RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles»

Présenté Par :

ABDALLAOUI Abdelazziz et BENYAHIA Silia

Sous L'intitulé :

Étude d'une classe des inégalités à double intégrales.

Soutenu publiquement le: 12 / 06 / 2023

à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. SENOUCA Abdelkader	Grade Université Professeur	Président
Mr. BENAISSA Bouharket	Grade Université MCA	Encadreur
Mr. BENDAOUD Abed Sid Ahmed	Grade Université MCA	Examinateur

جامعة ابن خلدون تيارت
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي

Année universitaire : 2022/2023

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques

présenté par

ABDALLAOUI Abdelazziz **BENYAHIA Silia**

Spécialité : Mathématiques

Option :Analyse fonctionnelle et équations différentielles

sujet de Mémoire

Étude d'une classe des inégalités à double intégrales

Mémoire de fin d'études pour obtenir

le diplôme de Master

présenter et soutenue publiquement le 12/06/2023

devant le jury composé de

SENOUCI Abdelkader	**Professeur**	**Président**
BENAISSA Bouharket	**MCA**	**Encadreur**
BENDAOUD Abed sid Ahmed	**MCA**	**Examinateur**

Remerciement

✓ Nous remercions avant tout **ALLAH** qui nous a donné la force et la volonté pour élaborer cette œuvre.

✓ Nous devons exprimer notre gratitude a **Dr BENAISSA Bouharket** d'avoir accepter de nous encadrer avec beaucoup d'attention ainsi que sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, non seulement dans le cadre du mémoire, mais aussi dans nos études.

✓ Nous tenons a remercier chaleureusement **Pr SENOUCI Abdelkader** pour l'honneur qu'il nous fait de présider le jury de ce mémoire.

✓ Nous remercions également **Dr BENDAOUD Abed sid Ahmed** d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos enseignants, nos familles, nos amis.

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter quelques résultats de deux articles scientifiques internationaux sur une classe des inégalités à double intégrales [1]-[2]. Toutes les inégalités intégrales étudiées sont considérées dans l'espace de Lebesgue L^p, où $p \geq 1$. Les techniques utilisées sont les propriétés du calcul intégral, le théorème de Fubini, les inégalités classiques de Hôlder et l'intégration par parties. On a utilisé les formules de la dérivée d'une fonction définie par une intégrale, où la variable est au borne de l'intégrale et comme deuxième variable de la fonction intégrée. Les opérateurs utilisés dans les articles sont l'opérateur de Hardy, l'opérateur de Copson et l'opérateur de Pachepatte .
Ce mémoire est composée d'un préliminaire, deux chapitres, d'une documentation et d'une bibliographie.

Dans la partie **préliminaire**, on présente certaines définitions et propriétés nécessaires pour ce travail concernant :

1. **Théorème de Fubini :** on donne une définition et une remarque dans le cas d'une borne intégrale non constante.

2. **Fonction définie par une intégrale :** nous présentons les trois types de la dérivée d'une fonction définie par une intégrale et le cas général (Règle de Leibniz).

3. **Fonction de poids :** nous donnons la définition d'une fonction de poids avec quelques exemples.

4. **Des inégalités classiques** connues comme :
   (a) Les inégalités classiques de Hôlder pour $p < 0$, $0 < p < 1$ et $p \geq 1$.
   (b) Les deux versions des inégalités de Hardy, classique et pondérée.
   (c) L'inégalité intégrale de type Pachepatte avec poids.

Le premiér chapitre comprend un article scientifique sur une généralisation d'inégalité pondérée à double intégrales de type Hardy en utilisant l'opérateur à double intégrales de type Copson et son dual, où on a présenté avec preuve deux résultats et des applications relatives à ces inégalités.

Dans **Le deuxième chapitre**, on s'intéresse a étudier quelques inégalités pondérées à double intégrales de type Hardy dépend d'un opérateur à double intégrales de type Pachepatte, on donne comme application des cas particuliers dépendant d'une fonction à deux variables indépendantes.

A la fin du mémoire, on trouve une documentation sur les mathématiciens Hardy, Copson, Fubini et Hôlder.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Définition de l'espace L^p

Définition 1.1. *(**Les espaces** L^p) Soient $0 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si*

(1) f est mesurable sur Ω.

(2) $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} < \infty$.

1.2 Théorème de Fubini

Théorème 1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, tel que $\Omega = (m,n) \times (l,k) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la fonction $f(t,s)$ intégrable sur $(m,n) \times (l,k)$. Alors pour presque tous les $t \in (m,n)$, $f(t,s)$ est intégrable sur (l,k) et pour presque tous les $s \in (l,k)$ $f(t,s)$ est intégrable sur (m,n) et :*

$$\int_{\Omega} |f(t,s)| ds\, dt = \int_m^n \left(\int_l^k |f(t,s)| ds \right) dt = \int_l^k \left(\int_m^n |f(t,s)| dt \right) ds.$$

Si $f(t,s)$ est une fonction mesurable sur $(m,n) \times (l,k)$ et l'une des intégrales est finie, alors toutes les intégrales existent et de plus cette dernière égalité est vérifiée.

Remarque 1.1. *On a le cas particulier où l'intégrale est avec une borne non* *constante, pour* $a \leq x \leq y \leq b$

$$\int_a^b \int_a^{\boldsymbol{y}} \varphi(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_{\boldsymbol{x}}^b \varphi(x,y)dy\,dx.$$

1.3 Intégration par partie

Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et a, b deux réels de I, alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

1.4 Les fonctions définies par une intégrale

1.4.1 Fonction : $x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$

Soient f une fonction intégrable (l'intégrale converge) et g, h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt,$$

alors la fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle est donnée par

$$F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x)). \tag{1.1}$$

cas particulier

Fonction : $x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

Soit f une fonction intégrable (l'intégrale converge) sur tout segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \end{aligned}$$

I) la fonction F est continue sur I et $F(a) = 0$.

II) F est dérivable en tout $x \in I$ et

$$F'(x) = f(x). \tag{1.2}$$

Fonction : $x \longmapsto F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$

Soit f une fonction intégrable (l'intégrale converge) sur tout segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_x^b f(t)\,dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{aligned} H : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto H(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \end{aligned}$$

I) la fonction H est continue sur I et $H(b) = 0$.

II) H est dérivable en tout $x \in I$ et

$$H'(x) = -f(x). \tag{1.3}$$

1.4.2 Fonction : $x \longmapsto \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

La fonction φ est définie si f est une application de $I \times [a, b]$, où I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \longmapsto f(x, t)$ intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 1.2. *Si la fonction*

$$\begin{aligned} f : I \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto f(x, t), \end{aligned}$$

est continue sur $I \times [a, b]$ et admet une fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ également *continue sur $I \times [a,b]$, alors la fonction*

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt, \end{aligned}$$

est dérivable sur I, et sa dérivée φ' vérifiant

$$\forall x \in I : \varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt. \tag{1.4}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in I : \frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t), dt. \tag{1.5}$$

Pour des détails voir [3].

1.4.3 Règle de Leibniz

On présente maintenant le cas général des formules précédentes. Soient g, h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\,dt,$$

alors la fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle est donnée par

$$F'(x) = h'(x)f(x,h(x)) - g'(x)f(x,g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt. \tag{1.6}$$

Pour des détails voir [10].

1.5 Fonction de poids

Définition 1.2. *On dit que w est une fonction de poids sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si w est une fonction mesurable et positive sur I.*

Exemple 1.5.1. *On a*

1) Les fonctions de puissance : $w(x) = x^{\alpha}$, *avec* $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) La fonction exponentielle : $w(x) = \exp(x)$.

3) La fonction constante : $w(x) = 1$.

1.6 les propriétés des conjuguées

Soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $p, p^{'}$ deux conjuguées telle que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^{'}} = 1$, alors on a

1. $\dfrac{1}{p^{'}} = \dfrac{p-1}{p}$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{p^{'}-1}{p^{'}}$.
2. $\dfrac{p^{'}}{p} = p^{'} - 1$, $\dfrac{p}{p^{'}} = p - 1$.
3. $p = \dfrac{p^{'}}{p^{'}-1}$, $p^{'} = \dfrac{p}{p-1}$.
4. $p.p^{'} = p^{'} + p$.

1.7 Le signe d'une fonction

Le signe d'une fonction f définit sur un intervalle I permet de savoir quand la fonction est positive, négative ou nulle. Le signe de f est définit comme suite :

$$Sng(f(x)) = \begin{cases} 1 & si \;\; f(x) > 0, \\ -1 & si \;\; f(x) < 0, \\ 0 & si \;\; f(x) = 0. \end{cases}$$

1.8 Les inégalités de Hölder

Soient Ω un ensemble mesurable non vide de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions mesurables sur Ω, telle que $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_{p'}(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$, on a

I) Pour $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right| dx &\leq \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \left\|g\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \Big(\int_{\Omega} \left|f(x)\right|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p'} dx \Big)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

II) Pour $0 < p < 1$ (quasi-norme)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right| dx &\geq \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \left\|g\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \Big(\int_{\Omega} \left|f(x)\right|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p'} dx \Big)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

III) Pour $p < 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right| dt &\geq \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \left\|g\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \Big(\int_{\Omega} \left|f(x)\right|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p'} dt \Big)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2. *On peut récrire l'inégalité(1.7) sous la forme suivante : pour tout* $p \geq 1$

$$\Big(\int_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right| dx \Big)^p \leq \Big(\int_{\Omega} \left|f(x)\right|^p dx \Big) \Big(\int_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p'} dx \Big)^{p-1}. \tag{1.8}$$

1.9 L'opérateur de Hardy

Soit f une fonction mesurable non-négative sur $(0, +\infty)$, on définit l'opérateur de Hardy noté $H_f := (Hf)$ par

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \tag{1.9}$$

(la valeur moyenne de la fonction f dans l'intervalle $(0, \infty)$).

1.10 Le dual d'opérateur de Hardy

Le dual d'opérateur de Hardy est noté par $\widetilde{H}_f := (\widetilde{H}f)$ est définie par

$$(\widetilde{H}f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt, \tag{1.10}$$

où f est une fonction mesurable non-négative sur $(0, +\infty)$.

1.11 L'opérateur adjoint de Hardy (Copson)

Soit f une fonction mesurable non-négative sur $(0, +\infty)$, on définit l'opérateur adjoint de Hardy noté $H_f^* := (H^*f)$ par

$$(H^*f)(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt. \tag{1.11}$$

1.12 l'inégalité de Hardy

Soient $p > 1$ et f une fonction mesurable non-négative sur $(0, +\infty)$, alors :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)dx. \tag{1.12}$$

La constante $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ est la plus petite possible.

1.13 L'opérateur pondéré de Pachepatte

Soient f une fonction mesurable non-négative sur $(0, +\infty)$ et w une fonction de poids (mesurable et positive) sur $(0, +\infty)$. L'opérateur pondéré de Pachepatte noté $P_f := (Pf)$ est défini comme suit

$$Pf(x) = \frac{1}{w(x)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t) \frac{f(t)}{t}\, dt. \tag{1.13}$$

Chapitre 2

Généralisation des inégalités pondérées à double intégrales de type Hardy

Dans ce chapitre, nous présentons quelques généralisations des inégalités pondérées de type Hardy à double intégrales [1], en utilisant les opérateurs pondérés de type Copson suivants $S_1 := (S_1 f)_g^w$ et $S_2 := (S_2 f)_g^w$, où f est une fonction intégrable non-négative avec deux variables sur le domaine $\Delta = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ et pour $0 < a < b < +\infty$, $0 < c < d < +\infty$, on a

$$S_1(x, y) = \int_a^x \int_c^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t, s)) ds\, dt,$$

et

$$S_2(x, y) = \int_x^b \int_y^d \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t, s)) ds\, dt,$$

avec

$$W(z) = \int_0^z w(r) dr, \qquad \text{pour } z \in (0, +\infty),$$

où w est une fonction de poids et g est une fonction continue non-négative sur $(0, +\infty)$.

2.1 introduction

L'inégalité suivante :

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,dx, \qquad p>1, \tag{2.1}$$

où

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)\,dt,$$

connue sous le nom d'inégalité intégrale de Hardy est vérifiée pour toute fonctions f mesurables non-négatives sur $(0,+\infty)$.
La constante $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale (la plus petite possible).
En 1928, Hardy a prouvé l'inégalité pondérée suivante. Soit

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt, & \text{pour } \alpha < p-1, \\ \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt, & \text{pour } \alpha > p-1, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty x^{\alpha-p} F^p(x)\,dx \leq \left(\frac{p}{|p-1-\alpha|}\right)^p \int_0^\infty x^\alpha f^p(x)\,dx, \quad \text{pour } p>1. \tag{2.2}$$

2.2 Préliminaires

Dans cette section onprésente des Lemmes (avec preuve) qui sont nécessaires pour la démonstration des résultats principaux .

Lemme 2.1. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, g une fonction continue non-négative sur $(0,+\infty)$, $p>1$ et $\alpha<p-1$, on définit les opérateurs S_1 et G_1 par*

$$S_1(x,y) = \int_a^x \int_c^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t,s))ds\,dt,$$

et

$$G_1(x,y)=\int_a^x \frac{w(t)}{W(t)}g(f(t,y))dt.$$

Fixons $x>a$, alors

$$\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_1^p(x,y)dy \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_c^d \frac{w(t)}{W^{p-\alpha}(y)}G_1^p(x,y)dy. \tag{2.3}$$

Démonstration : Fixons $x>a$ dans l'inégalité (2.3), on a

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= \int_a^x \int_c^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)}g(f(t,s))\,ds\,dt \\ &= \int_a^x \frac{w(t)}{W(t)}\left(\int_c^y \frac{w(s)}{W(s)}g(f(t,s))\,ds\right)dt, \end{aligned}$$

suivant le Théorème de Fubini, on obtient

$$S_1(x,y)=\int_c^y \frac{w(s)}{W(s)}\left(\int_a^x \frac{w(t)}{W(t)}g(f(t,s))\,dt\right)ds,$$

donc

$$S_1(x,y)=\int_c^y \frac{w(s)}{W(s)}G_1(x,s)ds,$$

où

$$G_1(x,s)=\int_a^x \frac{w(t)}{W(t)}g(f(t,s))dt.$$

On applique la formule (1.2) pour calculer la dérivée de S_1 par rapport à y, d'où

$$\begin{aligned} S_1'(x,y) &= \frac{\partial S_1}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{w(y)}{W(y)}G_1(x,y), \end{aligned}$$

Notons par $I_1(x)$ (une expression en fonction de x) le membre gauche de l'inégalité (2.3)

$$I_1(x) = \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)dy,$$

on utilise l'intégration par parties comme suit

$$\begin{aligned} U(y) = S_1^p(x,y) \quad &\Longrightarrow U'(y) = p\, S_1'(x,y) S_1^{p-1}(x,y) \\ &\Longrightarrow U'(y) = p \left(\frac{w(y)}{W(y)} G_1(x,y) \right) S_1^{p-1}(x,y), \end{aligned}$$

$$V'(y) = \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \quad \Longrightarrow V(y) = -\frac{1}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(y)}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} I_1(x) \quad &= \left[-\frac{S_1^p(x,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(y)} \right]_c^d + \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_c^d \frac{w(y)}{W(y)W^{p-\alpha-1}(y)} G_1(x,y) S_1^{p-1}(x,y)dy \\ &= \left(-\frac{S_1^p(x,d)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(d)} + 0 \right) + \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1(x,y) S_1^{p-1}(x,y)dy, \end{aligned}$$

puisque $\alpha < p-1$, alors $p-1-\alpha > 0$ et $S_1(x,d) \geq 0$ (car w est une fonction de poids et f, g des fonctions non-négatives), donc

$$-\frac{S_1^p(x,d)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(d)} \leq 0,$$

par conséquent

$$I_1(x) \leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1(x,y) S_1^{p-1}(x,y)dy.$$

Pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, on a

$$I_1(x) \leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_c^d \left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} G_1(x,y) S_1^{p-1}(x,y)dy$$

$$= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_c^d \left[\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p}} G_1(x,y)\right]\left[\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p'}} S_1^{p-1}(x,y)\right]dy,$$

appliquant l'inégalité classique de Hölder (1.7), on trouve

$$I_1(x) \leq \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^{(p-1)p'}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^{p}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p'}},$$

pour $p>1$, on déduit

$$\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^{p}(x,y)dy\right)^{p}$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)dy\right)\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^{p}(x,y)dy\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)dy\right)\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^{p}(x,y)dy\right)^{p-1}.$$

Vu que $p-1>0$ et $I_1(x) = \displaystyle\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y) \geq 0$, supposons que $I_1(x) >$

0, alors

$$\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)dy\right)^{p-(p-1)} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)dy,$$

ainsi

$$\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)dy \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)dy,$$

l'inégalité précédente reste vraie pour $I_1(x) = 0$. □

Lemme 2.2. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, g une fonction continue non-négative sur $(0, +\infty)$, $p > 1$ et $\alpha < p - 1$, on a*

$$G_1(x,y) = \int_a^x \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t,y))dt.$$

Fixons $y > c$, on a

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} G_1^p(x,y)dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx. \quad (2.4)$$

Démonstration : Soit $y > c$ fixé dans l'inégalité (2.4)
On applique la formule (1.2) pour dériver G_1 par rapport à x, on déduit

$$G_1'(x,y) = \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) = \frac{w(x)}{W(x)} g(f(x,y)).$$

Notons par $J_1(y)$ (une expression en fonction de y) le côté gauche de l'inégalité (2.4)

$$J_1(y) = \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} G_1^p(x,y)\, dx,$$

en intégrant J_1 par partie, mettant

$$U(x) = G_1^p(x,y) \quad \Longrightarrow U'(x) = p\, G_1'(x,y) G_1^{p-1}(x,y)$$

$$\Longrightarrow U'(x) = p\left(\frac{w(x)}{W(x)} g(f(x,y))\right) G_1^{p-1}(x,y),$$

$$V'(x) = \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \quad \Longrightarrow V(x) = -\frac{1}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} J_1(y) \quad &= \left[-\frac{G_1^p(x,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)}\right]_a^b + \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_a^b \frac{w(x)}{W(x)W^{p-\alpha-1}(x)} g(f(x,y)) G_1^{p-1}(x,y)\, dx \\ &= \left(-\frac{G_1^p(b,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(b)} + 0\right) + \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g(f(x,y)) G_1^{p-1}(x,y)\, dx, \end{aligned}$$

puisque $\alpha < p-1$, alors $0 < p-1-\alpha$ et $G_1(b,y) \geq 0$, ainsi

$$-\frac{G_1^p(b,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(b)} \leq 0,$$

par conséquent

$$J_1(y) \leq \frac{p}{p-\alpha-1} \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g(f(x,y)) G_1^{p-1}(x,y) dx.$$

Pour $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, on trouve

$$\begin{aligned}
J_1(y) &\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_a^b \left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} g(f(x,y))G_1^{p-1}(x,y)dx \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_a^b \left[\left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p}} g(f(x,y))\right]\left[\left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p'}} G_1^{p-1}(x,y)\right]dx,
\end{aligned}$$

on applique l'inégalité classique de Hölder (1.7), on trouve

$$\begin{aligned}
&J_1(y)\\
&\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x,y))dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^{(p-1)p'}(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x,y))dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^{p}(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

pour $p>1$, on résulte que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^p(x,y)dx\right)^p\\
&\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x,y))dx\right)\times\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^p(x,y)dx\right)^{\frac{p}{p'}}\\
&= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x,y))dx\right)\times\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^p(x,y)dx\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

On a $p-1>0$ et $J_1(y)=\displaystyle\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^p(x,y)\,dx\geq 0$, supposons $J_1(y)>0$, alors

$$\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}G_1^p(x,y)dx\right)^{p-(p-1)} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x,y))dx,$$

ainsi

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} G_1^p(x,y)dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx,$$

l'inégalité précédente reste vraie pour $J_1(y) = 0$. $\square$

Lemme 2.3. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, g une fonction continue non-négative sur $(0,+\infty)$, $p > 1$ et $\alpha > p-1$, on définit les opérateurs S_2 et H_1 par*

$$S_2(x,y) = \int_x^b \int_y^d \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t,s))ds\,dt,$$

et

$$H_1(x,y) = \int_x^b \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t,y))dt.$$

Fixons $x > a$, alors

$$\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)dy. \quad (2.5)$$

Démonstration : Fixons $x > a$ dans l'inégalité (2.5), on a

$$\begin{aligned} S_2(x,y) &= \int_x^b \int_y^d \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t,s))ds\,dt \\ &= \int_x^b \frac{w(t)}{W(t)} \left(\int_y^d \frac{w(s)}{W(s)} g(f(t,s))ds\right) dt, \end{aligned}$$

appliquons le Théorème de Fubini, on obtient

$$S_2(x,y) = \int_y^d \frac{w(s)}{W(s)} \left(\int_x^b \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t,s))dt\right) ds,$$

donc

$$S_2(x,y) = \int_y^d \frac{w(s)}{W(s)} H_1(x,s)ds.$$

où

$$H_1(x,s) = \int_x^b \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t,s))dt.$$

On utilise la formule (1.3) pour dériver S_2 par rapport a y, on déduit

$$S_2'(x,y) \;= \frac{\partial S_2}{\partial y}(x,y) = -\frac{w(y)}{W(y)} H_1(x,y),$$

Notons par $I_2(x)$ (une expression en fonction de x) le côté gauche de l'inégalité (2.5)

$$I_2(x) = \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy,$$

nous appliquons l'intégration par partie pour intégré I_2, on prend

$$U(y) = S_2^p(x,y) \qquad \Longrightarrow U'(y) = p\, S_2'(x,y) S_2^{p-1}(x,y)$$

$$\Longrightarrow U'(y) = -p \left(\frac{w(y)}{W(y)} H_1(x,y) \right) S_2^{p-1}(x,y),$$

$$V'(y) = \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \quad \Longrightarrow V(y) = -\frac{1}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(y)}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} I_2(x) \;&= \left[-\frac{S_2^p(x,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(y)} \right]_c^d - \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_c^d \frac{w(y)}{W(y)W^{p-\alpha-1}(y)} H_1(x,y) S^{p-1}(x,y)dy \\ &= \left(\frac{S_2^p(x,c)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(c)} + 0 \right) - \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1(x,y) S_2^{p-1}(x,y)dy, \end{aligned}$$

ainsi

$$I_2(x) = -\frac{S_2^p(x,c)}{(1-p+\alpha)W^{p-\alpha-1}(c)} + \frac{p}{1-p+\alpha}$$

$$\times \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1(x,y) S_2^{p-1}(x,y)dy,$$

puisque $\alpha > p-1$, alors $1-p+\alpha > 0$, et $S_2(x,c) \geq 0$, donc

$$-\frac{S_2^p(x,c)}{(1-p+\alpha)W^{p-\alpha-1}(c)} \leq 0,$$

par conséquent

$$I_2(x) \leq \frac{p}{1-p+\alpha} \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1(x,y) S_2^{p-1}(x,y)dy.$$

Vu que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$\begin{aligned} I_2(x) &\leq \frac{p}{1-p+\alpha} \int_c^d \left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} H_1(x,y) S_2^{p-1}(x,y)dy \\ &= \frac{p}{1-p+\alpha} \int_c^d \left[\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p}} H_1(x,y)\right] \left[\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p'}} S_2^{p-1}(x,y)\right] dy, \end{aligned}$$

appliquons l'inégalité classique de Hölder (1.7), on trouve

$$\begin{aligned} &I_2(x) \\ &\leq \frac{p}{1-p+\alpha} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^{(p-1)p'}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{p}{1-p+\alpha} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

pour $p > 1$

$$\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)dy\right) \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)\, dy\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$= \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)\, dy\right) \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)\, dy\right)^{p-1}.$$

On a

$$\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)\, dy\right)^{p-1} \geq 0,$$

(car $p-1 > 0$ et $I_2(x) = \displaystyle\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)\, dy \geq 0$), on suppose que $I_2(x) > 0$

$$\left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy\right)^{p-(p-1)} \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)\, dy,$$

ainsi

$$\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)\, dy,$$

l'inégalité précédente reste vrais pour $I_2(x) = 0$. □

Lemme 2.4. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, g une fonction continue non-négative sur $(0, +\infty)$, $p > 1$ et $\alpha > p-1$, on a*

$$H_1(x,y) = \int_x^b \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t,y))\, dt.$$

Fixons $y > c$, alors

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)\, dx \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))\, dx. \quad (2.6)$$

Démonstration : Soit $y > c$ fixé dans l'inégalité (2.6), on applique la formule (1.3) pour calculer la dérivée de H_1 par rapport à x, on déduit

$$H_1'(x,y) \; = \frac{\partial H_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{w(x)}{W(x)} g(f(x,y)).$$

Notons par $J_2(y)$ (une expression en fonction de y) le côté gauche de l'inégalité (2.6)

$$J_2(y) = \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)dx,$$

on utilise l'intégration par partie pour intégré J_2, mettons

$$\begin{aligned}
U(x) = H_1^p(x,y) \quad & \Longrightarrow U'(x) = p\, H_1'(x,y) H_1^{p-1}(x,y) \\
& \Longrightarrow U'(x) = -p \left(\frac{w(x)}{W(x)} g(f(x,y)) \right) H_1^{p-1}(x,y), \\
V'(x) = \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \quad & \Longrightarrow V(x) = -\frac{1}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
J_2(y) \quad &= \left[-\frac{H_1^p(x,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)} \right]_a^b - \frac{p}{p-\alpha-1} \\
&\times \int_a^b \frac{w(x)}{W(x)W^{p-\alpha-1}(x)} g(f(x,y)) H_1^{p-1}(x,y)dx \\
&= \left(\frac{H_1^p(a,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(a)} + 0 \right) - \frac{p}{p-\alpha-1} \\
&\times \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g(f(x,y)) H_1^{p-1}(x,y)dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$J_2(y) = \left(-\frac{H_1^p(a,y)}{(1-p+\alpha)W^{p-\alpha-1}(a)}\right) + \frac{p}{1-p+\alpha}$$

$$\times \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g(f(x,y)) H_1^{p-1}(x,y)dx,$$

puisque $\alpha > p-1$, alors $1-p+\alpha > 0$ et $H_1(a,y) \geq 0$, alors

$$-\frac{H_1^p(a,y)}{(1-p+\alpha)W^{p-\alpha-1}(a)} \leq 0,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} J_2(y) &\leq \frac{p}{1-p+\alpha}\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g(f(x,y)) H_1^{p-1}(x,y)dx \\ &= \frac{p}{1-p+\alpha}\int_a^b \left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} g(f(x,y)) H_1^{p-1}(x,y)dx \\ &= \frac{p}{1-p+\alpha}\int_a^b \left[\left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p}} g(f(x,y))\right]\left[\left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p'}} H^{p-1}(x,y)\right]dx. \end{aligned}$$

Suivant l'inégalité classique de Hölder(1.7), on obtient

$$\begin{aligned} &J_2(y) \\ &\leq \frac{p}{1-p+\alpha}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^{(p-1)p'}(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{p}{1-p+\alpha}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^{p}(x,y)dx\right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

pour $p > 1$

$$\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)dx\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx\right) \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)dx\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$= \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))\,dx\right) \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)\,dx\right)^{p-1}.$$

On a $p-1>0$ et $J_2(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)\,dx \geq 0$, on suppose que $J_2(y) > 0$, donc

$$\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)\,dx\right)^{p-(p-1)} \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))\,dx,$$

ainsi

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)dx \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))\,dx,$$

l'inégalité précédente reste vrais pour $J_2(y) = 0$. $\square$

2.3 résultats principaux

Théorème 2.1. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, g une fonction continue non-négative en $(0,\infty)$ et $p > 1$, $\alpha < p-1$, on a*

$$S_1(x,y) = \int_a^x \int_c^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t,s))ds\,dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}&\int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)dy\,dx \\ &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))dy\,dx.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour la démonstration de ce Théorème on utilise le Lemme 2.1 et le Lemme 2.2.

Démonstration : on note par (Lhs_1) le côté gauche de l'inégalité (2.7)

$$\begin{aligned} Lhs_1 &= \int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)\,dy\right) dx, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} Lhs_1 &\leq \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left[\left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)\,dy\right] dx \\ &= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} G_1^p(x,y)\,dy\right) dx, \end{aligned}$$

appliquons le Théorème de Fubini, on trouve

$$Lhs_1 \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} G_1^p(x,y)dx\right) dy,$$

de l'inégalité (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} Lhs_1 &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left[\left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx\right] dy \\ &= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))\, dx\right) dy, \end{aligned}$$

utilisons le Théorème de Fubini, on résulte que

$$\begin{aligned} Lhs_1 &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))\, dy\right) dx \\ &= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))\, dy\, dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu . □

Théorème 2.2. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ et g une fonction continue non-négative en $(0,\infty)$, $p > 1$ et $\alpha > p-1$, on a*

$$S_2(x,y) = \int_x^b \int_y^d \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t,s))\, ds\, dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dydx \\ &\leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^{2p} \int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))dy\, dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour la démonstration de ce Théorème on utilise le Lemme 2.3 et le Lemme 2.4.

Démonstration : on note par (Lhs_2) le côté gauche de l'inégalité 2.8

$$Lhs_2 = \int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dydx$$

$$= \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dy \right) dx,$$

d'après l'inégalité (2.5), on obtient

$$Lhs_2 \leq \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left[\left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)dy \right] dx$$

$$= \left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} H_1^p(x,y)dy \right) dx,$$

appliquons le Théorème de Fubini, on trouve

$$Lhs_2 \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_1^p(x,y)dx \right) dy,$$

et d'après l'inégalité (2.6), on obtient

$$Lhs_2 \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^p \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left[\left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx \right] dy$$

$$= \left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^{2p} \int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x,y))dx \right) dy,$$

utilisons le Théorème de Fubini, on trouve

$$Lhs_2 \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^{2p} \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_c^d \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))dy \right) dx$$

$$= \left(\frac{p}{1-p+\alpha} \right)^{2p} \int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))dy\,dx,$$

d'où le résultat voulu . □

2.4 Applications

Dans cette section, en utilisant le Théorème 2.1 et le Théorème 2.2, on déduit des cas spécieux des inégalités de type-Hardy à double intégrales sous les Corollaires dépend du choix des fonctions w et f.

2.4.1 Les inégalités pondérées de Hardy à double intégrales

Mettant $w(x) = 1$ et $g(f(x, y)) = xyf(x, y)$ dans le Théorème 2.1, on obtient

$$\begin{aligned} S_1(x,y) &= \int_a^x \int_c^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(t,s))ds\,dt \\ &= \int_a^x \int_c^y \frac{1}{ts} tsf(t,s)ds\,dt \\ &= \int_a^x \int_c^y f(t,s)ds\,dt = F_1(x,y), \end{aligned}$$

et

$$\int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_1^p(x,y)dy\,dx = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{(xy)^{p-\alpha}} F_1^p(x,y)dy\,dx,$$

par suite

$$\int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))dy\,dx = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{(xy)^{p-\alpha}} (xy)^p f^p(x,y)dy\,dx,$$

d'où le Corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Soient $p > 1$, $\alpha < p - 1$ et f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ, on a*

$$F_1(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(x,y)ds\,dt,$$

alors

$$\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} F_1^p(x,y)dy\,dx \tag{2.9}$$
$$\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha} f^p(x,y)dy\,dx.$$

On prend les mêmes choix de w et f dans le Théorème 2.2, on obtient

$$\begin{aligned} S_2(x,y) &= \int_x^b \int_y^d \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} g(f(x,y))ds\,dt \\ &= \int_x^b \int_y^d \frac{1}{t\,s} t\,s f(x,y)ds\,dt \\ &= \int_x^b \int_y^d f(x,y)ds\,dt = F_2(x,y), \end{aligned}$$

et

$$\int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_2^p(x,y)dydx = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{(xy)^{p-\alpha}} F_2^p(x,y)dy\,dx,$$

ainsi

$$\int_a^b \int_c^d \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} g^p(f(x,y))dy\,dx = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{(xy)^{p-\alpha}} (xy)^p f^p(x,y)dy\,dx,$$

d'où le Corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Soient $p > 1$, $\alpha > p-1$ et f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ, on a*

$$F_2(x,y) = \int_x^b \int_y^d f(x,y)ds\,dt,$$

alors

$$\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} F_2^p(x,y)dy\,dx$$
$$\leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^{2p} \int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha} f^p(x,y)dy\,dx. \tag{2.10}$$

2.4.2 Fonction avec deux variables indépendantes

Les résultats suivants sont des cas particuliers du Corollaire 2.1 et du Corollaire 2.2 respectivement.

Posons $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$ dans le Corollaire 2.1, où f_1, f_2 sont deux fonctions intégrables non-négatives sur $(0,+\infty)$, on a

$$F_1(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(x,y)ds\,dt = \left(\int_a^x f_1(t)dt\right)\left(\int_c^y f_2(s)ds\right) = \widetilde{F}_1(x,y),$$

et

$$\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} F_1^p(x,y)dy\,dx$$
$$= \int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} \left[\left(\int_a^x f_1(t)dt\right)\left(\int_c^y f_2(s)ds\right)\right]^p dy\,dx,$$

ensuite

$$\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha} f^p(x,y)dy\,dx = \int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha}(f_1(x)f_2(y))^p dx\,dy$$
$$= \left(\int_a^b x^{\alpha} f_1^p(x)dx\right)\left(\int_c^d y^{\alpha} f_2^p(y))dy\right),$$

on trouve le Corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Soient $p > 1$, $\alpha < p-1$ et f une fonction intégrable non-*

négative sur $(0, +\infty)$, *on a*

$$\widetilde{F}_1(x,y) = \left(\int_a^x f_1(t)dt\right)\left(\int_c^y f_2(s)ds\right),$$

alors

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} \widetilde{F}_1^p(x,y)dy\,dx \\ &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \left(\int_a^b x^\alpha f_1^p(x)dx\right)\left(\int_c^d y^\alpha f_2^p(y)dy\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Maintenant nous mettons $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ dans le Corollaire 2.2, on a

$$F_2(x,y) \;= \int_x^b \int_y^d f(x,y)ds\,dt = \left(\int_x^b f_1(t)dt\right)\left(\int_y^d f_2(s)ds\right) = \widetilde{F}_2(x,y),$$

d'après l'inégalité (2.10), on conclut

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} F_2^p(x,y)dy\,dx \\ &= \int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} \left[\left(\int_x^b f_1(t)dt\right)\left(\int_y^d f_2(s)ds\right)\right]^p (x,y)dy\,dx, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d (xy)^\alpha f^p(x,y)dy\,dx \;&= \int_a^b \int_c^d (xy)^\alpha (f_1(x)f_2(y))^p dx\,dy \\ &= \left(\int_a^b x^\alpha f_1^p(x)dx\right)\left(\int_c^d y^\alpha f_2^p(y)dy\right), \end{aligned}$$

on a, le Corollaire suivant.

Corollaire 2.4. *Soient* $p > 1$, $\alpha > p-1$ *et* f *une fonction intégrable non-*

négative sur $(0,+\infty)$, *on a*

$$\widetilde{F}_2(x,y)=\left(\int_x^b f_1(t)dt\right)\left(\int_y^d f_2(s)ds\right),$$

alors

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_c^d (xy)^{\alpha-p}\widetilde{F}_2^p(x,y)dy\,dx\\ &\leq\left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^{2p}\left(\int_a^b x^{\alpha}f_1^p(x)dx\right)\left(\int_c^d y^{\alpha}f_2^p(y)dy\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.4.3 L'inégalité pondérée de Hardy

Pour présenter des inégalités intégrales à une seule variable, si on pose $f=f_1=f_2$, $x=y$, $a=c$ et $b=d$ dans le Corollaire 2.3, alors

$$\widetilde{F}_1(x,y)=\left(\int_a^x f_1(t)dt\right)\left(\int_c^y f_2(s)ds\right)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)^2=\left(\bar{F}_1(x)\right)^2,$$

où

$$\bar{F}_1(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

D'après l'inégalité (2.11), on déduit

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_c^d (xy)^{\alpha-p}\widetilde{F}_1^p(x,y)dy\,dx\\ &=\left[\int_a^b (x)^{\alpha-p}\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx\right]\left[\int_a^b (x)^{\alpha-p}\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx\right]\\ &=\left[\int_a^b (x)^{\alpha-p}\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx\right]^2=\left(\int_a^b (x)^{\alpha-p}(\bar{F}_1(x))^p dx\right)^2,\end{aligned}$$

d'autre part

$$\left(\int_a^b x^\alpha f_1^p(x)dx\right)\left(\int_c^d y^\alpha f_2^p(y)dy\right) = \left(\int_a^b x^\alpha f^p(x)dx\right)^2,$$

ainsi

$$\left(\int_a^b x^{\alpha-p}\bar{F}_1^p(x)dx\right)^2 \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p}\left(\int_a^b x^\alpha f^p(x)dx\right)^2,$$

par conséquent

$$\int_a^b x^{\alpha-p}\bar{F}_1^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b x^\alpha f^p(x)dx,$$

d'où, le Corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Soient $p > 1$, $\alpha < p-1$ et f une fonction intégrable non-négative sur $(0,+\infty)$, on a*

$$\bar{F}_1(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors

$$\int_a^b x^{\alpha-p}\bar{F}_1^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b x^\alpha f^p(x)dx. \tag{2.13}$$

On met $f = f_1 = f_2$, $x = y$, $a = c$ et $b = d$ dans le corollaire 2.4, on déduit

$$\widetilde{F}_2(x,y) = \left(\int_x^b f_1(t)dt\right)\left(\int_y^d f_2(s)ds\right) = \left(\int_x^b f(t)dt\right)^2 = (\bar{F}_2(x))^2,$$

où

$$\bar{F}_2(x) = \int_x^b f(t)dt.$$

D'après l'inégalité (2.12), on déduit

$$\int_a^b \int_c^d (xy)^{\alpha-p} \widetilde{F}_2^p(x,y)dy\,dx$$

$$= \left[\int_a^b (x)^{\alpha-p} \left(\int_x^b f(t)dt\right)^p dx\right] \left[\int_a^b (x)^{\alpha-p} \left(\int_x^b f(t)dt\right)^p dx\right]$$

$$= \left[\int_a^b (x)^{\alpha-p} \left(\int_x^b f(t)dt\right)^p dx\right]^2 = \left(\int_a^b (x)^{\alpha-p} (\bar{F}_2(x))^p dx\right)^2,$$

d'autre part

$$\left(\int_a^b x^\alpha f_1^p(x)dx\right)\left(\int_c^d y^\alpha f_2^p(y)dy\right) = \left(\int_a^b x^\alpha f^p(x)dx\right)^2,$$

par suite

$$\left(\int_a^b x^{\alpha-p} \bar{F}_2^p(x)dx\right)^2 \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^{2p} \left(\int_a^b x^\alpha f^p(x)dx\right)^2,$$

qui implique que

$$\int_a^b x^{\alpha-p} \bar{F}_2^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_a^b x^\alpha f^p(x)dx,$$

par conséquent, on obtient le Corollaire suivant.

Corollaire 2.6. *Soient $p > 1$, $\alpha > p-1$ et f une fonction intégrable non-négative sur $(0,+\infty)$, on a*

$$\bar{F}_2(x) = \int_x^b f(t)dt,$$

alors

$$\int_a^b x^{\alpha-p} \bar{F}_2^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-p+\alpha}\right)^p \int_a^b x^\alpha f^p(x)dx. \tag{2.14}$$

Chapitre 3

Quelques inégalités intégrales de type Hardy dépendant d'une fonction à deux variables

Dans ce chapitre, on donne d'une maniére assez détaillée sur quelques inégalités à double intégrales de type Hardy [2] pour des fonctions à deux variables qui sont intégrables non-négatives sur le domaine $\Delta = (0,a) \times (0,b)$, où $0 < a, b < +\infty$, en utilisant les opérateurs pondérés de type Pachepatte $S_3 := S_3^w f$ et $S_4 := S_4^w f$, définis par

$$S_3(x,y) = \frac{1}{W(x)W(y)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} w(t)w(s)f(t,s)\,ds\,dt,$$

et

$$S_4(x,y) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} f(t,s)\,ds\,dt,$$

avec

$$W(z) = \int_0^z w(r)dr, \qquad \text{pour } z \in (o, +\infty),$$

où w est une fonction de poids .

3.1 Introduction

Soit f une fonction mesurable non-négative sur $(0,+\infty)$, on a

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & \text{pour } m>1,\\[2ex] \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt, & \text{pour } m<1,\end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-m}F^p(x)\,dx \le \left(\frac{p}{|m-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-m}(x\,f(x))^p\,dx, \quad \text{pour } p>1. \quad (3.1)$$

On peut reécrire l'inégalité précédente (3.1) sous cette forme, on a

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & \text{pour } \alpha<p-1,\\[2ex] \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt, & \text{pour } \alpha>p-1,\end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty x^{\alpha-p}F^p(x)\,dx \le \left(\frac{p}{|p-1-\alpha|}\right)^p \int_0^\infty x^{\alpha}f^p(x)\,dx, \quad \text{pour } p>1. \quad (3.2)$$

En 1995, Pachepatte a présenté le Théorème suivant :
Soient f une fonction intégrable non-négative sur le domaine $\Delta=(0,a)\times(0,b)$, où a,b des constantes positives et r_1,r_2 deux fonctions continues positives sur $(0,+\infty)$,
pour tout $x,y\in(0,+\infty)$, α,β deux constantes vérifiant $\alpha>0$, $\beta>0$ et $p>1$, tel que

$$1+\frac{p\,x}{p-1}\frac{r_1'(x)}{r_1(x)}\ge\frac{1}{\alpha} \quad et \quad 1+\frac{p\,y}{p-1}\frac{r_2'(y)}{r_2(y)}\ge\frac{1}{\beta},$$

si F définie par

$$F(x,y)=\frac{1}{r_1(x)\,r_2(y)}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{r_1(s)\,r_2(t)}{st}f(s,t)\,dt\,ds,$$

alors

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{F(x,y)}{xy}\right)^p dy\,dx\leq(\alpha\beta)^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p}$$

$$\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{1}{xy\,r_1(x)\,r_2(y)}\left|r_1(x)\,r_2(y)f(x,y)-r_2\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2},y\right)+\right.\right. \tag{3.3}$$

$$\left.\left.-r_2\left(\frac{y}{2}\right)r_1(x)f\left(x,\frac{y}{2}\right)-r_1\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)\right|\right\}^p dy\,dx.$$

(i) on prend la convention $\frac{0}{0}=0$.
(ii) $\Delta=(0,a)\times(0,b)$.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, on donne quelques Lemmes qui seront utilisés pour la démonstration des résultats principaux .

Lemme 3.1. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ et p,m deux réels vérifiant $p>1$, $m>1$, on a*

$$S_3(x,y)=\frac{1}{W(x)W(y)}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y}w(t)w(s)f(t,s)\,ds\,dt,$$

et $G_2:=G_2^w f$ est un opérateur définie par

$$G_2(x,y)=\int_{\frac{x}{2}}^{x}w(t)f(t,y)\,dt-\frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)}\int_{\frac{x}{2}}^{x}w(t)f\left(t,\frac{y}{2}\right)\,dt.$$

Fixons $x>0$. Pour tout $\lambda \geq \dfrac{m-1}{p+m-1}$, l'inégalité

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)dy \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy, \tag{3.4}$$

est vérifiée si le côté gauche et le côté droit sont finis .

Démonstration : Soit $x>0$ fixé dans l'inégalité (3.4), on a

$$S_3(x,y) = \frac{1}{W(x)W(y)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} w(t)w(s)f(t,s)\, ds\, dt,$$

appliquons le Théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} S_3(x,y) &= \frac{1}{W(x)W(y)} \int_{\frac{y}{2}}^{y} w(s) \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,s)\, dt\right) ds \\ &= \frac{1}{W(y)} \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(s)}{W(x)} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,s)\, dt\right) ds. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (1.1) pour dériver S_3 par rapport à y, on déduit

$$S_3'(x,y) = \frac{\partial S_3}{\partial y}(x,y)$$

$$= -\frac{w(y)}{W^2(y)} \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(s)}{W(x)} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,s)\, dt\right) ds$$

$$+\frac{1}{W(y)} \left[\left(\frac{w(y)}{W(x)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,y)dt\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{w(\frac{y}{2})}{W(x)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f\left(t,\frac{y}{2}\right) dt\right)\right],$$

d'où

$$S_3'(x,y)$$

$$= -\frac{w(y)}{W(y)}\left(\frac{1}{W(y)}\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{w(s)}{W(x)}\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,s)\,dt\right)\,ds$$

$$+\frac{1}{W(y)}\left[\left(\frac{w(y)}{W(x)}\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,y)\,dt\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{w(\frac{y}{2})w(y)}{W(x)w(y)}\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f\left(t,\frac{y}{2}\right)\,dt\right)\right]$$

$$= -\frac{w(y)}{W(y)}\left(\frac{1}{W(y)}\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{w(s)}{W(x)}\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,s)\,dt\right)ds$$

$$+\frac{w(y)}{W(x)W(y)}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f(t,y)\,dt-\frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)}\int_{\frac{x}{2}}^{x} w(t)f\left(t,\frac{y}{2}\right)dt\right)$$

$$= \frac{w(y)}{W(x)W(y)}G_2(x,y)-\frac{w(y)}{W(y)}S_3(x,y).$$

On note par $I_3(x)$ (une expression en fonction de x) le coté gauche de l'inégalité (3.4)

$$I_3(x)=\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}S_3^p(x,y)\,dy,$$

en intègrant $I_3(x)$ par parties

$$U(y)=S_3^p(x,y)\implies U'(y)=p\,S_3'(x,y)S_3^{p-1}(x,y)$$

$$\implies U'(y)=p\left(\frac{w(y)}{W(x)W(y)}G_2(x,y)-\frac{w(y)}{W(y)}S_3(x,y)\right)S_3^{p-1}(x,y),$$

$$V'(y)=\frac{w(y)}{W^m(y)}\implies V(y)=-\frac{1}{(m-1)W^{m-1}(y)}.$$

Suivant la convention $\dfrac{0}{0} = 0$, on trouve

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)dy$$

$$= \left[-\frac{S_3^p(x,y)}{(m-1)W^{m-1}(y)} \right]_0^b + \frac{p}{m-1}$$

$$\times \int_0^b \frac{1}{W^{m-1}(y)} \left(\frac{w(y)}{W(y)} \frac{G_2(x,y)}{W(x)} - \frac{w(y)}{W(y)} S_3(x,y) \right) S_3^{p-1}(x,y)\, dy$$

$$= \left[-\frac{S_3^p(x,y)}{(m-1)W^{m-1}(y)} \right]_0^b + \frac{p}{m-1}$$

$$\times \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \frac{G_2(x,y)}{W(x)} S_3^{p-1}(x,y)\, dy - \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy \right)$$

$$= \left(-\frac{S_3^p(x,b)}{(m-1)W^{m-1}(b)} + 0 \right) - \frac{p}{m-1} \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy$$

$$+ \frac{p}{m-1} \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \frac{G_2(x,y)}{W(x)} S_3^{p-1}(x,y)\, dy,$$

alors

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy + \frac{p}{m-1} \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy$$

$$= \left(-\frac{S_3^p(x,b)}{(m-1)W^{m-1}(b)} \right) + \frac{p}{m-1} \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \frac{G_2(x,y)}{W(x)} S_3^{p-1}(x,y)\, dy,$$

par suite

$$\frac{p+m-1}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}S_3^p(x,y)\,dy$$

$$=\left(-\frac{S_3^p(x,b)}{(m-1)W^{m-1}(b)}\right)+\frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}\frac{G_2(x,y)}{W(x)}S_3^{p-1}(x,y)\,dy.$$

Puisque $m>1$, alors $m-1>0$ et $S_3(x,b)\geq 0$ (car w une fonction de poids et f une fonction non-négative), alors

$$-\frac{S_3^p(x,b)}{(m-1)W^{m-1}(b)}\leq 0,$$

donc

$$\frac{p+m-1}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}S_3^p(x,y)\,dy\leq \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}\frac{G_2(x,y)}{W(x)}S_3^{p-1}(x,y)\,dy,$$

on a $\lambda\geq \dfrac{m-1}{p+m-1}$ par hypothèse, d'où $\dfrac{1}{\lambda}\leq\dfrac{p+m-1}{m-1}$, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}S_3^p(x,y)\,dy &\leq \frac{p+m-1}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}S_3^p(x,y)\,dy\\ &\leq \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}\frac{G_2(x,y)}{W(x)}S_3^{p-1}(x,y)\,dy,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}S_3^p(x,y)\,dy \leq \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)}\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}S_3^{p-1}(x,y)\,dy.$$

On a

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)dy$$

$$\leq \frac{\lambda p}{m-1} \int_0^b \left(\frac{w(y)}{W^m(y)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} \frac{|G_2(x,y)|}{W(x)} S_3^{p-1}(x,y)\, dy$$

$$= \frac{\lambda p}{m-1} \int_0^b \left[\left(\frac{w(y)}{W^m(y)}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right] \left[\left(\frac{w(y)}{W^m(y)}\right)^{\frac{1}{p'}} S_3^{p-1}(x,y)\right] dy.$$

En utilisant l'inégalité classique de Hölder, on obtient

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy$$

$$\leq \frac{\lambda p}{m-1} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^{(p-1)p'}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \frac{\lambda p}{m-1} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy\right)^{\frac{1}{p'}},$$

pour $p > 1$, on a

$$\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy\right) \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$= \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy\right) \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy\right)^{p-1}.$$

On a $p-1 > 0$ et $I_3(x) = \displaystyle\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy \geq 0$, supposons $I_3(x) > 0$, alors

$$\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\,dy\right)^{p-(p-1)} \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy,$$

ainsi

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\,dy \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy,$$

l'inégalité précédente reste vraie pour $I_3(x) = 0$. □

Lemme 3.2. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, $p > 1$, $m > 1$ et*

$$G_2(x,y) = \int_{\frac{x}{2}}^x w(t) f(t,y)\,dt - \frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)} \int_{\frac{x}{2}}^x w(t) f\left(t, \frac{y}{2}\right) dt.$$

Soit $H_2 := H_2^w f$ un opérateur défini par

$$H_2(x,y) = f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})}{2w(x)} f(\tfrac{x}{2}, y) - \frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)} f(x, \tfrac{y}{2}) + \frac{w(\frac{x}{2}) w(\frac{y}{2}))}{2w(x) 2w(y)} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}).$$

Fixons $y > 0$. Pour tout $\lambda \geq \dfrac{m-1}{p+m-1}$, l'inégalité

$$\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p\,dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} |H_2(x,y)|^p dx, \qquad (3.5)$$

est vérifieé si les deux côtés de (3.5) sont finis.

Démonstration : On a

$$|G_2(x,y)| = G_2(x,y) \times Sng\, G_2(x,y).$$

Fixons $y > 0$ dans l'inégalité (3.5), on dérive G_2 par rapport à x en utilisant la formule (1.1), on trouve

$$
\begin{aligned}
G_2'(x,y) &= \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) \\
&= w(x)f(x,y) - \frac{1}{2}w(\tfrac{x}{2})f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)}\left(w(x)f(x,\tfrac{y}{2}) - \frac{1}{2}w(\tfrac{x}{2})f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2})\right) \\
&= w(x)f(x,y) - \frac{1}{2}w(\tfrac{x}{2})f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})w(x)}{2w(y)}f(x,\tfrac{y}{2}) + \frac{w(\frac{y}{2})w(\frac{x}{2})}{4w(y)}f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}) \\
&= w(x)\left(f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})}{2w(x)}f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)}f(x,\tfrac{y}{2}) + \frac{w(\frac{y}{2})w(\frac{x}{2})}{2w(y)2w(x)}f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2})\right) \\
&= w(x)H_2(x,y).
\end{aligned}
$$

On note par $J_3(y)$ (l'expression en fonction de y) le côté gauche de l'inégalité (3.5)

$$
J_3(y) = \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)}|G_2(x,y)|^p\,dx,
$$

on intègre par parties

$$
\begin{aligned}
U(x) = |G_2(x,y)|^p \quad &\Longrightarrow U'(x) = p\,|G_2(x,y)|'|G_2(x,y)|^{p-1} \\
&\Longrightarrow U'(x) = p\,(G_2(x,y)Sgn\,G_2(x,y))'|G_2(x,y)|^{p-1} \\
&\Longrightarrow U'(x) = p\,G_2'(x,y)Sgn\,G_2(x,y)\,|G_2(x,y)|^{p-1} \\
&\Longrightarrow U'(x) = p\,w(x)H_2(x,y)Sgn\,G_2(x,y)|G_2(x,y)|^{p-1},
\end{aligned}
$$

$$
V'(x) = \frac{w(x)}{W^{m-p}(x)} \quad \Longrightarrow V(x) = -\frac{1}{(m+p-1)W^{m+p-1}(x)},
$$

alors

$$\begin{aligned}
J_3(y) &= \left[-\frac{|G_2^p(x,y)|}{(m+p-1)W^{m+p-1}(x)}\right]_0^a + \frac{p}{m+p-1} \\
&\times \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p-1}(x)} H_2(x,y) Sgn\, G_2(x,y) |G_2(x,y)|^{p-1}\, dx \\
&= \left[-\frac{|G_2^p(x,y)|}{(m+p-1)W^{m+p-1}(x)}\right]_0^a + \frac{p}{m+p-1} \\
&\times \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p-1}(x)W(x)} W(x) H_2(x,y) Sgn\, G_2(x,y) |G_2(x,y)|^{p-1}\, dx \\
&= \left(-\frac{|G_2^p(a,y)|}{(m+p-1)W^{m+p-1}(a)} + 0\right) + \frac{p}{m+p-1} \\
&\times \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} W(x) H_2(x,y) Sgn\, G_2(x,y) |G_2(x,y)|^{p-1}\, dx.
\end{aligned}$$

Puisque $m > 1, p > 1$, alors $m + p - 1 > 0$ et $|G_2(a, y)| \geq 0$, alors

$$-\frac{|G_2^p(a,y)|}{(m+p-1)W^{m+p-1}(a)} \leq 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
J_3(y) &\leq \frac{p}{m+p-1} \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} W(x) H_2(x,y) Sgn\, G_2(x,y) |G_2(x,y)|^{p-1}\, dx \\
&\leq \frac{p}{m+p-1} \int_0^a \left| \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} W(x) H_2(x,y) Sgn\, G_2(x,y) |G_2(x,y)|^{p-1} \right| dx \\
&= \frac{p}{m+p-1} \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} W(x) |H_2(x,y)|\, |G_2(x,y)|^{p-1}\, dx.
\end{aligned}$$

Pour $p > 1$ et $m - 1 > 0$, alors

$$\lambda \geq \frac{m-1}{p+m-1} \Longrightarrow \frac{p\lambda}{m-1} \geq \frac{p}{m+p-1},$$

par suit

$$\begin{aligned} J_3(y) &\leq \frac{\lambda p}{m-1} \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} W(x)|H_2(x,y)|\,|G_2(x,y)|^{p-1}\,dx \\ &= \frac{\lambda p}{m-1} \int_0^a \left(\frac{w(x)}{W^{m+p}(x)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} W(x)|H_2(x,y)|\,|G_2(x,y)|^{p-1}\,dx, \end{aligned}$$

donc

$$J_3(y)$$

$$\leq \frac{\lambda p}{m-1} \int_0^a \left[\left(\frac{w(x)}{W^{m+p}(x)}\right)^{\frac{1}{p}} W(x)|H_2(x,y)|\right] \left[\left(\frac{w(x)}{W^{m+p}(x)}\right)^{\frac{1}{p'}} |G_2(x,y)|^{p-1}\right] dx.$$

En utilisant l'inégalité classique de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} J_3(y) &\leq \frac{\lambda p}{m-1} \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} (W(x)|H_2(x,y)|)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^{(p-1)p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{\lambda p}{m-1} \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m}(x)} |H_2(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

pour $p > 1$, on a

$$\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p \, dx\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} |H_2(x,y)|^p \, dx\right)$$

$$\times \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p \, dx\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$= \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} |H_2(x,y)|^p \, dx\right)$$

$$\times \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p \, dx\right)^{p-1}.$$

On a $p - 1 > 0$ et $J_3(y) = \displaystyle\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p \, dx \geq 0$, supposons $J_3(y) > 0$, alors

$$\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p \, dx\right)^{p-(p-1)}$$

$$\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} |H_2(x,y)|^p \, dx,$$

par conséquent

$$\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p \, dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} H_2(x,y)|^p \, dx,$$

l'inégalité précédente reste vrais pour $J_3(y) = 0$. $\square$

Lemme 3.3. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ et $p > 1$, on a*

$$S_4(x,y) = \int_{\frac{x}{2}}^x \int_{\frac{y}{2}}^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} f(t,s) \, ds \, dt,$$

et $G_3 := G_3^w f$ *un opérateur définie par*

$$G_3(x,y) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f(t,y)dt - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2w(y)W(\frac{y}{2})} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f\left(t, \frac{y}{2}\right) dt.$$

On fixe $x > 0$*. Pour tout* $\alpha < p-1$*, l'inégalité*

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y)dy \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} |G_3(x,y)|^p \, dy, \quad (3.6)$$

est vérifie si le côté gauche et le côté droit sont finis .

Démonstration : Soit $x > 0$ fixé dans l'inégalité (3.6), on a

$$\begin{aligned} S_4(x,y) &= \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} f(t,s) \, ds \, dt \\ &= \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(s)}{W(s)} f(t,s) \, ds \right) dt, \end{aligned}$$

appliquons le Théorème de Fubini, on obtient

$$S_4(x,y) = \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(s)}{W(s)} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f(t,s) \, dt \right) ds,$$

on utilise la formule (1.1) pour calculé la dérivée de S_2 par rapport à y, on trouve

$$\begin{aligned} S_4'(x,y) &= \frac{\partial S_4}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{w(y)}{W(y)} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f(t,y) \, dt \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{w(\frac{y}{2})}{W(\frac{y}{2})} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f(t,y) \, dt \right) \\ &= \frac{w(y)}{W(y)} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f(t,y) \, dt - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2w(y)W(\frac{y}{2})} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{w(t)}{W(t)} f(t,y) \, dt \right), \end{aligned}$$

d'où

$$S_4'(x,y) \;=\frac{w(y)}{W(y)}G_3(x,y).$$

On note par $I_4(x)$ le côté gauche de l'inégalité (3.6) (une expression en fonction de x)

$$I_4(x)=\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_4^p(x,y)\,dy,$$

on intègre $I_4(x)$ par partie, on a

$$U(y)=S_4^p(x,y) \qquad \Longrightarrow U'(y)=p\,S_4'(x,y)S_4^{p-1}(x,y)$$

$$\Longrightarrow U'(y)=p\left(\frac{w(y)}{W(y)}G_3(x,y)\right)S_4^{p-1}(x,y),$$

$$V'(y)=\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \quad \Longrightarrow V(y)=-\frac{1}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(y)},$$

alors

$$\begin{aligned} I_4(x) \;&=\left[-\frac{S_4^p(x,y)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(y)}\right]_0^b+\frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times\int_0^b \frac{w(y)}{W(y)W^{p-\alpha-1}(y)}G_3(x,y)S_4^{p-1}(x,y)\,dy \\ &=\left(-\frac{S_4^p(x,b)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(b)}+0\right)+\frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}G_3(x,y)S_4^{p-1}(x,y)\,dy, \end{aligned}$$

puisque $\alpha<p-1$, alors $p-\alpha-1>0$ et $S_4(x,y)\geq 0$, alors

$$-\frac{S_4^p(x,b)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(b)}\leq 0,$$

par suite

$$\begin{aligned}
I_4(x) &\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}G_3(x,y)S_4^{p-1}(x,y)\,dy \\
&\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \left|\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}G_3(x,y)S_4^{p-1}(x,y)\right|\,dy \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}|G_3(x,y)|S_4^{p-1}(x,y)\,dy \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}|G_3(x,y)|S_4^{p-1}(x,y)\,dy \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \left[\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p}}|G_3(x,y)|\right]\left[\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}\right)^{\frac{1}{p'}}S_4^{p-1}(x,y)\right]dy.
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité classique de Hölder, alors

$$\begin{aligned}
I_4(x) &\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}|G_3(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_3^{(p-1)p'}(x,y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}|G_3(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_4^{p}(x,y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

pour $p > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_4^p(x,y)\,dy\right)^p \\
&\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}|G_3(x,y)|^p\,dy\right)\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_4^p(x,y)\,dy\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}|G_3(x,y)|^p\,dy\right)\left(\frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)}S_4^p(x,y)\,dy\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

On a $p-1>0$ et $I_4(x)=\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y)\,dy \geq 0$. Supposons que $I_4(x)>0$, on conclut

$$\left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y)\,dy\right)^{p-(p-1)} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} |G_3(x,y)|^p\,dy,$$

par suite

$$\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y), dy \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} |G_3(x,y)|^p\,dy,$$

l'inégalité précédente reste vraie pour $I_4(x)=0$. □

Lemme 3.4. *Soient f une fonction intégrable non négative sur le domaine Δ, $p>1$ et*

$$G_3(x,y)=\int_{\frac{x}{2}}^x \frac{w(t)}{W(t)} f(t,y)dt - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2w(y)W(\frac{y}{2})} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{w(t)}{W(t)} f(t,\frac{y}{2})\,dt,$$

on a $H_3 := H_3^w f$ un opérateur définie par

$$\begin{aligned} H_3(x,y) \;&= f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})W(x)}{2W(\frac{x}{2})w(x)} f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2W(\frac{y}{2})w(y)} f(x,\tfrac{y}{2}) \\ &+ \frac{w(\frac{x}{2})W(x)w(\frac{y}{2})W(y)}{2W(\frac{x}{2})w(x)2W(\frac{y}{2})w(y)} f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}). \end{aligned}$$

On fixe $y>0$. Pour tout $\alpha<p-1$, l'inégalité

$$\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} |G_3(x,y)|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} |H_3(x,y)|^p\,dx, \tag{3.7}$$

est vérifiée si les deux côtés sont finis .

Démonstration : Soit $y>0$ fixé dans l'inégalité (3.7), on a

$$|G_3(x,y)| = G_3(x,y) \times Sng\, G_3(x,y).$$

On dérive G_3 par rapport à x en utilisant la formule (1.1), on trouve

$$\begin{aligned} G_3'(x,y) &= \frac{\partial G_3}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{w(x)}{W(x)}f(x,y) - \frac{1}{2}\frac{w(\frac{x}{2})}{W(\frac{x}{2})}f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2w(y)W(\frac{y}{2})} \\ &\times \left(\frac{w(x)}{W(x)}f(x,\tfrac{y}{2}) - \frac{w(\frac{x}{2})}{2W(\frac{x}{2})}f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2})\right) \\ &= \frac{w(x)}{W(x)}\left[f(x,y) - \frac{W(x)w(\frac{x}{2})}{2W(\frac{x}{2})w(x)}f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2w(y)W(\frac{y}{2})}f(x,\tfrac{y}{2}) + \right. \\ &\left. \frac{w(\frac{x}{2})w(\frac{y}{2})W(y)W(x)}{2W(\frac{x}{2})w(x)2W(\frac{y}{2})w(y)}f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2})\right], \end{aligned}$$

d'où

$$G_3'(x,y) = \frac{w(x)}{W(x)}H_3(x,y).$$

On note par $J_4(y)$ (l'expression en fonction de y) le côté gauche de l'inégalité (3.7)

$$J_4(y) = \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\,dx,$$

on intègre par parties

$$U(x)=|G_3(x,y)|^p \Longrightarrow U'(x)=p\,|G_3(x,y)|'|G_3(x,y)|^{p-1}$$

$$\Longrightarrow U'(x)=p\,(G_3(x,y)Sng\,G_3(x,y))'|G_3(x,y)|^{p-1}$$

$$\Longrightarrow U'(x)=p\,G_3'(x,y)\,Sng\,G_3(x,y)|G_3(x,y)|^{p-1}$$

$$\Longrightarrow U'(x)=p\,\frac{w(x)}{W(x)}H_3(x,y)Sng\,G_3(x,y)|G_3(x,y)|^{p-1},$$

$$V'(x)=\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \Longrightarrow V(x)=-\frac{1}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)},$$

alors

$$\begin{aligned}
J_4(y) &= \left[-\frac{|G_3(x,y)|^p}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)}\right]_0^a+\frac{p}{p-\alpha-1}\\
&\times\int_0^a \frac{w(x)}{W(x)W^{p-\alpha-1}(x)}H_3(x,y)Sng\,G_3(x,y)|G_3(x,y)|^{p-1}dx\\
&= \left(-\frac{|G_3(a,y)|^p}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(a)}+0\right)+\frac{p}{p-\alpha-1}\\
&\times\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}H_3(x,y)Sng\,G_3(x,y)|G_3(x,y)|^{p-1}\,dx.
\end{aligned}$$

Puisque $p-\alpha>1$, alors $p-\alpha-1>0$ et $|G_3(x,y)|\geq 0$, donc

$$-\frac{|G_3(a,y)|^p}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(a)}\leq 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
J_4(y) &\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_3(x,y) Sng\, G_3(x,y)|G_3(x,y)|^{p-1}\,dx \\
&\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^a \left|\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} H_3(x,y) Sng\, G_3(x,y)|G_3(x,y)|^{p-1}\right|\,dx \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} |H_3(x,y)||G_3(x,y)|^{p-1}\,dx \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^a \left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} |H_3(x,y)|\,|G_3(x,y)|^{p-1}\,dx \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^a \left[\left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p}} |H_3(x,y)|\right]\left[\left(\frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\right)^{\frac{1}{p'}} |G_3(x,y)|^{p-1}\right] dx,
\end{aligned}$$

suivant l'inégalité classique de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
J_4(y) &\leq \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|H_3(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^{(p-1)p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|H_3(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

pour $p > 1$, on trouve

$$\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\,dx\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|H_3(x,y)|^p\,dx\right)\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|H_3(x,y)|^p\,dx\right)\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\,dx\right)^{p-1}.$$

On a $p-1>0$ et $J_4(y) = \displaystyle\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\,dx \geq 0$. Supposons que $J_4(y) > 0$, on conclut

$$\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\right)^{p-(p-1)} dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|H_3(x,y)|^p\,dx,$$

par suite

$$\left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_3(x,y)|^p\,dx\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|H_3(x,y)|^p\,dx,$$

l'inégalité précédente reste vraie pour $J_4(y) = 0$. $\square$

3.3 Résultats principaux

Théorème 3.1. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur Δ, $p > 1$, $m > 1$ et*

$$S_3(x,y) = \frac{1}{W(x)W(y)}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y} w(t)w(s)f(t,s)\,ds\,dt,$$

$$H_2(x,y) = f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})}{2w(x)}f\left(\frac{x}{2},y\right) - \frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)}f\left(x,\frac{y}{2}\right) + \frac{w(\frac{x}{2})w(\frac{y}{2}))}{2w(x)2w(y)}f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right).$$

Si $\lambda \geq \dfrac{m-1}{p+m-1}$, *alors l'inégalité*

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^m(x)W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy\, dx \\
&\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^m(x)W^m(y)} |H_2(x,y)|^p\, dy\, dx,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

est vérifiée si les deux côtés sont finis .

Démonstration :

Pour la démonstration de ce Théorème, on utilise le Lemme 3.1 et le Lemme 3.2. On note par Lhs_3 le côté gauche de l'inégalité (3.8)

$$\begin{aligned}
Lhs_3 &= \int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^m(x)W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} S_3^p(x,y)\, dy \right) dx,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
Lhs_3 &\leq \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} \left[\left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy \right] dx \\
&= \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\frac{|G_2(x,y)|}{W(x)}\right)^p dy \right) dx \\
&= \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} |G_2(x,y)|^p\, dy \right) dx,
\end{aligned}$$

appliquons le Théorème de Fubini, on trouve

$$Lhs_3 \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{m+p}(x)} |G_2(x,y)|^p\, dx \right) dy.$$

Suivant l'inégalité (3.5), on résulte

$$\begin{aligned} Lhs_3 &\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left[\left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} |H_2(x,y)|^p \, dx\right] dy \\ &= \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{2p} \int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} |H_2(x,y)|^p \, dx\right) dy, \end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} Lhs_3 &\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{2p} \int_0^a \frac{w(x)}{W^m(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^m(y)} |H_2(x,y)|^p \, dy\right) dx \\ &= \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^m(x)W^m(y)} |H_2(x,y)|^p \, dy \, dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. $\square$

Théorème 3.2. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ, $p > 1$ et*

$$S_4(x,y) = \int_{\frac{x}{2}}^x \int_{\frac{y}{2}}^y \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} f(t,s) \, ds \, dt,$$

$$\begin{aligned} H_3(x,y) &= f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})W(x)}{2W(\frac{x}{2})w(x)} f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2W(\frac{y}{2})w(y)} f(x,\tfrac{y}{2}) \\ &\quad + \frac{w(\frac{x}{2})W(x)w(\frac{y}{2})W(y)}{2W(\frac{x}{2})w(x)2W(\frac{y}{2})w(y)} f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}). \end{aligned}$$

Si $\alpha < p-1$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} &\int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y) \, dy \, dx \\ &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} |H_3(x,y)|^p \, dy \, dx, \end{aligned} \tag{3.9}$$

est vérifiée si les deux côtés de l'inégalité sont finis .

Démonstration :

Pour la démonstration de ce Théorème, on utilise le Lemme 3.3 et le Lemme 3.4. On note par Lhs_4 le membre gauche de l'inégalité (3.9)

$$\begin{aligned} Lhs_4 &= \int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y)\, dy \right) dx, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} Lhs_4 &\leq \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left[\left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} |G_3(x,y)|^p\, dy \right] dx \\ &= \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} |G_3(x,y)|^p\, dy \right) dx, \end{aligned}$$

appliquons le Théorème de Fubini, d'où

$$Lhs_4 \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} |G_3(x,y)|^p\, dx \right) dy.$$

D'après l'inégalité (3.7), on déduit

$$\begin{aligned} Lhs_4 &\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left[\left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} |H_3(x,y)|^p\, dx \right] dy \\ &= \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^{2p} \int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} \left(\int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} |H_3(x,y)|^p\, dx \right) dy, \end{aligned}$$

on utilise le Théorème de Fubini, on conclut

$$Lhs_4 \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_0^a \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \left(\int_0^b \frac{w(y)}{W^{p-\alpha}(y)} |H_3(x,y)|^p \, dy\right) dx$$

$$= \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} |H_3(x,y)|^p \, dy \, dx,$$

d'ou le résultat voulu . $\square$

3.4 Application

Dans cette section, en utilisant le Théorème 3.1 et le Théorème 3.2, ondéduit des cas particuliers des inégalités de type-Hardy à double intégrales sous des Corollaires selon le choix des fonctions w et f .

3.4.1 Généralisation des inégalités à doubles intégrales de type Hardy

Posons $w(z) = 1$ dans le Théorème 3.1, on obtient

$$S_3(x,y) = \frac{1}{W(x)W(y)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} w(t)w(s)f(t,s) \, ds \, dt$$

$$= \frac{1}{xy} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(t,s) \, ds \, dt = F_3(x,y),$$

$$H_2(x,y) = f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})}{2w(x)} f(\tfrac{x}{2}, y) - \frac{w(\frac{y}{2})}{2w(y)} f(x, \tfrac{y}{2}) + \frac{w(\frac{x}{2})w(\frac{y}{2}))}{2w(x)2w(y)} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2})$$

$$= f(x,y) - \frac{1}{2} f(\tfrac{x}{2}, y) - \frac{1}{2} f(x, \tfrac{y}{2}) + \frac{1}{4} f(\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2}) = h_2(x,y),$$

et

$$\int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^m(x)W^m(y)} S_3^p(x,y) \, dy \, dx = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{(xy)^m} F_3^p(x,y) \, dy \, dx,$$

par suite

$$\int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^m(x)W^m(y)} |H_2(x,y)|^p \, dy \, dx = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{(xy)^m} |h_2(x,y)|^p \, dy \, dx,$$

d'où, on a le Corollaire suivant.

Corollaire 3.1. *Soient $p > 1$, $m > 1$, f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ et*

$$F_3(x,y) = \frac{1}{xy} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(t,s) \, ds \, dt,$$

$$h_2(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}, y\right) - \frac{1}{2} f\left(x, \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Si $\lambda \geq \dfrac{m-1}{p+m-1}$, alors

$$\int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} F_3^p(x,y) dy \, dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} |h_2(x,y)|^p \, dy \, dx, \tag{3.10}$$

est vérifier si le côté gauche et le côté droit de l'inégalité sont finis.

Remarque 3.1. *Si on prend $\lambda = 1$ dans le Corollaire précédent, on obtient l'inégalité intégrale suivante de type-Pachepatte.*

$$\int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} F_3^p(x,y) \, dy \, dx \leq \left(\frac{p}{m-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} |h_2(x,y)|^p \, dy \, dx.$$

Pour le deuxième Corollaire, on pose $w(z) = 1$ et remplaçons $f(x,y)$ par $xyf(x,y)$ dans le Théorème 3.2, on obtient

$$\begin{aligned} S_4(x,y) &= \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{w(t)w(s)}{W(t)W(s)} f(t,s) \, ds \, dt \\ &= \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(t,s) \, ds \, dt = F_4(x,y), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_3(x,y) &= f(x,y) - \frac{w(\frac{x}{2})W(x)}{2W(\frac{x}{2})w(x)} f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{w(\frac{y}{2})W(y)}{2W(\frac{y}{2})w(y)} f(x,\tfrac{y}{2}) \\
&+ \frac{w(\frac{x}{2})W(x)w(\frac{y}{2})W(y)}{2W(\frac{x}{2})w(x)2W(\frac{y}{2})w(y)} f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}) \\
&= xy\, f(x,y) - \tfrac{xy}{2} f(\tfrac{x}{2},y) - \tfrac{xy}{2} f(x,\tfrac{y}{2}) + \tfrac{xy}{4} f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}) \\
&= (xy)\left(f(x,y) - \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{x}{2},y\right) - \tfrac{1}{2} f\left(x,\tfrac{y}{2}\right) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}\right)\right) \\
&= (xy) h_2(x,y),
\end{aligned}
$$

$$\int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} S_4^p(x,y)\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{(xy)^{p-\alpha}} F_4^p(x,y)\, dy\, dx$$

et

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a \int_0^b \frac{w(x)w(y)}{W^{p-\alpha}(x)W^{p-\alpha}(y)} |H_3(x,y)|^p\, dy\, dx \\
&= \int_0^a \int_0^b (xy)^{\alpha-p} |(xy)h_2(x,y)|^p\, dy\, dx \\
&= \int_0^a \int_0^b (xy)^{\alpha} |h_2(x,y)|^p\, dy\, dx.
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.2. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur le domaine Δ et $p > 1$, on a*

$$F_4(x,y) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(t,s)\, ds\, dt,$$

et

$$h_2(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2},y\right) - \frac{1}{2} f\left(x,\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right).$$

Si $\alpha < p-1$, alors

$$\int_0^a \int_0^b (xy)^{\alpha-p} F_4^p(x,y)\,dy\,dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p} \int_0^a \int_0^b (xy)^{\alpha} |h_2(x,y)|^p\,dy\,dx, \tag{3.11}$$

est vérifier si le côté gauche et le côté droit de l'inégalité sont finis.

3.4.2 Fonction avec deux variables indépendantes

Les résultats suivants sont des cas spéciaux du Corollaire 3.1 et le Corollaire 3.2 respectivement.

Mettant $f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$ dans le Corollaire 3.1, où f_1, f_2 sont deux fonctions intégrables non-négatives sur $(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned}
h_2(x,y) = \ & f(x,y) - \frac{1}{2}f(\tfrac{x}{2},y) - \frac{1}{2}f(x,\tfrac{y}{2}) + \frac{1}{4}f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}) \\
& = f_1(x)f_2(y) - \frac{1}{2}f_1(\tfrac{x}{2})f_2(y) - \frac{1}{2}f_1(x)f_2(\tfrac{y}{2}) + \frac{1}{4}f_1(\tfrac{x}{2})f_2(\tfrac{y}{2}) \\
& = f_2(y)\left(f_1(x) - \frac{1}{2}f_1(\tfrac{x}{2})\right) - \frac{1}{2}f_2(\tfrac{y}{2})\left(f_1(x) - \frac{1}{2}f_1(\tfrac{x}{2})\right) \\
& = \left(f_1(x) - \frac{1}{2}f_1(\tfrac{x}{2})\right)\left(f_2(y) - \frac{1}{2}f_2(\tfrac{y}{2})\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(x,y) \ &= \frac{1}{xy}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(t,s)\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{xy}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_1(t)f_2(s)\,ds\,dt \\
&= \left(\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{y}\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} F_3^p(x,y) dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} \left[\left(\frac{1}{x} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\, dt \right) \left(\frac{1}{y} \int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\, ds \right) \right]^p dy\, dx,$$

ainsi

$$\int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} |h_2(x,y)|^p \, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} \left| \left(f_1(x) - \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) \right) \left(f_2(y) - \frac{1}{2} f_2\left(\frac{y}{2}\right) \right) \right|^p dy\, dx$$

$$= \left(\int_0^a x^{-m} \left| f_1(x) - \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) \right|^p dx \right) \left(\int_0^b y^{-m} \left| f_2(y) - \frac{1}{2} f_2\left(\frac{y}{2}\right) \right|^p dy \right).$$

Corollaire 3.3. *Soient f_1, f_2 deux fonctions intégrables non-négatives sur $(0,+\infty)$, $p > 1$, $m > 1$ et*

$$\widetilde{F}_3(x,y) = \left(\frac{1}{x} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\, dt \right) \left(\frac{1}{y} \int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\, ds \right).$$

Si $\lambda \geq \dfrac{m-1}{p+m-1}$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} \widetilde{F}_3^p(x,y)\, dy\, dx \ &\leq \left(\frac{\lambda p}{m-1} \right)^{2p} \left(\int_0^a x^{-m} \left| f_1(x) - \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) \right|^p dx \right) \\ &\quad \times \left(\int_0^b y^{-m} \left| f_2(y) - \frac{1}{2} f_2\left(\frac{y}{2}\right) \right|^p dy \right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

est vérifier si le côté gauche et le côté droit de l'inégalité sont finis.

Mettant $f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$ dans le Corollaire 3.2, où f_1, f_2 sont deux fonctions intégrables non-négatives sur $(0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned}(xy)h_2(x,y) &= (xy)(f(x,y) - \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2},y) - \tfrac{1}{2}f(x,\tfrac{y}{2}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}))\\ &= (xy)\left(f_1(x) - \frac{1}{2}f_1(\tfrac{x}{2})\right)\left(f_2(y) - \frac{1}{2}f_2(\tfrac{y}{2})\right),\\ F_4(x,y) &= \int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(t,s)\,ds\,dt\\ &= \int_{\frac{x}{2}}^{x}\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_1(t)f_2(s)\,ds\,dt\\ &= \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\,dt\right)\left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\,ds\right) = \widetilde{F}_4(x,y),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b (xy)^{\alpha-p}F_4^p(x,y)\,dy\,dx\\ &= \int_0^a\int_0^b (xy)^{\alpha-p}\left[\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\,dt\right)\left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\,ds\right)\right]^p dy\,dx,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b (xy)^{\alpha}|h_2(x,y)|^p\,dy\,dx\\ &= \int_0^a\int_0^b (xy)^{\alpha-p}\left|(xy)\left(f_1(x) - \frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(f_2(y) - \frac{1}{2}f_2\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right|^p dy\,dx\\ &= \int_0^a\int_0^b (xy)^{\alpha}\left|\left(f_1(x) - \frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(f_2(y) - \frac{1}{2}f_2\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right|^p dy\,dx\\ &= \left(\int_0^a x^{\alpha}\left|f_1(x) - \frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)\left(\int_0^b y^{\alpha}\left|f_2(y) - \frac{1}{2}f_2\left(\frac{y}{2}\right)\right|^p dy\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a le Corollaire suivant

Corollaire 3.4. *Soient* $f_1,\ f_2$ *deux fonctions intégrables non-négatives sur* $(0,+\infty)$, $p>1$ *et*

$$\widetilde{F}_4(x,y)=\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\,dt\right)\left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\,ds\right),$$

si $\alpha<p-1$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_0^a\int_0^b (xy)^{\alpha-p}\widetilde{F}_4^p(x,y)\,dy\,dx \leq\ & \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p}\left(\int_0^a x^{\alpha}\left|f_1(x)-\frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)\\ & \times\left(\int_0^b y^{\alpha}\left|f_2(y)-\frac{1}{2}f_2\left(\frac{y}{2}\right)\right|^p dy\right),\end{aligned} \tag{3.13}$$

est vérifier si le côté gauche et le côté droit de l'inégalité sont finis.

3.4.3 L'inégalité intégrale pondérée de type-Hardy

Maintenant on présente des inégalités intégrales à une seule variable, si on choisi $f=f_1=f_2$, $x=y$ et $a=b$ dans le Corollaire 3.3, on obtient

$$\widetilde{F}_3(x,y) = \left(\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f_1(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{y}\int_{\frac{y}{2}}^{y} f_2(s)\,ds\right)=\left(\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt\right)^2=F^2(x),$$

où

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^a\int_0^b (xy)^{-m}\widetilde{F}_3^p(x,y)dy\,dx &= \left[\int_0^a x^{-m}\left(\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt\right)^p dx\right]^2\\ &= \left(\int_0^a x^{-m}F^p(x)\,dx\right)^2,\end{aligned}$$

et

$$\left(\int_0^a x^{-m}\left|f_1(x)-\frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)\left(\int_0^b y^{-m}\left|f_2(y)-\frac{1}{2}f_2\left(\frac{y}{2}\right)\right|^p dy\right)$$

$$=\left(\int_0^a x^{-m}\left|f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)^2.$$

On conclut que l'inégalité (3.12) est équivalent à

$$\left(\int_0^a x^{-m}F^p(x)dx\right)^2 \le \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{2p}\left(\int_0^a x^{-m}\left|f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)^2,$$

d'où

$$\int_0^a x^{-m}F^p(x)dx \le \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{p}\int_0^a x^{-m}\left|f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx.$$

Corollaire 3.5. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur $(0,+\infty)$, $p>1$, $m>1$ et*

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt.$$

Si $\lambda \ge \dfrac{m-1}{p+m-1}$, alors

$$\int_0^a x^{-m}F^p(x)\,dx \le \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^{p}\int_0^a x^{-m}\left|f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx, \tag{3.14}$$

est vérifier si le côté gauche et le côté droit de l'inégalité sont finis.

Remarque 3.2. *Si on prend $\lambda = 1$ dans le Corollaire 3.5, on obtient une inégalité intégrale de type-Hardy.*

Mettant $f=f_1=f_2$, $x=y$ et $a=b$ dans le Corollaire 3.4, on obtient

$$\widetilde{F}_4(x,y) = \left(\int_{\frac{x}{2}}^x f_1(t)\,dt\right)\left(\int_{\frac{y}{2}}^y f_2(s)\,ds\right) = \left(\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\,dt\right)^2 = (F_1(x))^2,$$

où

$$F_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt.$$

D'après l'inégalité (3.13), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b (xy)^{-m} \widetilde{F}_4^p(x,y)dy\,dx &= \left[\int_0^a x^{\alpha-p}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt\right)^p dx\right]^2 \\ &= \left(\int_0^a x^{\alpha-p} F_1^p(x)\,dx\right)^2,\end{aligned}$$

et

$$\left(\int_0^a x^{\alpha}\left|f_1(x) - \frac{1}{2}f_1\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)\left(\int_0^b y^{\alpha}\left|f_1(y) - \frac{1}{2}f_2\left(\frac{y}{2}\right)\right|^p dy\right)$$

$$= \left(\int_0^a x^{\alpha}\left|f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)^2,$$

ce qui implique

$$\left(\int_0^a x^{(\alpha-p)}(F_1(x))^p\,dx\right)^2 \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^{2p}\left(\int_0^a x^{\alpha}\left|f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right)^2,$$

d'où, on a le Corollaire suivant

Corollaire 3.6. *Soient f une fonction intégrable non-négative sur $(0,+\infty)$, $p > 1$ et*

$$F_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt.$$

Si $\alpha < p-1$, alors

$$\int_0^a x^{\alpha-p}(F_1(x))^p\,dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^a x^{\alpha}\left|f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx, \quad (3.15)$$

est vérifier si le côté gauche et le côté droit de l'inégalité sont finis.

Documentation

Godfrey Harold Hardy

Godfrey Harold Hardy (7 février 1877 - 1er décembre 1947, mathématicien britannique), connu pour ses réalisations en théorie des nombres et en analyse mathématique. En biologie, il est connu pour le principe de Hardy-Weinberg, un principe de base de la génétique des populations. G. H. Hardy est généralement connu de ceux qui ne sont pas dans le domaine des mathématiques pour son essai de 1940 A Mathematician's Apology , souvent considéré comme l'un des meilleurs aperçus de l'esprit d'un mathématicien. L'inégalité de Hardy a été publiée et prouvée pour la premiére fois (du moins la version discréte avec une constante moins précise) en 1920 dans une note de Hardy ; la formulation originale était sous une forme intégrale légèrement différente de la précédente.

Edward Thomas Copson

Edward Thomas Copson est né le 21 août 1901 à Coventry, étant le fils aîné de Thomas Charles Copson, ingénieur automobile et inventeur talentueux, et Emily Copson (née Lire). Il a fait ses études à la King Henry VIII School de Coventry, où il a obtenu une bourse d'entrée. En 1919, il fut admis à St John's College, Oxford, en tant que boursier Sir Thomas White. Au cours de sa carrière de premier cycle il a été grandement influencé par le professeur A. E. H. Love (qui a occupé la chaire Sedleian de philosophie naturelle) et le professeur G. H. Hardy (qui devint professeur savilien de Géométrie en 1919). Il a obtenu les honneurs de première classe en modérations mathématiques en 1920 et à la Final School of Mathematics en 1922, obtenant un B.A. tout en restant dans sa 21e année.
Les titres des articles publiés par Copson révèlent l'influence de G. H. Hardy et E. H. Love que ses intérêts allaient de l'analyse classique aux problèmes de physique théorique aux équations différentielles et intégrales. Pour son travail dans ces domaines, il a été élu membre de la Royal Society of Edinburgh en 1924 et a reçu le prix Keith de la société en 1941. Il a également siégé pendant plusieurs années au conseil de la société, en tant que secrétaire des réunions régulières de 1945 à 50 et vice-président de 1950 à 1953.

Guido Fubini

Guido Fubini est né le 19 janvier 1879 à Venise, est un mathématicien italien ; il est poussé vers les mathématiques à un âge précoce, encouragé par ses professeurs et par son père, lui-même professeur de mathématiques. En 1896, il intégre l'École normale supérieure de pise, où il est l'élève de l'Ulisse Dini et de Luigi Bianchi. Ses recherches concernent surtout des sujets s'analyse mathématique,particulièrement les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle et l'analyse complexe, mais il étudie également le calcul des variations, la théorie des groupes, la géométrie non euclidienne et la géométrie projective.

Otto Hölder

Otto Ludwig Hölder (22 décembre 1859 - 29 août 1937) était un mathématicien allemand né à Stuttgart. Hölder a d'abord étudié au Polytechnikum (qui est aujourd'hui l'Université de Stuttgart) puis, en 1877, il est allé à Berlin où il a été l'élève de Leopold Kronecker, Karl Weierstrass et Ernst Kummer. En analyse mathématique, l'inégalité de Hölder est une inégalité fondamentale dans le calcul en analyse fonctionnelle et un outil indispensable pour l'étude des espaces L^p. L'inégalité inverse de Hölder a été explorée par un certain nombre de scientifiques à travers des articles assez récents.

Bibliographie

[1] Benaissa.B, Sarikaya.M.Z. *A generalization of weighted bilinear Hardy inequality.* Mathematica **63(2)**, 164-170 (2021). https ://doi.org/10.24193/mathcluj.2021.2.03

[2] Benaissa.B, Sarikaya.M.Z. *Some Hardy-type integral inequalities involving function of two independent variables.* Positivity **25**, 853-866 (2021). https ://doi.org/10.1007/S11117-020-00791-5

[3] B. benaissa , *Fonctions mathématiques pour la physique* . Univ. Tiaret, Faculte. S.M

[4] M.I.A.Canestro, P.O.Salvadora and R.Torreblanca, *Weighted bilinear Hardy inequalities.* J. Math. Anal. Appl. **387**, (2012), p 320334.

[5] Z.Q.Chen and R.Song, *Hardy Inequality For Censored Stable Processes* . Tohoku Math. J. **55** (2003), 439450.

[6] E. T. Copson, *Note on Series of Positive Terms.*Journal London Math. Soc. . 2 (1927), 9-–12, https ://doi.org/10.1112/jlms/s1-2.1.9

[7] E. T. Copson, *Note on Series of Positive Terms.*Journal London Math. Soc. 3 (1928), 49–51. https ://doi.org/10.1112/jlms/s1-3.1.49

[8] E. T. Copson, *Some Integral Inequalities.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,75(2) (1976), 157–164. https ://doi.org/10.1017/S0308210500017868

[9] L.Grafkos, X.Li and D.Yang,, *Bilinear Operators On Herz-type Hardy Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. V **350**, N 3, (1998), P 1249-1275.

[10] B. Halim , *Introduction Aux Équations Intégrales Linéaires Méthodes Et Applications*. Univ. Tiaret, Faculte. M.I

[11] Z.Hanjs, C.E.M.Pearce and J.Pecaric, *Multivariate Hardy-type Inequalities*. Tamkang J. Math. v**31**, N2, (Summer 2000).

[12] G.Hardy, *Note on some points in the integral calculus*. Messenger. Math **57** (1928), 12-16.

[13] G. H. Hardy, *Notes on a theorem of Hilbert*. Math Z 6, 314–317 (1920). https ://doi.org/10.1007/BF01199965

[14] G. H. Hardy, *Note on some point in the integral calculus(LXIV)*. Messenger of Math., 57(1928), 12–16.

[15] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, London, 1952.

[16] M.Krepela,*Bilinear Weighted Hardy Inequality For Non-increasing Functions*. Publ. Mat. 61 (2017), 3-50, DOI : 10.5565/PUBLMAT-6611176-01

[17] M.Krepela, *Iterating Bilinear Hardy Inequalities*.Proc.Edinburgh Math. Soc, (2017), p1-17 https ://doi.org/10.1017/S001309156000602

[18] S.Kumar, *A Hardy-type Inequality in Two Dimension*. Indag. Math. (N.S.) **20**(2), (June 2009), p 247-260.

[19] A.Kufner, L.Maligranda and L.E.Persson, *The Prehistory of the Hardy Inequality*. Amer. Math. Monthly **113 :8**, (2018), p 715-732, https ://doi.org/10.1080/00029890.2006.11920356

[20] Leng, T.Feng, Y, *On Hardy-type integral inequalities* . Appl. Math. Engl. Ed. **34**(10), 1297-1304 (2013).

[21] B.G.Pachpatte, *On Hardy-type Integral Inequalities For Functions Of Two Variables*. Math. Vol : XXVIII, No 2, (1995).

[22] E.Sawayer, *Weighted Inequalities for the Two-Dimensional Hardy Operator* . Studia Math. T.LXXXII, (1985). p : 1-16.

[23] A.Wedestig, *Weighted Inequalities for the Sawyer Two-Dimensional Hardy Operator And Its Limiting Geometric Mean Operator*. J. Inequal. Appl. 2005 :4, (2005), 387394, https ://doi.org/10.1155/JIA.2005.387

[24] K.Zhang, *Note A bilinear inquality*. J. Math. Anal. Appl. **271**, (2002), 288296.

[25] F.Zhao, Z.Fu and S.Lu, M_p *weights for bilinear Hardy operatoes on* $\mathbb{R}^n$. Collect. Math. 65, 87102 (2014). https ://doi.org/10.1007/s13348-013-0083-6