RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnel et Équations Différentielles »

Présenté Par :
SAAD SOUMIA **et** LAROUSSI ASMA

Sous L'intitulé :

Études de quelques problèmes d'équations différentielles d'ordre arbitraire

Soutenu publiquement le 04 / 07 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr KHEIREDDINE BENIA	MCB	Université de Tiaret	Président
Mr HAMMOU BENMEHIDI	MCB	Université de Tiaret	Encadreur
Mr TAYEB MAHROUZ	MCB	Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donnée la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce travail.
Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de :
Mr Hammou BENMEHIDI ,
On le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire
Nous remercions également le président du jury
Tayeb MAHROUZ ,
et l'examinateur Abderahmen BENIA
d'avoir accepté d'évaluer ce travail.
Nous voulons, à cette occasion avec le plus grand honneur, remercier
Sincèrement tous nos enseignants. Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères
Gratitudes aux personnes qui ont vraiment contribué à l'élaboration de la présente de cet mémoire.
Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.

Merci à tous !

Dédicace

♥ Je dédie ce mémoire avec fierté, amour et une immense joie, à
Mes parents MOKHTAR et YAMINA, la prunelle de mes yeux
Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour et le respect que j'ai pour Vous,
Je voudrais vous remercier pour votre soutien et vos sacrifices tout au long de ces années,
Je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de Santé, je vous aime et que dieu vous garde pour moi.

♥ À mon cher frère Ibrahim mon amour et mon soutien
Que Dieu le protège.

♥ À mon cher mari Saadellah Qui était toujours à mes côtés, Que Dieu le protège

♥ À ma chère binôme Asma qui a été toujours à mes côtés tout au long de Ce chemin.

♥ Je le dédie également à tous mes proches et à tous ceux que J'aime.

♥Soumia♥

Dédicace

♥Je dédie cet travail
A mes chers parents Ahmed et Chikha qui ont sacrifié leur vie pour mon succès et éclairé le chemin de leur judieux.
♥A mes chères sœurs Hadjar, Hind et ses enfants Pour ses soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études.
♥A mon cher frère Boubakeur et sa femme Khadîdja et ses enfants pour leur appui et leur encouragement,
♥Kadeer kadi Merci d'être toujours là pour moi.
♥A ma chère binôme Soumia pour sa patience et sa compréhension tout au long de ce mémoire.
♥A mes fidèles amies Sara, Manel Chaima et Ikram , Soumia pour leur aides et supports dans les moments difficiles.
A ma cousine Chaima merci pour ce que tu m as apporté
A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

♥Asma♥

Résumé

Dans ce travail, on tudie les rsultats l'existence et l'unicit des solutions pour les quations diffrentielles fractionnaires avec la drive de Caputo-Katugampola. Ces rsultats sont tablies en utilisant les thormes des point fixes de Leray-Schauder , de Krasnoselskii et le principe de contraction de Banach. Un exemple illustratif est prsent pour valid les rsultats thoriques obtenus.
Mots cls : Caputo-Katugampola, existence et unicit, point fixe.

Abstract

In this work, we study results on the existence and uniqueness of solutions for fractional differential equations with the Caputo-Katugampola derivative. These results are established using the Leray-Schauder and Krasnoselskii fixed point theorems and the Banach contraction principle. An illustrative example is presented to validate the theoretical results obtained.
Key words : Caputo-Katugampola, existence and uniqueness, fixed point.

Introduction gnrale

Aujourd'hui, le calcul fractionnaire est un outil essentiel dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Il permet de modliser des phnomnes avec des proprits de dpendance non entires, ouvrant ainsi de nouvelles possibilits pour la comprhension et l'analyse des systmes complexes. Le calcul fractionnaire continue d'tre une zone active de recherche, avec de nouvelles applications et dveloppements thoriques en constante volution.
Les quations diffrentielles d'ordre fractionnaire constituent un outil efficace pour modliser divers processus intervenant dans les sciences et l'ingnierie, pour plus de dtails vous pouvez consulter [23], [28], [31]. Les drives d'ordre fractionnaire interpolent les drives d'ordre entier en drives d'ordre rel (pas ncessairement fractionnaire) ou complexe. Il existe plusieurs types de drives fractionnaires qui ne sont pas toujours quivalentes. La premire tentative de dveloppement systmatique du calcul fractionnaire a t entreprise par Liouville (1832) et Riemann (1847) dans la premire moiti du XIXe sicle, mme si des discussions sur les drives d'ordre non entier avaient t entames depuis longtemps. Dans les annes 1870, Letnikov et Grunwald ont utilis indpendamment une approche diffrente de celle de Riemann et Liouville pour la dfinition de la drive et de l'intgrale d'ordre fractionnaire.

L'mergence du calcul fractionnaire, galement connu sous le nom de calcul des drives et intgrales fractionnaires, a une histoire riche et complexe. Ses origines remontent aux travaux pionniers de Newton et Leibniz sur le calcul diffrentiel et intgral au XVIIe sicle. Cependant, ce n'est que plus tard, grce aux contributions de mathmaticiens tels que Liouville, Riemann, Grunwald, Letnikov et Caputo, que le calcul fractionnaire a pris forme en tant que discipline distincte. Liouville a introduit les drives fractionnaires gnralises, connues sous le nom de drives de Riemann-Liouville, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour la modlisation de phnomnes non entiers. Les approches de Grunwald et Letnikov, bases sur des approximations discrtes, ont facilit la rsolution numrique des quations diffrentielles fractionnaires. Caputo, quant lui, a propos la drive de Caputo, une alternative la drive de Riemann-Liouville qui s'est rvle plus adapte la modlisation pratique.

Depuis ces dveloppements, le calcul fractionnaire a continu voluer et susciter un intrt croissant. De nouvelles dfinitions de drives fractionnaires ont merg, telles que la drive de Katugampola et Caputo-Katugampola, qui offrent une approche diffrente et de nouvelles perspectives pour rsoudre les problmes complexes. Vous pouvez consulter les rfrences [18], [20], [21] pour plus de dtailles.

Ce document est organis en trois chapitres :
Dans le premire chapitre, nous commenons par exposer quelques notions d'analyse fonctionnelle. Ensuite, nous mettons en vidence l'importance de certains thormes du point fixe dans notre travail. Nous rappelons galement les dfinitions et les proprits essentielles de certaines fonctions spciales, telles que la fonction Gamma et la fonction Bta. Enfin, dans la dernire section, nous explorons les diffrentes approches des oprateurs fractionnaires.

Dans le deuxime chapitre, nous commenons par prsenter les dfinitions des oprateurs fractionnaires gnraliss de Katagumbola, en mettant en vidence certaines de leurs proprits essentielles qui jouent un rle majeur dans notre travail. Ensuite, nous clturons cette section en exposant l'approche des drives fractionnaires de type Caputo-Katagumbola, tout en prsentant quelques-unes de ses proprits.

Dans le troisime chapitre, nous nous consacrons l'tude des rsultats d'existence et d'unicit de solutions pour un problme aux limites impliquant une quation diffrentielle fractionnaire de type Caputo-Katagumbola. Cette quation est de la forme :

$$\begin{cases} D^{\alpha;\rho}_{a+}u(t) = f(t, u(t)), \ t \in I = [a, b] \\ u(a) + u(b) = \theta, \end{cases}$$

o ${}^{C}D^{\alpha,\rho}_{a+}$ est la drive fractionnaire de type Caputo-Katagampola d'ordre $\alpha \in]0, 1]$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donne et θ un nombre rel.

Table des matières

Chapitre 1

PRLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous prsentons des notations, des dfinitions, des concepts prliminaires et quelques notions d'analyse fonctionnelle qui seront utiliss par la suite dans ce mmoire. Ces notions de base sont couramment abordes dans $[13], [14], [23], [24], [28]$.

1.1 Notations et dfinitions

On a $\mathbb{N}$ un ensemble d'entiers naturels $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
L'ensemble des nombres rels est not par $\mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres complexe est not par C.
Soit $[a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}_0$. On note par $C^n([a, b])$ l'espace de fonctions f $n-$fois continuellement diffrentiables sur $[a, b]$ avec la norme*

$$\|f\|_{C^n([a,b])} = \sum_{k=0}^{n} \underset{x\in[a,b]}{sup} \left|f^{(k)}(x)\right|, n \in \mathbb{N}_0.$$

En particulier, pour $n = 0, C^0([a, b]) = C([a, b])$ est l'espace de fonctions continues sur $[a, b]$ avec la norme

$$\|f\|_{C([a,b])} = \underset{x\in[a,b]}{sup} |f(x)|.$$

Définition 1.1.2 *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$. On dsigne par $L^p([a, b])$ lespace des* *classes dquivalence de fonctions de puissance p-intgrables sur $[a, b]$ valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$L^p([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{C}, \|f\|_p < \infty \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_{[a,b]} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, p < +\infty \\ \|f\|_\infty &= ess \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| . \end{aligned}$$

Définition 1.1.3 *On note par $AC([a, b])$ lespace des fonctions absolment continues sur $[a, b]$ constitu des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables i .e :*

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a, b]) \text{ tel que } f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Définition 1.1.4 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $AC^n([a, b])$, l'espace de fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui ont des drives continues sur $[a, b]$ jusqu lordre $(n - 1)$ et telles $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$, i.e. :*

$$AC^n([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : f^{(k)} \in C([a, b]), k \in \{0, 1, .., n-1\} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \right\}.$$

Pour $\rho > 0$, introduisons la notation δ_ρ pour la drive dfinie par $\delta_\rho := t^{1-\rho} \dfrac{d}{dt}$.

Définition 1.1.5 *$AC_\rho^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}, \rho > 0$ est l'espace des $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui ont des drives δ_ρ jusqu' l'ordre $(n - 1)$ et $\delta_\rho^{n-1} f$ est absolument continue sur $[a, b]$:*

$$AC_\rho^n[a, b] := \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : \delta_\rho^{n-1} f \in AC[a, b], \delta_\rho = t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right\}.$$

Remarque 1.1.1 *Si $\rho = 1$ et $n = 1$, l'espace $AC_1^1[a, b]$ concide avec $AC[a, b]$.*

L'espace $AC_\rho^n[a, b]$ est caractris par le rsultat suivant.

Définition 1.1.6 *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|_{\mathrm{E}})$ *un espace vectoriel norm. Une application* $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *est dite :*

1. Lipschitzienne avec $k > 0$. Si pour tout x, y de E, nous avons :

$$\|\mathrm{T}x - \mathrm{T}y\|_{\mathrm{E}} \leq k\|x - y\|_{\mathrm{E}}$$

   La constante k est dite de Lipschitz.

2. Contractante si elle est k-Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$, ici k est appele constante de contraction.

Définition 1.1.7 *Soit* T *une application dans un espace vectoriel* E *dans lui mme. Un lment* $x \in \mathrm{E}$ *est un point fixe de* T *si* $\mathrm{T}x = x$.

Définition 1.1.8 *Soit* E *et* F *deux espaces de Banach. Un oprateur continu* $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est dit compltement continu s'il transforme tout born de E en une partie relativement compacte dans* F.

Définition 1.1.9 *Soient* (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces mtriques. Une famille* $\mathcal{A}$ *de fonctions continues de* E *dans* F *est dite quicontinue en* $x \in E$ *si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{A}\ \forall x' \in E\ d_E(x, x') < \delta \Rightarrow\ d_F(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

$\mathcal{A}$ *est dite uniformment quicontinue si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{A}\ \forall x, x' \in E\ d_E(x, x') < \delta \Rightarrow\ d_F(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Théorème 1 $(Ascoli - Arzel)$
Soit E *un espace compact. Si* $\mathcal{A}$ *est un sous-ensemble quicontinu et born de* $\mathcal{C}(E)$, *alors* $\mathcal{A}$ *est relativement compact.*

1.2 Thormes de Point Fixe

1.2.1 Alternative non linaire de Leray-Schauder.

L'alternative non linaire de Leray-Schauder est un outil puissant utilis dans l'analyse fonctionnelle et la thorie des quations aux drives partielles. Elle permet de prouver l'existence de solutions pour des problmes non linaires en tablissant l'existence d'un point fixe pour une application continue. Cette alternative trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que les problmes aux limites.

Théorème 1.1 *(Leray-Schauder Nonlinear Alternative). Soit E un espace de Banach et $\Omega \subseteq E$ un ensemble ferm et convexe. Supposons que K un sous-ensemble relativement ouvert de Ω avec $0 \in K$ et que $T : \bar{K} \longrightarrow \Omega$ soit une application continue et compacte. Alors, soit*

1. *T a un poit fixe dans $\bar{K}$, ou*
2. *Il existe $x \in \partial K$ tel que $x = \lambda T x$ pour certains $\lambda \in (0, 1)$.*

Théorème 1.2 *Soient* E *un espace de Banach et* $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *un oprateur compltement continu . Si l'ensemble* $\mathrm{V} = \{x \in \mathrm{E} : x = \mu \mathrm{T} x, 0 < \mu < 1\}$ *est born, alors* T *admet au moins un point fixe dans E.*

1.2.2 Principe de Contraction de Banach

Le principe de contraction de Banach qui garantit l'existence d'un point fixe pour une contraction est le plus connu des thormes de point fixe.

Théorème 1.3 *Si E est un espace mtrique complet non vide, et $T : E \to E$ est un oprateur contractant, alors T possde un unique point fixe $x \in E$*

1.2.3 Théorème du point fixe de krasnoselskii

Théorème 1.4 *Soit X un espace de Banach, Ω un sous-ensemble convexe ferm et born de X et soit T_1, T_2 deux applications de Ω dans X telles que $T_1 x + T_2 y \in \Omega$ pour toute paire $x, y \in \Omega$. Si T_1 est une contraction et T_2 est compltement continue, alors l'quation $T_1 x + T_2 x = x$ a une solution sur Ω.*

1.3 Fonctions spciales

Dans cette section, nous prsentons certains des concepts de base lis aux fonctions spciales, telles que la fonction Gamma et la fonction Beta qui ont un rle fondamental dans le calcul fractionnaire. Pour plus de dtails sur ces fonctions, veuillez consulter.

1.3.1 La fonction Gamma

Définition 1.3.1 *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Rez > 0$. La fonction $\Gamma(z)$ est dfinie par l'integrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

Remarque 1.3.1 *Lintgrale de Gamma converge absolument sur le demi-plan rel o x est strictement positif*

Quelques proprits de la fonction $\Gamma(z)$ sont donnes par le thorme suivant :

Proposition 1.3.1 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $Rez > 0$*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.3}$$

Dmonstration. Une simple intgration par parties dans le domaine $Rez > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} z t^{z-1} dt \\ &= \left[e^{-t} t^z\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} t^z dt \\ &= 0 + \Gamma(z+1) \\ &= \Gamma(z+1). \end{aligned}$$

D'aprs la formule (1.2), on a

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3.2.1.\Gamma(1) \\ &= n!\Gamma(1) \\ &= n!. \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 $\Gamma(1) = 1$

Exemple 1.3.2 *Calculons* $\Gamma(1)$.
Nous avons, d'aprs la dfinition (1.1),

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1.$$

Proposition 1.3.2 *Soit* $x > 0$. *La fonction* Γ *est donne par*

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^{2x-1} \, \mathrm{d}t \tag{1.4}$$

Dmonstration. Dans la dfinition (1.1), on pose $t = u^2$, de sorte que $dt = 2udu$; quand $t = 0, u = 0$ et quand $t = \infty, u = \infty$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \left(u^2\right)^{x-1} 2u \, \mathrm{d}u \\
&= 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} u^{2x-1} \, \mathrm{d}u \\
&= 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^{2x-1} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.3 *Soit* $x, y > 0$. *On a*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta \mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} \tag{1.5}$$

Dmonstration. Nous prouvons ce rsultat en considrant la double intgrale

$$I = \iint_R \exp\left(-t^2 - u^2\right) t^{2x-1} u^{2y-1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u$$

Premirement, nous avons

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^\infty \exp\left(-t^2 - u^2\right) t^{2x-1} u^{2y-1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^{2x-1} \mathrm{d}t \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} u^{2y-1} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(x) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(y) \quad \text{(en utilisant proposition 1.5.2)} \\
&= \frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(y).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

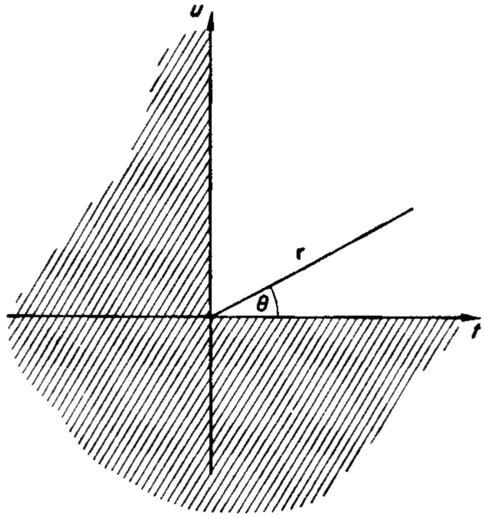

FIGURE 1.1 –

Ensuite, on passe aux coordonnes polaires $t = r\cos\theta, u = r\sin\theta$. Alors on aura

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \exp\left(-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right)(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1} r \;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r^2} r^{2x-1}\cos^{2x-1}\theta r^{2y-1}\sin^{2y-1}\theta r \;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{2(x+y)-1}\;\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{1.7}$$

Les des deux formules (1.6) et (1.7) pour I conduit immdiatement au rsultat requis.

Proposition 1.3.4 *On a*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Dmonstration.

On pose $x = y = \dfrac{1}{2}$ dans la formule (1.5), alors on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \;\mathrm{d}\theta &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2, \end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $\Gamma(1) = 1$).

En effectuant l'intgration sur le ct gauche, on obtient

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

d'o

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1.4 La fonction Bta

Définition 1.4.1 *Soit $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $Rez > 0$ et $Rew > 0$. La fonction Bta, note $B(z, w)$, est dfinie par :*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \tag{1.8}$$

Proposition 1.4.1 *Soit $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $Rez > 0$ et $Rew > 0$. La fonction Bta est donne par*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{1.9}$$

Dmonstration. Posant $t = \cos^2\theta$ dans la formule (1.8), alors $dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$; galement, lorsque $t = 0, \cos\theta = 0$, donc $\theta = \pi/2$ et quand $t = 1, \cos\theta = 1$ alors $\theta = 0$. Par consquent, nous avons :

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_{\pi/2}^0 \left(\cos^2\theta\right)^{x-1}\left(\sin^2\theta\right)^{y-1} \cdot -2\cos\theta\sin\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta \\ &= 2\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.2 *La fonction Bta est symtrique i.e, pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $Rez, Rew > 0$, on a*

$$B(z, w) = B(w, z) \tag{1.10}$$

Dmonstration. Ce rsultat est une consquence immdiate de la proposition (1.4.1).

Proposition 1.4.3

$$\begin{aligned} &(i)\ B(z+1,z) = \frac{z}{z+w}B(z,w). \\ &(ii)\ B(z,w+1) = \frac{w}{z+w}B(z,w). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dmonstration.

(i) On a

$$B(z+1,w) = \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(w)}{\Gamma(z+1+w)}.$$

D'aprs la formule (1.2) de la proposition (1.3.1), on obtient

$$B(z+1,w) = \frac{z\Gamma(z)\Gamma(w)}{(z+w)\Gamma(z+w)}.$$

En utilisant la formule (1.4.1) de la proposition (1.9), on trouve

$$\begin{aligned} B(z+1,w) &= \frac{z}{z+w}\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \\ &= \frac{z}{z+w}B(z,w). \end{aligned}$$

(ii) La dmonstration de cette proprit se fait de la mme mthode que (i).

1.5 Intgrales et drives fractionnaires

L'objectif de cette section est de prsenter quelques approches des intgrales et des drives fractionnaire les plus importantes y compris leurs proprits, pour plus de dtailles sur ces approches voir [23, 28, 31, 33].

1.5.1 Intgrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5.1 *Soit $\alpha > 0$. L'oprateur $I^{\alpha}_{a^+}$ dfini sur $L^1[a,b]$ par*

$$I^{\alpha}_{a^+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)}f(s)ds, \quad t > a. \tag{1.12}$$

est appel intgral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

Proposition 1.5.1 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$. Alors l'intgrale $I^{\alpha}f(t)$ existe. De plus, $I^{\alpha}f \in L^1[a,b]$.*

Exemple 1.5.1 *Obtenons la semi-intgration de $f(x)=\sqrt{x}$. On a*

$$\begin{aligned}
I_0^{1/2}\left(\sqrt{x}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \sqrt{y}(x-y)^{\left(\frac{1}{2}\right)-1}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{y}{\sqrt{xy-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{y}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-y^2-\frac{x^2}{4}+2x\left(\frac{y}{2}\right)}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{y}{\frac{x^2}{4}-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Dans (2.13)*, posons $y=\frac{1}{2}(x+x\sin\theta)$, alors on obtient $\mathrm{d}y=\left(\frac{x}{2}\right)(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ et pour $y=0$, on a $\theta=-\frac{\pi}{2}$, et pour $y=x$ on trouve $\theta=\frac{\pi}{2}$. Avec ces valeurs, nous obtenons les tapes suivantes :*

$$\begin{aligned}
I_0^{1/2}\left(\sqrt{x}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\sin^2\theta}}\left(\frac{x}{2}\right)(\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\right)(x+x\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\left[x\theta-x\cos\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi x}{2\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}x
\end{aligned}$$

Proposition 1.5.2 *Les oprateurs $\{I_a^\alpha : L^1[a,b]\to L^1[a,b], \alpha\geq 0\}$ forment un semi-groupe commutatif. L'oprateur identit I_a^0 est l'lment neutre de ce semi-groupe.*

1.6 Drive fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Aprs avoir tabli les proprits fondamentales des oprateurs intgraux de Riemann-Liouville, nous allons prsenter les oprateurs diffrentiels correspondants.

Définition 1.6.1 *Soit f une fonction intgrable sur $[a,b]$ et $\alpha\geq 0$. La drive fractionnaire de*

Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f est dfinie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a^+}f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}f(t)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau, \quad n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Remarque 1.6.1 *Si $f \in C^n([a,b])$ et $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors*

$$ {}^{RL}D^{n}_{a^+}f(t) = f^n(t). \tag{1.15}$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$ {}^{RL}D^{0}_{a^+}f(t) = f(t). \tag{1.16}$$

1.7 Drive fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.7.1 *Soit $f \in AC^n([a,b])$ et $\alpha > 0$. La drive fractionnaire de Caputo d'ordre α est dfinie comme suit*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) &= I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau, \quad n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Remarque 1.7.1 *On tenant compte de la dfinition (2.1), on a :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) := (I^{n-\alpha}_{a^+}D^n f)(t) \tag{1.18}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a

$$ {}^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) := (I^{1-\alpha}_{a^+}D^1 f)(t) \tag{1.19}$$

o

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

1.8 Intgrale Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.8.1 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\alpha > 0$. Lintgrale fractionnaire dordre α au sens de Hadamard de f est dfinie par*

$$J_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s}; \quad t > a. \tag{1.20}$$

1.9 Drive Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.9.1 *Soit $f \in AC^n[a,b]$ et $\alpha > 0$. La drive fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est donne par :*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(t) &= \delta^n J_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s}, \ n = [\alpha] + 1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

o $\delta = t\dfrac{d}{dt}$.

1.10 Drive Fractionnaire au Sens de Caputo-Hadamard

Définition 1.10.1 *Soit $f \in AC^n[a,b]$ et $\alpha > 0$. La drive fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard de la fonction f est donne par :*

$$^{CH}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n f(s) \frac{ds}{s}. \tag{1.22}$$

Chapitre 2

Oprateurs Fractionnaires de Katagumpola

2.1 Introduction

En 2011, Udita N. Katugampola a introduit (voir [18], [20], [21]) de nouveaux oprateurs fractionnaires, qui ont t nomms d'aprs son nom de famille, c'est--dire l'intgrale fractionnaire de Katugampola et la drive fractionnaire de Katugampola. Ces oprateurs dpendent de d'un paramtre supplmentaire $\rho > 0$, qui, en prenant $\rho \to 0^+$, se rduisent aux oprateurs fractionnaires de Hadamard, et pour le paramtre $\rho = 1$ deviennent les oprateurs fractionnaires de Riemann-Liouville. Grce cela, l'utilisation des oprateurs fractionnaires de Katugampola simplifie la thorie. Si nous prouvons quelque chose pour la drive de Katugampola, nous obtenons ce fait la fois pour la drive de Riemann-Liouville et la drive de Hadamard. De nos jours, ces oprateurs sont de plus en plus populaires. La drive fractionnaire de Katugampola est largement discute dans la littrature. Elle trouve des applications dans des domaines tels que la thorie des probabilits [4], akkurt2015generalizedla thorie des ingalits [10], les quations diffrentielles [17], [19], [35], les transformes de Mellin [21], le principe du maximum [9].

Dans ce chapitre, nous donnons les dfinitions des intgrales fractionnaires de Katugampola et des drives fractionnaires sur un intervalle positif fini de la droite relle $[a, b] (0 < a < b < \infty)$.

2.2 Intgrale fractionnaire de Katugampola

Définition 2.2.1 *Soit* $n \in \mathbb{N}, n-1 < \alpha < n, \rho > 0, 0 < a < b < \infty$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intgrable. L'oprateur*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho} f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} f(\tau) d\tau, \quad b < t < a \tag{2.1}$$

est appele intgrale de Katugampola d'ordre fractionnaire α, *condition qu'elle existe.*

Remarque 2.2.1 *En particulier, pour* $\rho = 1$ *et pour* $\rho \to 0^+$

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$
$$\lim_{\rho \to 0^+} \mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

nous obtenons respectivement l'intgrale fractionnaire de Riemman-Liouville et l'intgrale fractionnaire de Hadamard.
et

$$\mathcal{J}_{a+}^{n,1} f(t) = \int_a^t \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(\tau) d\tau dt_{n-1} \dots dt_1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Nous allons maintenant prsenter un exemple qui montre que les oprateurs fractionnaires intgraux de Katugampola sur les fonctions puissances donnent des fonctions puissances.

Exemple 2.2.1 *Si* $\alpha > 0, \rho > 0$ *et* $\lambda > -1$ *alors*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\lambda}.$$

2.3 Proprits

L'intgrale fractionnaire de Katugampola satisfait de nombreuses proprits importantes, notamment la linarit, la bornitude dans l'espace L^p et la proprit de semi-groupe.

Proposition 2.3.1 *L'intgrale fractionnaire de Katugampola est linaire.*

Dmonstration. Soient f, g deux fonctions intgrables et $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho}(\lambda f+\gamma g)(t) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\Big(\lambda f+\gamma g\Big)(\tau)d\tau \\
&= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\Big(\lambda f(\tau)+\gamma g(\tau)\Big)d\tau \\
&= \lambda\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau+\gamma\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}g(\tau)d\tau \\
&= \lambda\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho}f(t)+\gamma\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho}g(t).
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.2 *Soit $\alpha > 0, \beta > 0, \rho > 0$ et $f \in L[a,b]$,*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho}\mathcal{J}_{a+}^{\beta,\rho}f(t) = \mathcal{J}_{a+}^{\alpha+\beta,\rho}f(t) \tag{2.2}$$

Dmonstration. 1 *Par dfinition de l'intgrale fractionnaire de Katugampola, puis en changeant l'ordre d'intgration, nous obtenons le rsultat suivant*

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho}\mathcal{J}_{a+}^{\beta,\rho}f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t s^{\rho-1}f(s)\int_s^t \frac{\rho\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}(\tau^\rho-s^\rho)^{1-\beta}}d\tau ds.$$

Subtitutions $u = \frac{\tau^\rho-s^\rho}{t^\rho-s^\rho}$ dans l'intgrale intrieure donne

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha,\rho}\mathcal{J}_{a+}^{\beta,\rho}f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t s^{\rho-1}f(s)(t^\rho-s^\rho)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}duds.$$

En utilisant la dfinition de la fonction Beta et sa proprit, on obtient2.2

Prouvons maintenant que l'intgrale fractionnaire de Katugampola est borne dans l'espace des fonctions continues.

Proposition 2.3.3 *L'oprateur $I_{a+}^{\alpha,\rho}$ est linaire et born de $C([a,b])$ $C([a,b])$, c'est--dire,*

$$\|I_{a+}^{\alpha,\rho}x\|_C \le K_{\alpha,\rho}\|x\|_C, \text{ avec } K_{\alpha,\rho} = \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(b^\rho-a^\rho)^\alpha \tag{2.3}$$

Dmonstration. Pour tout f dans $C([a,b])$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau\right| &\leq \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\|f\|_C\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}d\tau \\ &\leq \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha \|f\|_C \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lemme 2.3.1 *Soit $\alpha>\beta>0, \rho>0$ et $f\in L[a,b]$ alors*

$$D_{a+}^{\beta,\rho}I_{a+}^{\alpha,\rho}f(t) = I_{a+}^{\alpha-\beta,\rho}f(t), \quad a<t<b. \tag{2.5}$$

Dmonstration. Soit $n=[\beta]+1$. En utilisant les dfinitions des oprateurs fractionnaires de Katugampola, on obtient

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\beta,\rho}I_{a+}^{\alpha,\rho}f(t) &= \delta_\rho^n I_{a+}^{n-\beta,\rho}I_{a+}^{\alpha,\rho}f(t) \\ &= \delta_\rho^n I_{a+}^{n,\rho}I_{a+}^{\alpha-\beta,\rho}f(t), \end{aligned}$$

ce qui achve la dmonstration, car $\delta_\rho^n I_{a+}^{n,\rho}f(t)=f(t),$.

2.4 Drive fractionnaire de Katugampola

L'intgrale (2.1) nous permette de dfinir la drive fractionnaire gnralise correspondantes. Nous ne dfinissons ici que des drives de type Riemann-Liouville.

Définition 2.4.1 *Soit $n\in\mathbb{N}, \rho>0, 0<a<b<\infty, n-1<\alpha<n$. L'oprateur*

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha,\rho}f(t) &= \delta_\rho^n I_{a+}^{n-\alpha,\rho}f(t) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}f(\tau)}{(t^\rho-\tau^\rho)^{\alpha-n+1}}d\tau \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour $t\in[a,b]$ est appele la drives de Katugampola d'ordre fractionnaire α, condition qu'elle existe.

Remarque 2.4.1 *Si* $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho} f(t) = \frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^{\rho}-\tau^{\rho})^{\alpha}} f(\tau) d\tau \tag{2.7}$$

La formule (2.7) *peut s'crire sous la forme suivante :*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho} f(t) = t^{1-\rho} \frac{d}{dt} I_{a+}^{1-\alpha,\rho} f(t).$$

Remarque 2.4.2 *En particulier, pour* $\rho = 1$ *et pour* $\rho \to 0^{+}$

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha,1} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\ \lim_{\rho \to 0^{+}} D_{a+}^{\alpha,\rho} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \end{aligned} \tag{2.8}$$

nous obtenons la drive fractionnaire de Rieman-Liouville et la drive fractionnaire de Hadamard, respectivement.
En outre,

$$D_{a+}^{0,\rho} f(t) = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$D_{a+}^{n,\rho} f(t) = \delta_{\rho}^{n+1} I_{a+}^{1,\rho} f(t) = \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n+1} \int_a^t \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau = \delta_{\rho}^{n} f(t)$$

L'exemple suivant donne les drives de Katugampola de certaines fonctions spcifiques.

Exemple 2.4.1 *Soient* $\alpha > 0, \rho > 0, a > 0$ *et* $\lambda > \alpha - 1$. *Alors*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho} \left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)} \left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\lambda-\alpha} \tag{2.9}$$

Soit $\lambda > \alpha - 1$, *alors, par dfinition de la drive fractionnaire de Katugampola, on a*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho} \left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\lambda} = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^{\rho}-\tau^{\rho})^{\alpha-n+1}} \left(\frac{\tau^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\lambda} d\tau$$

La substitution $u = \dfrac{\tau^{\rho}-a^{\rho}}{t^{\rho}-a^{\rho}}$, *nous donne*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^\lambda=\frac{\rho^{\alpha-n-\lambda}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n(t^\rho-a^\rho)^{\lambda+n-\alpha}\int_0^1 u^\lambda(1-u)^{n-\alpha-1}du$$

Par le principe de l'induction mathmatique, nous obtenons la formule

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha,\rho}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^\lambda &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+n-\alpha)}(\lambda-\alpha+n)\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\lambda-\alpha+n-1}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+n-\alpha)}(\lambda-\alpha+n)(\lambda-\alpha+n-1)\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n-2}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\lambda-\alpha+n-2}\\
&= \dots\\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+n-\alpha)}(\lambda-\alpha+n)\dots(\lambda-\alpha+2)\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\lambda-\alpha+1}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\lambda-\alpha}
\end{aligned}$$

Comme dans le cas des drives classiques, les oprateurs gnraliss satisfont galement la proprit de linarit

Proposition 2.4.1 *Soit* $n-1<\alpha<n,(n=[\alpha]+1),\rho>0$ *et* $f,g\in C^n([a,b],\mathbb{R})$*. Alors*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho}(f+g)=D_{a+}^{\alpha,\rho}f+D_{a+}^{\alpha,\rho}g.$$

Dmonstration. *Le rsultat dcoule de l'intgration directe.*

Le rsultat suivant montre que, pour certaines classes de fonctions, la drive fractionnaire de Katugampola est l'oprateur inverse gauche de l'intgrale fractionnaire de Katugampola.

Proposition 2.4.2 *Soient* $0<\alpha<1$, $\rho>0$ *et* $f\in L^1[a,b]$*, alors*

$$D_{a+}^{\alpha,\rho}I_{a+}^{\alpha,\rho}f(t)=f(t) \tag{2.10}$$

Dmonstration. Par la dfinition des oprateurs fractionnaires de Katugampola et leurs proprit de semi-groupe, on a

$$\begin{aligned}
\left({}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{a+}\,{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{a+}\right)f(t) &= \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)\int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^\alpha}\cdot\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^\tau \frac{s^{\rho-1}f(\tau)}{(\tau^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}ds d\tau,\\
&= \frac{\rho}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)\int_a^x f(s)s^{\rho-1}\int_s^t \frac{(\tau^\rho-s^\rho)^{\alpha-1}}{(t^\rho-\tau^\rho)^\alpha}\tau^{\rho-1}d\tau ds,\\
&= \frac{\rho}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)\int_a^t f(s)s^{\rho-1}ds\cdot\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\rho},\\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que la drive fractionnaire de Katugampola n'est pas l'inverse droit de l'intgrale fractionnaire de Katugampola.

Lemme 2.4.1 *Soit $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}, \rho>0, I^{n-\alpha,\rho}_{a+}f\in AC^n_\rho[a,b]$, alors*

$$I^{\alpha,\rho}_{a+}D^{\alpha,\rho}_{a+}f(t) = f(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{c}_i\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{i-n+\alpha}$$

o $\tilde{c}_i$ sont des constantes relles.

Dmonstration. De la dfinition de l'espace $AC^n_\rho[a,b]$ and Lemma 3.1, on peut rcrire l'hypothse $I^{n-\alpha,\rho}_{a+}f\in AC^n_\rho[a,b]$ comme

$$\delta_\rho^{n-1}I^{n-\alpha,\rho}_{a+}f(t) = c+\int_a^t\varphi(\tau)d\tau \tag{2.11}$$

et

$$I^{n-\alpha,\rho}_{a+}f(t) = \sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^i+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t\left(\frac{t^\rho-\tau^\rho}{\rho}\right)^{n-1}\varphi(\tau)d\tau \tag{2.12}$$

o c_i sont des constantes relles et $\varphi\in L[a,b]$.

En appliquant l'oprateur δ_ρ dans la formule (2.11), on obtient

$$D^{\alpha,\rho}_{a+}f(t) = t^{1-\rho}\varphi(t).$$

En consquence

$$I_{a+}^{\alpha,\rho} D_{a+}^{\alpha,\rho} f(t) = I_{a+}^{\alpha,\rho} \left[t^{1-\rho}\varphi(t)\right] \tag{2.13}$$

D'autre part, en appliquant l'oprateur $D_{a+}^{n-\alpha,\rho}$ aux deux cts de (2.12), on trouve

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i D_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^i \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} D_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(\int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'aprs (5), on a

$$D_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^i = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-n+\alpha)} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{i-n+\alpha}. \tag{2.15}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} & D_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(\int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau\right) \\ &= \delta_\rho I_{a+}^{1-n+\alpha,\rho} \left[\int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau\right] \\ &= \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1-n+\alpha)} \delta_\rho \left(\int_a^t \varphi(s) \int_s^t \frac{\rho \tau^{\rho-1} \left(\tau^\rho - s^\rho\right)^{n-1}}{\left(t^\rho - \tau^\rho\right)^{n-\alpha}} d\tau\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Substitut $u = \frac{\tau^\rho - s^\rho}{t^\rho - s^\rho}$, nous donne

$$\begin{aligned} & D_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(\int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau\right) \\ &= \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1-n+\alpha)} \delta_\rho \left(\int_a^t \varphi(s) \left(t^\rho - s^\rho\right)^\alpha \int_0^1 u^{n-1} (1-u)^{\alpha-n} du ds\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant les proprits des fonctions Bta et Gamma, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(\int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-1} \varphi(\tau) d\tau\right) &= \frac{\rho^{-\alpha}\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+1)} \delta_\rho \left(\int_a^t \varphi(s) \left(t^\rho - s^\rho\right)^\alpha ds\right) \\ &= \Gamma(n) I_{a+}^{\alpha,\rho} \left(t^{1-\rho}\varphi(t)\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

En substituant (2.15) et (2.18) dans (2.14) on obtient

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-n+\alpha)} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{i-n+\alpha} + I_{a+}^{\alpha,\rho}\left(t^{1-\rho}\varphi(t)\right). \tag{2.19}$$

Vu les formules (2.13) et (2.19), la preuve est acheve.

Remarque 2.4.3 *Si* $0 < \alpha < 1$*. Alors*

$$I_0^{\alpha,\rho} D_0^{\alpha,\rho} u(t) = u(t) + ct^{\rho(\alpha-1)}. \tag{2.20}$$

Le lemme (2.4.1) permet de trouver une solution gnrale l'quation fractionnaire suivante

$$D_{a+}^{\alpha,\rho} u(t) = 0 \tag{2.21}$$

where α, ρ sont deux constantes relles positives.

Lemme 2.4.2 *Soit* $\alpha, \rho > 0, n = [\alpha] + 1$*. L'quation diffrentielle fractionnaire* (2.21) *a une solution gnrale de la forme*

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha - j}$$

o c_j *sont des constantes relles arbitraires.*

2.5 Drive fractionnaire de Caputo-Katugampola

Dans cette section, nous introduisons la drive fractionnaire de type Caputo en utilisant une modification de type Caputo de la drive fractionnaire de Katugampola. Ensuite, nous prsentons un thorme montrant que, deux limites appropries, cette drive fractionnaire de type Caputo retrouve les drives fractionnaires de Caputo et de Caputo-Hadamard. Rcemment, Almeida et al. [6] et Jarad et al. [17] ont prsent un nouveau type d'oprateur fractionnaire, qui rcupre les drives fractionnaires de Caputo et de Caputo-Hadamard.

Définition 2.5.1 *Soient $\alpha, \rho \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{N}, \alpha > 0, n = [\alpha]+1$ et $\rho > 0$. La drive fractionnaires de type Caputo-Katugampola est dfinie, pour $\varphi \in \mathrm{AC}^n_\rho[a,b]$, par :*

$$\begin{aligned}\left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) &= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{\left(x^\rho - t^\rho\right)^{1-n+\alpha}}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \varphi(t)dt, \\ &= \left(\mathcal{J}^{n-\alpha,\rho}_{a^+}\delta^n_\rho\varphi\right)(x)\end{aligned} \tag{2.22}$$

Remarque 2.5.1 *Si $\alpha \in \mathbb{N}_0$, alors $\left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x)$ est donne par*

$$\left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) = \delta^n_\rho\varphi(x).$$

En particulier,

$$\left({}^c\mathcal{D}^{0,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) = \varphi(x)$$

Proposition 2.5.1 *Soit $\alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$. Si $\varphi, \psi \in \mathrm{AC}^n_\rho[a,b]$, alors :*

$$\left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}(\varphi+\psi)\right)(x) = \left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) + \left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\psi\right)(x).$$

Dmonstration. *Le rsultat est une consquence directe de la linarit des oprateurs intgraux.*

Exemple 2.5.1 *Soient $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}, \alpha, \rho > 0, (\beta - \alpha\rho) > 0$ et $\varphi(t) = t^\beta$. Alors*

$$\left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}t^\beta\right)(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}-\alpha+1\right)}\rho^\alpha x^{\beta-\alpha\rho}, & \alpha > 0, \left(\alpha - \frac{\beta}{\rho}\right) \notin \mathbb{N}, \\ 0, & \alpha > 0, \left(\alpha - \frac{\beta}{\rho}\right) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En effet,

$$\left({}^c\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{0^+}t^\beta\right)(x) = \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{t^{\rho-1}}{\left(x^\rho - t^\rho\right)^{1-n+\alpha}}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n t^\beta dt, \quad x > a \tag{2.23}$$

avec $n = [\alpha]+1$. Puisque

$$\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n t^\beta = \beta(\beta-\rho)(\beta-2\rho)\cdots(\beta-(n-1)\rho)t^{\beta-n\rho} = \rho^n\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}-n+1\right)}t^{\beta-n\rho}, \tag{2.24}$$

nous substituons (2.24) dans (2.23), on obtient

$$\left({}^{c}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha;\rho}t^{\beta}\right)(x)=\frac{\rho^{1+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}-n+1\right)}\int_0^x\frac{t^{\beta+(1-n)\rho-1}}{\left(x^{\rho}-t^{\rho}\right)^{1-n+\alpha}}dt$$

En utilisant le changement de variable $u=t^{\rho}/x^{\rho}$, on trouve

$$\left({}^{c}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\rho}t^{\beta}\right)(x)=\frac{\rho^{1+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}-n+1\right)}\rho^{-1}x^{\beta-\alpha\rho}\underbrace{\int_0^1 u^{\frac{\beta}{\rho}-n}(1-u)^{n-\alpha-1}du}_{B\left(\frac{\beta}{\rho}-n+1,n-\alpha\right)},$$

o $B(\cdot,\cdot)$ est la fonction bta. D'aprs la relation entre la fonction gamma et la fonction bta, donne par (1.9), *il en rsulte*

$$\left({}^{c}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\rho}t^{\beta}\right)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\rho}-\alpha+1\right)}\rho^{\alpha}x^{\beta-\alpha\rho}$$

Le thorme suivant montre que, partir de la dfinition de drives Katugampola d'ordre arbitraire, avec une modification de type Caputo, il est possible de retrouver, en tant que cas particuliers, la fois les drives de Caputo et de Caputo-Hadamard.

Théorème 2.1 *Soient $\alpha,\rho\in\mathbb{R},\alpha,\rho>0,\alpha\notin\mathbb{N},n=[\alpha]+1$ et $\varphi\in \mathrm{AC}_{\rho}^{n}[a,b]$. Alors,*

$$\lim_{\rho\to 1}\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x)=\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}\varphi^{(n)}(t)dt,\ x>a \tag{2.25}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x)=\left({}^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\delta^{n}\varphi(t)dt,\ x>a \tag{2.26}$$

o $\delta^{n}=\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}$.

Dmonstration. Tout d'abord, nous montrons(2.25). En utilisant (2.22) et le thorme de la convergence domine [32], on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 1}\left({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) &= \lim_{\rho\to 1}\left\{\frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho-t^\rho)^{1-n+\alpha}}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n\varphi(t)dt\right\}\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\varphi^{(n)}(t)dt\\
&= \left({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\varphi\right)(x),
\end{aligned}$$

o $\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \varphi(t)$.

Maintenant, nous montrons (2.26). Nous utilisons (2.22), le thorme de la convergence domine [32] et la rgle de L'Hpital, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0^+}\left({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) &= \lim_{\rho\to 0^+}\left\{\frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho-t^\rho)^{1-n+\alpha}}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n\varphi(t)dt\right\}\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \lim_{\rho\to 0^+} t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n\varphi(t)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\varphi(t)\frac{dt}{t}\\
&= \left({}^{CH}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\varphi\right)(x).
\end{aligned}$$

2.6 Relation entre les drives fractionnaires de Katagumbola et les drives de type Caputo-Katagumbola

Dans cette section, nous prsentons la relation entre les drives fractionnaires de Katagumbola et les drives fractionnaires de type Caputo-Katagumbola, et nous rcuprons des cas particuliers.

Théorème 2.2 *Soient $\alpha,\rho\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$, $\rho>0$ et $\varphi\in \mathrm{AC}^n_\rho[a,b]$. La relation entre la drive fractionnaire de Katagumbola et la drive fractionnaire de type Caputo-Katagumbola est donne par l'expression suivante :*

$$\left({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) = \left(\mathcal{D}^{\alpha,\rho}_{a^+}\varphi\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k_\rho\varphi(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{k-\alpha} \tag{2.27}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$*, l'quation* (2.27) *prend la forme suivante :*

$$\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x) - \frac{\varphi(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{-\alpha}.$$

Dmonstration. Nous considrons la drive fractionnaire de Katagumbola donne par

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x) = \delta_\rho^n \left(\mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha,\rho}\varphi\right)(x).$$

We write $\varphi(t)$ explicitly as given by (3.3), and using the results of Property 3.4, we have

$$\begin{aligned}
\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x) &= \delta_\rho^n \left(\mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha,\rho}\left[\left(\mathcal{J}_{a^+}^{n,\rho}\delta_\rho^n\varphi\right)(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_\rho^k\varphi(a)}{k!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k\right]\right)(x) \\
&= \left(\delta_\rho^n \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha,\rho}\delta_\rho^n\varphi\right)(x) + \delta_\rho^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_\rho^k\varphi(a)}{k!}\rho^{-k}\left(\mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha,\rho}\left(t^\rho - a^\rho\right)^k\right)(x) \\
&= \left(\mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha,\rho}\delta_\rho^n\varphi\right)(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\delta_\rho^k\varphi(a)\frac{\rho^{\alpha-n-k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\delta_\rho^n\left[\left(x^\rho - a^\rho\right)^{k+n-\alpha}\right] \\
&= \left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_\rho^k\varphi(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{k-\alpha}.
\end{aligned}$$

Cette dernire expression nous donne l'expression (2.27).

Remarque 2.6.1 *Lorsque* $\rho \to 1$ *dans* (2.27)*, on obtient*

$$\lim_{\rho\to 1}\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x) = \left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

D'autre part, si $\rho \to 0$ *dans la relation* (2.27)*, on trouve*

$$\lim_{\rho\to 0}\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x) = \left({}^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k\varphi(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}$$

Par consquent, lorsque $\rho \to 1$*, nous retrouvons la relation entre la drive fractionnaire de Caputo et la drive fractionnaire de Riemann-Liouville. D'autre part, lorsque* $\rho \to 0$*, nous* *retrouvons la relation entre la drive fractionnaire de Hadamard et la drive fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard.*

Le rsultat suivant est essentiel pour rsoudre les quations diffrentielles fractionnaires o intervient la drive de Caputo-Katugampola.

Lemme 2.6.1 *Soient* $\alpha \in \left]n-1, n\right[, \rho > 0$ *et* $f \in C^n\left[a, b\right]$. *Alors,*

$$\begin{aligned} I^{\alpha,\rho}\ {}^{c}D^{\alpha,\rho} f(t) = & f(t) + c_0 + c_1\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right) + c_2\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^2 \\ & + \ldots + c_{n-1}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

et

$${}^{c}D^{\alpha,\rho} I^{\alpha,\rho} f(t) = f(t)$$

avec $c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

La relation entre les oprateurs de Katugambola (intgrales et drives) et les oprateurs fractionnaires traditionnels peut tre illustre par le diagramme suivant :

Chapitre 3

Problme aux limites fractionnaire de type Caputo-Katugampola

3.1 Introduction

Les quations de Caputo-Katagumbola sont un type particulier d'quations diffrentielles fractionnaires qui gnralisent les drives de Caputo traditionnelles. L'tude des quations de Caputo-Katagumbola prsente des dfis mathmatiques intressants et fait l'objet de nombreuses recherches afin de comprendre leur comportement, d'tablir des rsultats d'existence et d'unicit de solutions, et d'analyser leurs proprits. Pour plus de dtails sur ce type d'quations, nous nous rfrons aux [17], [18], [29], [35] et les rfrences qui y sont cites.

Dans ce chapitre, nous tudions les conditions suffisantes d'existence et d'unicit des solutions de l'quation diffrentielle fractionnaire de Caputo-Katagumbola suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{a+}^{\alpha,\rho}u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in I = [a,b] \\ u(a) + u(b) = \theta, \end{cases} \tag{3.1}$$

o ${}^{C}D_{a+}^{\alpha,\rho}$ est la drive fractionnaire de Caputo-Katagampola d'ordre $\alpha \in]0,1]$, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donne et θ un nombre rel.

3.2 Thormes d'existence et d'unicit

Dans cette section, nous prsentons les rsultats d'existence et d'unicit du problme aux limites fractionnaire 3.1 avec les drives fractionnaires de Caputo-Katagampola.
Dans le lemme suivant on donne la solution intgrale du problme linaire associe (3.1).

Lemme 3.2.1 *Soit $\phi \in C([a,b],\mathbb{R})$. Alors la solution intgrale du problme linaire*

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0}^{\alpha,\rho}u(t) = \phi(t) \\ u(a) + u(b) = \theta \end{cases} \tag{3.2}$$

est donne par

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\phi(s)ds\right) + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\phi(s)ds \tag{3.3}$$

Dmonstration. On a

$${}^{c}D_{0}^{\alpha,\rho}u(t) = \phi(t) \tag{3.4}$$

En appliquant l'intgrale fractionnaire de Katugampola d'ordre α aux deux cts de l'quation (3.4), et en utilisant le lemme (2.4.1), on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= I_a^{\alpha,\rho}\phi(t) + c_0 \\ &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\phi(s)ds + c_0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

o c_0 une constante relle.
En utilisant la condition $u(a) + u(b) = \theta$, on aura

$$\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\phi(s)ds + 2c_0 = \theta \tag{3.6}$$

D'o

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\phi(s)ds\right)$$

ce qui, en substituant dans (3.5), donne la solution (3.3). La rciproque en dcoule par des calculs directs.

Pour transformer le problme (3.1) en un problme de point fixe, on dfinit l'oprateur $\mathcal{T}$: $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{T}u(t) =& \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds\right)\\ &+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds.\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2.1 Existence et Unicit de la Solution

Dans le premier rsultat, on utilise le principe de contraction de Banach pour tablir l'existence et l'unicit des solutions du systme (3.1).
Pour simplifier les calculs, on pose :

$$\delta = \frac{3}{2}\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha. \tag{3.8}$$

Théorème 3.1 *Supposons que $f : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant la condition de Lipschitz :*
$(\mathbf{H}_1)$: *Il existe une constante $k > 0$ tel que :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|,\ \forall t \in I,\ x,y \in \mathbb{R}.$$

Alors, le problme (3.1) a une solution unique sur $[a,b]$, si

$$\delta k < 1. \tag{3.9}$$

Dmonstration. Soit $\sup_{a\leq t\leq b}|f(t,0)| = \lambda < \infty$, et choisissons

$$r \geq \frac{|\theta| + 2\delta\lambda}{2(1-k\delta)}. \tag{3.10}$$

Montrons tout d'abord que $\mathcal{T}B_r \subset B_r$, o $B_r = \{u \in C([a,b],\mathbb{R}) : \|u\| \leq r\}$. En utilisant l'hypothse $(\mathbf{H}_1)$, on a

$$\begin{aligned}|f(t,u(t))| &\leq |f(t,u(t)) - f(t,0)| + |\ f(t,0)\| \\ &\leq k|u(t)| + \lambda \leq k\|x\| + \lambda \leq kr + \lambda.\end{aligned}$$

Pour tout $u \in B_r$, on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u(t)| \leq& \sup_{t\in I}\left\{\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,y(s)) - f(t,0)| + |f(t,0)|ds\right)\right. \\ &\left. + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,y(s)) - f(t,0)| + |f(t,0)|ds\right\} \\ \leq& \frac{1}{2}|\theta| + \frac{3}{2}\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha(kr+\lambda) \\ \leq& \frac{1}{2}|\theta| + (kr+\lambda)\delta \leq r,\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathcal{T}B_r \subset B_r$.
Pour tablir l'existence et l'unicit de la solution, on utilise le thorme du point fixe de Banach. Pour cela, nous montrons que $\mathcal{T}$ est une contraction.
Soit $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(I,R)$. Alors pour $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u_1(t) - \mathcal{T}u_2(t)| \leq& \frac{1}{2}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\left|f\left(s,u_1(s)\right) - f\left(s,u_2(s)\right)\right|ds \\ &+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\left|f\left(s,u_1(s)\right) - f\left(s,u_2(s)\right)\right|ds \\ \leq& \frac{1}{2}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}k\left\|u_1 - u_2\right\|ds \\ &+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}k\left\|u_1 - u_2\right\|ds \\ \leq& \frac{3}{2}\frac{\rho^{-\alpha}L}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho - s^\rho\right)^\alpha\left\|u_1 - u_2\right\| \\ =& k\delta\left\|u_1 - u_2\right\|,\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\|\mathcal{T}u_1 - \mathcal{T}u_2\| \leq k\delta\left\|u_1 - u_2\right\|$. Comme $k\delta < 1$, l'oprateur $\mathcal{T}$ est une contraction. En consquence du thorme du point fixe de Banach, le problme (3.1) a une solution unique.

Ensuite, nous montrons un rsultat d'existence pour le problme (3.1) en utilisant l'alternative non-linaire de Leray-Schauder.

Théorème 3.2 *Supposons que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur I. De plus, nous supposons que :*
$(\mathbf{H}_2)$ *Il existe deux fonctions $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue non dcroissante, et $\omega : I \to \mathbb{R}^+$ est continue telle que*

$$|f(t,u)| \leq \omega(t)\psi(\|u\|), \ \forall t \in I, u \in \mathbb{R}.$$

$(\mathbf{H}_3)$ *Il existe une constante $M > 0$ tel que*

$$\frac{\frac{1}{2}|\theta| + \delta\|\omega\|\psi(M)}{M} < 1$$

Alors le problme (3.1) *a au moins une solution dfinie sur I.*

Dmonstration. Premirement, nous montrons que l'oprateur T dfini par (3.7) transforme un ensemble born en un ensemble born dans $\mathcal{C}(I,R)$.
Pour un nombre positif r, soit $B_r = \{u \in C([a,b],\mathbb{R}) : \|u\| \leq r\}$ une boule borne dans $\mathcal{C}(I,R)$. Alors, pour $t \in I$, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}u(t)| \leq & \frac{1}{2}\left(|\theta| + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds\,|\right) \\
& + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds \\
\leq & \frac{1}{2}|\theta| + \frac{1}{2}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\omega(s)\psi(\|u\|)ds \\
& + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\omega(s)\psi(\|u\|)ds \\
\leq & \frac{1}{2}|\theta| + \frac{3}{2}\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha\|\omega\|\psi(r) \\
= & \frac{1}{2}|\theta| + \delta\|\omega\|\psi(r).
\end{aligned}$$

Au vu de $(\mathbf{H}_3)$, nous obtenons $\|\mathcal{T}u\| \leq r$, c'est--dire que $(\mathcal{T}B_r)$ est uniformment born.
Ensuite, nous dmontrons que $\mathcal{T}$ transforme les ensembles borns en ensembles quicontinus

de $\mathcal{C}(I,R)$, c'est--dire que $(\mathcal{T}B_r)$ est quicontinu. Soit $t_1,t_2\in I$, avec $t_1<t_2$ et pour tout $u\in B_r$, on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}u\left(t_1\right)-\mathcal{T}u\left(t_2\right)|\leq&\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}s^{\rho-1}\left[\left(t_1^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}-\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\right]\mid f(s,u(s)\mid)ds\\&+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}s^{\rho-1}\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds\\\leq&\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}s^{\rho-1}\left[\left(t_1^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}-\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\right]\omega(s)\psi(\|u\|)ds\\&+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}s^{\rho-1}\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\omega(s)\psi(\|y\|)ds\\\leq&\|\omega\|\psi(r)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}s^{\rho-1}\left[\left(t_1^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}-\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\right]ds\\&+\|\omega\|\psi(r)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}s^{\rho-1}\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}ds\\\leq&\frac{2\rho^{-\alpha}\|\omega\|\psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2^\rho-t_1^\rho\right)^\alpha.\end{aligned}$$

Comme $t_1\to t_2$, le ct droit de l'ingalit prcdente ne dpend pas de u et tend vers zro. Par consquent, $\mathcal{T}B_r$ est quicontinue.
Donc, la compacit de $\mathcal{T}$ rsulte du thorme d'Ascoli Arzela, nous dduisons que $\mathcal{T}$ est compltement continue. Finalement, nous montrons qu'il existe un ensemble ouvert $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{E}(J,\mathbb{R})$ avec $u\neq\lambda\mathcal{T}u$ pour $\lambda\in(0,1)$ et $u\in\partial\mathcal{Z}$. Soit $u\in\mathcal{D}_r$ soit une solution quelconque de

$$u=\lambda\mathcal{T}u,\ \lambda\in(0,1)$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|u(t)| =&\lambda|\mathcal{T}u(t)|\\
\leq&\frac{1}{2}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds\\
&+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds\\
\leq&\frac{1}{2}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\eta(s)\psi(\|u\|)ds\\
&+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\eta(s)\psi(\|u\|)ds\\
\leq&\frac{3}{2}\|\eta\|\psi(\|y\|)\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$
\frac{\|u\|}{\mathcal{A}\|\eta\|\psi(\|v\|)}<1
$$

Nous allons tudier le rsultat d'existence suivant en utilisant le thorme du point fixe de Krasnoselskii. On considre les hypothses suivantes :

$(\mathbf{H}_4)$: Il existe une fonction $\eta\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ tel que

$$
|f(t,u)|\leq\eta(t),\forall t\in I,u\in\mathbb{R}
$$

$(\mathbf{H}_5)$: Il existe une fonction $\zeta\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ tel que

$$
|f(t,u)-f(t,v)|\leq\zeta(t)|u-v|,\forall t\in I,u,v\in\mathbb{R}.
$$

Théorème 3.3 *Supposons que* $(\mathbf{H}_4)$ *et* $(\mathbf{H}_5)$ *sont vrifies. Si*

$$
\Lambda:=\frac{1}{2}\frac{\rho^{-\alpha}\|\zeta\|}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha<1, \tag{3.11}
$$

alors le problme (3.1) *a au moins une solution dfinie sur* I.

Dmonstration. On considre l'oprateur $\mathcal{T}:\mathcal{C}(I,\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ dfinie par (3.7). On dfinit $\mathcal{B}_{r_0}:=\{u\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R}):\|u\|\leq r_0\}$, $\sup_{t\in I}|\eta(t)|=\|\eta\|$, et en choisissant une constante approprie r_0 tel que

$$r_0 = \frac{1}{2}|\theta| + \delta\|\eta\| + 1$$

o δ est dfinie par (3.8). De plus, nous allons dcomposer l'oprateur $\mathcal{T}$ en somme de deux oprateurs $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, comme suit :

$$\mathcal{T}_1 y(t) = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds\right)$$

et

$$\mathcal{T}_2 y(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds.$$

En supposant que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont dfinis sur $\mathcal{B}_{r_0}$. La preuve est donne en plusieurs tapes : **Etape 1 :** On montre que $\mathcal{T}_1 u_1 + \mathcal{T}_2 u_2 \in \mathcal{B}_{r_0}$ pour tout $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_{r_0}$.

Pour $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_{r_0}$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_1 u_1(t) + \mathcal{T}_2 u_2(t)| \leq & |\mathcal{T}_1 u_1(t)| + |\mathcal{T}_2 u(t)| \\
\leq & \frac{1}{2}\left(|\theta| + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s, u(s))|ds\ |\right) \\
& + \frac{\rho^{1-a}}{\Gamma(a)}\int_a^t s^{\rho-1}\left(b^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1}\left|f\left(s, u_2(s)\right)\right| ds \\
\leq & \frac{1}{2}|\theta| + \frac{3}{2}\frac{\rho^{-a}}{\Gamma(a+1)}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha \|\eta\| \\
= & \frac{1}{2}|\theta| + \delta\|\eta\|
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\|\mathcal{T}_1 u_1 + \mathcal{T}_2 u_2\| \leq r_0.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{T}_1 u_1 + \mathcal{T}_2 u_2 \in \mathcal{B}_{r_0}$ pour tout $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_{r_0}$.

Etape 2 : Montrons que T_1 est une application contractante sur $\mathcal{B}_{r_0}$.

Soit $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_{r_0}$ et $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}_1 u_1(t)-\mathcal{T}_1 u_2(t)\right| &\leq \frac{1}{2} \frac{\rho^{1-a}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b s^{\rho-1}\left(t^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\left|f\left(s, u_1(s)\right)-f\left(s, u_2(s)\right)\right| d s \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{\rho^{1-a}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b s^{\rho-1}\left(t^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\|\zeta\|\left\|u_1-u_2\right\| d s \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{\rho^{-\alpha}\|\zeta\|}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^p-a^p\right)^\alpha\left\|u_1-u_2\right\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\left\|\mathcal{T}_1 u_1-\mathcal{T}_1 u_2\right\| \leq \Lambda\left\|y_1-y_2\right\| .$$

Il en rsulte de l'ingalit (3.11) que $\mathcal{T}_1$ est une application contractante.

Etape 3 : On montre que l'oprateur $\mathcal{T}_2$ est compltement continu sur $\mathcal{B}_{r_0}$.

La continuit de f nous permet de conclure que l'oprateur $\mathcal{T}_2$ est continu. Ensuite, on peut facilement vrifier que

$$\left\|\mathcal{T}_2 u\right\| \leq \frac{\rho^{-\alpha}\|q\|}{\Gamma(\alpha+1)}\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha=\frac{2}{3}\|\eta\|=\frac{2}{3} r_0-1<r_0$$

Ce qui prouve que $\mathcal{T}_2$ est uniformment born sur $\mathcal{B}_{r_0}$.

Montrons que $\mathcal{T}_2$ est compltement continu sur $\mathcal{B}_{r_0}$. Posons $\sup_{(t,u)\in I\times\mathcal{B}_{r_0}}|f(t,u)|=\lambda$. Soit $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1<t_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}_2 u\left(t_1\right)-\mathcal{T}_2 u\left(t_2\right)\right| \leq & \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} s^{\rho-1}\left[\left(t_1^\rho-s^\rho\right]^{\alpha-1}-\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\right] \mid f(s, u(s) \mid d s \\
& +\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}|f(s, u(s))| d s \\
\leq & \lambda \frac{\rho^{1-a}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} s^{\rho-1}\left[\left(t_1^\rho-s^\rho\right]^{\alpha-1}-\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1}\right] d s \\
& +\lambda \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{\alpha-1} d s \\
\leq & \lambda \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2^\rho-t_1^\rho\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \longrightarrow t_2$ le ct droit de la dernire ingalit ne dpend pas de y et tend vers zro. Par consquent,

$$|\mathcal{T}_2 y(t_1) - \mathcal{T}_2 y(t_2)| \to 0, \forall |t_2 - t_1| \to 0, u \in \mathcal{B}_{r_0}.$$

Cela montre que $\mathcal{T}_2$ est quicontinue sur $\mathcal{B}_{r_0}$. Vu le thorme d'Arzela-Ascoli, il rsulte que $\mathcal{T}_2$ est relativement compacte sur $\mathcal{B}_{r_0}$. Ainsi, toutes les hypothses du thorme du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaites. Par consquent, nous dduisons que le problme (3.1) a au moins une solution dfinie sur I.

3.3 Exemples

Dans cette section, nous prsentons quelques exemples pour illustrer l'utilit des rsultats thoriques prcdentes.

Considrons le problme aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{2},2}u(t) = f(t,u(t)),\ t \in [0,3] \\ u(0) + u(3) = 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Ici,

$$\alpha = \frac{3}{2}, \rho = 2, \theta = 1, a = 0, b = 3 \tag{3.13}$$

1. Pour illustrer le Thorme (3.1), nous prenons

$$f(t,u(t)) = 2t + \frac{\sin u(t)}{7+t}.$$

Il est vident que $f(t,u)$ est une fonction continue. Nous allons vrifier que la fonction f est Lipschitzienne.

Soit $x, y \in C([0,3], \mathbb{R})$ et $t \in [0,3]$. Alors

$$\begin{aligned} |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| &= \left| 2t + \frac{\sin x(t)}{7+t} - 2t + \frac{\sin y(t)}{7+t} \right| \\ &= \frac{1}{(7+t)} |\sin x(t) - \sin y(t)| \\ &\leq \frac{1}{(7+t)} |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

Pour $t \in [0,3]$, nous aurons

$$|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq \frac{1}{10} |x(t) - y(t)|,$$

d'o, la fonction f est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $k = \dfrac{1}{10}$.
En utilisant les donnes (3.13), on obtient

$$\delta k = \frac{3}{2} \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{10} = 0.359048052 < 1.$$

tant donn que toutes les hypothses du thorme (3.1) sont satisfaites, le problme (3.12) admet alors une solution unique dfinie sur l'intervalle $[0,3]$.

2. Pour illustrer le Thorme (3.2), nous considrons :

$$f(t,u(t)) = \frac{(1+t)}{60} \left(\frac{|u(t)|}{|u(t)|+1} + u(t) + \frac{1}{8} \right) \tag{3.14}$$

Il est clair que $f(t,u)$ est une fonction continue qui satisfait galement la condition $(\mathbf{H}_2)$ avec $\omega(t) = \dfrac{1+t}{60}$, $\psi(\|u\|) = \|u\| + \dfrac{9}{8}$. D'aprs la condition, $(\mathbf{H}_3)$ on trouve que $M > 0.531154239$. Ainsi, toutes les conditions du Thorme (3.2) sont satisfaites et, par consquent, il existe au moins une solution pour le problme (3.12) avec $f(t,u(t))$ donne par (3.14) sur l'intervalle $[0,3]$.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra et G. M. N'Guérékata : *Topics in fractional differential equations*, vol. 27. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Y. Adjabi, F. Jarad, D. Baleanu et T. Abdeljawad : On cauchy problems with caputo hadamard fractional derivatives. 2016.

[3] R. P. Agarwal, M. Meehan et D. O'regan : *Fixed point theory and applications*, vol. 141. Cambridge university press, 2001.

[4] A. Akkurt, Z. Kaçar et H. Yildirim : Generalized fractional integral inequalities for continuous random variables. *Journal of probability and statistics*, 2015, 2015.

[5] R. Almeida et N. R. Bastos : An approximation formula for the katugampola integral. *arXiv preprint arXiv :1512.03791*, 2015.

[6] R. Almeida, A. B. Malinowska et T. Odzijewicz : Fractional differential equations with dependence on the caputo–katugampola derivative. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(6), 2016.

[7] A. K. Anatoly : Hadamard-type fractional calculus. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 38(6):1191–1204, 2001.

[8] R. L. Bagley et P. Torvik : A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3):201–210, 1983.

[9] L. Cao, H. Kong et S.-D. Zeng : Maximum principles for time-fractional caputo-katugampola diffusion equations. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 10:2257–2267, 2017.

[10] H. Chen et U. N. Katugampola : Hermite–hadamard and hermite–hadamard–fejér type inequalities for generalized fractional integrals. *Journal of mathematical analysis and applications*, 446(2):1274–1291, 2017.

[11] K. Diethelm : *The analysis of fractional differential equations : an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, vol. 2004. Springer Berlin, 2010.

[12] S. GABOURY, R. TREMBLAY et B.-J. FUGÈRE : Some relations involving a generalized fractional derivative operator. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(1):1–9, 2013.

[13] R. GORENFLO, F. MAINARDI et I. PODLUBNY : Fractional differential equations. *Academic Press*, 8:683–699, 1999.

[14] A. GRANAS et J. DUGUNDJI : *Fixed point theory*, vol. 14. Springer, 2003.

[15] R. HILFER : *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, 2000.

[16] R. HILFER *et al.* : Threefold introduction to fractional derivatives. *Anomalous transport : Foundations and applications*, p. 17–73, 2008.

[17] F. JARAD, T. ABDELJAWAD et D. BALEANU : On the generalized fractional derivatives and their caputo modification. 2017.

[18] U. N. KATUGAMPOLA : A new approach to generalized fractional derivatives. *arXiv preprint arXiv :1106.0965*, 2011.

[19] U. N. KATUGAMPOLA : Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations. *arXiv preprint arXiv :1411.5229*, 2014.

[20] U. N. KATUGAMPOLA : A new fractional derivative with classical properties. *arXiv preprint arXiv :1410.6535*, 2014.

[21] U. N. KATUGAMPOLA : Mellin transforms of generalized fractional integrals and derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 257:566–580, 2015.

[22] U. N. KATUGAMPOLA : New fractional integral unifying six existing fractional integrals. *arXiv preprint arXiv :1612.08596*, 2016.

[23] A. KILBAS : *Theory and applications of fractional differential equations*.

[24] A. KILBAS et J. TRUJILLO : Differential equations of fractional order : methods results and problemi. *Applicable Analysis*, 78(1-2):153–192, 2001.

[25] V. LAKSHMIKANTHAM, S. LEELA et J. VASUNDHARA DEVI : Theory of fractional dynamic systems. *(No Title)*, 2009.

[26] B. ŁUPIŃSKA : Properties of the katugampola fractional operators. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 79(2):135–148, 2021.

[27] A. B. MALINOWSKA, T. ODZIJEWICZ et D. F. TORRES : *Advanced methods in the fractional calculus of variations*. Springer, 2015.

[28] K. Oldham et J. Spanier : *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.

[29] D. Oliveira et E. C. De Oliveira : Hilfer–katugampola fractional derivatives. *Computational and Applied Mathematics*, 37(3):3672–3690, 2018.

[30] I. Podlubny, A. Chechkin, T. Skovranek, Y. Chen et B. M. V. Jara : Matrix approach to discrete fractional calculus ii : partial fractional differential equations. *Journal of Computational Physics*, 228(8):3137–3153, 2009.

[31] B. Ross : *Fractional calculus and its applications : proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974*, vol. 457. Springer, 2006.

[32] H. Royden et P. Fitzpatrick : Real analysis (pp. 107–134), 2010.

[33] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev *et al.* : *Fractional integrals and derivatives*, vol. 1. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.

[34] J. Tenreiro Machado, V. Kiryakova et F. Mainardi : A poster about the old history of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 13(4):447–454, 2010.

[35] S. Zeng, D. Baleanu, Y. Bai et G. Wu : Fractional differential equations of caputo–katugampola type and numerical solutions. *Applied Mathematics and computation*, 315:549–554, 2017.