RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
«Analyse fonctionnelle et application »

Présenté Par :
Guerchouh khaldia

L'intitulé Sous :

Comparaison des opérateurs différentiels dans les espaces de Roumieu

Soutenu publiquement le 04 / 07 / 2023 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Benhabi Mohamed	MAA	Université IBEN KHALDOUN	Président
Mr Mahrouz Tayeb	MCB	Université IBEN KHALDOUN	Encadreur
Mr Benmehidi hammou	MCB	Université IBEN KHALDOUN	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

Je remercie **ALLAH**, tout de m'avoir accordé la santé et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens également à remercier Monsieur **MAHROUZ TAYEB**, Proffesseur de conférences à **l'Université IBN KHALDOUN Tiaret** de m'avoir encadré durant ce projet de fin d'études, pour ses qualités et sa rigueur scientifique, sa disponibilité et son soutien permanent qui m'ont beaucoup aidé tout ou long de ce travail.

J'aimerais remercier MM.**BENHABI MOHAMED** et MM. **BENMEHIDI HAMMOU**, qui m'ont fait l'honneur de juger ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à toute l'équipe du département de mathématiques.

Je tiens à remercier ma famille pour leurs encouragements et leurs soutiens inconditionnels.

J'adresse aussi mes remerciements à tous mes amis et collègues surtout ceux qui nous ont apporté leur soutien moral et toute personne ayant contribué à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédié ce modeste travail :

A m'a mère qui ma beaucoup aidé pour terminer mes études, et qui m'a tellement encouragé moralement et psychiquement, et qui est sacrifié pour moi.

A l'âme de mon père,

A mes très chers frères, mes sœurs, et toute la famille Guerchouh et Hassan.

A tous les enseignants du département de Mathématique.

A tous mes amis de la promotion mathématique sans préciser leurs noms.

$\ast$ **À vous tous un grand merci** $\ast$

$\star$ *G.KHALDIA* $\star$

Résumé :

Dans ce mémoire, nous présentons le problème de la comparaison des classes de vecteurs Roumieu d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants.
Le but de ce travail est de trouver le lien entre la comparaison des opérateurs différentiels et les espaces de vecteurs Roumieu.
On montre alors qui si deux opérateurs différentiels de la classe H sont de même force, leurs espaces des vecteurs Roumieu coïncident.

Notations

$D'(\Omega)$	:	L'ensemble des distributions.
D^{α}	:	La dérivée multi-indice.
$L^{\infty}(\Omega)$	:	L'espace des fonction mesurables.
$\mathbb{R}$	:	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_{+}$	:	L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^{n}$	:	$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
$\overline{\mathbb{R}}$	:	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
$suppf$	:	Support de f.
$C^{k}(\Omega)$	:	L'espace des fonction n continument différentiables.
$C^{\infty}(\Omega)$	:	L'espace des fonction indéfiniment dérivables sur Ω.
E	:	Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$(E, \|.\|)$	:	Espace normé.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemble de nombre entier .
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma .

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un résultat fondamental du problème itérés des opérateurs différentiels, dû à Komatsu [19], donne une caractérisation de l'espace des fonctions analytiques réelles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des itérés d'une opérateur différentiel elliptique à coefficients constants. Kotake et Narasimhan [27] ont obtenu la même caractérisation en utilisant un opérateur différentiel elliptique à coefficients analytiques

Théorème : $u \in C^\infty(\Omega)$ est réel analytique si et seulement si

$$\forall K \Subset, \exists C > 0, \forall j \in \mathbb{Z}_+ : \|P^j u\|_{L^2(K)} \leq C^{j+1}(j!)^m$$

Différentes extensions du théorème de Kotake-Narasimhan ont été obtenues, selon qu'on considère différentes classes d'espaces de fonctions (espaces de Roumieu et Beurling), ou on considère différentes notions d'ellipticité des opérateurs différentiels (opérateurs elliptiques, quasi-elliptiques et multiquasi-elliptiques) Dans le cas d'opérateurs différentiels à coefficients constants, la notion de la propriété des itérés a été généralisée à la comparaison au sens de l'inclusion, entre les classes de vecteurs réguliers d'opérateurs différentiels. Le premier résultat dans ce sens est dû à Newberger et Zielezny, Ils ont donne une condition algébrique, nécessaire et suffisante, concernant les symboles des opérateurs, pour avoir de telle inclusion en considérant deux opérateurs différentiels hypoelliptiques. Plus, précisément pour P et Q deux polynùmes hypoelliptiques, il est prouvé l'équivalence entre l'inégalité

$$|Q(\zeta)|^2 \leq C(1 + |P(\zeta)|^2)^h, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

et l'inclusion $G^s_p(\Omega) \subset G^{sh}_q(\Omega)$. Une extension du résultat de Newberger-Zielezny (dans le cas des classes de Gevrey) a été donnée par Bouzar et Chaôli dans [23], en considèrant deux systèmes d'opérateurs différentiels satisfaisant certaines conditions plus faibles que l'hypoellipticité, et une autre extension par Juan-Huguet dans les espaces de fonctions ultradifférentiables de type Roumieu considèrant deux opérateurs hypoelliptiques. Notre mémoire comprend trois chapitres. Dans le premier chapitre on fait rappel aux notions générales utilisées dans ce mémoire et quelques théorèmes principaux d'analyse mathématique, puis les notions de bases recueillent des identités bien connues, les inégalités de la factorielle et les coefficients du binôme qui seront fréquemment utilisées dans la suite. Dans le deuxième chapitre on va introduire l'espace des fonctions de Gevrey et Roumieu quelques propriétés essentielles. Au troisième chapitre,la comparaison entre espaces des vecteurs Roumieu $R_M(\Omega)$ caractérisé par les suites M_p.

Chapitre 1

Notions Générales et Définitions

1.1 Espaces fonctionnels

Nous allons maintenant fournir quelques définitions et propriétés importantes dont nous avons besoin.

1.1.1 Espaces L^p, Lorsque $p \in [1,_+ \infty[$

Soit $\Omega = [a, b](\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $1 \leq p \leq \infty$

1. Si $1 \leq p < \infty$ $L^p(\Omega)$ l'espace est définit par :

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \, mesurable \, et \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables, f bornées presque par tout sur Ω, on note

$$\|f\|_\infty = \sup ess|f(x)| = inf\{C \geq 0, |f(x)| \leq Cp.p \ sur\Omega.\}$$

1.1.2 Théorèmes spéciales

Théorème 1.1.1 ***(L'inégalité de Hölder)*** . *Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, où les réels p et q satisfont à $1 < p < m$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a l'inégalité :*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.1.2 ***(L'inégalité de Minkowski)***. *Soient f une fonction intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et $1 \leq p \leq +\infty$*

$$\left[\int_{\Omega_1} dx|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_2} dy\left[\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Définition 1.1.1 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω, on définit le support de f, par la fermeture de l'ensemble $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ dans Ω, i.e.*

$$suppf = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \qquad (supp)$$

Remarque 1.1.1 *Si f est une fonction continue, alors supp f est caractérisé par*

$$\{x \in \Omega \text{ il n'existe pas de voisinage } \Omega \text{ de } x \text{ tel que } f \equiv 0 \text{ sur } \Omega\}$$

Ceci permet de généraliser cette définition au cas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable,

$$suppf := \left\{ \begin{array}{c} x \in \Omega \ : \ il\ n'existe\ pas\ de\ voisinage\ \Omega\ de\ x\ ou \\ f = 0\ presque\ partout\ sur\ \Omega \end{array} \right\} \ (supp\text{-}pp)$$

Définition 1.1.2 *L'espace des fonctions continues $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est note $C(\Omega)$ et*

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Définition 1.1.3 *Soit $n \in \mathbb{Z}_+$, on note $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions n-fois continument différentiables sur Ω, et*

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \|f^k\|_{C(\Omega)}$$

Définition 1.1.4 *L'espace des fonction indéfiniment dérivables sur Ω est noté $C^\infty(\Omega)$, i.e.*

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} C^k(\Omega)$$

L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ où $D(\Omega)$ désigne l'espace des fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que le support de u, noté suppu, est un compact contenu dans Ω.

1.1.3 Quelques éléments de topologie

Définition 1.1.5 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle une norme sur E toute application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie*

$\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(homogénéité).*

$\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

-On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1 *L'espace $C(J; \mathbb{R})$ muni de la norme*

$\|y\|_\infty := sup|y(t)| : t \in J.$

Définition 1.1.6 *On dit qu'un espace métrique $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy E est convergente.*

Exemple 1.1.2 $(R, |\cdot|), (C, |\cdot|)$ *sont complets.*

Définition 1.1.7 ***(Espace de Banach).****On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Exemple 1.1.3 $C(J; \mathbb{R})$*espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de Banach.*

1.2 Notations générale

Les ensembles des nombres réels et complexe sont notée respectivement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ on note par $\mathbb{N}$ l'ensemble de nombre entiers $\{1, 2, ..., \}$ et $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. L'espace euclidien réel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}^n$. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est notée $|,|$, i.e .

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \; x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Le produit scalaire de deux éléments x, y de $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j$$

Soient $\varepsilon > 0$ et A un ensemble de $\mathbb{R}^n$, notons par B_ϵ la boule ouvert de centre l'origine et de rayon ε, un ε-voisinage de A est par définition

$$A^\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\} = A + B_\varepsilon$$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; on écrit $\Omega \setminus$ S le complé mentaire de S dans Ω . S $\Subset \Omega$ signifie $\bar{S}$ est compact inclue dans Ω

Un multi-indice est un n-uplet $\alpha = (\alpha_1 , \alpha_2 ,...,\alpha_n)$, ou $\mathbb{Z}_+$, $J = \overline{1, n}$.

soient α et β deux multi-indice, on définit :

$$| \alpha |= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \text{ appelé la longueur de } \alpha$$

$$\begin{aligned} \alpha! &= \alpha_1! + \alpha_2! + ... + \alpha_n! \\ \alpha + \beta &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n) \\ \alpha \leq \beta & \;\; ssi \;\; \alpha_j \leq \beta_j, \qquad\qquad j = \overline{1, n} \\ \binom{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!}, \beta \leq \alpha \end{aligned}$$

La dérivation mixte d'ordre α est définit par :

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ......\partial_n^{\alpha_n}, \text{ ou } \partial_j = \tfrac{\partial}{\partial x_j} \text{ , j} = \overline{1, n}$$

Utilisant la notation $D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial_{x_j}}$ où i le complexe du module 1. On écrit alors :

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} ....D_{x_n}^{\alpha_n}$$

Pour x $\in \mathbb{R}^n$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ...x_n^{\alpha_n}$$

1.2.1 Identités et inégalités

Nous recueillons dans cette section des identités et des inégalités qui sont fréquemment utilisés dans l'étude dans la suite. Citons la formule de généralisée :

$$(t_1 + t_2 + ... + t_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!}.t^\alpha \tag{1.2.1}$$

Où l'entier $N \geqslant 1, t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ et $t_1, t_2, .., t_n$, n réel .

Fixons $t_1 = t_2 = ... = t_n = 1$ on a :

$$n^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \tag{1.2.2}$$

Cela implique en partculier :

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha! \tag{1.2.3}$$

Dans le cas $n = 2$ on obtiens respectivement de (1.2.2) et (1.2.3)

$$2^N = \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!} \tag{1.2.4}$$

$$(k+j)! \leq 2^{k+j}\ k!\ j! \tag{1.2.5}$$

De l'équation (1.2.4) on aura

$$2^N = \sum_{k\leqslant N} \frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{k\leqslant N} C_N^k$$

d'oú

$$2^{|\alpha|} = \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta \tag{1.2.6}$$

Et en particulier : $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+, \beta \leqslant \alpha$:

$$C_\alpha^\beta \leqslant 2^{|\alpha|} \tag{1.2.7}$$

D'autre par on a

$$\alpha! \leq |\alpha|! \tag{1.2.8}$$

Pour cela il suffit de montrer

$$(n+m)! \geq n!\ m! \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$$

On a

$$\begin{aligned}(n+m)! &= (n+m)(n+m-1)(n+m-2)...(n+1).n!\\ &\geq m(m-1)(m-2)...2.1.n!\\ &\geq m!n!\end{aligned}$$

1.2.2 Fonction de Gamma $\Gamma(.)$

Les fonctions spéciales sont définies de maniére assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer un nom. Parmi ces fonctions, la fonction Gamma qui joue un rôle très important dans le calcul fractionnaire.

Fonction Gamma $\Gamma(.)$ La fonction Gamma d'euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}0, -1, -2\ldots$ tel que $Re(z) > 0$

Définition 1.2.1 *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

quand la partie réelle de z strictement positive $Re(z) > 0$

Justification de l'existence de la fonction

Lemme 1.2.1 *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *si* $Re(z) > 0$ *alors la fonction* $\Gamma(z)$ *est existe.*

Preuve 1.2.1 *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *alors* $\exists!(x,y) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $z = x + iy$ *et*

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt,$$

Or

$$t^{x-1+iy} = t^{x-1} t^{iy} = t^{x-1} e^{iy\ln(t)} = t^{x-1}[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))],$$

alors

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))]dt.$$

Pour $x > 0$ *on pose*

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt,$$

et

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\sin(y\ln(t))dt,$$

On a

$$|e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))| \leq \frac{e^{-t}}{t^{x-1}},\ et\ |e^{-t}t^{x-1}\sin(y\ln(t))| \leq \frac{e^{-t}}{t^{1-x}},$$

- *Si* $x = 1$ *on obtient*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} = 1,$$

Donc les deux intégrales I_1 *et* I_2 *convergent.*

- *Si* $x > 1$ *on considère*

$$J_1 = \int_0^{c} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt,\ J_2 = \int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt,$$

comme $x > 1$ *la fonction* $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ *est continue. D'où la convergence de* J_1.

Puisque

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t}t^{x-1} = \lim_{t\to+\infty} t^{2t}e^{-t} = 0$$

on a

$$\forall A, \exists B > 0 : \forall t \geq Be^{-t}t^{x-1} \leq \frac{A}{t^{x+1}}$$

ceci implique $\int_B^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \leq A\int_B^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{x+1}} = \dfrac{A}{xB_x} < +\infty$ *Par conséquence* $I1$ *et* $I2$ *convergent.*

- *Si* $0 < x < 1$ *prenant* $c > 0$

$$\int_0^c e^{-t}t^{x-1}dt \leq \int_0^c t^{x-1}dt = \tfrac{1}{x}c^x,$$

D'où la convergence de J_1.

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t}t^{1-x} = \lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t} = 0$$

on a pour tout $A > 0$ il existe $c > 0$ tel que

$$e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{A}{t^{x+1}} \Rightarrow \int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \leq \frac{A}{xe^x}.$$

Propriétés de la fonction $\Gamma(\cdot)$

Lemme 1.2.2 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on a*

1 . $\Gamma(1) = 1$

2 . $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

3 .$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Preuve 1.2.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ alors*

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \\
&= [\frac{e^{-t}t^z}{z}]_0^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt \\
&= \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(z-1)+1}dt, \\
&= \frac{1}{z}\Gamma(z+1)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2.9}$$

D'après (1.2.9) *pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on obtient*

$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1)! = 2!,$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3!,$

$\vdots$

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\cdots 2.1 = n!,$

Théorème 1.2.1 *la fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln(x))^k t^{x-1} dt, x \in]0, +\infty[.$$

Formule de Taylor

Soit la fonction f de classe C^k, on a :

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) + \sum_{\alpha = k} \frac{k}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(x_0 + t(x-x_0))dt$$

Formule de Leibniz

Si les fonctions f et g sont de classes C^k et $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $| \alpha | \leq k$, on a

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g$$

Espace vectoriel

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) un ensemble E muni de de ux loi

- Une loi interne, notée $(+)$, telle que $(E, +)$soit un groupe commutatif.
- Une loi externe, notée $(.)$, qui est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E vérifiant :

$$*\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$$

$$*\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires

Chapitre 2

Espace des fonctions Gevrey

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés sur l'espace de Gevrey

2.1 Espaces de Gevrey

Dans ce qui suit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et s un reél tel que $s \geq 1$.

Définition 2.1.1 *On appelle espace de Gevrey d'indice s, noté $G^s(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\Omega)$ possédant la propriété suivant :*

$$\forall K \text{ compact de } \Omega, \exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, ||D^\alpha f||_{L_\infty(\Omega)} \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \tag{2.1.1}$$

Les éléments de $G^s(\Omega)$ sont appelés fonction ultradifférentiables.

Remarque 2.1.1 *Il est parfois utile d'utiliser l'estimation équivalente :*

$$||D^\alpha f||_{L_\infty(\Omega)} \leq RC^{|\alpha|}(\alpha!)^s \tag{2.1.2}$$

Tels que R et C deux constantes positifs indépendantes de α et x.

Proposition 2.1.1 *On peut remplacer dans (2.1.2) l'expression $(\alpha!)^s$ par*

a) - $(| \alpha |!)^s$

b) - $|\alpha|^{s|\alpha|}$

c) - $\Gamma(s|\alpha| + 1)$

Preuve 2.1.1 *D'après (1.2.8) on a (2.1.1)*

a) $\Longrightarrow \|D^\alpha f(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s$ *ceci est vraie en vertu de l'inégalité (1.2.3)*

a) $\Longrightarrow$ *b) puisque* $N! \leq N^N$, *alors* $(|\alpha!|)^s \leq |\alpha|^{s|\alpha|}$

b) $\Longrightarrow$ *c) puisque* $t^t \leq e^t\Gamma(t+1)$, *alors en posant* $t = s|\alpha|$, *on obtient*

$$(s|\alpha|)^{s|\alpha|} \leq e^{s|\alpha|}\Gamma(s|\alpha|+1)$$

c) $\Longrightarrow$ *a) puisque*

$$\Gamma(s|\alpha|+1) \leq (s|\alpha|)^{s|\alpha|}$$

et

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}|\alpha!|$$

Définition 2.1.2 *Une fonction* f *est dite analytique réelle au point* $x_0 \in \Omega$ *s'il existe un voisinage de* x_0 *telle que* f *est développable en série entière, i.e*

$$\exists R > 0, \forall x \in \Omega, |x - x_0| < R, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$A(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions analytiques réelles sur* Ω.

Proposition 2.1.2 *Toute fonction de Gevrey d'ordre 1 est une fonction analytique réelle sur* Ω

Preuve 2.1.2 *Pour simplifier nous ne détaillerons la démonstration dans le cas* $n = 1$.

a) Montrons que $G^1(\Omega) \subset A(\Omega)$ *: soit* $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$ *tel que* $\bar{B}(x_0, \delta) \subset \Omega$, *on a*

$$|f^{(k)}(x)| \leq RC^k k!, \text{ pour } x \in \bar{B}$$

Soit $\varepsilon \in]0, \delta[$ *tel que* $\varepsilon C < 1$, *la formule de Taylor avec reste intégral permet décrire pour* $x \in B(x_0, \varepsilon)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).$$

Avec

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{n+1}(tx+(1-t)x_0)dt$$

Si

$$x \in B(x_0, \varepsilon) \text{ on a } tx + (1-t)x_0 \in B(x_0, \varepsilon)$$

de sorte que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-x_0|^{(n+1)}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n RC^{n+1}(n+1)!dt \leq R(\epsilon C)^{n+1}$$

Comme $\varepsilon C \leq 1$ *le reste tend vers zéro lorsque n tend vers* $+\infty$ *d'où f est développable en série entiére dans* $B(x_0, \varepsilon)$*, ce qui montre que* $f \in A(\Omega)$*.*

b) Montrons que $A(\Omega) \subset G^1(\Omega)$ *: la somme d'une série entiére étant* C^∞ *a l'intérieur de son intervalle de convergence,* f *est* C^∞ *au voisinage de tout point donc dans* Ω*.*

Soit $x_0 \in \Omega$ *et* $\varepsilon > 0$*, tel que la série entiére* $\sum a_k(x-x_0)^k$ *converge absolument pour* $|x-x_0| \leq \varepsilon$*, Alors* $|a_k|\varepsilon^k \longrightarrow 0$ *d'où* $|a_k| \leq \frac{C}{\varepsilon^k}$ *pour tout k*

soit $\rho < \varepsilon$*, pour* $|x-x_0| < \rho$ *on a :*

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{+\infty} k(k-1)...(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j}$$

De sorte que :

$$|f^{(j)}(x)| \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!C}{(k-j)\varepsilon^k}(\frac{\rho}{\varepsilon})^{k-j} = \frac{C}{\varepsilon^j} \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!}{(k-j)!} \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-j}$$

où de la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \quad \text{pour} \quad |\, t \,| < 1$$

que l'on dérive j fois, on déduit

$$\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!}{(k-j)!} \, (t)^{k-j} = \frac{j!}{(1-t)^{j+1}}$$

Par conséquent

$$|f^{(j)}(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^j} \frac{1}{(1-\frac{\rho}{\varepsilon})^{j+1}} j! = \frac{C\varepsilon}{(\varepsilon-\rho)^{j+1}} j!$$

en résumé, pour $|x - x_0| < \rho$ *on a montré que :*

$$|f^{(j)}(x)| \leq RC^j \ j!, \ R = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon - \rho}, \ C = \frac{1}{\varepsilon - \rho} \tag{2.1.3}$$

Soit K *un compact de* Ω. *Pour chaque* x_0 *de* K *il existe* ρ_{x_0}, R_{x_0}, C_{x_0}, *tel que l'équation* (2.1.3) *soit vérifiée dans* $B(x_0, \rho)$. *La réunion des* $B(x_0, \rho)$ *lorsque* x_0 *vraie dans* K *est un recouvrement ouvert de* K *et donc il existe* $x_1 ... x_N \in K$ *tels que* $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \rho_i)$. *Il suffit de poser*

$R = \max \ R_{x_i}, C = \max \ C_{x_i}$

Ce qui montre que $f \in G^1(\Omega)$

2.1.1 Quelques propriétés des espaces Gevrey

Dans cette section nous donnons quelques propriétés fundamental des espaces Gevrey

Inclustion entre les espaces de Gevrey

Proposition 2.1.3 *On a*

a) $\forall s \leq t : G^s(\Omega) \subset G^t(\Omega)$

b) $A(\Omega) \subset \bigcap_{s>1} G^s(\Omega)$ *et* $\bigcup_{s\geq 1} G^s(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$

Preuve 2.1.3 *Si* $s \leq t$, *et* $f \in G^s(\Omega)$ *on a*

$$G^s(\Omega) = \sup_k | \ \partial^\alpha f(x) \ | \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^t,$$

ce que donne $f \in G^t(\Omega)$, *alors* $G^s(\Omega) \subset G^t(\Omega)$.

• La stabilité par rapport á la somme et la multiplication

Proposition 2.1.4 *L'espace de Gevrey est stable par rapport la somme*

$$\forall f, g \in G^s(\Omega) : f + g \in G^s(\Omega)$$

Preuve 2.1.4 *Soient $f, g \in G^s(\Omega)$ on a pour $K \subset \Omega$:*

$$|D^\alpha f| \leq C_1^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|} \text{ et } |Dl^\alpha g| \leq C_2^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|},\ \forall x \in K$$

alors

$$\begin{aligned} |D^\alpha(f+g)| &\leq |D^\alpha f| + |D^\alpha g| \\ &\leq (C_1 + C_2)^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|} \end{aligned}$$

donc $f + g \in G^s(\Omega)$.

D'autre part

$$\begin{aligned} |D^\alpha(\lambda f)| &= |\lambda|\ |D^\alpha f| \\ &\leq |\lambda| C_1^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s \\ &\leq RC^{|\alpha|} (|\alpha|!)^s. \end{aligned}$$

Alors $\lambda f \in G^s(\Omega)$.

Proposition 2.1.5 *L'espace de Gevrey est stable par rapport la multiplication i.e*

$$\forall f, g \in G^s(\Omega) : fg \in G^s(\Omega)$$

Preuve 2.1.5

$$\begin{aligned} |D^\alpha(fg)| &= \left| \sum C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} f D^\beta g \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta |D^{\alpha-\beta} f| |D^\beta g| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta C_1^{|\alpha-\beta|+1} |\alpha|^{s|\alpha-\beta|} C_2^{|\beta|+1} |\beta|^{|\beta|} \\ &\leq 2^{|\alpha|} C^{|\alpha|+2} |\alpha|^{s|\alpha|} \text{ avec } \ C = \max\,(C_1, C_2) \end{aligned}$$

• **La stabilité par rapport á la dérivation**

Proposition 2.1.6 *L'espace de Gevrey est stable par rapport la dérivation i.e*

$$\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ \forall f \in G^s(\Omega) : \forall D^\beta f \in G^s(\Omega).$$

Preuve 2.1.6

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha}(D^{\beta}f)| &= |D^{\alpha+\beta}f| \\
&\leq C_1^{|\alpha+\beta|+1}|\alpha+\beta|^{s|\alpha+\beta|} \\
&\leq C_1^{|\alpha|+|\beta|+1}(|\alpha|+|\beta|)^{s(|\alpha|+|\beta|)} \\
&\leq C_1^{|\beta|}C_1^{|\alpha|+1}(|\alpha|+|\beta|)^{s(|\alpha|+|\beta|)} \\
&\leq RC^{|\alpha|+1}|\alpha|^{s|\alpha|}
\end{aligned}$$

Ce qui donne $D^{\beta}f \in G^s(\Omega)$.

Proposition 2.1.7 *L'espace* $G^s(\Omega)$ *est une algèbre a l'égard du produit et la somme usuelle de fonction, en outre il est fermé en vertu de la différentiation.*

Exemple 2.1.1 *Si* $s > 1$, *la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} exp\left(-x^{-\frac{1}{s-1}}\right) & : \; x > 0 \\ 0 & : \; x \leq 0 \end{cases}$$

appartient à $G^s(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1.2 *la fonction* f *est non analytique.*

2.2 Espaces des fonctions ultradifférentiables

2.2.1 Suites de Roumieu

Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ une suites des nombres réels positifs, satisefaisant les conditions suivantes.

La convexité logarithmique :

$$M_0 = 1 \; et \; M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1}, \, p = 1, 2, ... \tag{2.2.1}$$

La non quasi-analyticité :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < +\infty \tag{2.2.2}$$

La stabilité par rapport à la multiplication et dérivation :

$$\exists H > 0 \ , \ \exists c > 0 \ , \ cC_p^j M_{p-j} M_j \leq M_P \leq H^{p+1} M_{p-j} M_j, j \leq p \tag{2.2.3}$$

Proposition 2.2.1 *Si la suite (M_p) satisfaite la condition (2.2.1) alors $(M_p)^{\frac{1}{p}}$ est une suite croisante.*

Preuve 2.2.1 *La croissance de $(M_p)^{\frac{1}{p}}$ est équivalent*

$$\frac{p+1}{p} log M_p \leq M_{p+1}, \forall p \in \mathbb{N}^*. \tag{2.2.4}$$

Nous montrons (2.2.3) par récurancce sur p. En effet pour $p = 1$ la relation (2.2.3) est obtenu de (2.2.1) est la composition de la fonction log. Supposons donc que l'estimation (2.2.3) a lieu jusqu'à l'ordre p et vérifions qu'elle vraie reste à l'ordre $p + 1$. D'après condition (2.2.1) et l'hypothèse de récurrrence, on a

$$\begin{aligned} 2\log M_{p+1} &\leq M_p \log M_{p+2} \\ &\leq \frac{p}{p+1} \log M_{p+1} + \log M_{p+2}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

d'où

$$2\log M_{p+1} - \frac{p}{p+1} \log M_{p+1} \leq M_{p+2},$$

i.e.

$$\frac{p+2}{p+1} \log M_{p+1} \leq \log M_{p+2},$$

ce qui donne la relation (2.2.3) pour l'ordre $p + 1$.

Remarque 2.2.1 *La condition (2.2.3) sécrit*

$$\exists A > 0, \exists H > 0 \ , \ M_{p+j} \leq AH^{p+j} M_p M_j \ \ p, j = 0, 1, 2, ...$$

Remarque 2.2.2 *La condition (2.2.2) implique*

$$(M_p M_j) \leq M_0 M_{p+j} \ \ p, j = 0, 1, 2, ... \tag{2.2.6}$$

D'après (2.2.1)

$$\frac{M_p}{M_{p+1}} \leq \frac{M_{p-1}}{M_p} \leq ... \frac{M_0}{M_1}$$

Alors

$$\frac{M_p}{M_{p+j}} = \frac{M_p}{M_{p+1}} . \frac{M_{p+1}}{M_{p+2}} ... \frac{M_{p+j-1}}{M_{p+j}} \leq \frac{M_0}{M_1} . \frac{M_1}{M_2} ... \frac{M_{j-1}}{M_j} = \frac{M_0}{M_j}$$

Exemple 2.2.1 *La suite de Gevrey : $M_p = (p!)^s$, avec $s \geq 1$, vérifié les conditions (2.2.1) et (2.2.2) Si $s > 1$. Alors la suite vérifie aussi (2.2.3)*

2.2.2 Espaces de Roumieu

Soit (M_p) une suite satisfaisant les conditions (2.2.1) et (2.2.3), soit Ω un ouvert de R^n.

Définition 2.2.1 *On appelle espace de Roumieu dans Ω, qu'on par $R_M(\Omega)$, l'espace des fonctions $u \in C^\infty(\Omega)$ telles que*

$$\forall K compact\ de\ \Omega,\ \exists C > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n :\ \|D^\alpha u\|_{L^\infty(H)} \leq C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|} \tag{2.2.7}$$

Les éléments de $R_M(\Omega)$ sont appelés ultradifférentiables de classe $(M_p)_{p \in \mathbb{Z}_+}$.

Exemple 2.2.2 *Si $M_p = p!^s$, $(s \geq 1)$ alors $R_M(\Omega)$ est l'espace de Gevrey d'ordre s dans Ω qu'on note $G^s(\Omega)$.*

2.2.3 Quelques propriétés des espaces de Roumieu

• **La non trivialité de Roumieu** :

l'espace de Roumieu $R_M(\Omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ grâce au théorème de Denjoy-Carlemen-mandelbrojt.

Théorème 2.2.1 *(Denjoy-Carleman-Mandelbrojt)*

Si la suite (M_p) vérifié (2.2.3), alors pour chaque boule B_ϵ de rayon ϵ dans Ω il existe $\rho_\epsilon \in R_M(\Omega)$ vérifié les conditions :

$$\rho_\epsilon \geq 0, supp \rho_\epsilon(x) \subset B_\epsilon\ et\ \int \rho_\epsilon(x) dx = 1$$

Preuve 2.2.2 *Pour la preuve voir [[27] Théorème 4,2.]*

• **La stabilité par la multiplication** :

Proposition 2.2.2 *Si la suite* $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifie* (2.2.6), *alors l'espace* $R_M(\Omega)$ *est stable par rapport àla multiplication, i.e*

$$\forall f, g \in R_M(\Omega) : fg \in R_M(\Omega)$$

Preuve 2.2.3 *Soient* $f, g \in R_M(\Omega)$, *et soit* K *compact de* Ω, *alors il existe deux constants positives* C_1, C_2 *tel que pour tout* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|} \text{ et } \|D^\alpha g\|_{L^\infty(K)} \leq C_2^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}$$

D'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha(fg)\|_{L^\infty(K)} &= \|\sum_{\beta\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g\|_{L^\infty(K)} && (2.2.8)\\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} \|D^\beta f\|_{L^\infty(K)} \|D^{\alpha-\beta} g\|_{L^\infty(K)} && (2.2.9)\\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \tbinom{|\alpha|}{|\beta|} C_1^{|\beta|+1} C_2^{|\alpha|-|\beta|+1} M_{|\beta|} M_{|\alpha-\beta|}, && (2.2.10)
\end{aligned}$$

Et en utilisant (2.2.6), *on a*

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha(fg)\| &\leq \|C_1 C_2 M_{|\alpha|} M_0 \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} C_1^{|\beta|} C_2^{|\alpha|-|\beta|}\| \\
&\leq C_1 C_2 2^{|\alpha|} (C_3^{|\alpha|}) M_{|\alpha|} M_0 \\
&= C_3^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|},
\end{aligned}$$

avec $C_3 = \max\,(C_1, C_2)$

Ce qui montre que $fg \in R_M(\Omega)$.

• **La stabilité par la dérivation** :

Proposition 2.2.3 *Si la suite* $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifie* (2.2.3) , *alors* $R_M(\Omega)$ *est stable par rapport à la dérivation, i.e*

$$\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ \forall f \in R_M(\Omega) : D^\alpha f \in R_M(\Omega)$$

Preuve 2.2.4 *Soit $f \in R_M(\Omega)$, et $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ on montre que $D^\alpha f \in R_M(\Omega)$. Soit K un compact de Ω, alors*

$$\exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \|D^\alpha f\|_{L^\infty(K)} = C^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, on a

$$\|D^\alpha(D^\beta f)\|_{L^\infty(K)} = \|D^{\alpha+\beta} f\|_{L^\infty(K)} \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1} M_{|\alpha|} M_{|\beta|},$$

avec (2.2.3)

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(D^\beta f)\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{|\alpha|+|\beta|+1} H^{|\alpha|+|\beta|+1} M_{|\alpha|} M_{|\beta|} \\ &\leq (CH)^{|\beta|+1} M_{|\beta|} (CH)^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \\ &\leq \tilde{C}^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|},\end{aligned}$$

où $\tilde{C} = \max\big((CH)^{|\beta|+1} M_{|\beta|}, CH\big)$ donc $(D^\alpha f) \in R_M(\Omega)$.

Corollaire 2.2.1 *Si $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+^n}$ vérifie (2.2.3) alors $R_M(\Omega)$ est un sous-algèbre différentielle de $C^\infty(\Omega)$.*

2.2.4 Inclusion entre les espaces de Roumieu

Définition 2.2.2 *Soient $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ et $(N_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ deux suites positives, on dit que $M_p \subset N_p$*

$$\exists L > 0,\ \exists C > 0 : M_p \leq CL^p N_p\ ,\ p = 0, 1, 2, ..., \tag{2.2.11}$$

Exemple 2.2.3 *Si $M_p = p!^s, N_p = p!^r$, avec $s \leq r$, alors $M_p \subset N_p$. Un autre exemple qui sera utile dans la suite est le suivant :*

Exemple 2.2.4 *Nous avons $p! \subset M_p$, pour toute suite (M_p) vérifie les conditions (2.2.1) - (2.2.3). En fait, nous avons une estimation plus forte, voir*

$$\forall L > 0, \exists C > 0 : p! \leq CL^p M_p, \forall p \in \mathbb{N}$$

D'autre par, nous avons besion du lemme suivant dans la suite qui est une généralisation du théorème

Lemme 2.2.1 *Si la suite* $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$, *vérifie* (2.2.1), *alors il exsite un élément* φ *de* $R_M(\Omega)$ *tel que,*

$$|D^\alpha\varphi(0)\ |\geq M_\alpha, \quad \forall|\alpha|\geq 1 \tag{2.2.12}$$

Proposition 2.2.4 *Soient* $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *et* $(N_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifiant* (2.2.1), *alors*

$$R_M(\Omega)\subset R_N(\Omega) \textit{ si est seulement si } M\subset N.$$

Preuve 2.2.5 *La condition suffisante est trivial si*

$$M_p\subset N_p, \textit{ alors } R_M(\Omega)\subset R_N(\Omega).$$

On montre $R_M\subset R_N\Rightarrow M\subset N$, *pour cela, raisonnons par l'absude, supposons que* $M\subsetneq N$, *alors*

$$\forall L>0\ ,\ \forall C>0\ ,\ \exists p\in\mathbb{Z}_+\ ,\ M_p>CL^pN_p \quad (p=0,1,2,...)$$

Soit la fonction φ *du lemme précidante et romplacant* p *par* $|\alpha|$ *obtient*

$$\forall L>0\ ,\ \forall C>0\ ,\ \exists p\in\mathbb{Z}_+\ ,\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \textit{ avec } |\alpha|=p:|\ D^\alpha\varphi(0)\ |\geq M_{|\alpha|}>CL^\alpha N_{|\alpha|}$$

D'où $\varphi\notin R_N(\mathbb{R}^n)$, *par la contradiction on a* $R_M(\Omega)\subset R_N(\Omega)$.

Chapitre 3

Comparaison des opérateurs différentiels

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs différentiel, puis nous obtenons la condition suffisante pour la comparaison entre les espaces des vecteurs de Roumieu.

3.1 Opérateurs hypoelliptique

Définition 3.1.1 *On dit que $P(x, D)$ est hypoelliptique si pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et pour toute $u \in D'(\Omega)$ on a*

$$Pu \in \mathbb{C}^\infty(\Omega) \Longrightarrow u \in \mathbb{C}^\infty(\Omega).$$

Pour les opérateurs diffèrentiels à coeffcients constants, nous avons la caractérisation algébrique suivante.

Proposition 3.1.1 *L'opérateur $P(D)$ est hypoelliptique si seulement si*

$$\exists C > 0, \exists \gamma \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta|^{\frac{|\alpha|}{\gamma}} |D^\alpha P(\zeta)| \leq C(1 + |P(\zeta)|)$$

3.2 Opérateurs elliptique

Soit $P(D)$ un polynôme d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$,

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

le polynôme

$$P_m(\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \zeta^\alpha$$

est appelé la partie principale du polynôme $P(D)$

Définition 3.2.1 *L'opératuer $P(D)$ est elliptique si*

$$P_m(\zeta) \neq 0, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Exemple 3.2.1 *L'opératuer de Laplace*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

est elliptique. En effet, sa partie principale est $\Delta(\zeta) = -|\zeta|^2 \neq 0$.

Exemple 3.2.2 *L'opératuer des ondes*

$$\square = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

n'est pas elliptique, car sa partie principale est $\square(\zeta) = -\sum_{j=1}^{n-1} \zeta_j^2 + \zeta_n^2$, *s'anulle aux points* ζ *tels que*

$$\zeta_n^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_j^2 \text{ avec } \zeta_n \neq 0.$$

Une caractérisation algèbrique des opérateurs elliptiques est la suivante.

Proposition 3.2.1 *Un opérateur $P(D)$ est elliptique, si et seulement si*

$$\exists C > 0 : 1 + |\zeta|^m \leq C(1 + |P(\zeta)|), \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Maintenant, nous introduisons la condition (H) comme dans [25].

3.2.1 Une classe des opérateurs différentiels

Définition 3.2.2 *On note par $\mathcal{H}$ l'ensemble des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants P vérifiant la condition suivante*

$$\exists C > 0, \exists \gamma \geq \deg P, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |D^\alpha P(\zeta)| \leq C(1 + |P(\zeta)|)^{1-\frac{|\alpha|}{\gamma}}, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \qquad (3.2.1)$$

Exemple 3.2.3 *Si P est un opérateur elliptique, alors P appartient à $\mathcal{H}$ pour* $\gamma = \deg P$. *En effet, on sait que si P est un opérateur elliptique d'ordre m, alors*

$$\exists C > 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta|^m \leq C(1 + |P(\zeta)|),$$

de plus $D^\alpha P(\zeta)$ est d'ordre $m - |\alpha|$.

Preuve 3.2.1 *En effet, d'aperès la proposition 3.2.1, si P est un opérateur elliptique d'ordre m, alors*

$$\exists C > 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta|^m \leq C(1 + |P(\zeta)|)$$

Puisque $D^\alpha P(\zeta)$ est d'ordre $m - |\alpha|$, ainsi

$$\begin{aligned} |D^\alpha P(\zeta)| &\leq C''(1 + |\zeta|^{m-|\alpha|}) \\ &\leq C''(1 + |P(\zeta)|)^{\frac{m-|\alpha|}{m}} \\ &\leq C''(1 + |P(\zeta)|)^{1-\frac{|\alpha|}{m}} \end{aligned}$$

Exemple 3.2.4 • *Les opérateurs hypoelliptiques appartiennent à $\mathcal{H}$, d'après la proposition précédente. doctra*

Si P est un opérateur hypoelliptique, alors P appartient à $\mathcal{H}$: En effet, à partir de la proposition 3.1.1, nous pouvons obtenir l'estimation similaire

$$\exists C > 0, \exists d \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : (1 + |\xi|)^{\frac{|\alpha|}{d}} |D^\alpha P(\xi)| \leq C(1 + P(\xi)|)$$

mais si deg $P = m$; alors il existe $C'' > 0$ tel que

$$(1 + |P(\xi)|) \leq C'(1 + |\xi|)^m, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui donne avec l'estimation précédente, pour tous $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ et$\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |D^\alpha P(\xi)| &\leq C(1 + |P(\xi)|)(1 + |\xi|)^{-\frac{|\alpha|}{d}} \\ &\leq C''\left(1 + |P(\xi)|\right)^{1-\dfrac{|\alpha|}{dm}} \end{aligned}$$

Donc P satisfait (3.2.1) pour $\gamma = dm$.

3.3 Espaces des vecteurs Roumieu

Définition 3.3.1 *Soit $Q(D)$ un opérateur différentiel linéaire à coeffcients constants d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$. L'espace des fonctions $u \in C^\infty(\Omega)$ telles que*

$$\forall H compact\ de\ \Omega, \exists C > 0, \forall I \in \mathbb{Z}_+ : \|Q^l(D)u\|_{L^2(H)} \leq C^{l+1} M_{lm}$$

noté $R_M(\Omega, Q)$ est appelé espace des vecteurs Roumieu de $Q(D)$.

Remarque 3.3.1 *Si $M_p = p!^s$, avec $s \geq 1$, alors $R_M(\Omega, Q)$ est l'espace des vecteurs Gevrey d'ordre s dans (Ω) qu'on note $G(\Omega, Q)$.*

3.4 La Notion de " plus faible que "

Définition 3.4.1 *Soient $P(D)$ et $Q(D)$ deux opérateurs diffrentiels linéaires à coefféciens constants sur $\mathbb{R}^n$, on dit que $P(D)$ est plus faible que $Q(D)$ et on écrit $P(D) \prec Q(D)$ si, pour tout ouvert relativement compact Ω de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C = C(P, Q, \Omega,) > 0$ telle que*

$$||Pv||_{L^2(\Omega)} \leq C||Qv||_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$$

Définition 3.4.2 *On dit que $P(D)$ et $Q(D)$ sont de même force si $P \prec Q \prec P$.*

3.4.1 Quelques propriétés liées à la notion de " plus faible que "

Théorème 3.4.1 *Si $P(D)$ est hypoelliptique et $P(\zeta) \prec Q(\zeta) \prec P(\zeta)$ alors $Q(D)$ est hypoelliptique.*

Théorème 3.4.2 *Si P et Q deux opérateurs différentiels de même force et $P \in H$ alors $Q \in \mathcal{H}$. De plus Q vérife aussi la condition (3.2.1) avec le même γ i.e $\gamma(P) = \gamma(Q)$ et* $\deg(P) = \deg(Q)$.

Définition 3.4.3 *Soit $P(x)$ un polynôme différeneiel à coefficients comlexes n de variables. Notons*

$$\tilde{P}(\zeta, t) = \left(\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\zeta)|^2 t^{2|\alpha|} \right)^{\frac{1}{2}}, t \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{C}^n$$

en particulier on note

$$\tilde{P}(\zeta) = \tilde{P}(\zeta, 1).$$

Proposition 3.4.1 *Les assertions suivantes sont équivalantes.*

1) $P(D)$ est elliptique

2) $P(D)$ plut fort que tout opératuere Q(D) d'ordre $\leq m$

Preuve 3.4.1 *Si $P(D)$ est eliptique, alors il existe $C > 0$, tel que*

$$C|\zeta|^{2m} \leq |P_m(\zeta)|^2, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$$

en écrivant $P_m = P + (P_m - P)$ on obtient

$$\begin{aligned} C|\zeta|^{2m} &\leq |P(\zeta)|^2 + |P_m(\zeta) - P(\zeta)|^2 + 2|P(\zeta)||P_m(\zeta) - P(\zeta)| \\ &\leq |P(\zeta)|^2 + C_1(1 + |\zeta|^{2m-1}) \end{aligned}$$

pour$|\zeta| > \frac{2C_1}{C}$, *on obtient*

$$C|\zeta|^{2m} \leq |P(\zeta)|^2 + C_1 + \frac{C}{2}|\zeta|^{2m},$$

donc

$$C|\zeta|^{2m} \leq 2|P(\zeta)|^2 + 2C_1$$

alors

$$\begin{aligned} 1 + |\zeta|^{2m} \leq \frac{2}{C}|P(\zeta)^2|^2 + \frac{2C_1 + C}{C} \\ \leq C_2(1 + |P(\zeta)|^2) \end{aligned}$$

où $C_2 = \max(\frac{2}{C}, \frac{2C+C}{C})$. *Pour* $|\zeta| \leq \frac{2C}{C}$, *la fonction* $\frac{1+|\zeta|^{2m}}{|P(\zeta)|}$ *est bornée i.e* $\exists C_3$ *tel que*

$$1 + |\zeta|^{2m} \leq C_3|P(\zeta)|^2 \leq C_3(1 + |P(\zeta)|^2)$$

d'où

$$1 + |\zeta|^{2m} \leq C_4(1 + |P(\zeta)|^2)$$

où $C_4 = \max(C_2, C_3)$. *Soit* $C_0 = \sum_{|\alpha|=m} |P^{(\alpha)(\zeta)|^2}$, *alors*

$$|\zeta|^{2m} \leq \frac{C_4}{C_0}(C_0 + \frac{1}{C_0}|P(\zeta)|^2) \leq \frac{C'C_4}{C_0}(C_0 + |P(\zeta)|^2)$$

où $C' = \max(1, \frac{1}{C_0})$. *Donc*

$$1 + |\zeta|^{2m} \leq C\tilde{P}(\zeta)$$

Soit $\deg Q(\zeta) \leq m$ *alors* $Q(\zeta)^2 \leq C_4(1 + |\zeta|^{2m}) \leq C_5\tilde{P}(\zeta)$,

d'où $Q(\zeta) \prec P(\zeta)$

Inversement, si $p(D)$ *n'était pas elliptique, alors il existe* $\zeta \neq 0$ *tel que* $P_m(\zeta) = 0$, *d'où*

$$P(t\zeta) = t^m P_m(\zeta) + P_{m+1}(t\zeta) + \ldots + P_0(\zeta) = o(t^{m-1}), \text{ pour } t \to +\infty$$

donc $\tilde{P}(t\zeta) = o(t^{m-1},)$ *pour* $t \to +\infty$ *alors on penx trouver un polynôme homogène* $Q(\zeta) \neq 0$ *de degré* $m, Q(t\zeta) = t^m Q(\zeta)$ *tel que la fonction* $\frac{|Q(t\zeta)}{P(t\zeta)}$ *n'est pas borné, d'où* $P(D)$ *n'est pas plut fort que l'opérateur* $Q(D)$.

3.4.2 Quelques notations

Pour tout ouvert borné ω de $\mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, on pose

$$\omega_\delta = \{x \in \omega, d(x, C\omega) > \delta\}.$$

Si $f \in L^2_{loc}(\omega), \mu > 0$ $ett > 0$, on définit

$$N_{\omega,\mu,t}(f) = \sup_{0 \leq \delta \leq t} \delta^\mu ||f||_{L^2(\omega\delta)}.$$

Sans perdre de généralité, on suppose que ω est un ouvert borné de diamètre inferieur à 1, et pour simplifier, on note $N_{\omega,\mu,t}(f) = N_\mu(f)$.

3.4.3 Estimations de base

L'estimation de base dûe à Hormander [19] est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.4.2 *Soit* ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $P \in \mathcal{H}$, *alors il existe* $C > 0$ *tel que.*

$$\sum_\alpha N_{\gamma-|\alpha|}(P^\alpha u) \leq C \left(N\gamma(Pu) + ||u||_{L^2(\omega)} \right), \forall u \in \mathbb{C}^\infty(\omega). \tag{3.4.1}$$

La proposition suivante est l'analogue de [[20], proposition 4.2]

Proposition 3.4.3 *Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soient $P, Q \in \mathcal{H}$. Si $Q \prec P$, alors $\exists C > 0$*

$$N_\gamma(Qu) \leq C\left(N_\gamma(Pu) + ||u||_{L^2(\omega)}\right), \forall u \in \mathbb{C}^\infty(\omega), \tag{3.4.2}$$

avec γ la constante pour laquelle P vérifie la condition (3.2.1).

Preuve 3.4.2 *Supposons $Q \prec P$, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$||Qv||_{L^2(\omega)} \leq C||Pv||_{L^2(\omega)}, \forall v \in \mathbb{C}_0^\infty \tag{3.4.3}$$

Soit $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\omega_{\frac{\delta}{2}})$ vérifiant $\varphi(x) = 1$ dans $\omega_\delta, 0 \leq \varphi(x) \leq 1$ et

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-|\alpha|}$$

où C_α ne dépend que de n et α. (L'existence d'une telle fonction et donnée par le lemme 4.1 de [20]). D'après 3.4.3 on a pour tout $u \in \mathbb{C}(\omega)$,

$$\begin{aligned}||Q(u)||_{L^2(\omega\delta)} &\leq ||Q(\varphi u)||_{L^2_{(\omega_{\frac{\delta}{2}})}} \\ &\leq C||P(\varphi u)||_{L^2(\omega_{\frac{\delta}{2}})}\end{aligned}$$

D'aprés la formule de Leibniz $P(\varphi u) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi P^{(\alpha)} u$, on obtient

$$\begin{aligned}\|Q(u)\|_{L^2_{(\omega_\delta)}} &\leq C \sum_\alpha \frac{C_\alpha}{\alpha!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-|\alpha|} \|P^(\alpha) u\|_{L^2(\Omega_{\frac{\delta}{2}})} \\ &\leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\gamma} \sum_\alpha C'_\alpha N_{\gamma-|\alpha|}(P^\alpha u) \\ &\leq (\delta)^{-\gamma} \sum_\alpha C''_\alpha N_{\gamma-|\alpha|}(P^{(\alpha)} u)\end{aligned}$$

multiplions les deux membres de cette inégalité par δ^γ, on obtient

$$N_\gamma(Qu) \leq \sum_\alpha C''_\alpha N_{\gamma-|\alpha|}(P^{(\alpha)} u) \leq (\max_{|\alpha|} C''_\alpha) \sum_\alpha N_{\gamma-|\alpha|}(P^{(\alpha)} u),$$

ce qui donne avec $N_\gamma(Qu) \leq C\ (N_\gamma(Pu) + \|(u)\|_{L^2(\omega)}$ avec un autre constant $C\ > 0$

3.4.4 Comparaisan des espaces des vecteurs de Roumieu

Le théorème suivant donne une condition suffsante pour la comparaison des vecteurs de Roumieu.

Théorème 3.4.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, (M_p) une suite vérifant les conditions (2)-(4) et soient $Q, P \in \mathcal{H}$ tel que $Q \prec P$. Si en plus la suite (M_p) satisfait*

$$(p!)^d \subset M_p \tag{3.4.4}$$

où $d = \dfrac{\gamma(P)}{\deg(P)}$, alors

$$R_M(\Omega, P) \subset R_M(\Omega, Q).$$

Preuve 3.4.3 *D'après (3.4.2) on a pour tout ouvert borné, ω*

$$N_\gamma(Q_u) \leq C\left(N_\gamma(P_u) + \parallel u \parallel_{L^2(\omega)}\right), \forall u \in \mathbb{C}^\infty(\omega)$$

donc $\exists C(Q, P, diam\Omega) > 0, \forall t > 0, \forall p \geq 0, \forall v \in \mathbb{C}^\infty(\omega)$.

$$\underset{0 \leq r \leq t}{sup}\ \tau^\gamma \|(Pv)\|_{L^2_{(\omega_{p+t})}} \leq \underset{0 \leq rleqt}{sup}\ \tau^\gamma \|(Qv)\|_{L^2(\omega_{p+t})}$$

d'où

$$t^\gamma ||Qv||_{L^2(\omega_p+t)} \leq C\left\{t^\gamma ||Pv||_{L^2(\omega_p)} + ||v||_{L^2(\omega_p)}\right\},$$

et alors

$$||Qv||_{L^2(\omega_p+t)} \leq C\{||Pv||_{L^2(\omega_p)} + t^{-\gamma}||v||_{L^2(\omega_p)}\}, \forall v \in \mathbb{C}^\infty(\omega_p).$$

Ensuite, nous montrons par récurrence que : $\exists C > 0,\ \forall k \geq 1,\ \forall \delta > 0$,

$$\|Q^k u\|_{L^2(\omega_\delta)} \leq C^k \sum_{i=0}^{k} \tbinom{k}{i} \left(\frac{k}{\gamma}\right)^{i\gamma} \|P^{(k-i)} u\|_{L^2(\omega)}, \forall u \in \mathbb{C}^\infty(\omega) \tag{3.4.5}$$

Supposons que $u \in R_M(\Omega, P)$, alors pour tout compact $\mathcal{H}$ de Ω il existe un ouvert ω relativement compact dans Ω et $\delta > 0$ tels que

$$\mathcal{H} \subset \omega_\delta \subset \omega \subset \Omega$$

Par conséquent $\exists B > 0$,

$$\|P^i(D)u\|_{L^2(\omega)} \leq B^{i+1} M_{im}, \; i = 0, 1, ...$$

Or $k^{km} \leq (km)^{km} \leq (km)! e^{km}$, *on obtient pour tout* $i \leq k$

$$\begin{aligned} k^{i\gamma}\|P^{(k-i)}(D)u\|_{L^2(\omega)} &\leq B^{(k-i)+1}(km)^{i\gamma} M_{(k-i)m} \\ &\leq B^{k+1}\left((km)^{kmd}\frac{M_{km}}{M_{km}}\right)^{\frac{im}{km}} M_{(k-i)m} \\ &\leq B^{k+1}\left(\frac{(km)!^d e^{kmd}}{M_{km}}\right)^{\frac{im}{km}} M_{(k-i)m}(M_{km})^{\frac{im}{km}}, \end{aligned}$$

ce qui donne avec (3.4.4)

$$k^{i\gamma}\|P^{(k-i)}(D)u\|_{L^2_{(\omega)}} \leq B_1^{k+1} M_{(k-i)m}(M_{km})^{\frac{im}{km}} \tag{3.4.6}$$

D'autre part la suite $(M_p)^{\frac{1}{p}}$ *est croissante. En particulier*

$$\forall h \leq p, (M_h)^p \leq (M_p)^h.$$

En l'appliquant pour $h = km - im$ *et* $p = km$, *on obtient*

$$M_{(k-i)m} \leq (M_{km})^{\frac{km-im}{km}},$$

ce qui donne avec (3.4.6)

$$k^{i\gamma}\|P^{(k-i)}(D)u\|_{L^2(\omega)} \leq B_1^{k+1} M_{km}.$$

Remplacant dans (3.4.5)

$$\|Q^k u\|_{L^2(H)} \leq \|Q^k u\|_{L^2(\omega\delta)} \leq C^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\frac{1}{\delta})^{kmd} B_1^{k+1} M_{km} \leq B_2^{k+1} M_{km}$$

D'où $u \in R_M(\Omega, Q)$.

3.5 Conséquence

Corollaire 3.5.1 *Soient* P *et* Q *deux opérateurs différentiels de la classe* H *et de mème force.*

Si $(p!)d \leq M_p$ *avec* $d = \dfrac{\gamma(p)}{\deg(p)}$, *alors* $R_M(\Omega, P) = R_M(\Omega, Q)$

Remarque 3.5.1 *Si P et Q deux opérateurs différentiels de la classe H de mème force alors $\gamma(P) = \gamma(Q)$ et $\deg(P) = \deg(Q)$ ce qui donne le résultat.*

Corollaire 3.5.2 *Si $M_p = p!^s$, le théorème (3.4.3) coincide avec le théorème de Newberger-Zielezny dans une classe d'opérateurs hypoelliptique.*

Bibliographie

[1] H. Brezis , Analyse fonctionnelle .Dunod .(1999)

[2] L . Hormander , The analysis of Linear partial differential operators , I , Distributions theory and Fourier analysis , Springer-Verlag , (1983) .

[3] H . Komatsu , Ultradistributions I , Structure theorems and characterisation , J. Fac . Sci . Univ . Tokyo Sect .I.A . Math . 20,25-105 , (1973)

[4] L . Rodino , Linear partial differential operators in Gevrey spaces , World Scientifie , (1993)

[5] C . Roumieu , Sur quelques extentions de la notion de distrbutions , Ann . Sc . Ec . Norm . 3^{eme} serie , Tome . 77 , $n°$, 1 . p . 41-121 , (1960) .

[6] M.Gevrey, sur la nature analytique des solutions des equations aux dérivées partielles, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup, 35, 129-190 (1918).

[7] H. Komatsu, ultradistribution I, Structure theorems and characterisation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I.A.Math. 20,25-105, (1973) .

[8] L. Rodino, Linear partial differential operators in Gevrey spaces, World Scientific, (1993).

[9] C.Roumieu, sur quelques extention de la notion de distriburtions, Ann. Sc. Ec. Norm. 3^{eme} serie, Tome. 77 $n°$. 1 . p . 41-121, (1960) .

[10] L. Hormander. Distribution theory and Fourier analysis, Springer, (1983).

[11] C.Foias, R.Temam, " la régularité de classe Gevrey pour les solutions des équations de Navier-stokes" J.Funct. Anal. , 87,359-369,(1989)

[12] A.Ferrari, E.Titi , " la ré gularité Gevrey pour non linéaires analytique des équations paraboliques" commun. Partielle Diff. Eq.,23,1-16, (1998)

[13] C.D. Levermore, M.Olivrre, "Analyticité de solution pour une équation d'Euler généralisée" J.Diff. Eq. , 133,321-339, (1997)

[14] T.Gramachev, G.Popov, " estimations de type Nekhoroshev pour boule de billard cartes " Ann.Inst.Fourier (Grenoble), 45 : 3, 859-895, (1995).

[15] T.Gramachev, L.Rodino , " solvabilité Gevrey pour des équations différentielles partielles semi-linéaires avec characteritics multiples " Boll.Un.Mat. Ital.Sez. B (8), 2 : 1, 65-120, (1999)

[16] M. Mascarello, L. Rodino, " équations aux dérivées partielles qui présentent des caractéristiques multiples " , Math. Sujets, 13, Akad. (1997)

[17] H. chen, L. Rodino " Théorie géné rale des classes PDF et Gevrey " , la théorie générale des équations aux dérivées partielles et analyse microlocale (Trieste, 1995), Res Pitman. Notes de mathématiques. , 349,6-81, (1996)

[18] J.P. Ramis, " série divergentes et Théorie asymptotiques " Bull. Sci. Math . France, 121 (1993) (Panoramas ET synthà ses. suppl.)

[19] Komatsu, H. (1960). A characterization of real analytic functions. Proceedings of the Japan Academy, 36(3), 90-93.

[20] L. Hormander, On interior regularity of solutions of partial di§erential equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 11, (1958), 197-218.

[21] C. Boiti, R. Chaôli, T. Mahrouz, Iterates of systems of operators in spaces of ω

[22] C. Boiti, R. Chaôli, T. Mahrouz, Iterates of systems of operators in spaces of ω-ultradi§erentiable functions, ANN. POL. MATH., Vol. 118.2-3, (2016), 95-111

[23] C. Boiti, D. Jornet, The problem of iterates in some classes of ultradifferentiable functions, Operator Theory : Advances and Applications, Birkhauser, Basel, 245 (2015), 21-33.

[24] J. Bonet, R. Meise, S.N. Melikhov, A comparison of two different ways to deöne classes of ultradi§erentiable functions, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14 (2007), 425-444.

[25] C. Bouzar, R. Chaili, Une généralisation du problème des itérés, Arch. Math. (Basel) 76(1), (2001), 57-66.

[26] R. Chaôli, T. Mahrouz, Comparison of iterates of a class of differential operators in Roumieu spaces, Publ. Inst. Math. NS, T. 101(115), (2017), 261-266.

[27] H. Komatsu, A characterization of real analytic functions, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 90-93

[28] E. Newberger, Z. Zielezny, The growth of hypoelliptic polynomials and Gevrey classes, Proc. Amer. Math. Soc. 39, n. 3, (1973), 547-552.

[29] C. Roumieu, Sur quelques extensions de la notion de distributions, Ann. Sc. E. N. S., Vol. 77, (1960), 47-121.

[30] V. Thilliez. On quasi-analytic local rings. Expo. Math., 26 :1ñ23, (2008).

[31] T. Kotake, M.S. Narasimhan, Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France 90, (1962), 449-471.

[32] F. Tríves, Linear partial differential equations with constant coeffcients, Gordan and Breach, 1966.