RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et équations différentielles / application »

Présenté Par :
Kaddari Miloud Zedem et Laidi Youcef

Sous L'intitulé :

Etude qualitative des équations différentielles

Soutenu publiquement le 12/ 06/ 2023

à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. BENOUDA Hedia	Professeur	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mme. NOURA Sidhoumi	M.C.A	E.N.P d'Oran-M.A-	Encadreur
Mme. HADJA Djebbour	M.A.A	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Table des matières

Introduction **6**

1 Rappel sur les notions de base sur équations différentielle **9**

1.1 Existence et unicité des solutions 12

1.1.1 Condition initiale 13

1.1.2 Problème de Cauchy 14

1.1.3 Solution maximale 15

1.1.4 Solutions globales 16

1.1.5 Régularité des solutions 16

2 Exemple de résolution numérique des équations différentielles **17**

2.1 Équations différentielles du premier ordre 17

2.1.1 La méthode d'Euler 17

2.1.2 La méthode d'Euler explicite 18

2.1.3 La méthode d'Euler implicite 18

2.1.4 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 : RK2 19

2.1.5 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 : RK4 19

2.2 Exemples 19

3 Étude qualitative des solutions de l'équation différentielle **23**

3.1 Famille de courbes 23

3.2 Étude qualitative . . . 25
3.3 Champ de vecteurs et portrait de phase . . . 29
3.3.1 Introduction . . . 29
3.4 Tracé du portrait de phase . . . 29
3.4.1 Trajectoires . . . 29
3.5 Champ de vecteurs . . . 30
3.6 Isoclines . . . 30
3.7 Points stationnaires . . . 31
3.8 Portrait de phase . . . 32
3.9 Systèmes linéaires homogènes . . . 33
3.9.1 Position du problème . . . 33
3.10 Champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ . . . 35

4 Étude qualitative des solutions de l'équation différentielle d'Emden-Fowler 37

4.1 Quelques résultats sur la nature des points singuliers des système différentiels autonomes du second ordre . . . 38

Conclusion 43

Bibliographie 44

Remerciements

Tout d'abord, nous souhaitons exprimer notre gratitude envers **ALLAH**, qui nous a accordé la force, la sagesse et la détermination pour mener à bien ce mémoire. Sa guidance et sa bienveillance ont été des éléments essentiels tout au long de notre parcours académique.

Notre **famille** occupe une place primordiale dans nos vie, et nous tenons à leur exprimer notre reconnaissance profonde. Leur amour inconditionnel, leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants ont été nos sources d'inspiration. Leurs sacrifices et leur présence ont joué un rôle clé dans la réalisation de ce mémoire.

Nos **amis fidèles** ont été une sources de soutien et de motivation tout au long de cette aventure académique.

Notre enseignante **NOURA Sidhoumi** qui a encadré notre mémoire, elle mérite une reconnaissance particulière pour son rôle essentiel dans la réalisation de ce travail de recherche. Sa confiance en nos capacité, ses conseils précieux, son expertise et sa disponibilité ont été d'une valeur inestimable.

Nous adressons également nos remerciements à tout messieurs les membres de jury Mr **BENAOUDA Hedia** et Mme **HADJA Djebbour** pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignant du département de mathématique, ont aussi le métrite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique. Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers nos **enseignants**, dont la passion pour l'enseignement, l'expertise dans leur domaine. Leurs remarques, leurs orientations et leur soutien pédagogique. Nous souhaitons remercier nos **collègues**, avec qui nous avons partagé des moments de travail collaboratif, d'échanges fructueux et de soutien mutuel.

Résumé :

Notre mémoire est divisée en quatre chapitre.

Le premier chapitre est un rappel des notions de base sur les équations différentielles. Il aborde les concepts fondamentaux tels que les ordres, les solutions générales et particulières, ainsi que les méthodes de résolution élémentaires et le théorème d'existence et unicité.

Le deuxième chapitre se concentre sur des exemples de résolution numérique des équations différentielles. On y présente différentes techniques numériques, telles que la méthode d'Euler, la méthode de Runge-Kutta. Des exemples concrets illustrent l'application de ces méthodes.

Le troisième chapitre porte sur l'étude qualitative des solutions des équations différentielles. On examine les propriétés globales des solutions. Des méthodes analytiques et graphiques sont utilisées pour analyser le comportement des solutions.

Enfin, le dernier chapitre se concentre spécifiquement sur l'étude qualitative des solutions de l'équation d'Emden-Fowler. On explore les caractéristiques particulières de cette équation et les techniques spécifiques utilisées pour analyser ses solutions.

En résumé, cette étude qualitative des équations différentielles ordinaires couvre les notions de base, les méthodes de résolution numérique, l'analyse qualitative générale des solutions et une étude approfondie de l'équation différentielle d'Emden-Fowler.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Une équation différentielle est une équation mathématique qui relie une fonction inconnue à une ou plusieurs de ses dérivées. Elle exprime une relation entre la fonction recherchée et les taux de variation de cette fonction par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes. Les équations différentielles sont couramment utilisées pour modéliser les phénomènes dynamiques et les relations entre les quantités qui évoluent dans le temps ou dans l'espace.

Une équation différentielle peut être classée en fonction de différents critères, tels que l'ordre, la linéarité et la nature des variables indépendantes et dépendantes. Voici quelques exemples d'équations différentielles couramment rencontrées :

1. Équation différentielle ordinaire (EDO) : c'est une équation différentielle dans laquelle la fonction inconnue dépend d'une seule variable indépendante. Par exemple : $dy/dx = f(x)$, où y est une fonction inconnue de x et $f(x)$ est une fonction donnée.
2. Équation différentielle partielle (EDP) : une équation différentielle dans laquelle la fonction inconnue dépend de plusieurs variables indépendantes. Par exemple : $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$, où u est une fonction inconnue de x et y.
3. Équation différentielle linéaire : est une équation dans laquelle la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent linéairement. Par exemple : $d^2y/dx^2 + p(x)dy/dx + q(x)y = r(x)$, où $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions données.
4. Équation différentielle non linéaire : est une équation dans laquelle la fonction inconnue et/ou ses dérivées apparaissent de manière non linéaire. Par exemple : $dy/dx = y^2 - x$, où y est une fonction inconnue de x.

La solution d'une équation différentielle consiste à trouver une fonction qui vérifie l'équation donnée, souvent avec des conditions supplémentaires appelées conditions initiales ou conditions aux limites.

La théorie des équations différentielles fournit des méthodes et des techniques pour résoudre analytiquement

ces équations afin d'obtenir les solutions souhaitées. Cependant Il n'existe pas de méthodes analytiques systématiques pour résoudre les équations différentielles non linéaires. En revanche la résolution de ces équations passe par l'application des méthodes numériques (approchées).
La résolution numérique des équations différentielles est une approche qui consiste à obtenir une approximation numérique de la solution d'une équation différentielle à l'aide de méthodes numériques. Il existe plusieurs méthodes numériques couramment utilisées pour résoudre des équations différentielles. Voici quelques-unes des plus utilisées et traitées dans ce manuscrit :

1. Méthode d'Euler : C'est l'une des méthodes les plus simples pour résoudre numériquement une équation différentielle. Elle est basée sur une approximation par différences finies et utilise une formule itérative pour estimer les valeurs successives de la solution. Cette méthode est relativement facile à mettre en œuvre, mais elle peut introduire une erreur significative, en particulier pour des pas de temps importants.
2. Méthodes de Runge-Kutta : Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes plus précises que la méthode d'Euler. Elles sont basées sur une combinaison de points intermédiaires pour améliorer l'approximation de la solution. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est l'une des méthodes les plus couramment utilisées et offre une bonne précision pour un coût computational raisonnable.

Un autre inconvénient qu'on peut citer à propos de cette technique de résolution est qu'elle ne fournit pas une expression algébrique des fonctions solutions mais plutôt un ensemble des valeurs numériques d'une seule solution, qu'il serait préférable de représenter graphiquement. Par conséquent elle ne donne a fortiori pas un aperçu de l'ensemble des solutions et on est forcé de se restreindre à une seule fonction solution. Si l'on veut des valeurs pour d'autres solutions les mêmes opérations sont à répéter.

D'après cette analyse il s'avère que si la résolution numérique présente des avantages et supplée de ce fait la résolution algébrique, elle représente en revanche des inconvénients importants et ce dès que l'on avance dans le niveau. La résolution qualitative des équations différentielles se concentre sur l'analyse globale du comportement des solutions sans chercher à obtenir une solution numérique précise. Elle permet de comprendre les caractéristiques qualitatives des solutions, telles que les points d'équilibre, les trajectoires, les bifurcations et les comportements asymptotiques.

La résolution qualitative des équations différentielles implique souvent une combinaison de méthodes analytiques, graphiques et numériques pour obtenir une compréhension globale du comportement du système. Elle est particulièrement utile pour étudier les systèmes complexes où il n'est pas toujours possible d'obtenir des solutions analytiques ou numériques précises.

On présente dans ce qui suit notre manuscrit réparti en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les notions de bases et les théorèmes essentiels sur lesquels se basent la théorie des équations différentielles ordinaire à savoir la définition d'une équation différentielle, d'un problème de Cauchy, le théorème de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une EDO. Ensuite, dans le deuxième chapitre on a traité la résolution numérique des équations différentielles en utilisant la méthode d'Euler. Dans le troisième chapitre on donne une introduction élémentaire à la théorie qualitative des équations différentielles ordinaire et enfin dans le dernier chapitre et comme application sur l'études qualitative des équations différentielles, on reprend l'étude l'équation différentielle d'Emden-Fowler traité par M. LEFRANC et J. MAWHIN.

Chapitre 1

Rappel sur les notions de base sur équations différentielle

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO).

Définition 1.1 [5]

Une EDO est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(y(t), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = g(x)$$

- *dont les inconnues sont une fonction* $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et son intervalle de définition* I.
- *dans laquelle cohabitent à la fois* y *et ses dérivées* $y', y", ..., y^p$ (p *est appelé l'ordre de l'équation*). *Si la fonction* g*, appelée «second membre» de l'équation, est nulle, on dit que l'équation en question est* ***homogène***.

  Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$*, qui satisfont l'équation* (*on dit aussi intégrer l'équation différentielle*).

Exemple 1.1 *Résoudre l'équation différentielle* $y'(x) = -y(x)$ *signifie chercher toutes les fonction*

$$y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = f(x)$$

telles que $f'(x) = -f(x)$ *pour tout* $x \in I$. *On peut vérifier que* $y(x) = ce^{-x}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ (*où* c *est constante réelle quelconque*) *est une solution de l'EDO* (*en particulier, pour* $c = 0$ *on trouve la solution nulle*).

Définition 1.2

En particulier dans le calcul différentiel, une équation aux dérivée partielle (ou équation différentielle partielle (également notée EDP)), est une équation différentielle dont les solutions pour des fonctions inconnues sont basées sur plusieurs variables qui satisfont certaines conditions liées à leurs dérivées partielles.

C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (x dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y, ...) \in \mathbb{R}^2$ *et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :*

$$F\left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, ...\right) = g(x)$$

Exemple 1.2

1). $\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$

2). $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$

Définition 1.3

L'équation homogène est l'équation différentielle où on a annulé le second membre :

$$F(y(t), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = g(x) = 0$$

Définition 1.4

On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation.

Par exemple :

- $y' + xy = e^x$ *est une équation différentielle du premier ordre,*
- $y'' + p(x)y = 0$, *où* $p(x)$ *est une fonction connue, une équation différentielle du second ordre ;*
- $y^{(9)} - xy'' = x^2$ *est une équation différentielle d'ordre 9.*

Définition 1.5

On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n *sur un intervalle* (a, b) *une fonction* $y = f(x)$ *définie sur cet intervalle a, b) avec ses dérivées jusqu'à l'ordre* n *y compris et telle que la substitution de la fonction* $y = f(x)$ *dans l'équation différentielle transforme cette dernière en une identité par rapport à* x *sur* (a, b).

Par exemple :

la fonction $y = sin\, x + cos\, x$ *est solution de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$ *sur l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$.

En effet, en dérivant deux fois cette fonction, on aura

$$y' = cos\, x - sin\, x, \qquad y'' = -sin\, x - cos\, x$$

En portant les expressions de y'' *et de* y *dans l'équation différentielle, on obtient une identité*

$$-sin\, x - cos\, x + sin\, x + cos\, x \equiv 0.$$

La courbe solution d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale de cette équation.

La forme générale de l'équation du premier ordre est

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Si l'on parvient à résoudre l'équation (1) par rapport à y', *on obtiendra*

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

c'est-à-dire une équation du premier ordre résolue par rapport à la dérivée.

Définition 1.6

On appelle problème de Cauchy le problème qui consiste à trouver une solution $y = y(x)$ *de l'équation* $y' = f(x, y)$ *qui satisfait à la condition initiale* $y(x_0) = y_0$ *(une autre notation :* $y|_{x=x_0} = Y_0$*).*

En interprétation géométrique cela signifie qu'on cherche une courbe intégrale qui passe par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ *du plan* $x \circ y$.

Définition 1.7 ***(Solution générale)***.

La solution générale du n *ème ordre est une solution contenant* n *variables arbitraires, correspondantes à* n *constantes d'intégration.*

Définition 1.8 ***(Solution particulière)***.

La solution particulière est dérivée de la solution générale en remplaçant les constantes par des valeurs particulières, souvent choisies par rapport aux conditions initiales ou conditions aux bornes.

Définition 1.9 ***(Solution singulière).***

La solution singulière est une solution qui ne peut pas être dérivée de la solution générale.

1.1 Existence et unicité des solutions

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition 1.10 [3],[23]

i) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur U est une relation de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \tag{1.1.1}$$

ii) Pour (t_0, x_0) donné, un problème à valeur initiale associé a l'équation (1.1.1) est donné sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Définition 1.11 *i) La fonction $x(t)$ est dite solution de l'équation (1.1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continument dérivable sur I et si $(t, x(t)) \in U, \forall t \in I$ et si $x(t)$ satisfait la relation (1.1.1) sur I.*

ii) Soit $(t_0, x_0) \in U$ donnée, la fonction x est dite solution du problème à valeur initiale (1.1.2) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x est une solution de l'équation (1.1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

Définition 1.12 *Considérons la fonction $f(t, x)$ avec :*

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq a, \ \text{et } x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

On dit que la fonction $f(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x, s'il existe $K > 0$ telle que :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K |x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times D$$

La constante K est appelée constante de lipshitz.

Théorème 1.1 *On considère le système différentiel :*

$$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

et on suppose que la fonction vectorielle $f(x, t)$ est lipschitzienne de rapport K par rapport à x, uniformément en $t \in [-a, a]$. Soit x_0 une donnée initiale, il existe une seule solution $x(t)$ du système différentiel qui satisfait $x(0) = x_0$ et qui est définie sur l'intervalle $[-c, c]$ avec $c < \min\left(a, \frac{1}{K}\right)$.

Preuve *: Cette solution satisfait l'équation intégrale*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u, x(u))du,$$

on considère l'espace des fonctions continues $y \in C^0([-a, a])$ muni de la norme $\|y\| = \max_{t\in[-a,a]} \|y(t)\|$. Soit $L : C^0([-a, a]) \to C^0([-a, a])$ l'opérateur définit par

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(u, y(u))du$$

cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - l\left(y'\right)(t) = \int_0^t \left[f(u, y(u)) - f\left(u, y'(u)\right)\right] du$$

et donc

$$\left\|L(y) - L\left(y'\right)\right\| \leq cK \left\|y - y'\right\|$$

Si on pose $c < \min\left(a, \frac{1}{K}\right)$, on obtient que l'opérateur L est une contraction. Il possède donc un point fixe dans l'espace fonctionnel $C^0([-a, a])$. Cet unique point fixe est une fonction continue qui est solution du système différentiel et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchées.

1.1.1 Condition initiale

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir entre les différentes solutions celle qui décrit le problème physique, il faut considérer d'autres données qui dépendent de la nature du problème par exemple la valeur prise par la solution et/ou éventuellement ses dérivées en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

Définition 1.13 ***(Condition initiale).***

Soit une EDO d'ordre p. Une condition initiale (CI) est un ensemble de relations du type $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ *qui imposent en* t_0 *les valeurs* $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ *respectivement de la fonction inconnue et de ses dérivées jusqu'à l'ordre* $n-1$.

1.1.2 Problème de Cauchy

Définition 1.14 [16]

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *un intervalle, a un point de* $[a, b]$ *et* $f : [a, b] \times \mathbb{R}$ *une fonction donnée continue par rapport aux deux variables et* y' *la dérivée de* y *par rapport à* a.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)); x \in [a, b] : \\ y(a) = y_0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

avec y_0 *une valeur donnée appelée donnée initiale.*

Si f ne dépend pas explicitement de x (i.e. si $f(x, y(x)) = f(y(x))$), l'EDO est dite autonome.

L'essentiel de notre analyse concernera le cas où l'on a qu'une seule EDO, c'est-à-dire le cas scalaire.

Résoudre un problème de Cauchy, c'est chercher toutes les fonctions définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation et qui vérifient la condition initiale. On aura donc des questions naturelles telles

- Trouver toutes les fonctions solutions de l'EDO.
- Parmi toutes ces fonctions choisir celles qui vérifient la condition initiale (existence ? unicité ?).
- Parmi toutes ces fonctions étudier le domaine de définition (pour chaque fonction trouvée quel est le plus grande domaine de définition qui contient le point x_0 ?).

Exemple 1.3

Résoudre le problème de Cauchy

$$y' + 2xy^2 = 0; \qquad y(0) = -1.$$

Solution

On peut facilement vérifier que

$$y = \frac{1}{(x^2 + c)}$$

l'équation différentielle. Si

$$y = \frac{1}{(x^2 + c)}$$

alors,

$$y = \frac{-2x}{(x^2 + c)^2}$$

et donc,

$$y' + 2xy^2 = \frac{-2x}{(x^2 + c)^2} + \frac{2x}{(x^2 + c)^2} = 0$$

ce qui vérifie que

$$y = \frac{1}{(x^2 + c)}$$

en effet, une solution générale de l'équation différentielle

$$y' + 2xy^2 = 0.$$

La condition initiale $y(0) = -1$ est équivalente à $c = -1$. Donc, la solution est

$$y(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)}.$$

1.1.3 Solution maximale

Définition 1.15

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On considère l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, où $(x, y) \in U$.

- *Une solution de l'équation différentielle est la donnée d'un couple (y, I) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y est une fonction de U dans $\mathbb{R}^m$ dérivable tels que, pour tout $x \in I, (x, y(x)) \in U$ et $y'(x) = f(x, y(x))$.*
- *Si (y_1, I_1) et (y_2, I_2) sont deux solutions de l'équation différentielle, on dit que (y_2, I_2) est un prolongement de (y_1, I_1) si $I_1 \subset I_2$ et pour tout $x \in I_1$, $y_1(x) = y_2(x)$.*

- *On dit que* (y, I) *est une solution maximale de l'équation différentielle si elle n'admet pas de prolongement. Autrement dit, pour toute autre solution* (z, J) *telle que* $I \subset J$ *et* $y(x) = z(x)$ *pour tout* $z \in I$*, alors* $J = I$.

.

1.1.4 Solutions globales

Soit l'ouvert U de la forme $U = J \times U'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.16

Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J *tout entier.*

Remarque 1.1

Toute solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

1.1.5 Régularité des solutions

Définition 1.17

Une fonction est dite de classe C^k*, si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre* k.

Théorème 1.2

Si $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^k*, alors toute solution de* (1.1.3) *est de classe* C^{k+1}.

Théorème 1.3 ***(de Cauchy-Lipschitz, Existence globale et unicité des solutions)***[8]

Considérons une fonction

$$f : [a, b] \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

définie pour tout x *dans un intervalle* $[a, b]$ *et pour tout* y *dans un intervalle* J*. On suppose que* f *est*

- *continue par rapport à ses deux variables,*
- *uniformément lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, ce qui signifie qu'il existe une constante* $L > 0$ *(appelée constante de Lipschitz) telle que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall \quad x \in [a, b], \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors pour toute condition initiale $y(x_0) = y_0$ *avec* $x_0 \in [a, b]$ *et* $y_0 \in J$ *il existe une unique solution maximale* $y = y(x)$ *de l'EDO* $y'(x) = f(x, y(x))$ *et cette solution est de classe* $C^1([a, b])$.

Chapitre 2

Exemple de résolution numérique des équations différentielles

L'objectif de ce chapitre est de chercher à calculer de façon approchée la solution d'un problème de Cauchy. Il se trouve que très souvent, il est impossible de résoudre ce type de problème de façon explicite. Il faut alors faire appel à des schémas numériques efficaces permettant d'approcher les solutions explicites. Nous verrons ce que sont les principaux schémas existants.

2.1 Équations différentielles du premier ordre

2.1.1 La méthode d'Euler

C'est la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Son emploi est facile. Toutefois elle est relativement peu utilisée en raison de sa précision [2].

Soit à résoudre numériquement le problème :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

donnée la forme intégrale de ce problème est :

$$\int_a^b y'(s)ds = \int_a^b f(s, y(s))ds,$$

alors

$$y(b) - y(a) = \int_a^b f(s, y(s))ds,$$

d'où

$$y(b) = y(a) - \int_a^b f(s, y(s))ds,$$

Considérons une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ avec $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.

Alors

$$\int_{x_i}^{x_i+1} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx,$$

donc

$$y(x_i + 1) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx, \tag{2.1.2}$$

il y a plusieurs façon d'approximer $\int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx$.

2.1.2 La méthode d'Euler explicite

En utilisant la méthode des rectangles à gauche sur $\int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx$, et en remplaçant dans la formule (2.1.2), l'algorithme de la méthode d'Euler explicite est donné par :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i); \quad i = 0, 1, ..., n-1, \; avec \, y_0 = \alpha.$$

2.1.3 La méthode d'Euler implicite

En utilisant la méthode des rectangles à droite sur $\int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx$ et en remplaçant dans la formule (2.1.2), l'algorithme de la méthode d'Euler explicite est donné par :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}); \qquad i = 0, 1, ..., n-1, \; avec \quad y_0 = \alpha.$$

On notera que dans ce schéma, le terme y_{i+1} apparaît sur chaque itération.

Théorème 2.1

Soient $y(x)$ la solution unique du problème de Cauchy (2.1.1), et $y_0, y_1, ..., y_n$ les approximations de $y(x)$ aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ engendrée par la méthode d'Euler. Si f est Lipschitzienne en y sur D par rapport à y, alors l'erreur théorique E_t est donnée par :

$$E_t \leq \left(e^{L(b-a)} - 1\right) \frac{M_2 h}{2L}$$

avec $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |\ddot{y}(x)|$ et L est la constante de Lipschitz.

2.1.4 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 : RK2

En utilisant la méthode des trapèzes sur $\int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx$*, et en remplaçant dans la formule* (2.1.2)*, on obtient :*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]; \quad i = 0, 1, ..., n-1, \qquad avec \;\; y_0 = \alpha, .$$

on remplace y_{i+1} *par l'algorithme de la méthode d'Euler explicite*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)]; \qquad i = 0, 1, ..., n-1, \quad avec \;\; y_0 = \alpha, .$$

or $x_{i+1} = x_i + h$*, donc*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)]; \quad i = 0, 1, ..., n-1, \quad avec \quad y_0 = \alpha, .$$

en posant $K_1 = f(x_i, y_i)$ *et* $K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1)$ *, on obtient l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta* [2] *:*

$$\left\{ \begin{array}{c} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \;\; et \;\; K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \\ y_0 \quad donne. \end{array} \right. \tag{2.1.3}$$

2.1.5 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 : RK4

En utilisant la méthode des Simpson sur $\int_{x_i}^{x_i+1} f(x, y(x))dx$*, et en remplaçant dans la formule* (2.1.1)*, on obtient l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre* 4 [2] *qui est donné par :*

$$\left\{ \begin{array}{c} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K3 + K_4), \qquad i = 0, 1, ..., n-1, \quad o \\ K_1 = f(x_i, y_i), \quad K_2 = fx_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \;\; et \;\; K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_2). \\ y_0 \;\; donne. \end{array} \right. \tag{2.1.4}$$

2.2 Exemples

Exemple 2.1 *Soit l'équation différentielle à condition initiale*

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(x) = y + x; x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

- ∗ *Approcher la solution de cette équation en* $x = 1$ *à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en* 10 *parties égales.*
- ∗ *Comparer à la solution exacte.*

Solution :

On pose $f(x, y(x)) = y + x$.

Remarquons tout d'abord que f *étant continue et Lipschitzienne par rapport à* y *du fait que*

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2|$,*d où* $L = 1$, *le problème de Cauchy admet une solution - unique. Par la méthode d'Euler on a :*

$$\begin{cases} Y_{i+1} & = y_i + hf(x_i, y_i) \\ Y_{i+1} & = y_i + h(y_i + xi); \\ Y_{i+1} & = y_i(1+h) + hx_i \end{cases}$$

où le pas $h = \frac{1-0}{10} = 0.1, x_=0, x_i = x_0 + ih = 0.1i$, *d'où le tableau suivant :*

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1	1.1	1.22	1.362	.	.	.	.	.	.	3.1874

C'est à dire que l'approximation en $x = 1$ *de* $y(x)$ *est* $y(1) =_{10}= 3.1874$.

solution exacte

$$y(x) = -1 - x + 2e^x$$

donne $y(1) = 3.4366$. *Ainsi, l'erreur effectivement commise lors de l'application de la méthode d'Euler est :*

$$|E_e| = |3.4366 - 3.1874] = 0.25.$$

Cherchons l'erreur théorique qui est donnée par :

$$E_t \leq (e^{L(b-a} - 1)\frac{M^2 h}{2L}.$$

avec $M_2 = \max_{x \in [a.b]} |\widetilde{y}(x)|$ *et* $L = 1$ *est la constante de Lipschitz de* f *par rapport à* y *on a :*

$$y'(x) = y + x, donc$$

$$y''(x) = y' + 1, alors$$

$$y''(x) = 1 + x + y, d'o$$

$$y''(x) = 1 + x + (-1 - x + 2e^{2x})$$

$$y''(x) = 2e^{2x}.$$

Ainsi $M_2 = 2e$. *Donc*

$$\begin{aligned} E_t &\leq (e^{L(b-a)} - 1)\frac{M_2 h}{2L} \\ E_t &\leq (e^{1(1-0)} - 1)\frac{2e0.1}{2*1}, \\ E_t &\leq 0.4673. \end{aligned}$$

Clairement on a, $|E_e| \leq |E_t|$. *donc la méthode d'Euler donne une bonne approximation de la solution de ce problème de Cauchy.*

Exemple 2.2

Approcher la solution de l'équation différentielle ci-dessous en $x_1 = 0.2$ *en utilisant* $RK2$, *avec un pas* $h = 0.2$

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Solution :

L'intervalle d'intégration est $[0, 0.2]$ *et le pas d'intégration est* $h = 0.2$. *on pose* $f(x, y) = y(x) - \frac{2x}{y}$, , *l'algorithme de la méthode de* $RK2$ *s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} Y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \quad avec \\ K_1 = f(x_i, y_i) \quad et \quad K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} Y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \quad avec \\ K_1 = f(x_0, y_0) \quad et \quad K_2 = f(x_0 + h, y_0 + hK_1) \end{cases}$$

donc $K_1 = f(0, 1) = 1$ *et* $K_2 = f(0.2, 1.2) = 0.8666$.

Ainsi, l'approximation de $x = 0.2$ *de* $y(x)$ *est* $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = 1 + \frac{0.2}{2}(1 + 0.8666) = 1.18666$.

Exemple 2.3

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} t - (sin\, y)^2 - y' = 0, t \in [0, \pi] \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- *Montrer que ce problème admet une solution unique.*
- *Calculer la valeur approchée de* $y\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *par la méthode d'Euler explicite de temps constant* $h = \frac{\pi}{4}$.

Solution :

On pose $f(t, y) = t - (siny)^2$, *il est clair que* f *est continue sur* $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ *il reste à montrer qu'elle est*

Lipschitzienne par rapport à y,

on a $\forall\, t \in [0, \pi], \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |(sin\, y_1)^2 - (sin\, y_2)^2|,\\ &= |(sin\, y_1) - (siny_2)||(sin\, y_1) + (sin\, y_2)|\\ &\leq 2|(sin\, y_1) - (siny_2)|,\end{aligned}$$

d'après le théorème des accroissements finis

$$|(sin\, y_1) - (siny_2)| \leq |cos\, c(y_1 - y_2)| \leq |y_1 - y_2|, \quad y_1 < c < y_2$$

finalement,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|.$$

donc f est Lipschitzienne par rapport à y et la constante $L = 2$, d'où l'unicité de la solution.

La formule d'Euler explicite est donnée par :

$$Y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i); \quad i = 0, 1, ..., n-1, \qquad avec \;\; y_0 = \frac{\pi}{4}$$

$h = \frac{\pi}{4}$, *on doit chercher n tel que $t_n = \frac{3\pi}{4}$, on a $t_n = t_0 + nh = \frac{3\pi}{4}$ alors $n = 3$,c'est à dire on cherche une approximation de $y(\frac{3\pi}{4})$. On a alors :*

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0)\\ &= y_0 + h(t_0 - (sin\, y_0)^2)\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\\ &= \frac{\pi}{8} = 0.3927.\end{aligned}$$

De même, on calcule y_2 et y_3

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

$$Y_2 = 08945.$$

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2)$$

$$y_3 = 1.6505.$$

Chapitre 3

Étude qualitative des solutions de l'équation différentielle

3.1 Famille de courbes

On a vu que la solution générale de l'équation différentielle $y = y$ est $y = ce^x$.

Cette solution représente un famille de courbe d'un seul paramètre. Hors que la solution générale de

$$x'' + 16x = 0$$

est

$$x(t) = c_1 cos(4t) + c_2 sin(2t).$$

Cette solution représente une famille de courbe de deux paramètres. Lors de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0$$

, on obtient généralement une famille de solution avec un paramètre c. Une solution contenant une constante arbitraire représente un ensemble

$$G(x, y, c) = 0$$

de solutions appelé une famille solutions à un paramètre. Lors de la résolution d'une équation différentielle d'ordre n,

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nous cherchons une famille de solutions de n paramètres

$$G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0.$$

Cela signifie qu'une seule équation différentielle peut posséder un nombre infini de solutions correspondant au nombre illimité de choix pour le paramètre (s). Une solution d'une équation différentielle qui est ne dépend pas de paramètres d'arbitraires est appelé une solution particulière. Par exemple vous pouvez vérifier que

$$y = cx - xcos\, x$$

est une famille se solution à 1 paramètre sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et $y = -xcosx$ est une solution particulière qu'on obtient quand $c = 0$.

De même sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x$$

est une famille se solution à deux paramètres de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Quelques solutions particulières sont $(y = 0)(c_1 = c_2 = 0)), y = e^x(c_1, c_2 = 0)$ et $y = e^x(c_1 = 0, c_2 = 1)$.

Pour trouver l'équation différentielle associée à une famille de fonctions contenant n constantes arbitraires

$$G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0,$$

il faut dériver n fois cette expression et éliminer les n constantes arbitraires à partir des $(n + 1)$ équations disponibles.

Exemple 3.1

Trouver l'équation différentielle de la famille de fonctions

$$y = ax + bcos\, x.$$

Solution

La famille possédant deux constantes arbitraires, on dérive deux fois

$$y = ax + bcos\, x$$

$$y' = a - bsin\, x$$

$$y'' = -bcos\, x \Longrightarrow b = -\frac{y''}{cos\, x}$$

maintenant on a

$$\begin{aligned} y - xy' &= (ax + b\cos x) - x(a - b\sin x) \\ &= b(\cos x + x\sin x) \\ &= -\frac{y''}{\cos x}(\cos x + x\sin x) \\ &= -y'' \end{aligned}$$

L'équation différentielle est donc

$$y''(1 + \tan x) - xy' + y = 0$$

3.2 Étude qualitative

L'étude qualitative est un outil pour étudier des équations différentielles dont on ne dispose pas de solution explicite [1, 13]. Nous allons restreindre l'étude qualitative à des équations différentielles de la forme

$$y' = f(y), \tag{3.2.1}$$

c'est-à-dire on se concentre sur le cas où la fonction f ne dépend pas de la variable t, mais uniquement de la variable y.

Définition 3.1

Un équilibre ou état stationnaire d'une équation différentielle (3.2.1) est un nombre c telle que la fonction constante $y(t) \equiv c$ est une solution de (3.2.1).

Autrement dit si la condition initiale y_0 est un équilibre, alors $y(t) \equiv y_0$ est une solution constante de l'équation différentielle. Puisque la dérivée d'une fonction constante est zéro, il est assez simple de déterminer les équilibres :

Proposition 3.1

Un nombre c est un équilibre de l'équation différentielle (3.2.1) si et seulement si on a

$$f(c) = 0.$$

On doit donc résoudre l'équation classique $f(y) = 0$ pour connaître les équilibres. C'est nettement moins difficile que résoudre une équation différentielle :

Exemple 3.2

Considérerons l'équation $y' = ry$, donc $f(y) = ry$. Soit $r \neq 0$. Alors l'unique solution de l'équation

$$ry = 0$$

est $y = 0$. Donc 0 est l'unique équilibre.

Exemple 3.3

Considérons l'équation logistique $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$, donc

$$f(y) = ry(1 - \frac{y}{K}) = ry - \frac{ry^2}{K}.$$

Soit $r > 0$ et $K > 0$. Alors les solutions de l'équation

$$ry - \frac{ry^2}{K} = 0$$

sont $y = 0$ et $y = K$.

On peut distinguer deux types d'équilibres :

Définition 3.2

Soit c un équilibre de l'équation différentielle (3.2.1). On dit que c est

– *un équilibre stable (ou attractif) si $f'(c) < 0$.*

– *un équilibre instable (ou répulsif) si $f'(c) > 0$.*

La terminologie est justifiée par la propriété suivante : soit y_0 une condition initiale proche d'un équilibre stable c. Alors la solution $y(t)$ pour la condition initiale y_0 va s'approcher de c. On aura

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = c.$$

Vice versa si y_0 est une condition initiale proche d'un équilibre instable c, la solution $y(t)$ va s'éloigner de c. Regardons deux exemples :

Exemple 3.4

Considérons l'équation $y' = ry$, donc $f(y) = ry$. La dérivée de f est

$$f'(y) = r.$$

On sait que 0 *est un équilibre.*

1er cas : $r < 0$. *Alors* $f'(0) = r < 0$, *l'équilibre est donc stable. Soit* $y_0 > 0$ *une condition initiale, alors la solution est* $y(t) = y_0 e^{rt}$. *Puisque* $r < 0$ *on a* $\lim_{t\to\infty} e^{rt} = 0$. *On obtient*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y_0 e^{rt} = 0,$$

la solution s'approche de l'équilibre stable 0.

2nd cas : $r > 0$. *Alors* $f'(0) = r > 0$, *l'équilibre est donc instable. Soit* $y_0 > 0$ *une condition initiale, alors la solution est encore* $y(t) = y_0 e^{rt}$. *Puisque* $r > 0$ *on a* $\lim_{t\to\infty} e^{rt} = 0$. *Donc la solution s'éloigne de l'équilibre instable* 0.

Exemple 3.5

Considérons l'équation logistique

$$y' = ry(1 - \frac{y}{K}) \tag{3.2.2}$$

donc,

$$f(y) = ry(1 - \frac{y}{K}) = ry - \frac{ry^2}{K}.$$

La dérivée de f *est*

$$f'(y) = r - \frac{2ry}{K}.$$

On sait que 0 *et* K *sont les équilibres. On a*

$$f'(0) = r - \frac{2r \cdot 0}{K} = r > 0,$$

Rappelons nous que pour un modèle logistique on suppose toujours $r > 0$ *et* $K > 0$.

donc 0 *est un équilibre instable. On a*

$$f'(K) = r - \frac{2rK}{K} = r - 2r = -r < 0,$$

donc K *est un équilibre stable. On peut résumer ces informations dans la figure suivante :*

Considérons maintenant une solution $y(t)$ *de l'équation* (3.2.2) *avec condition initiale* y_0.

Supposons que y_0 *est différente des équilibres* 0 *et* K. *Qu'est-ce qu'on peut dire sur la solution* $y(t)$?

– *Si* $y_0 > K$, *la fonction* $y(t)$ *va décroître pour s'approcher de l'équilibre stable* K.

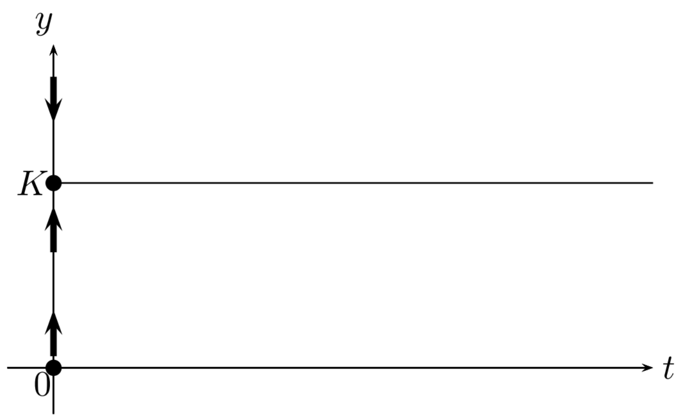

FIGURE 3.1 – Les flèches s'éloignent de 0 car il est instable, ils pointent vers K car il est stable.

– *Si* $y_0 < K$, *la fonction* $y(t)$ *va augmenter : elle s'éloigne de l'équilibre instable* 0 *et s'approche de l'équilibre stable* K.

Nous pouvons donc compléter la figure (3.1) *comme suit :*

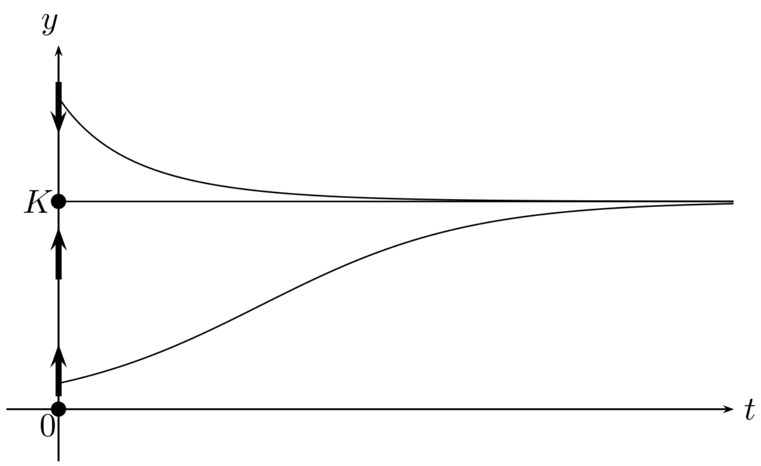

FIGURE 3.2 – Solutions du y' basée sur une étude qualitative.

3.3 Champ de vecteurs et portrait de phase

3.3.1 Introduction

On s'occupe d'un système différentiel autonome de dimension deux, donc de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \tag{3.3.1}$$

où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'un système différentiel est dit autonome si les équations intervenant dans ce système ne font pas intervenir la variable par rapport à laquelle sont calculées les dérivées.

Nous supposons que les fonctions f et g sont continument dérivables, pour assurer le fait que par tout point M du plan passe une solution et une seule. Pour alléger les écritures, nous supposons de plus, que toutes les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.4 Tracé du portrait de phase

Pour mieux tracer le champ de vecteurs (3.3.1), on va présenter ici des techniques permettant d'en prévoir assez simplement quelques propriétés essentielles.

3.4.1 Trajectoires

Définition 3.3 *On appelle trajectoire (ou orbite) du système* (3.3.1)*, l'ensemble parcouru dans le plan* (x, y) *par le point de coordonnées* $(x(t), y(t))$ *lorsque* t *parcourt* $\mathbb{R}$.

En d'autres termes, une trajectoire du système (3.3.1) est l'ensemble des points du plan $\{(x(t), y(t)); t \in \mathbb{R}\}$. Nous allons voir dans la proposition suivante que plusieurs solutions peuvent avoir pour image la même trajectoire.

Proposition 3.2 *Soit* $S(t) = (x(t), y(t))$ *une solution du système* (3.3.1)*. Pour tout réel* a*,* $S_a(t) = S(t - a)$ *est aussi une solution de* (3.3.1)*, dont la trajectoire coïncide avec celle de* $S(t)$.

Preuve

Il est facile de voir que, puisque le système (3.3.1) est autonome, si $S(t)$ est une solution de (3.3.1), $S_a(t)$ en est aussi une. De plus, si t parcourt $\mathbb{R}$, alors $(t - a)$ également. Par conséquent, ces deux solutions $S(t)$ et $S_a(t)$ parcourent toutes les deux l'image $S(\mathbb{R})$.

Si la solution S passe par le point M à l'instant t_0, la solution S_a passe par le même point M à l'instant $t_0 + a$. Autrement dit, la solution S_a parcourt la même trajectoire que la solution S avec un retard constant égal à a.

Remarque 3.1 *D'après la proposition ci-dessus, la trajectoire parcourue ne dépend que du point M, et pas de t_0. Le point M détermine donc une unique trajectoire. Rappelons cependant qu'une même trajectoire est parcourue, à des instants différents, par une infinité de solutions.*

3.5 Champ de vecteurs

Définition 3.4

L'application

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (f(x, y), g(x, y))$$

définit un champ de vecteurs.

A chaque point $M = (x, y)$ du plan, on associe le vecteur $V(M) = (f(x, y), g(x, y))$. Un champ de vecteurs 3.3.1 est donné par la propriété suivante :

En tout point M du plan où $V(M) \neq 0$, la trajectoire passant par M est tangente à $V(M)$.

Pratiquement, pour représenter le champ associé au système 3.3.1, on se donne un quadrillage de la partie du plan choisie ; en chaque point de ce quadrillage, on trace un petit vecteur égal, ou colinéaire à $V(M)$.

En observant le champ de vecteurs, on a déjà une idée du comportement des trajectoires. On verra une illustration d'un champ de vecteurs dans un exemple un peu plus loin.

3.6 Isoclines

On définit les ensembles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels s'annulent les composantes $\dot{x}$ et $\dot{y}$ du système (3.3.1).

Définition 3.5 ***(Isoclines horizontale)***[9]

On appelle isocline horizontale l'ensemble I des points (x, y) tels que $g(x, y) = 0$.

Soit $M = (x, y)$ un point de I. Si $f(x, y) \neq 0$, alors la trajectoire passant par M a une tangente horizontale. Elle est parcourue de gauche à droite si $f(x, y) > 0$, de la droite vers la gauche si $f(x, y) < 0$.

L'ensemble I est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions dans lesquelles le signe de $g(x,y)$ reste constant.

Définition 3.6 ***(Isocline verticale)***[9]

On appelle isocline verticale l'ensemble J des points (x,y) tels que $f(x,y)=0$.

Soit $M=(x,y)$ un point de J tel que $g(x,y)\neq 0$. La trajectoire passant par M a une tangente verticale. Elle est parcourue de bas en haut si $g(x,y)>0$, de haut en bas si $g(x,y)<0$.

L'ensemble J est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions dans lesquelles le signe de $f(x,y)$ reste constant.

Quand on trace à la fois I et J, on partage le plan en des régions sur lesquelles le champ de vecteurs a les propriétés suivantes :

- *Régions où f et g sont positives : dans ces régions les trajectoires du système (3.3.1) se dirigent, pour t croissant, vers le haut et à droite.*
- *Régions où f est positive et g est négative : les trajectoires du système (3.3.1) se dirigent vers le bas et à droite.*
- *Régions où f est négative et g est positive : les trajectoires de (3.3.1) se dirigent vers la gauche et le haut.*
- *Régions où f et g sont négatives : les trajectoires de (3.3.1) se dirigent vers le bas et à gauche.*

3.7 Points stationnaires

Considérons le système différentiel non linéaire en dimension deux (3.3.1), vérifiant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 3.7

On appelle point stationnaire (ou point d'équilibre ou point singulier) un point $M(x_0,y_0)$ tel que $f(x_0,y_0)=0$ et $g(x_0,y_0)=0$: la solution du système (3.3.1) passant par un tel point est la solution constante $x(t)=x_0$ et $y(t)=y_0$.

Les points stationnaires se situent à l'intersection de l'isocline horizontale et de l'isocline verticale.

Le comportement des trajectoires au voisinage des points stationnaires est particulièrement intéressant.

Exemple 3.6

Les points stationnaires du système

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \\ \dot{y} = \sin y \end{cases} \tag{3.7.1}$$

sont les points de coordonnées $x = k\pi$ et $y = m\pi$, où k et m sont des entiers relatifs.

On distingue deux types de points stationnaires :

Définition 3.8 *[20, 25]*

Un point stationnaire (x_0, y_0) du système (3.3.1)est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$, où $F = (f, g)$, ont la partie réelle non-nulle. Dans le cas contraire, il est dit non-hyperbolique.

- *Si au moins une des deux valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$ est nulle, on parle d'un point stationnaire dégénéré.*
- *Si une seule valeur propre de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$ est nulle, on dit dans ce cas que le point stationnaire est semi-hyperbolique.*
- *Si les deux valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$ sont nulles, la singularité est dite non élémentaire.*

3.8 Portrait de phase

Nous allons étudier la façon dont les trajectoires du système (3.3.1) s'organisent dans le plan et notamment comment elles se comportent près des points où $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ s'annulent simultanément, c'est-à dire près des points stationnaires.

Définition 3.9

On appelle portrait de phase d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.

Exemple 3.7

Considérons le système différentiel de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = y - x - 2 \\ y = x^2 - y \end{cases} \tag{3.8.1}$$

Les points stationnaires, les isoclines, le champ de vecteurs et les trajectoires du système (3.8.1) sont illustrés sur le portrait de phase représenté sur la figure suivante :

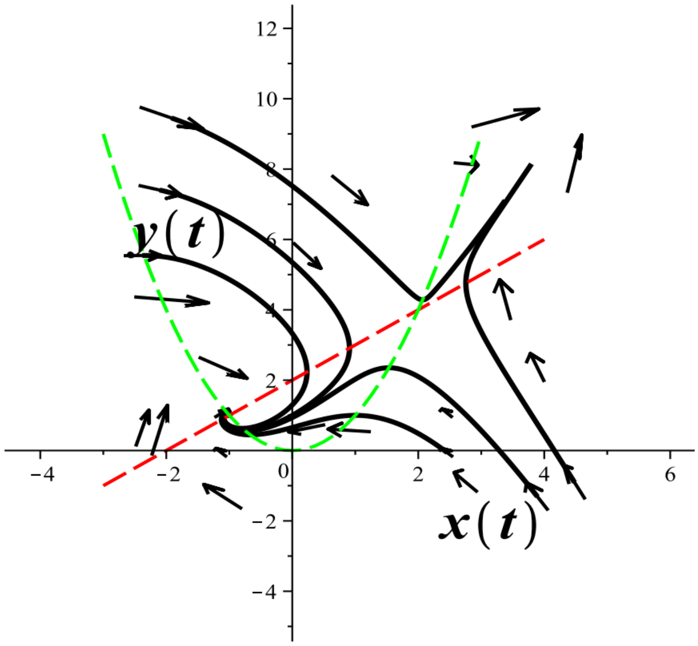

FIGURE 3.3 – Portrait de phase du système 3.8.1.

3.9 Systèmes linéaires homogènes

3.9.1 Position du problème

Considérons le système différentiel linéaire homogène du plan

$$\dot{X} = AX \tag{3.9.1}$$

où A est une matrice carré d'ordre deux, à coefficients constants dans $\mathbb{R}$.

Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'équation (3.9.1) s'écrit

$$\begin{cases} x^{\cdot} = ax + by \\ y^{\cdot} = cx + dy \end{cases} \tag{3.9.2}$$

Chaque solution $(t, x(t), y(t))$ de (3.9.2) est l'équation paramétrée d'une courbe du plan (x, y). Cette courbe est la trajectoire de la solution $(t, x(t), y(t))$.

Le point $(0, 0)$ est toujours un point stationnaire des systèmes différentiels linéaires homogène du plan. C'est la trajectoire de la solution nulle $(x(t) = 0, y(t) = 0)$. Si la matrice A est inversible (c'est à dire si zéro n'est pas une valeur propre de$A$), c'est même le seul point stationnaire de (3.9.2). Les autres trajectoires sont des courbes qui ne passent pas par l'origine.

Exemple 3.8

Considérons le système

$$\begin{cases} x^{\cdot} = -\frac{1}{3}x + 4y \\ y^{\cdot} = -y \end{cases} \tag{3.9.3}$$

Les valeurs propres de la matrice associée au système (3.9.3) *sont* (-1) *et* $(-1/3)$. *L'origine est donc un nœud attractif* (*figure* 3.4).

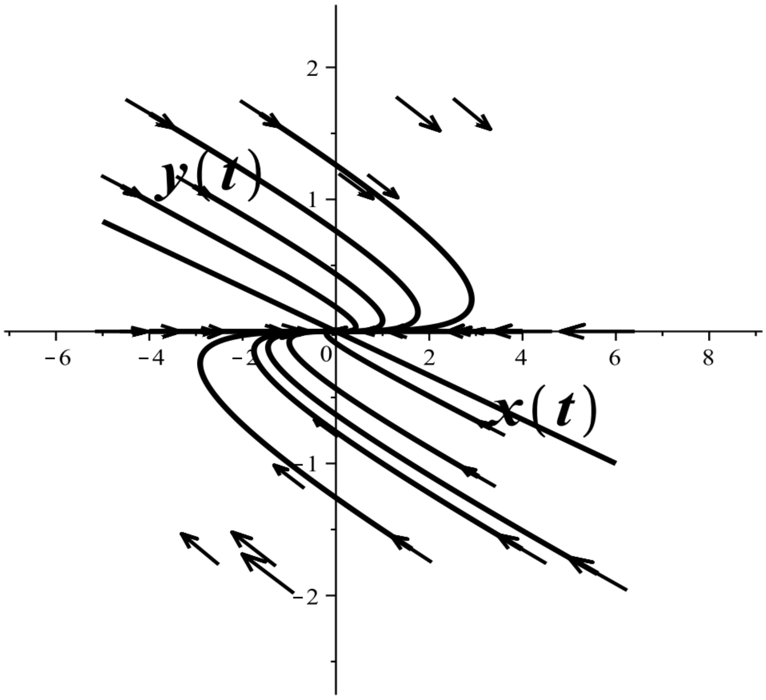

Figure 3.4 – Portrait de phase du système (3.9.3).

3.10 Champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 3.10

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. Un champ de vecteurs sur U est une application $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Les fonctions $v_1, v_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont appelées les composantes du champ de vecteur.

Exemple 3.9 *pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, l'application*

$$v_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.10 - *Prenons $U = \mathbb{R}^2$.*

- *Le champ de vecteurs constant $v_0(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et les champs de vecteurs $v_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ et $v_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 \end{pmatrix}$*

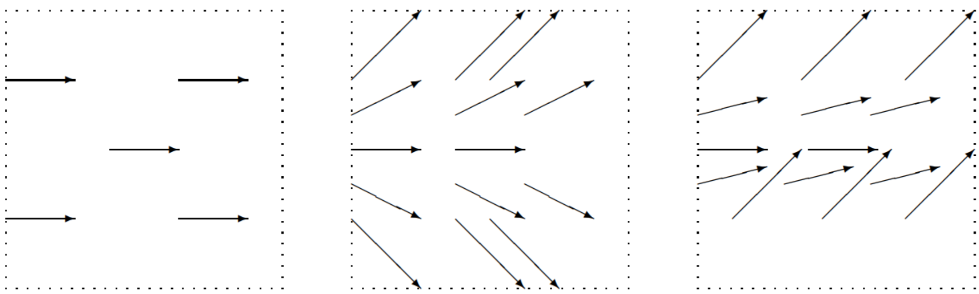

FIGURE 3.5 – Le champ de vecteurs v_0, v_1 et v_2

- *Le champ de vecteurs $v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.*

Définition 3.11 ***(Équation différentielle associée à un champ de vecteurs)***

Soient U une partie de $\mathbb{R}^2$ et v un champ de vecteurs sur U. Fixant un point $u_0 = (x_0, y_0)$ de U et un réel t_0, on lui associe l'équation différentielle $X'(t) = v(X(t))$ avec la condition initiale $X(t_0) = u_0$, c.-à-d. on cherche une fonction dérivable

$$X : I \longrightarrow U, \quad t \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

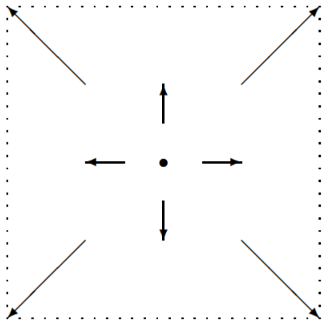

FIGURE 3.6 – Le champ de vecteurs v

telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} X\left(t_0\right) = u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \forall t \in I, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = v(X(t)) = \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t)) \\ v_2(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

où I est un intervalle ouvert contenant t_0. Ceci équivaut donc au système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = v_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = v_2(x_1(t), y(t)) \end{array} \right.$$

*avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. Dans ce cas, on dit que l'application $I \longrightarrow U, t \longmapsto X(t)$ est une **courbe intégrale** du champ de vecteurs v, passant par le point u_0 au temps t_0.*

Définition 3.12 *On dit que le point $u_0 \in U$ est un point **stationnaire** du champ de vecteurs v si $v(u_0) = 0$. Dans ce cas, la fonction constante $X : \mathbb{R} \longrightarrow U$, $t \longmapsto u_0$ est une courbe intégrale de v passant par u_0.*

Chapitre 4

Étude qualitative des solutions de l'équation différentielle d'Emden-Fowler

L'équation différentielle d'Emden-Fowler

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2d\theta}{\xi d\xi} + \theta^n = 0, \quad n \in]0, \infty[\tag{4.0.1}$$

a fait l'objet d'un grand nombre de travaux[6]. Cette équation apparaît également dans des travaux récents consacrés à des généralisations non linéaires de l'équation d'ondes en mécanique quantique [18, 21].

Le changement de variables

$$u = -\frac{\xi\theta^n}{\theta'}, v = -\frac{\xi\theta'}{\theta}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\xi},$$

permet de ramener (4.0.1) à l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v(u+v-1)}{u(u+nv-3)}, \quad n \in]0, \infty[, \tag{4.0.2}$$

ce qui suggère l'emploi des méthodes qualitatives [14] pour la discussion, dans le plan, des trajectoires de cette équation. Une telle étude a été partiellement réalisée par C.W.Jones en [10] 1953.

Les chercheurs M. Lefranc et J. Mawhin ont repris ce problème [19] en étudiant la nature des points singuliers de (4.0.2) au moyen de méthodes qualitatives et en complétant ces résultats par une détermination du portrait topologique des trajectoires au moyen de la méthode des isoclines.

4.1 Quelques résultats sur la nature des points singuliers des système différentiels autonomes du second ordre

Définition 4.1

On appelle point singulier d'un système différentiel autonome du second ordre

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

ou de l'équation du premier ordre correspondante

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

toute solution (x_0, y_0) *du système*

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0.$$

Une simple translation permettant toujours de ramener un point singulier donné à l'origine des coordonnées, considérons le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(x, y) \tag{4.1.1}$$

ou a, b, c, d sont des constantes réelles et $f(x, y)$ et $g(x, y)$ des fonctions réelles de classe C^1 par rapport à x et y dans un voisinage du point (0.0) de R^2 et telles que

$$f(x, y) = 0(r^2), \quad g(x, y) = 0(r^2)$$

lorsque

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Ce système possède donc l'origine des coordonnées pour point singulier et la nature de cette singularité peut être déterminée dans de nombreux cas.

Théorème 4.1 *[4, 22]*

Si $D = ad - bc \neq 0$ *et si on n'a pas simultanément* $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc < 0$ *et* $a + d = 0$, *la nature du point singulier à l'origine de* (4.1.1) *est la même que celle du point singulier à l'origine du système linéarise*

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{4.1.2}$$

Si $D \neq 0$ et si on a simultanément $\Delta < 0$ et $a + d = 0$, on peut toujours, par un changement de variables linéaire, ramener (4.1.1) à un système de la forme

$$\frac{dx}{dt} = y + F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + G(x, y)$$

où $F(x, y)$ et $G(x, y)$ satisfont aux mêmes hypothèses que $f(x, y)$ et $g(x, y)$. Lorsque F et G sont des polynômes homogènes du second degré, la nature du point singulier à l'origine est complètement déterminée par le théorème suivant [7] :

Théorème 4.2

Le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = y + Bx^2 + (2C + \beta)xy + Dy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x + Ax^2 + (2B + \alpha)xy + Cy^2$$

possède un centre à l'origine si et seulement si une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. $A + C = B + D = 0$
2. $\alpha(A + C) = \beta B(B + D); A\alpha^3 - (3B + \alpha)\alpha^2\beta + (3C + \beta)\alpha\beta^2 - D\beta^2 = 0$
3. $\alpha + 5(B + D) = \beta + 5(A + C) = AC + BD + 2(A^2 + D^2) = 0.$

Si $D = 0$ et $|a| + |b| + |c| + |d| \neq 0$, on peut toujours, par une transformation linéaire portant sur x, y et t, ramener le système (4.1.1) à l'une des deux formes

$$\frac{dx}{dt} = x + F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \tag{4.1.3}$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = y + F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \tag{4.1.4}$$

où les fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ satisfont aux mêmes hypothèses que $f(x, y)$ et $g(x, y)$. Seul le premier cas étant utilisé dans ce travail.

Théorème 4.3 [15, 24]

Si l'origine est un point singulier isolé du système (4.1.3), alors, dans le plan (x, y) :

a) il existe deux et seulement deux trajectoires respectivement tangentes en 0 à $0x$ pour $x \longrightarrow 0-$ et $x \longrightarrow 0+$ et nous désignerons par L la courbe correspondante ;

b) ω étant un voisinage de l'origine, la courbe L divise ω en deux sous-ensembles ω_1, et ω_2, situés respectivement au-dessus et en dessous de L et tels que :

1. ou bien toutes les trajectoires situées dans ω_1 ou ω_2 sont paraboliques, c'est-à-dire tangentes en 0 à $0y$.

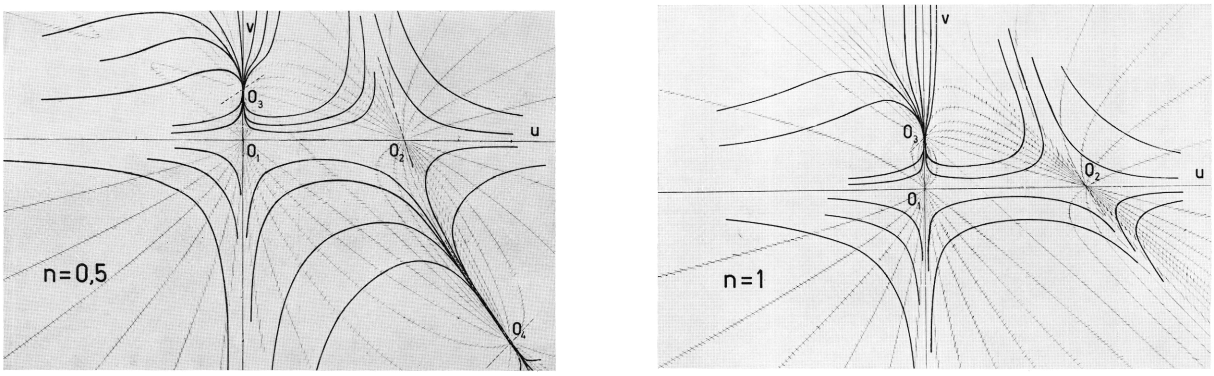

FIGURE 4.1 –

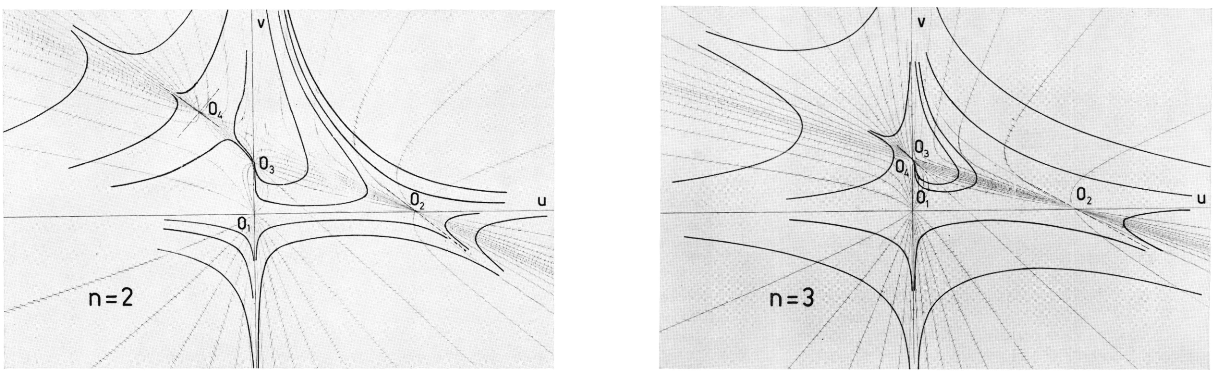

FIGURE 4.2 –

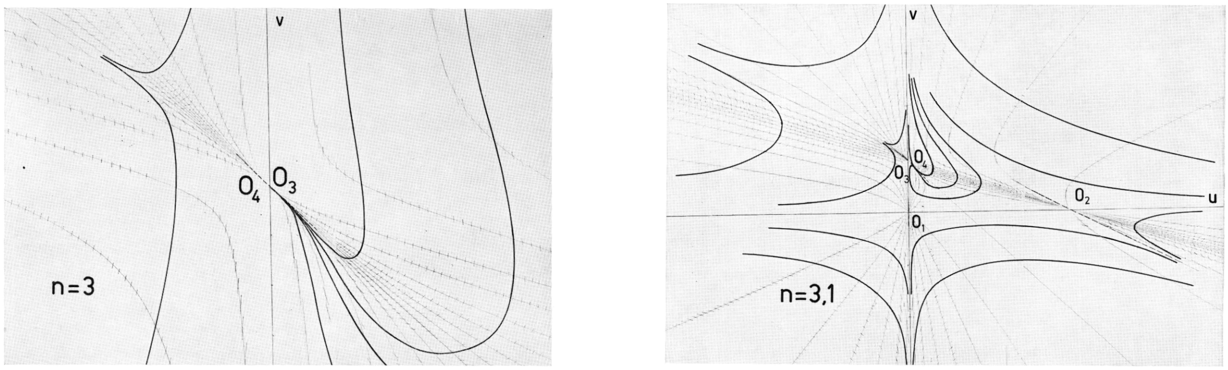

FIGURE 4.3 –

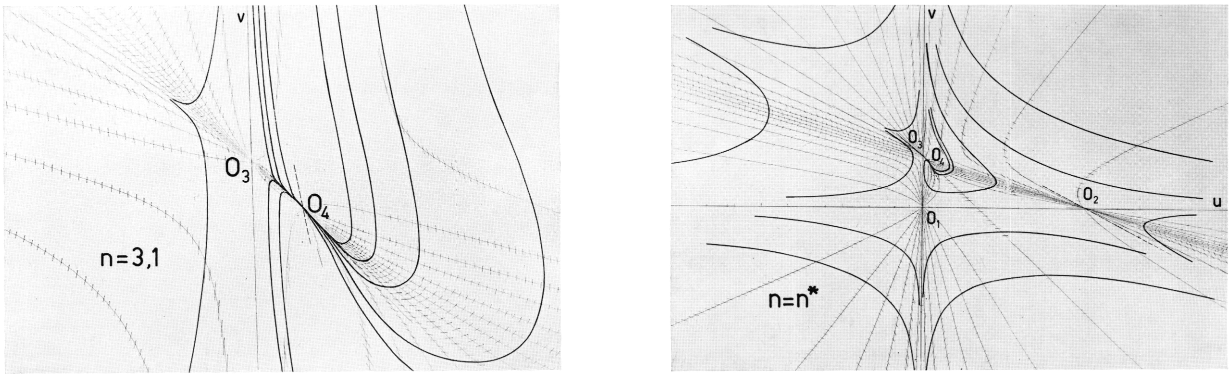

FIGURE 4.4 –

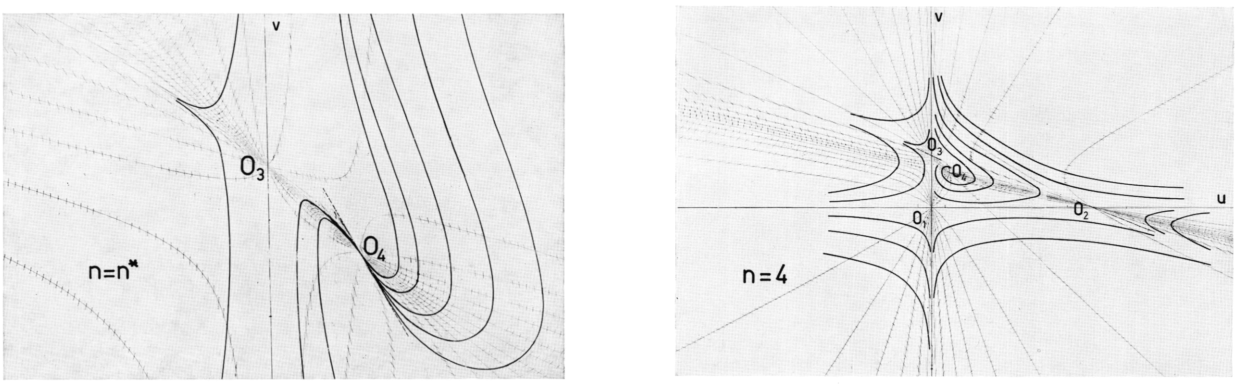

FIGURE 4.5 –

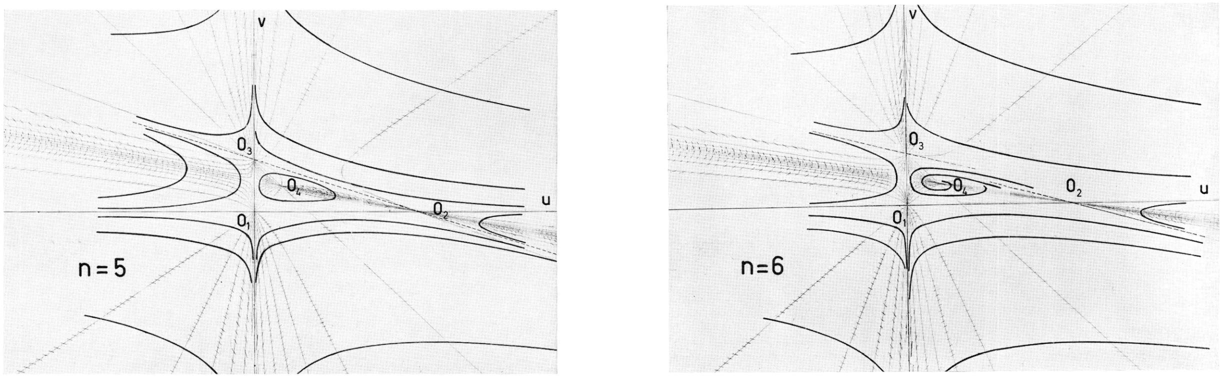

FIGURE 4.6 –

2. *on bien une seule trajectoire est parabolique et les autres hyperboliques, c'est-à-dire n'appartiennent à ω_1 ou ω_2 que pour des valeurs de t contenues dans un intervalle borné ;*

c) *J_0 étant la courbe d'équation $x+ F(x,y) = 0$ et ω_{11} (resp.ω_{12}) le sous-ensemble de ω_1 limité par l'arc de courbe L dont les points ont des abscisses négatives (resp. positives) et par l'arc de J_0, dont les points ont des ordonnées positives, si, en passant de ω_{11} à ω_{12} à travers J_0 la fonction*

$$p(x,y) \equiv \frac{x + F(x,y)}{G(x,y)}$$

passe de valeurs négatives (resp. positives) à des valeurs positives (resp. négatives), les trajectoires sont du type $b-1$ (resp. $b-2$) dans ω_1. La conclusion inverse est valable dans ω_2.

Lorsque les trajectoires sont de type différent dans ω_1 et ω_2, la singularité est dite un col-nœud.

Conclusion

En conclusion, l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires nous permet d'approfondir notre compréhension de ces équations et de leurs solutions. Les différents chapitres nous guident à travers les notions de base, les méthodes de résolution numérique, l'analyse qualitative des solutions et l'étude spécifique de l'équation d'Emden-Fowler.

En comprenant les concepts fondamentaux dans le premier chapitre, nous sommes préparés à explorer les exemples de résolution numérique dans le deuxième chapitre, ce qui nous permet d'obtenir des solutions approximatives pratiques. Ensuite, l'étude qualitative des solutions dans le troisième chapitre nous donne une vision plus profonde du comportement des solutions.

Enfin, l'étude de l'équation d'Emden-Fowler dans le dernier chapitre nous permet de développer des techniques spécifiques pour analyser et comprendre les solutions d'une équation non linéaire d'importance. Dans l'ensemble, cette étude qualitative nous donne une perspective plus riche sur les équations différentielles, ce qui est essentiel pour résoudre des problèmes complexes dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie.

Bibliographie

[1] Arslan, S. (2005). L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S : est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ? (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).

[2] Barton, J. M., & Yoon, S. K. (2005, July). Finite difference solution of the 3-D Euler equations using a multistage Runge-Kutta method. In Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics : Proceedings of the Conference Held at the Beijing Science Hall, Beijing, China June 23–27, 1986 (pp. 108-112). Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg.

[3] Benzoni-Gavage, S. (2021). Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés. Dunod.

[4] CESARI, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer Verlag, Berlin, 2nd ed., 1963.

[5] Chatterji, S. D. (1998). Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles (Vol. 3). PPUR presses polytechniques.

[6] CHANDRASEKHAR, S., An introduction to the study of stellar structure, Dover, New York, 1958.

[7] Coppel, W. A. (1966). A survey of quadratic systems. Journal of Differential Equations, 2(3), 293-304.

[8] Demailly, J. P. (2006). Analyse numérique et équations différentielles (pp. 237-243). Les Ulis : EDP sciences.

[9] Florent, P., Lauton, M., & Lauton, G. (1978). Équations et systèmes différentiels (Vol. 4). Vuibert.

[10] Jones, C. W. (1953). On reducible non-linear differential equations occurring in mechanics. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 217(1130), 327-343.

[11] Hale, J. K., & Hale, J. K. (1977). Retarded functional differential equations : basic theory. Theory of functional differential equations, 36-56.

[12] Hale, J. K., & Lunel, S. M. V. (2013). Introduction to functional differential equations (Vol. 99). Springer Science & Business Media.

[13] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. (2012). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press

[14] Hurewicz, W. (1990). Lectures on ordinary differential equations. Courier Corporation.

[15] Keil, K. A. (1955). Das qualitative Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlicher Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 57, 111-132.

[16] Khalil. H.K,. Nonlinear Systems. Macmillan, New York, 3e edition, 2002.

[17] Krasnov, M. L., Kissélev, A., & Makarenko, G. I. (1981). Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires.

[18] KURDGELAIDZE, D.P., Sur la solution des équations non linéaires de la théorie des champs physiques, Cahiers de Physique, n 128, 1961.

[19] Lefranc, M. Mawhin, J. (1969). Etude qualitative des solutions de l'équation différentielle d'Emden-Fowler. Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, 55(1), 763-770.

[20] Perko, L. (2013). Differential equations and dynamical systems (Vol. 7). Springer Science Business Media.

[21] PIAU, G. (1960). Les généralisations non linéaires des équations d'ondes de la mécanique ondulatoire. Cahiers de physique, (113).

[22] Poincaré, H. (1951). Sur les courbes definies par les équations differentielles : Oeuvres.

[23] Trélat, E. (2012). Contrôle optimal et applications à l'aérospatiale : quelques résultats et défis. Journal of Optimization Theory and Applications, 154, 713-758.

[24] Volosov, V. M. (1966). Non-linear differential equations : G. Sansone and R. Conti,(Translated from the Italian), Pergamon Press. Oxford, 536 pp., 1964. Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 6(3), 604-605.

[25] Wiggins, S., Wiggins, S., Golubitsky, M. (2003). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (Vol. 2, No. 3). New York : Springer.