^{p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
Pour $p = 2$, *on note* $H^{1}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
L'espace $H^{1}(\Omega)$ *est de Hilbert muni de la norme*

$$\|u\|_{L^{2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{2} dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

sa produit scalaire associé est

$$< u, v >_{L^{2}(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

1.1.2 L'espace $L^{p}(a, b; X)$

Définition 1.1.2. *[4] Soit* X *un espace de Banach et* $a, b \in \mathbb{R}$, *on définit l'espace* $L^{p}(a, b; X)$ *comme suit :*
Si $1 \leq p < +\infty$,

$$L^p(a,b;X) = \left\{ u :]a,b[\longrightarrow X / \int_a^b \|u\|_X^p dt < +\infty,\ p.p.\ sur X \right\}.$$

Si $p = +\infty$,

$$L^\infty(a,b;X) = \{ u :]a,b[\longrightarrow X /\ \|u\|_X < +\infty,\ p.p.\ sur X \}.$$

L'espace $L^p(a,b;X)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \\ \sup_{t \in]a,b[} ess \|u\|_X, & si \quad p = +\infty, \end{cases}$$

est un espace de Banach.
Si $p = 2$, *l'espace* $L^2(a,b;X)$ *est un espace de Hilbert muni le produit scalaire*

$$< u, v >_{L^2(a,b;X)} = \int_a^b (u,v)_X dt.$$

1.1.3 Espaces de Sobolev

• Dérivée faible

Définition 1.1.3. *[4] Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, $1 \leq i \leq n$ *et* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *une fonction a une i-ème dérivée faible dans* $L^1_{loc}(\Omega)$, *s'il existe* $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *telle que pour toute* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) dx = - \int_\Omega f_i \varphi(x) dx,$$

cela revient à dire que f_i *est la i-ème dérivée de* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *au sens des distributions,* *on écrire*

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

• Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.1.4. *[4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ et $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p \leq +\infty$.*
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \ \exists g_i \in L^p(\Omega), \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, ..., n \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou parfois de la norme équivalent $\left(\|u\|_{L^p}^p = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad$ *si* $1 \leq p < +\infty$.
On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega),$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

et sa norme associée est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

• Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.1.5. *[4] Étant donné $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*
On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

• Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.6. *[4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*), m \geq 2$ et p un nombre réel que $1 \leq p \leq +\infty$. On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha_i \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{et} \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.1.1. *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

• Espace $W^{m,p}(a,b;X)$

Définition 1.1.7. *[4] Soit X un espace de Banach et $a, b \in \mathbb{R}$, pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$, on a*

$$W^{m,p}(a,b;X) = \left\{ u \in L^p(a,b;X) / \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(a,b;X), \ \forall i \leq m \right\}.$$

L'espace $W^{m,p}(a,b;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(a,b;X)} = \left(\|u\|^p_{L^p(a,b;X)} + \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(a,b;X)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad si\ 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|W^{m,\infty}(a,b;X)\| = \|u\|_{L^\infty(a,b;X)} + \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(a,b;X)}.$$

L'espace $W^{m,2}(a,b;X)$ est un Hilbert et noté $H^m(a,b;X)$, sa produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(a,b;X)} = \int_a^b (u,v)_X dt + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_X dt.$$

1.1.4 Théorème de Rellich-Kondrachov

Théorème 1.1.1. *[4] On suppose que Ω un ouvert borné $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ de classe C^1. On a*

si $p < n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$, *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

si $p = n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,

si $p > n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,

avec injection compactes.

1.1.5 Formule de Green

Définition 1.1.8. *[4] Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ de classe C^1, son frontière Γ. Alors*

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v \eta d\Gamma,$$

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ *est dérivée normale de u à $\Gamma = \partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur.*
Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u . \eta$ est la dérivée normale de u tel que η le vecteur normale extérieur à Γ, telles que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ *et* $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

1.2 Quelques inégalités utiles

• Inégalité de Young [4]

Soient p,q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Qu'on l'utilise aussi parfois sous la forme.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|ab| < \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon)|b|^q, \quad c(\varepsilon) > 0,$$

ou

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

• Inégalité de Cauchy-Schwarz[4]

Soit $< u, v >_X$ un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel X muni de la norme

$$\|v\|_X = \sqrt{< v, v >_X},$$

alors

$$| < u, v >_X | \leq \|u\|_X \|v\|_X, \ \forall u, v \in X.$$

• Inégalité de Hölder [4]

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ telles que $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

i.e.

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \ \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

• Inégalité de Poincaré [4]

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) pour $1 \leq p < +\infty$, on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,P}(\Omega).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Dans $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Chapitre 2

Existence et décroissance exponentielle des solutions d'une équation d'onde non linéaire

Dans ce chapitre nous étudions l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution de l'équation suivante

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(1 + |u_t(x,t)|^{m-2})u_t(x,t) = b|u(x,t)|^{p-2}u(x,t),$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, son frontière régulière $\partial\Omega, a, b > 0$, $m, p > 2$ et les fonctions $u_0(x)$, $u_1(x)$ sont les données initiales.

On considère le problème suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t(x,t) & \\ \qquad = b|u(x,t)|^{p-2}u(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

On définit la fonctionnelle de l'énergie de la solution $u(x,t)$ du problème (P) par :

$$E(t) = E(u,u_t) := \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p. \tag{2.1}$$

Pour montrer la décroissance de l'énergie, on prouve le lemme suivent :

Lemme 2.0.1. *[3] Si u est la solution de (P), alors l'énergie satisfaite*

$$E'(t) = -a(\|u_t(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_m^m) \leq 0, \tag{2.2}$$

pour tout $t \in [0,T[$.

Preuve. En multipliant la première équation du problème (P) par $u_t(x,t)$ et intégrant par rapport à x, on trouve

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)u_t(x,t)dx$$

$$+ a\int_\Omega (1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t^2(x,t)dx \tag{2.3}$$

$$= b\int_\Omega |u(x,t)|^{p-2}u(x,t)u_t(x,t)dx.$$

On remarque que

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}u_t^2(x,t)dx,$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx,$$

donc

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_2^2. \tag{2.4}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega u_t(x,t)\Delta u(x,t)dx = \int_\Omega \nabla u_t(x,t)\nabla u(x,t)dx,$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx,$$

alors

$$-\int_\Omega u_t(x,t)\Delta u(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(x,t)\|_2^2, \tag{2.5}$$

aussi

$$a\int_\Omega (1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t^2(x,t)dx = a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx,$$

on obtient

$$a\int_\Omega (1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t^2(x,t)dx = a\|u_t(x,t)\|_2^2 + a\|u_t(x,t)\|_m^m. \tag{2.6}$$

Puisque

$$\frac{d}{dt}\frac{b}{p}\int_\Omega |u(x,t)|^p dx = \frac{b}{p}\int_\Omega p|u(x,t)|^{p-1}\frac{u(x,t)}{|u(x,t)|}u_t(x,t)dx,$$

$$= b\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}dx,$$

implique que

$$b\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}dx = \frac{d}{dt}\frac{b}{p}\int_\Omega |u(x,t)|^p dx,$$

c'est-à-dire

$$b\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}dx = \frac{b}{p}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_p^p. \tag{2.7}$$

Nous remplaçons (2.4),(2.5), (2.6),(2.7) dans (2.3), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + a\|u(x,t)\|_2^2 + a\|u(x,t)\|_m^m$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p,$$

alors

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_2^2\right] = -a\left(\|u_t(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_m^m\right),$$

d'après (2.1), on déduire que

$$E'(t) = -a\left(\|u_t(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_m^m\right) \leq 0, \tag{2.8}$$

pour tout $t \in [0,T[$.

Donc E(t) est décroissante.

On déduire que

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.9}$$

puisque

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_t(0)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(0)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(0)\|_p^p,$$

donc

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u_0\|_p^p, \quad \forall t \in [0,T].$$

□

2.1 Existence Locale

Dans cette section, nous allons montrer l'existence locale de la solution du problème (P), pour atteindre cet objectif, nous trouvons le théorème suivante :

Théorème 2.1.1. *[3] Supposons que $m \geq 2$ et $p \geq 2$ satisfaites*

$$\begin{cases} 2 \leq p \leq \dfrac{2(n-1)}{n-2}, & n \geq 3, \\ p \geq 2, & n = 1, 2. \end{cases}$$

et soit $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donné. Alors le problème (P) a une solution locale unique

$$\begin{cases} u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)), \\ u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times [0,T]), \end{cases} \tag{2.10}$$

pour tout $T > 0$.

Avant de prouver notre théorème, on introduit l'ensemble suivant :

$$H = \{u \in H_0^1(\Omega), I(u) > 0\} \cup \{0\}. \tag{2.11}$$

Ensuite on introduit les fonctions

$$I(t) = I(u(x,t)) := \|\nabla u(x,t)\|_2^2 - b\|u(x,t)\|_p^p,$$

et

$$J(t) = J(u(x,t)) := \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p.$$

Alors

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + J(t).$$

On démontre que la solution u appartient à H dans le lemme suivant

Lemme 2.1.1. *[3] Supposons que*

$$2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2.12}$$

Si $u_0 \in H$ *et* $u_1 \in L^2(\Omega)$ *satisfaites*

$$\beta = bC_*^p\left(\frac{2p}{(p-2)}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1. \tag{2.13}$$

Alors $u(t) \in H$ *pour tout* $t \in [0, T[$.

Preuve. Comme $I(0) > 0$, alors il existe $T_\tau \leq T$ tel que $I(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0, T_\tau[$.

Cela implique que

$$J(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p,$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\left(I(t) - \|\nabla u(x,t)\|_2^2\right),$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(t),$$

$$= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(t),$$

donc

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(x,t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0, T_\tau[, \tag{2.14}$$

on déduit que

$$\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2}J(t),$$

d'où

$$\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2}E(t), \tag{2.15}$$

pour tout $t \in [0, T_\tau[$.

D'après (2.9), on conclure que

$$\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2}E(0), \quad \forall t \in [0, T_\tau[. \tag{2.16}$$

D'après (2.16), il résulte $E(0) \geq 0$.

Gârce à l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|u(x,t)\|_p \leq C_* \|\nabla u(x,t)\|_2,$$

alors

$$\|u(x,t)\|_p^p \leq C_*^p \|\nabla u(x,t)\|_2^p,$$

$$\leq C_*^p \|\nabla u(x,t)\|_2^{p-2} \|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

$$\leq C_*^p (\|\nabla u(x,t)\|_2^2)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

donc

$$b\|u(x,t)\|_p^p \leq bC_*^p (\|\nabla u(x,t)\|_2^2)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u(x,t)\|_2^2.$$

D'après (2.12) et (2.16), on déduire que

$$b\|u(x,t)\|_p^p \leq bC_*^p \left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

donc

$$b\|u(x,t)\|_p^p \leq \beta \|\nabla u(x,t)\|_2^2. \tag{2.17}$$

Puisque $\beta < 1$, alors

$$b\|u(x,t)\|_p^p \leq \|\nabla u(x,t)\|_2^2, \quad \forall t \in [0, T_\tau[. \tag{2.18}$$

Par conséquent, en déduire

$$I(t) = \|\nabla u(x,t)\|_2^2 - b\|u(x,t)\|_p^p > 0, \quad \forall t \in [0, T_\tau[. \tag{2.19}$$

Donc, $u(t) \in H$, pour tout $t \in [0, T_\tau[$.

En notant que

$$bC_*^p\left(\frac{2p}{(p-2)}E(T_\tau)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1,$$

on répète les étapes (2.2)-(2.13), pour étendre T_τ à T. Nous continuons cette procédure jusqu'à ce que

$$u(t) \in H, \quad \forall t \in [0, T[.$$

□

2.2 Existence Globale

Dans cette partie, nous allons montrer l'existence globale de la solution du problème(P).Avant de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *[3] Supposons que* (2.12) *est vérifiée. Si $u_0 \in H$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$ vérifiant* (2.13). *Alors la solution est globale.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_2^2$ est borné par une constante indépendant de t. Pour ce faire, nous utilisons (P) et (2.12) donc

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p,$$

$$= J(t) + \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2,$$

puisque

$$-b\|u(x,t)\|_p^p = I(t) - \|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

alors

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\left(I(t) - \|\nabla u(x,t)\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2,$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(t) + \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2,$$

grâce à (2.11), on a

$$E(t) \geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2, \tag{2.20}$$

donc

$$E(t) \geq \min\left(\frac{p-2}{2p}, \frac{1}{2}\right)\left(\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_2^2\right),$$

alors

$$\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\min\left(\frac{p-2}{2p}, \frac{1}{2}\right)}E(t),$$

$$\leq \max\left(\frac{2p}{p-2}, 2\right)E(t),$$

d'où

$$\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_2^2 \leq CE(t), \tag{2.21}$$

telle que $C = \max\{2, \frac{2p}{p-2}\}$, c'est une constante indépendant de t.
Grâce à (2.9), on déduire que

$$\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_2^2 \leq CE(0), \tag{2.22}$$

donc $\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_2^2$ est borné par une constante indépendant de t. $\square$

Remarque 2.2.1. *Si $m \geq p$, alors l'existence globale peut être obtenue pour tout $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et tout $u_1 \in L^2(\Omega)$.*

2.3 Stabilité

Dans cette section, on étudie le comportement asymptotique de la solution du problème (P).
Pour atteindre cet objectif, on prouve le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *[3] Supposons que* (2.11),(2.13) *et* (2.12) *sont vérifiées. Alors il existe deux constantes positives K et k telles que la solution globale de (P) satisfaite*

$$E(t) \leq K e^{-kt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.23}$$

Avant la démonstration de ce théorème, on définit la fonction $F(t)$ comme suivante :

$$F(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega \Big(u_t(x,t)u(x,t) + \frac{a}{2}u^2(x,t) \Big)\, dx, \tag{2.24}$$

où ε est une constante positive à préciser ultérieurement.
On départ a prouvé les deux lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. *[3] Il existe deux constantes positives α_1 et α_2, telles que*

$$\alpha_1 E(t) \leq F(t) \leq \alpha_2 E(t), \tag{2.25}$$

pour ε assez petit.

Preuve. Nous considérons la fonction $L(t)$ définie par

$$L(t) = \varepsilon \int_\Omega \Big(u(x,t)u_t(x,t) + \frac{a}{2}u^2(x,t) \Big)\, dx, \quad \textit{avec } \varepsilon > 0. \tag{2.26}$$

On a

$$|L(t)| \leq \varepsilon \int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|dx + \frac{a\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2(x,t)dx,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|L(t)| \leq \varepsilon \left(\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon a}{2}\int_\Omega u^2(x,t)dx,$$

$$\leq \varepsilon \|u(x,t)\|_2 \|u_t(x,t)\|_2 + \frac{\varepsilon a}{2}\|u(x,t)\|_2^2,$$

d'après l'inégalité de Young, on a

$$|L(t)| \leq \varepsilon\delta \|u(x,t)\|_2^2 + \varepsilon c(\delta)\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon a}{2}\|u(x,t)\|_2^2,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $c(\delta) > 0$,
c'est-à-dire,

$$|L(t)| \leq \varepsilon(\delta + \frac{a}{2})\|u(x,t)\|_2^2 + \varepsilon c(\delta)\|u_t(x,t)\|_2^2.$$

Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|u(x,t)\|_2 \leq C_* \|\nabla u(x,t)\|_2,$$

alors

$$\|u(x,t)\|_2^2 \leq C_*^2 \|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

grâce a (2.15), de sorte que

$$\|u(x,t)\|_2^2 \leq C_*^2 \frac{2p}{p-2} E(t),$$

et puisque

$$\varepsilon c(\delta)\|u_t(x,t)\|_2^2 \leq 2\varepsilon c(\delta)\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2,$$

$$\leq 2\varepsilon c(\delta)E(t).$$

Alors

$$|L(t)| \leq \varepsilon C_*^2\left(\delta + \frac{a}{2}\right)\frac{2p}{p-2}E(t) + 2\varepsilon c(\delta)E(t),$$

$$\leq \varepsilon\left(C_*^2(\delta + \frac{a}{2})\frac{2p}{p-2} + 2c(\delta)\right)E(t),$$

$$\leq \varepsilon C_1 E(t),$$

telle que $C_1 = C_*^2(\delta + \frac{a}{2})\frac{2p}{p-2} + 2c(\delta)$,
implique que

$$-\varepsilon C_1 E(t) \leq L(t) \leq \varepsilon C_1 E(t),$$

alors

$$E(t) - \varepsilon C_1 E(t) \leq E(t) + L(t) \leq E(t) + \varepsilon C_1 E(t),$$

donc

$$(1 - \varepsilon C_1)E(t) \leq F(t) \leq (1 + \varepsilon C_1)E(t),$$

on choisit ε assez petit pour $1 - \varepsilon C_1 > 0$.
D'où

$$\alpha_1 E(t) \leq F(t) \leq \alpha_2 E(t),$$

telle que $\alpha_1 = 1 - \varepsilon C_1$ et $\alpha_2 = 1 + \varepsilon C_1$.

Donc $E(t)$ et $F(t)$ sont équivalentes. $\square$

Lemme 2.3.2. *[3] Supposons que*

$$2 < m \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2.27}$$

Alors la solution satisfaite

$$\|u(x,t)\|_m^m \leq CE(t), \tag{2.28}$$

pour une constant C indépendante de t.

Preuve. Gârce à l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|u(x,t)\|_m \leq C_* \|\nabla u(x,t)\|_2,$$

alors

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_m^m &\leq C_*^m \|\nabla u(x,t)\|_2^m, \\
&\leq C_*^m \|\nabla u(x,t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(x,t)\|_2^2, \\
&\leq C_*^m \left(\|\nabla u(x,t)\|_2^2\right)^{\frac{m-2}{2}} \|\nabla u(x,t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

d'après (2.13), (2.16) et (2.15), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_m^m &\leq C_*^m \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{m-2}{2}} \|\nabla u(x,t)\|_2^2, \\
&\leq C_*^m \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{m-2}{2}} \frac{2p}{p-2} E(t),
\end{aligned}$$

on déduire que

$$\|u(x,t)\|_m^m \leq CE(t),$$

telle que $C = \dfrac{2pC_*^m}{p-2}\left(\dfrac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{m-2}{2}}$, c'est constante est indépendante de t. $\square$

Preuve le théorème 2.3.1. En dérivant $F(t)$ (2.24) par rapport à t, on obtient

$$F'(t) = E'(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t^2(x,t)dx + \varepsilon \int_\Omega u(x,t)u_{tt}(x,t)dx + a\varepsilon \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx,$$

nous utilisons la première équation du problème (P) et d'après l'intégration par partie, on trouve

$$F'(t) = E'(t) + \varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 + \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx$$

$$+\varepsilon \int_\Omega u(x,t)\left[\Delta u(x,t) - au_t(x,t) - au_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2} + bu(x,t)|u(x,t)|^{p-2}\right]dx,$$

$$= E'(t) + \varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 + \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx - \varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2$$

$$-\varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx - \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2}dx + \varepsilon b \int_\Omega |u(x,t)|^p dx,$$

$$= E'(t) + \varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2$$

$$-\varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2}dx + \varepsilon b \int_\Omega |u(x,t)|^p dx,$$

d'après (2.2), on a

$$F'(t) \leq -a\|u_t(x,t)\|_2^2 - a\|u_t(x,t)\|_m^m + \varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2$$

$$+\,\varepsilon a \int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|^{m-1}dx + \varepsilon b\|u(x,t)\|_p^p,$$

alors

$$\begin{aligned} F'(t) \leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - (a-\varepsilon)\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\ & +\,\varepsilon a \int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|^{m-1}dx + \varepsilon b\|u(x,t)\|_p^p. \end{aligned} \tag{2.29}$$

D'après (2.11) et (2.1), on trouve

$$\begin{aligned} b\|u(x,t)\|_p^p &= \alpha b\|u(x,t)\|_p^p + b(1-\alpha)\|u(x,t)\|_p^p, \\ &= \alpha\left[\frac{p}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{p}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - pE(t)\right] + b(1-\alpha)\|u(x,t)\|_p^p, \end{aligned}$$

telle que $0 < \alpha < 1$ et d'après (2.17), on obtient

$$b\|u(x,t)\|_p^p \leq \alpha\left[\frac{p}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{p}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - pE(t)\right] + \beta(1-\alpha)\|\nabla u(x,t)\|_2^2. \tag{2.30}$$

Grâce à l'inégalité de Young, on a

$$\int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|^{m-1}dx \leq \delta\|u(x,t)\|_m^m + c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m, \quad \forall\delta > 0. \tag{2.31}$$

Par conséquent, une combinaison de (2.29), (2.30) et (2.31) donne

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - (a-\varepsilon)\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon a\delta\|u(x,t)\|_m^m + \varepsilon ac(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m + \frac{\varepsilon\alpha p}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 \\
& + \frac{\varepsilon\alpha p}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\alpha pE(t) + \beta\varepsilon(1-\alpha)\|\nabla u(x,t)\|_2^2, \\
\leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(1+\frac{\alpha p}{2})\right]\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\alpha pE(t) \\
& + \varepsilon\left[\alpha(\frac{p}{2}-1) + \alpha - 1 + \beta(1-\alpha)\right]\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon a\left(\delta\|u(x,t)\|_m^m + c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m\right), \\
\leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(1+\frac{\alpha p}{2})\right]\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\alpha pE(t) \\
& + \varepsilon\left[\alpha(\frac{p}{2}-1) - (1-\alpha)(1-\beta)\right]\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon a\left(\delta\|u(x,t)\|_m^m + c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m\right),
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(\frac{\alpha p}{2}+1)\right]\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\alpha p E(t) \\
& + \varepsilon\left[\alpha(\frac{p}{2}-1) - \eta(1-\alpha)\right]\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon a\left(\delta\|u(x,t)\|_m^m + c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m\right),
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

telle que $\eta = 1-\beta$.

En utilisant (2.15) et en choisissant α proche de 1, de sorte que, $\alpha(\frac{p}{2}-1)-\eta(1-\alpha) \geq 0$, on trouve

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(\frac{\alpha p}{2}+1)\right]\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\alpha p E(t) \\
& +\varepsilon\left[\alpha(\frac{p}{2}-1) - \eta(1-\alpha)\right]\frac{2p}{p-2}E(t) + \varepsilon a\left(\delta\|u(x,t)\|_m^m + c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m\right),
\end{aligned}
$$

implique que

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -a\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(\frac{\alpha p}{2}+1)\right]\|u_t(x,t)\|_2^2 \\
& - \varepsilon\eta(1-\alpha)\frac{2p}{p-2}E(t) + \varepsilon a\left(\delta\|u(x,t)\|_m^m + c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m\right),
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

grâce à (2.28), on a

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -a\left[1-\varepsilon c(\delta)\right]\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(\frac{\alpha p}{2}+1)\right]\|u_t(x,t)\|_2^2 \\
& - \varepsilon\eta(1-\alpha)\frac{2p}{p-2}E(t) + \varepsilon a\delta C E(t),
\end{aligned}
$$

$$F'(t) \leq -a\left[1-\varepsilon c(\delta)\right]\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a-\varepsilon(\frac{\alpha p}{2}+1)\right]\|u_t(x,t)\|_2^2$$
$$-\varepsilon\left[\eta(1-\alpha)\frac{2p}{p-2}-\delta aC\right]E(t). \tag{2.34}$$

Dans cette situation, nous choisissons δ assez petit que $\dfrac{\eta(1-\alpha)2p}{p-2} - \delta aC > 0.$

Une fois δ choisi, on choisit alors ε assez petit que $1-\varepsilon c(\delta) \geq 0$, $a-\varepsilon(\alpha p2+1) \geq 0$, et (2.25) reste valide. Par conséquent (2.34), on obtient

$$F'(t) \leq -\varepsilon\left[\eta(1-\alpha)\frac{2p}{p-2}-\delta aC\right]E(t).$$

Grâce à (2.25), on déduit que

$$F'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\left[\eta(1-\alpha)\frac{2p}{p-2}-\delta aC\right]F(t), \tag{2.35}$$

par l'intégration de (2.35), conduit alors à

$$F(t) \leq F(0)e^{-kt},$$

où $k = \dfrac{\varepsilon}{\alpha_2}\left[\eta(1-\alpha)\dfrac{2p}{p-2}-\delta aC\right]$.

D'après (2.25), on a

$$\alpha_1 E(t) \leq F(0)e^{-kt}, \quad \forall t \geq 0,$$

implique que

$$E(t) \leq Ke^{-kt}, \quad \forall t \geq 0,$$

telle que $K = \dfrac{F(0)}{\alpha_1}$.

On termine la preuve de théorème 2.3.1. $\square$

Chapitre 3

Décroissance de l'énergie de la solution pour une équation d'onde non linéaire

Dans ce chapitre, on étudie l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution de l'équation d'onde non linéaire

$$u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t + bu|u|^{p-2} = 0,$$

où, $a, b > 0$, $m, p > 2$, et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, avec une frontière régulière $\partial\Omega$.
Pour $m, p > 2$, on étudier l'existence globale de la solution de cette équation.
Mais, pour montrer que l'énergie de la solution est décroissante exponentiellement, on choisir plus précisément $2 \leq m \leq p$.

A cet effet, on considère le problème (P) suivant

$$(P)\quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t(x,t) & \\ \qquad +bu(x,t)|u(x,t)|^{p-2} = 0, & \text{dans} \quad \Omega\times]0,+\infty[, \\ u(x,t) = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{dans} \quad x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans} \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

On énonce d'abord le théorème d'existence, dit standard(voir[[6]]-[[10]]).

Théorème 3.0.2. *[8] Supposons que $m > 2$ et $p > 2$, tels que*

$$p \leq 2\frac{n-1}{n-2}, \quad \textit{pour} \quad n \geq 3, \tag{3.1}$$

et soit $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donné. Alors le problème (P) admet une unique solution globale

$$u \in C\left([0,+\infty[; H_0^1(\Omega)\right) \; \textit{et} \; u_t \in C\left([0,+\infty[; L^2(\Omega)\right) \cap L^m\left(\Omega\times]0,+\infty[\right). \tag{3.2}$$

Maintenant, on va à la réalisation de l'objectif de ce travail, c'est l'étude du comportement asymptotique de le problème (P), on montre que l'énergie de la solution, définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p, \tag{3.3}$$

est décroissante exponentiellement, si $2 \leq m \leq p$.

A cet effet, nous utilisons l'inégalité de Poincaré et des théorèmes de plongement de

Sobolev, qu'il existe une constante β dépendant que de Ω, telle que

$$\begin{cases} \|u(x,t)\|_2 \le \beta \|\nabla u(x,t)\|_2, \\ \|u(x,t)\|_m \le \beta \|\nabla u(x,t)\|_2, \\ \|u(x,t)\|_m \le \beta \|u(x,t)\|_p, \quad m \le p. \end{cases} \tag{3.4}$$

La preuve l'objectif sera passé par la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.0.3. *[8] Sous l'hypothèse que* $2 \le m \le p$, *avec* (P) *satisfaisant* (3.1). *Alors il existe deux constantes positives* K *et* α *telles que toute solution de* (P) *dans la classe* (3.2) *satisfait*

$$E(t) \le Ke^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0. \tag{3.5}$$

Avant la démonstration de ce théorème, on définit la fonction $F(t)$ suivante :

$$F(t) := E(t) + \varepsilon \int_\Omega u(x,t) u_t(x,t) dx, \tag{3.6}$$

où ε est une constante positive à préciser ultérieurement.
On départ a prouvé les deux lemmes suivants :

Lemme 3.0.3. *[8] Si* u *est la solution de* (P), *alors l'énergie satisfaite*

$$E'(t) = -\left(\|u_t(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_m^m\right) \le 0, \quad \forall t > 0. \tag{3.7}$$

Preuve. Multiplier la première équation en (P) par $u_t(x,t)$, et intégrer par rapport x, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t) u_t(x,t)dx \\ &+ a\int_\Omega (1 + |u_t(x,t)|^{m-2}) u_t^2(x,t)dx + b\int_\Omega u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}u_t(x,t)dx = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

On remarquant que

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}u_t^2(x,t)dx,$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx,$$

donc

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_2^2. \tag{3.9}$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega u_t(x,t)\Delta u(x,t)dx = \int_\Omega \nabla u_t(x,t)\nabla u(x,t)dx,$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx,$$

alors

$$-\int_\Omega u_t(x,t)\Delta u(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(x,t)\|_2^2. \tag{3.10}$$

c'est-à-dire

$$a\int_\Omega (1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t^2(x,t)dx = a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx + a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx,$$

donc

$$a\int_\Omega (1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t^2(x,t)dx = a\|u_t(x,t)\|_2^2 + a\|u_t(x,t)\|_m^m. \tag{3.11}$$

Puisque

$$\frac{d}{dt}\frac{b}{p}\int_{\Omega}|u(x,t)|^{p}dx = \frac{b}{p}\int_{\Omega}p|u(x,t)|^{p-1}\frac{u(x,t)}{|u(x,t)|}u_t(x,t)dx,$$

$$= b\int_{\Omega}u_t(x,t)u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}dx,$$

implique que

$$b\int_{\Omega}u_t(x,t)u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}dx = \frac{b}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u(x,t)|^{p}dx,$$

d'où

$$b\int_{\Omega}u_t(x,t)u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}dx = \frac{b}{p}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_p^p. \tag{3.12}$$

On remplace (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) dans (3.8), on trouve

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p\right] = -a\left(\|u_t(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_m^m\right).$$

D'après (3.3), on déduit que

$$E'(t) = -a\left(\|u_t(x,t)\|_2^2 + \|u_t(x,t)\|_m^m\right) \leq 0.$$

Donc $E(t)$ est décroissante.

implique que

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t > 0,$$

c'est-à-dire

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{b}{p}\|u_0\|_p^p, \quad \forall t > 0.$$

$\square$

Lemme 3.0.4. *[8] Il existe deux constantes positives α_1 et α_2 telles que :*

$$\alpha_1 E(t) \leq F(t) \leq \alpha_2 E(t), \tag{3.13}$$

telle que ε assez petit.

Preuve. D'après (3.2), on a

$$F(t) - E(t) = \varepsilon \int_\Omega u(x,t) u_t(x,t) dx.$$

En utilisant l'inégalité intégrale de Cauchy Schwarz et l'inégalité de Young, on obtient

$$|F(t) - E(t)| \leq \varepsilon \int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)| dx,$$

$$\leq \varepsilon \|u(x,t)\|_2 \|u_t(x,t)\|_2,$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u(x,t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_t(x,t)\|_2^2,$$

Grâce à (2.24), (3.3) et (3.4) de sorte que

$$|F(t) - E(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \beta^2 \|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \varepsilon E(t),$$

$$\leq \varepsilon \beta^2 E(t) + \varepsilon E(t),$$

$$\leq \varepsilon (1 + \beta^2) E(t).$$

implique que

$$-\varepsilon(1+\beta^2)E(t) \leq F(t) - E(t) \leq \varepsilon(1+\beta^2)E(t),$$

alors

$$E(t) - \varepsilon(1+\beta^2)E(t) \leq F(t) \leq E(t) + \varepsilon(1+\beta^2)E(t),$$

c'est-à-dire

$$(1 - \varepsilon(1+\beta^2))E(t) \leq F(t) \leq (1 + \varepsilon(1+\beta^2))E(t),$$

on choisit ε assez petit pour $1 - \varepsilon(1+\beta^2) > 0$, on déduire que

$$\alpha_1 E(t) \leq F(t) \leq \alpha_2 E(t),$$

telle que $\alpha_1 = 1 - \varepsilon(1+\beta^2)$ et $\alpha_2 = 1 + \varepsilon(1+\beta^2)$.
Donc $E(t)$ et $F(t)$ sont équivalentes. □

Preuve de théorème 3.0.3. En dérivant F(t) par rapport à t, on obtient

$$F'(t) = E'(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t^2(x,t)dx + \varepsilon \int_\Omega u(x,t)u_{tt}(x,t)dx,$$

nous utilisons la première équation du problème (P) et d'après l'intégration par partie, on trouve

$$F'(t) = E'(t) + \varepsilon \|u_t(x,t)\|_2^2$$

$$+\varepsilon \int_\Omega u(x,t)\left[\Delta u(x,t) - au_t(x,t) - au_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2} - bu(x,t)|u(x,t)|^{p-2}\right]dx,$$

$$= E'(t) + \varepsilon \|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx$$

$$- \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2}dx - \varepsilon b \int_\Omega |u(x,t)|^p dx,$$

d'après (3.7), on a

$$F'(t) = -a\|u_t(x,t)\|_2^2 - a\|u_t(x,t)\|_m^m + \varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 - \varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2$$

$$- \varepsilon a \int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx - \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2}dx - \varepsilon b\|u(x,t)\|_p^p,$$

grâce à (3.3), on a

$$-\frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p = \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - E(t),$$

et puisque

$$-b = -b\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{b}{p},$$

alors

$$-\varepsilon b\|u(x,t)\|_p^p = -\varepsilon b\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|u(x,t)\|_p^p - \varepsilon\frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p,$$

$$= -\varepsilon b\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|u(x,t)\|_p^p + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \varepsilon E(t),$$

donc, on déduit que

$$
\begin{aligned}
F'(t) =& - a\|u_t(x,t)\|_2^2 - a\|u_t(x,t)\|_m^m + \frac{3}{2}\varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& - \varepsilon a \int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx - \varepsilon a \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2}dx \\
& - b(1-\frac{1}{p})\varepsilon\|u(x,t)\|_p^p - \varepsilon E(t), \\
\leq & - a\|u_t(x,t)\|_2^2 - a\|u_t(x,t)\|_m^m + \frac{3}{2}\varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& - \varepsilon a \int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx - a\varepsilon \int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-2}dx - \varepsilon E(t), \\
\leq & - a\|u_t(x,t)\|_2^2 - a\|u_t(x,t)\|_m^m + \frac{3}{2}\varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon a \int_\Omega |u_t(x,t)||u(x,t)|dx + a\varepsilon \int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|^{m-1}dx - \varepsilon E(t).
\end{aligned}
$$

Grâce à les inégalités de Chauchy-Schwarz et Younge et d'après (3.4), on trouve

$$
\begin{aligned}
a\int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|dx &\leq a\|u(x,t)\|_2\|u_t(x,t)\|_2,\\
&\leq a\beta\|\nabla u(x,t)\|_2\|u_t(x,t)\|_2,\\
&\leq \beta\left[\frac{1}{4\beta}\|\nabla u(x,t)\|_2^2+\beta a^2\|u_t(x,t)\|_2^2\right],\\
&\leq \frac{1}{4}\|\nabla u(x,t)\|_2^2+\beta^2a^2\|u_t(x,t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
F'(t)\leq &-a\|u_t(x,t)\|_2^2-a\|u_t(x,t)\|_m^m+\frac{3}{2}\varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2-\frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2\\
&+\frac{\varepsilon}{4}\|\nabla u(x,t)\|_2^2+\varepsilon\beta^2a^2\|u_t(x,t)\|_2^2+a\varepsilon\int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|^{m-1}dx-\varepsilon E(t),
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\int_\Omega |u(x,t)||u_t(x,t)|^{m-1}dx\leq \delta\|u(x,t)\|_m^m+c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m,\quad \forall\delta>0,
$$

implique que

$$F'(t) \leq -a\|u_t(x,t)\|_2^2 - a\|u_t(x,t)\|_m^m + \varepsilon(\frac{3}{2} + \beta^2 a^2)\|u_t(x,t)\|_2^2 - \frac{1}{4}\varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2$$

$$+ a\varepsilon\delta\|u(x,t)\|_m^m + a\varepsilon c(\delta)\|u_t(x,t)\|_m^m - \varepsilon E(t), \quad \forall\delta > 0,$$

$$\leq - \varepsilon E(t) - \frac{1}{4}\varepsilon\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + a\varepsilon\delta\|u(x,t)\|_m^m$$

$$- \left[a - \varepsilon(\frac{3}{2} + \beta^2 a^2)\right] \|u_t(x,t)\|_2^2 - a\left[1 - \varepsilon c(\delta)\right] \|u_t(x,t)\|_m^m, \quad \forall\delta > 0.$$

On distingue deux cas comme suit :
1) Si $\|u(x,t)\|_m < 1$, alors

$$\|u(x,t\|_m^m \leq \|u(x,t)\|_m^2 \leq \beta^2\|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

puisque

$$-a\delta\|u(x,t\|_m^m \geq -a\delta\beta^2\|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

implique que

$$\frac{1}{4}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - a\delta\|u(x,t)\|_m^m \geq \frac{1}{4}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - a\delta\beta^2\|\nabla u(x,t)\|_2^2,$$

$$\geq (\frac{1}{4} - a\delta\beta^2)\|\nabla u(x,t)\|_2^2 \geq 0,$$

si $\frac{1}{4} - a\delta\beta^2 \geq 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{4} \geq a\delta\beta^2$, alors $\delta \leq \frac{1}{4a\beta^2} = \delta_1$.
2) Si $\|u(x,t)\|_m \geq 1$, alors

$$\|u(x,t)\|_m^m \leq \|u(x,t)\|_m^p \leq \beta^p\|u(x,t)\|_p^p,$$

alors

$$-a\delta\|u(x,t)\|_m^m \geq -a\delta\beta^p\|u(x,t)\|_p^p,$$

d'après (3.3), on a

$$\frac{1}{2}E(t) \geq \frac{b}{2p}\|u(x,t)\|_p^p,$$

implique que

$$\frac{1}{2}E(t) - a\delta\|u(x,t)\|_m^m \geq \frac{b}{2p}\|u(x,t)\|_p^p - a\delta\beta^p\|u(x,t)\|_p^p,$$

$$\geq (\frac{b}{2p} - a\delta\beta^2)\|u(x,t)\|_p^p \geq 0,$$

si $\dfrac{b}{2p} - a\delta\beta^2 \geq 0$, c'est-à-dire $\dfrac{b}{2p} \geq a\delta\beta^p$, alors $\delta \leq \dfrac{b}{2ap\beta^p} = \delta_2$.

Donc en prenant $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ et en combinant (3.5)-(3.6), on arrive à

$$F'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}E(t) - a[1 - \varepsilon c(\delta)]\|u_t(x,t)\|_m^m - \left[a - \varepsilon(\frac{3}{2} + a^2\beta^2)\right]\|u_t^2(x,t)\|_2^2. \quad (3.14)$$

On choisit $\varepsilon < \min\left\{\dfrac{1}{c(\delta)}, \dfrac{a}{(\frac{3}{2} + a^2\beta^2)}\right\}$ et d'après (3.13), on a

$$F'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}E(t). \quad (3.15)$$

Grâce à (3.13), on obtient

$$F'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2\alpha_2}F(t). \quad (3.16)$$

D'après l'intégration de (3.16), on obtient

$$F(t) \leq F(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.17)$$

telle que $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2\alpha_2}$.

D'après (3.13), on a

$$\alpha_1 E(t) \leq F(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

implique que

$$E(t) \leq K e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

telle que $K = \dfrac{F(0)}{\alpha_1}$.
On termine la preuve de théorème 3.0.3 .

$\square$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité des solutions de quelques équations différentielles aux dérivées partielles de type hyperbolique (équations d'onde) non linéaires dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

Dans un cadre fonctionnel d'espaces de Sobolev convenable avec des conditions appropriées, nous avons étudié la décroissance de l'énergie et l'existence globale des solutions de ces équations, ainsi le comportement asymptotique de ces solutions à travers la fonctionnelle de l'énergie en fonction du temps, en utilisant des théorèmes de plongements de Sobolev et diverses inégalités, en particulier les inégalités intégrales.

Bibliographie

[1] R.A.Adams, J Fournier, Sobolev spaces Academic Press, New York 41, 1975.

[2] A.Benaissa, Salim A Messaoudi, A. Bengussoum, Energy decay of solution for a wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback, Electronic Journal of Qualitative Theory of differential equation 2014(11), 1-13, 2014.

[3] Abbes Benaissa and Salim A. Messaoudi, Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA 12(4), 391-399,2006.

[4] Brezis, H. (1987). Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1992.

[5] Elliott H. Lieb and Michael Loss, Analysis, American Mathemetical Society, 2001.

[6] Georgiev V., H. Lindblad, and S. D. Sogge, Weighted Strichartz estimates and gliobal existence for semilinear wave equations, American J. Math. 119(1997), 1291-1319.

[7] J.L.Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris 1969.

[8] Salim A. Messaoudi, Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation, Arabian Journal for Science and Engineering 26 (1 ; Part A), 63-68,2001.

[9] Grozdena Todorova, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, Journal of differential equations 109(2), 295-308, 1994.

[10] Tsutsumi M., Some nonlinear evolution equations of seconbd order, Proc. Japan Acad. 47(1971), 950-955.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة استقرار حلول المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الزائدية (معادلات الموجة)، و هو دراسة السلوك التقاربي لحلول هذه المعادلات من خلال دالة الطاقة حسب الزمن. كما تم دراسة اضمحلال الطاقة و الوجود العالمي لحلول هذه المعادلات في فضاءات سوبوليف باستخدام نظريات تضمين سوبوليف و المتباينات المختلفة و خاصة المتباينات التكاملية.

.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier la stabilité des solutions d'équations différentielles aux dérivées partielles de type hyperboliques (équations d'ondes), et il est d'étudier le comportement asymptotique des solutions de ces équations à travers la fonctionnelle de l'énergie en fonction du temps. La décroissance de l’énergie et l'existence globale des solutions de ces équations ont également été étudiées dans les espaces de Sobolev, en utilisant des théorèmes d'injections de Sobolev et diverses inégalités, en particulier les inégalités intégrales.

Abstract

The main objective of this memoir is to study the stability of the solutions of partial differential equations of the hyperbolic type (wave equations), and it is to study the asymptotic behavior of the solutions of these equations through the functional energy according of the time. The decay of the energy and the existence global for the solutions to these equations were also studied in Sobolev spaces, using Sobolev embedding theorems and various inequalities, in particular the integral inequalities.