RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
«Analyse Fonctionnelle et Équations Différentielles »

Présenté Par :
Otman Leila et Hadjadj Afaf

Sous L'intitulé :

Formulation variationnelle des équations différentielles aux dérivées partielle

Soutenu publiquement le 02/ 07/ 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. Benaissa Bouharket	M .C .A	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mr. Azaiz Said	M .C .B	Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes	Encadreur
Mr. Mokhtari Mokhtar	M .C .A	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Table des matières

Table des matières **1**

Liste des notations **2**

Introduction **4**

1 Quelques Outils d'analyse fonctionnelle **5**

1.1 Espace de Banach 5

1.1.1 Norme 5

1.1.2 Produit scalaire 5

1.1.3 Espace préhilbertien et hilbertien 6

1.2 Espace de Hilbert 6

1.3 les fonctions continues 7

1.4 les fonctions tests D(Ω) 7

1.5 les distribution 7

1.6 les espace L^p, $p \in [1, +\infty[$ 8

1.7 les espace L^p 9

1.7.1 Inégalités classique 9

1.8 les espace de Sobolev 9

1.8.1 l'espace $w^{m,p}(\Omega)$ 9

1.8.2 $w^{-1,p'}(\Omega)$ 10

1.8.3 Inégalité de Poincaré 11

1.8.4 Formule de Green 11

1.9 la convergence faible 11

1.9.1 f.s.c.i 12

1.9.2 les points critiques 12

2 Formulation variationnelle des EDP **13**

2.1 Bidual d'un espace normé, et espace réflexifs 13

2.1.1 Formulation variationnelle 14

2.1.2 Théorème de Lax-Milgram 15

2.2 Application 17

3 Problème de minimisation **19**
3.1 Différentiabilité au sens de Fréchet 19
3.2 problème de minimisation 21
3.3 Application 22
3.4 Condition de Palais-Smale 26
3.5 Théorème de min-max 26
3.6 Théorème de Col 27
3.7 Principe d'Ekeland 28
3.8 application 29

4 Méthode de la monotonie **34**
4.1 Application 35

Conclusion **37**

Bibliographie **38**

Index des Notations

- $\partial\Omega$: Frontière de Ω.
- $\overline{\Omega}$: Adhérence de Ω.
- $w_0^{k,p}$: Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$ et avec trace 0.
- $f.s.c.i$: Faiblement semi continue inférieur.
- $s.c.i$: semi continue inférieur.
- $p.p$: presque partout
- $suppf$: Support d'une fonction f.
- div : Opérateur de divergence.
- ∇u : Gradient de u.
- $C^\infty(\Omega)$: Fonctions indéfiniment différentiables dans Ω.
- $C_0^\infty(\Omega)$: Fonctions de $C^\infty(\Omega)$ a support compacte.
- $D'(\Omega)$: Espace des distribution sur Ω.
- $L^p(\mu)$: fonctions de puissance p μ-intégrables.
- X^{**} : dual de dual de X (bidual).
- I_X : l'application canonique de X.
- $\widehat{X}$: l'adhérence de l'image de X.
- $\partial_i^2 u$: la dérivée partielle de u par rapport a i ème variable.
- $H^{-1}(\Omega)$: l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

- $\hookrightarrow$: On écrit X $\hookrightarrow$ Y pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.

- $Im(A)^{\perp}$: Orthogonal de l'image de A.

Introduction

Le but de ce mémoire est d'introduire les techniques des formulations variationnelles pour résoudre les problèmes elliptiques linéaires et non linéaire.

Les méthodes variationnelles représentent une classe importante, pour résoudre des problèmes d'EDP, liés à la physique ou bien à la géométrie.

Dans ce travail, on présente trois chapitres.

Le premier chapitre : On donne un rappel d'analyse fonctionnelle de certains espace fonctionnels qui nous seront d'une grand utilisé, comme les espaces de Lebesgue, des espace de Sobolev, et quelques inégalités (Hölder,Poincaré,..) qui sont jouent un rôle très important.

Le deuxième chapitre : on présenter la formulation variationnelle des EDP et résolution par le théorème de Lax-Milgram dans le cas linéaire.

Le troisième chapitre : dans le cas non linéaire on utilise la technique du problème de minimisation dans les espaces de Banach réflexifs.

Enfin dans le dernier chapitre on présente le méthode de monotonie, pour résoudre quelques problèmes non linéaire, qui ne peuvent pas être formulés variationnellement.

Chapitre 1

Quelques Outils d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Norme

Définition 1.1.1. *[19] Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. L'application*

$$||.|| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

est appelée norme, si elle vérifie les propriétés suivantes :
(i) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
(ii) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, pour tout* $x \in X$*, et*
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$*, pour tout* $x, y \in X$.

1.1.2 Produit scalaire

Définition 1.1.2. *[19] Soit X un espace vectoriel réel. Un produit scalaire* $\langle ., . \rangle$ *sur X est une application*

$$||., .|| : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} + (u, v) \longrightarrow \langle u, v \rangle$$

vérifiant les propriétés : (i) symétrie de l'espace X $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *pour tout u,v* $\in X$.
(ii) linéarité par rapport u $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ *pour tout* u_1, u_2*, et* $v \in X$.
$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ *pour tout* $u \in X$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) positivité $\langle u, v \rangle \geq 0$ *pour tout* $u \in X, \langle u, u \rangle = 0$ *si et seulement si u=0.*

Définition 1.1.3. *[19] Un espace vectoriel réel X muni d'un produit scalaire* $\langle ., . \rangle$ *s'appelle espace préhilbertien. Si l'espace X est de dimension finie, alors X est appelé espace euclidien.*

1.1.3 Espace préhilbertien et hilbertien

Soit H un espace vectoriel muni d'une normé $||.||_H$.

Définition 1.1.4. *On dit que $(x_n)_n$ de H est une suite de Cauchy ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N, ||x_n - x_m||_H \leq \varepsilon.$$

Cela s'écrit en termes de limite comme :

$$\lim_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m||_H = 0.$$

Définition 1.1.5. *Un espace vectoriel réel ou complexe H est un espace préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $(.,.)_H$.*

Définition 1.1.6. *[21] Soit $(E, ||.||_E)$ un espace vectoriel normé. On dit que $(E, ||.||_E)$ est un espace de Banach si et seulement si l'espace métrique(E,d) ou dit est la distance associée à la norme $||.||_E$ (i.e. $d(x, y) = ||x - y||_E$) est un espace complet.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.1. *[18] Un espace vectoriel préhilbertien $\langle H, \langle ., .\rangle\rangle$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Remarque 1.2.1. *Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy (x_n) est convergente, on dit que c'est un espace de Banach.*

Exemple 1. *(l'espace w^2) Soit $\mathbb{R}^{n^*}$ l'espace vectoriel de suites $x = (x_i)_{i\in n}$ des nombres réels. Le sous espace*

$$w^2 = \{x = (x_i)_{i\in n*} \in \mathbb{R}^{n*}, \sum x_i^2 < +\infty\}$$

est un espace de préhilbertien avec le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

et la nome

$$||x|| = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i)^{1/2}.$$

Donc $(w^2, ||.||)$ est un espace de Hilbert.

1.3 les fonctions continues

Définition 1.3.1. *[22] Un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit domaine si :*
1. Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
2. Ω est convexe dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.2. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}$. On définit respectivement les espaces $C^0(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ et $C^\infty(\Omega)$ par :*

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \; continue\}$$

$$C^m(\Omega) = \{f \in C^{m-1}(\Omega) \; : \; D^\alpha f \in C^0(\Omega), \; |\alpha| = m\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

1.4 les fonctions tests D(Ω)

Définition 1.4.1. *[1] On définit le support d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$, par*

$$suppf = adh\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\},$$

c'est a dire l'adhérence de l'ensemble des x tels que f(x) est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors f est identiquement nulle.

Définition 1.4.2. *[1]*
On désigne par $D(\mathbb{R}^n)$, ou tout simplement, D l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable à support borné

$$D = \{\varphi \in \mathbb{R}^\infty : suppf borne\}.$$

Cet ensemble s'appelle espace de base et ces éléments fonctions de base(ou fonctions tests).

Définition 1.4.3. *[1] On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_k) \in D$ vers une fonction $\varphi \in D$ si :*
(i) tout les supports des (φ_k) sont contenus dans un même compact K.
(ii) pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées $(\varphi_k^{(j)})$ converge uniformément vers φ^j sur k.

1.5 les distribution

Définition 1.5.1. *[2] Soit Ω un ouvert de R^n. Une distribution T sur Ω est une application linéaire de C_0^∞ dans C telle que :*

pour tout compact K de Ω *il existe* $C_k > 0$ *et* $k \in N$ *tels que*

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} | \partial^\alpha \varphi(x) | \tag{1.1}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(k)$.

Remarquons que, pour des raisons pratiques qui apparaitront ultérieurement. On a noté $\langle T, \varphi \rangle$ *l'action de la forme linéaire T sur l'élément* φ *de* C_0^∞.

Propriété 1.5.1. *[2] On a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :*
(**i**) *T est une distribution sur* Ω.
(ii) T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ *telle que pour tout compacte k de* Ω, *la restriction de T à* $C_0^\infty(k)$ *est continue.*
(iii) T est une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\Omega)$.
(iv) pour toute suite (φ_j) *de* $C_0^\infty(\Omega)$ *telle que :*
a) il existe k compact de Ω *tel que supp* $\varphi_j \subset K, \forall j \in N$,
b) $(\varphi_j) \longrightarrow 0$ *dans* $C_0^\infty(k)$, *alors* $\lim_{j\to\infty} \langle T, \varphi_j \rangle = 0$.
L'ensemble des distributions sur est noté D'(Ω).

Définition 1.5.2. *[2] (dérivation des distributions) soit f une fonction de classe* c^1. *En faisant une intégration par parties, on obtient immédiatement*

$$< f', \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - < f, \varphi' >, \ \varphi \in D.$$

1.6 les espace L^p, $p \in [1, +\infty[$

Définition 1.6.1. *[3] Pour* $p \in [1, +\infty[$, *on désigne par* $L^P(E, T, \mu)$ *l'ensemble des applications f de E dans* $\mathbb{C}$ *(T,B(*$\mathbb{C}$*))-mesurable telles que* $\int |f|^p d\mu < +\infty$.
pour $f \in L^P(E, T, \mu)$, *on pose :*

$$||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$$

.
On note par $L^P ou L^P(\mu)$.

Définition 1.6.2. *[3] Soit f une fonction* μ*-essentiellement bornée. On appelle borne supérieure* μ*-essentielle de f et on note* $||f||_{L^\infty(\mu)}$ *ou* $||f_\infty||$ *quand il n'y a pas de confusion possible, la borne inférieure des majorants* μ*-essentiels de f. Autrement dit :*

$$||f||_\infty = \inf\{M : \mu(\{|f > M\})\} = 0.$$

Proposition 1.6.1. *[3] (i) pour tout* $p \in [1, +\infty[$, *L'ensemble* $L^P(E, T, \mu)$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
(ii) L'application $f \mapsto ||f||_p$ *est une semi-norme sur* $L^P(E, T, \mu)$.

Définition 1.6.3. *[3] soient $p \in [1, +\infty]$, $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^P$.*
On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans L^p vers f ou que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne d'ordre p vers f si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n - f \| = 0$.

Lemme 1.6.1. *[10]**(Lemme de Fatou)** Soit $(f_n)^n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Théorème 1.6.1. *[9]**(théorème de convergence dominée de Lebesgue)** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que $(f_n)_n$ converge p.p sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p $x \in \Omega$. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L(\Omega)} = 0$.*

1.7 les espace L^p

1.7.1 Inégalités classique

Définition 1.7.1. *[3] soient p et p' deux réels appartement à $]1, +\infty[$. On dit que p et p' sont conjugués si 1/p + 1/p'=1.*
pas extension, on dit que 1 et $+\infty$ sont conjuguées.

Théorème 1.7.1. *[3]**(Inégalité de Hölder généralise)***
soient f,g :E$\rightarrow$ $\mathbb{C}(T, B(\mathbb{C}))$-mesurable ;
on a,pour tout $p \in]1, +\infty[$ et p' son conjugué :

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_E |g|^{p'} d\mu)^{1/p'} \tag{1.3}$$

1.8 les espace de Sobolev

1.8.1 l'espace w$^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.8.1. *[4] Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $w^{m,p}(\Omega)$ est définie par :*

$$w^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p,\ \forall\alpha \in \mathbb{N},\ |\alpha| \leq m\}.$$

Proposition 1.8.1. *[4] L'espace $w^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :*

$$\|u\|_{w^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p} & si\ 1 \leq p < +\infty; \\ \max\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & si\ p = +\infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

De plus si 1<p<+∞, alors l'espace $w^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Définition 1.8.2. *[4] pour m$\in \mathbb{N}$, l'espace $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$ est appelé espace de Sobolev d'ordre m.*

Proposition 1.8.2. *[4] L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire*

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme :

$$||u||_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

Cas particulier :

Définition 1.8.3. *[5](**$H^1(\Omega)$**) soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) telque \forall i \in \{1, ..., N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\},$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est le dérivée partielle de v.

muni du produit scalaire

$$< u, v >= \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx,$$

et de la norme

$$||u||_{H^1(\Omega)} = (\int_\Omega (|u(x)|^2) + |\nabla u(x)|^2 dx)^{1/2},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.8.2 $w^{-1,p'}(\Omega)$

Définition 1.8.4. *[5](**l'espace dual ($w^{-1,p'}(\Omega)$)**) L'espace $w^{-1,p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $w_0^{1,p}(\Omega)$ (ou $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$). Autrement dit un élément f de $w_0^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $w_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $\langle , \rangle$ le crochet de dualité entre $w_0^{-1,p'}(\Omega)$ et $w_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que*

$$||f||_{w^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{u \in w_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{||v||_{w_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{||v||_{w_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle f, v \rangle,$$

et

$$\langle f, v \rangle \leq ||f||_{w^{-1,p'}(\Omega)} ||v||_{w_0^{1,p}(\Omega)} \quad pour\ tout\ \ v \in w_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 1.8.1. *Pour p'=2, l'espace* $w^{-1,2}(\Omega)$ *est le dual de* $w_0^{1,2}(\Omega) := H_0^1(\Omega)$*. Il sera noté par* $H^{-1}(\Omega)$*.*

Théorème 1.8.1. *[9]***(De Rellich-Kondrachov)** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *tel que* $\partial\Omega$ *est de classe* C^1 *et soit* $1 \leq p \leq +\infty$*. Alors on a les injections compactes suivantes :*

$$\begin{cases} & L^q(\Omega) \quad si\ p < N, \quad pour\ tout\ \ 1 \leq q < p^* \\ w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow & L^q(\Omega) \quad si\ p = N, \quad pour\ tout\ \ 1 \leq q < \infty \quad (ou\ p^* = \dfrac{Np}{N-p}) \\ & C(\overline{\Omega}) \quad si\ p > N, \end{cases} \tag{1.5}$$

1.8.3 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.8.2. *[5]*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *borné . Alors il existe une constante* $c > 0$ *(dépendant de* Ω *et p) telle que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty). \tag{1.6}$$

1.8.4 Formule de Green

Théorème 1.8.3. *[5]* **(formule de Green)** *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de classe* c^1*. Si u et v sont des fonctions de* $H^1(\Omega)$*, elles vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds,$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq N}$ *est la normale unité extérieure à* $\partial\Omega$*.*

1.9 la convergence faible

Théorème 1.9.1. *[7]***(théorème de Riesz)** *Soit Z un espace normé de dimension n ; pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$*, on peut trouver dans la boule unité de Z une famille A d'au moins* ε^{-n} *points dont les distances mutuelles sont* $\geq \varepsilon^{-n}$*.*
Si la boule unité d'un espace normé X est compacte, alors X est de dimension finie.
on dit qu'un opérateur $T : E \to F$ *est compact si l'adhérence dans F de l'image de la boule unité de E est compacte dans F.*

Définition 1.9.1. *[6] Le théorème de Riesz montre que si* $\{x^n\}_{n\geq 0}$ *est une suite bornée de X, on n'est pas sur qu'on puisse extraire une sous-suite* $\{y^n\}_{n\geq 0}$ *de* $\{x^n\}_{n\geq 0}$ *qui sont convergente. Rappelons que* $\{y^n\}_{n\geq 0}$ *est obtenue à l'aide de* $\{x^n\}_{n\geq 0}$ *par* $y^n = x^{g(n)}$ *ou g est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*.Pour pallier à cette insuffisance, on introduit la notion de convergence faible.*
On dit que la suite $\{x^{(n)}\}_{n\geq 0} \subset X$ *converge faiblement vers x dans X si :*

$$\forall y \in X, \lim_{n\to\infty}(x^n, y)_X = (x, y)_X. \tag{1.7}$$

Notation 1. *On note alors*

$$w - \lim_{n\to\infty}(x^n) = x. \tag{1.8}$$

Définition 1.9.2. *Pour distinguer entre cette convergence et la convergence au sens usuel pour la norme de X. On dira que $\{x^n\}_{n\geq 0}$ converge fortement lorsqu'elle converge pour la norme.*

Proposition 1.9.1. *(Unicité de la limite faible).*
soit $\{x^n\}_{n\geq 0}$ une suite de X. Alors
$w - \lim_{n\to\infty}(x^n) = x$ *et* $w - \lim_{n\to\infty}(x^n) = y$ *entrainent x=y.*

1.9.1 f.s.c.i

Définition 1.9.3. *[21] une fonction $F : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est semi continue inférieurement (s.c.i) en point $x \in E$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \to_E x$, on a :*

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

La fonction f est s.c.i sur E si elle est s.c.i au $x \in E$ tout point de E.

Définition 1.9.4. *[21] Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge faiblement vers $x \in E$ dans la définition précédente, la fonction f est dite faiblement s.c.i.*
La fonction f est faiblement s.c.i si elle est faiblement s.c.i en chaque point $x \in E$.

Exemple 2. *La norme induite d'une produit scalaire $x \mapsto \|x\|_E = \sqrt{\langle x, x\rangle_E}$ est faiblement s.c.i.*

1.9.2 les points critiques

Soient X un espace de Banach, w un ouvert de X et $J \in C^1(w, \mathbb{R})$.

Définition 1.9.5. *[10] On dit que $u \in w$ est un point critique de J si J'(u)=0.*
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J, s'il existe un $u \in w$ tel que J(u)=c et J'(u)=0.

Remarque 1.9.1. *Si u n'est pas point critique de J, on dit que u est un point régulière de J.*

]

Chapitre 2

Formulation variationnelle des EDP

Dans ce chapitre on présente les techniques des méthodes variationnelles utilisées en analyse linéaire et non-linéaire et leur application pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques semi-linéaire et quasi-linéaire.

on note $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, le symbole nabla ∇ représente le gradient de u,

$$\nabla u(x) = gradu(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$$

et div désigne l'opérateur divergence, il s'applique à une fonction vectoriel,

$$div(v_1(x), ..., v_n(x)) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

le symbole Δ désigne le laplacien de u,

$$\Delta u(x) = div\nabla u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

2.1 Bidual d'un espace normé, et espace réflexifs

[7] Soit X un espace normé, le dual du dual X^* de X s'appelle le bidual de X et note X^{**}. pour $x \in X$ notons $I_X(x) : X^* \to \mathbb{k}$ la forme linéaire sur X* qui à $x^* \in X^*$ associe $x^*(x)$. Pour tout $x^* \in X$, on a :
$|I_X(x)(x^*)| = |x^*(x)| \leq ||x^*||||x||$,donc $I_X(x) \in X^{**} et ||I_X(x)|| \leq ||x||$.
On dit que $I_X \in L(X, X^{**})$ est l'application canonique de X dans son bidual.

Corollaire 1. *[7] l'application canonique $I_X : X \to X^{**}$ est isométrique.*

Remarque 2.1.1. *[7] Puisque X^{**} est toujours complet et que l'espace normé X s'injecte isométriquement dansX^{**}, on obtient une description d'un complété de X en considérant $\widehat{X} = \overline{I_X(x)}$:l'adhérence de l'image de X dans l'espace complet X^{**} est complète.*

Définition 2.1.1. *[7] un espace de Banach E est dit réflexif si l'application canonique* $\overline{I_X(x)} : E \to E^{**}$ *est bijective.*

Proposition 2.1.1. *[7] Toute espace de Hilbert est réflexif.*
si X est réflexif,alors X^* *est réflexif.*
si X est réflexif, toute sous-espace fermé Y de X est réflexif.

Corollaire 2. *[7] Si X est complet et* X^* *réflexif, alors X est réflexif. En effet* X^{**} *est alors réflexif et X est isomorphe à un sous-espace fermé de* X^{**}.

2.1.1 Formulation variationnelle

[18] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N(N \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega$. On cherche une solution au problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & dans\ \ \Omega \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2. *On suppose que* $f \in C(\overline{\Omega})$. *On appelle alors solution classique de* (2.1) *une fonction* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *vérifiant* (2.1).

Proposition 2.1.2. *[18] Soient* Ω *une fonction de* $C^2(\overline{\Omega})$, *X l'espace défini par*

$$X = \{\phi \in C^1(\overline{\Omega})\ telque\ \phi = 0\ sur\ \partial\Omega\}.$$

Alors u est une solution du problème au limite (2.1) *si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité*

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x).v(x)dx\ pour\ tout\ v \in X. \tag{2.2}$$

L'égalité (2.2) *est appelé la formulation variationnelle de problème au limite* (2.1). *La fonction v est dite fonction de test et la formulation variationnelle est aussi par fois appelée formulation faible du problème aux limite* (2.1), *lorsqu'on prend v=u de* (2.2) *on obtient ce qu'il convenu d'appeler une égalité d'énergie.*

preuve(de proposition)[18] Si u est solution du problème aux limites (2.1) on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégration par partie

$$\int_\Omega \Delta u.vdx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} vds$$

or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$ donc

$$-\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x).v(x)dx$$

qui n'est rien d'autre que la formule (2.1). Réciproquement si $u \in X$ vérifie (2.1), en utilisant la formule d'intégration par partie précédente on obtient

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f(x)).v(x)dx = 0$$

pour toute fonction $v \in X$, Comme$(\Delta u + f)$est une fonction continue grâce au lemme on conclur que $-\Delta u = f$ pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs comme $u \in X$ on retrouve la condition aux limites u=0 sur $\partial\Omega$ C'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (2.1). ∎

Remarque 2.1.2. *1- On peut récrier la formulation variationnelle* (2.2) *sous la forme*

$$\begin{cases} Trouver \quad v \in X \\ a(u, v) = l(v), \quad v \in X \end{cases}$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x)dx \quad et \quad l(v) = \int_{\Omega} f(x).v(x)dx. \tag{2.3}$$

2- L'espace X n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet pour la norme induite par

$$\|u\|_X = (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

Théorème 2.1.1. *[18] L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. C'est à dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Corollaire 3. *[18] Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0.$$

alors f(x)=0 presque par tout dans Ω.

2.1.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 2.1.2. *[16](**Théorème de Lax-Milgram**) Soit E un espace de Hilbert,*
1. a(.,.) :$E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire
2. a(.,.) continue, c-à-d, $\exists M_a > 0, \ \forall u, v \in E, \ |a(u, v)| \le M_a \|u\|\|v\|$,
3. a(.,.) coercive, c-à-d, $\exists \alpha > 0, \ \forall u \in E, \ |a(u, u)| \ge \alpha \|u\|^2$.
4. l :$E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue c-à-d, $v \to l(v)$ est linéaire et $\exists C > 0; \ \forall v \in E, \ |l(v)| \le C\|v\|$, alors la formulation variationnelle :

$$trouver \ u \in E \ telque : \forall : v \in E, \ a(u, v) = l(v), \tag{2.5}$$

admet une solution unique dans E. En outre, cette solution dépend continument de la forme linéaire l.

Théorème 2.1.3. *[16](**Représentation de Riesz**) Soient E un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire (.,.) et l une forme linéaire continue sur E. Alors, il existe un unique h ∈ E tel que : l(f)= (f,h), $\forall f \in E$.*

preuve Pour tout $w \in$ V, L'application $v \to a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V : par conséquent le théorème de représentation de Riesz entraine qu'il existe un élément de V,noté A(w), tel que

$$a(w, v) = \langle A(w), v\rangle \ \ pour \ \ tout \ \ v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de a(w,v) implique évidemment la linéarité de l'application $w \to A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité de a(w,v) montrer que

$$||A(w)||^2 = a(w, A(w) \leq M||w||||A(w)||,$$

c'est-à-dire que $||A(w)|| \leq M||w||$ et donc $w \to A(w)$ est continue. Une autre application du théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V, noté f, tel que $||f||_V = ||L||_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v\rangle \ pourtout \ \ v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (2.5) est équivalent à :

$$trouver \ u \in V \ tel \ que \ \ A(u) = f.$$

Pour démontrer la théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V(ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L). La coercivité de a(w,v) montre que

$$v||w||^2 \leq a(w, w) = \langle A(w, w)\rangle \leq ||A(w)||||w||,$$

ce qui donne

$$v||w|| \leq ||A(w)|| \ pourtout \ \ w \in V, \tag{2.6}$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que Im(A)=V (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que Im(A)=V est fermé dans V et que $Im(A)^{\perp} = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^{\perp} = (Im(A)^{\perp})^{\perp} = \overline{Im(A)} = Im(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans Im(A) qui converge vers b dans V. En vertu de (2.6) on a :

$$v||w_n - w_p|| \leq ||A(w_n) - A(w_p)||,$$

qui tend vers zéro quand n et p tendant vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V, c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers A(w)=b, c'est-à-dire que $b \in Im(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in Im(A)^{\perp}$; la coercivité de a(w,v) implique que :

$$v||v||^2 \leq a(v, v) = \langle A(A(v), v)\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que v=0 et $Im(A)^{\perp} = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (2.6) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continument de f. ■

2.2 Application

Application 1

Considérons le problème suivante :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad dans\ I =]0,1[,\ f \in L^2(0,1) \\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{2.7}$$

Soit $u \in C^2([0,1])$ une solution classique de (2.7).
On multiplie l'équation de (2.7) par $v \in C^1([0,1])$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv\,dx,\ \forall v \in C^1([0,1]) \tag{2.8}$$

Si on choisit v telle que $v(0) = v'(1)$, alors :

$$u'(1)v'(1) - u'(0)v(0) = v(0)(u'(1) - u'(0)) = 0.$$

D'où l'équation (2.8) devient :

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fvdx,\ \forall v \in C^1([0,1]),\ v(0) = v(1). \tag{2.9}$$

Grâce à densité, l'équation (2.9) est équivalent à :

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fvdx,\ \forall v \in H, \tag{2.10}$$

C'est la formulation variationnelle associée au problème (2.7). On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire a définie sur H par :

$$a(u,v) := \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx$$

et la forme linéaire $l(v)$ définie par :

$$l(v) = \int_0^1 fvdx,\ \forall v \in H.$$

Pour la coercivité de a, d'après (1.4) on a :

$$a(u,u) = \int_0^1 u'^2dx + \int_0^1 u^2dx = \|u\|^2_{H^1(0,1)}$$

Ce qui implique la coercivité.
Pour la continuité, on applique l'inégalité de Hölder (1.3) dans L^2 et puis dans $\mathbb{R}^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} a(u,v) &\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq (\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2})^{1/2}(\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2})^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \qquad (car\ \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}\ et\ \|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}). \end{aligned}$$

Ce qui implique la continuité de la forme bilinéaire.
Pour la continuité de la forme linéaire, on a :

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1(0,1)} = C\|v\|_{H^1(0,1)}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram 2.5, on obtient l'existence d'une solution faible $u \in H$.

Chapitre 3

Problème de minimisation

Pourquoi s'intéresser aux espaces réflexifs ? les espaces réflexifs ont une sorte de compacité : on verra que si (C_n) est une suite décroissante de convexe fermé bornés non vide. on déduit que si f est une fonction convexe continue sur une convexe fermé borné non vide C d'une espace réflexif E, alors f atteint son minimum sur C. Cela permet de montrer que certains problèmes de minimisation ont une solution,quand on travaille avec un espace réflexif.

3.1 Différentiabilité au sens de Fréchet

On considéré $(E, ||.||)$ un espace de Banach et U un ouvert non vide de E.

Définition 3.1.1. *[11] On dit qu'une fonctionnelle $I : U \to \mathbb{R}$ est Fréchet-différentiable (ou différentiable au sens de Fréchet) au point $u \in U$, s'il existe $A \in E'$ telle que*

$$\forall v \in E, \lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{||v||} = 0. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.1. *On a l'équivalence suivante*

$$\begin{aligned} \lim_{||v|| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{||v||} = 0. &\Leftrightarrow I(u+v) - I(u) - Av = o(||v||),\ ||v|| \to 0 \\ &\Leftrightarrow I(u+v) - I(u) = Av + o(||v||),\ ||v|| \to 0 \end{aligned}$$

Donc en pratique, on développer la différence (I(u+v)-I(u))afin de déterminer l'expression Av. Ceci permet de donner une définition équivalente à la précédente et plus pratique que cette dernière.

Exemple 3. *l'ensemble précédent prouver bien que la fonctionnelle $J : L^2(]0,1[) \to \mathbb{R}$ donnée par :*

$$j(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x) dx$$

est Fréchet-différentiable sur L^2 et $J'(u)v = \int_0^1 u(x)v(x)dx = (u,v)_{L^2}$, ou $(.,.)_{L^2}$ désigne le produit scalaire de L^2.
En effet :

$$\begin{aligned} ona\ &: J(u+v) - j(u) \\ &= \frac{1}{2}\int (u+v)^2\,dx - \frac{1}{2}\int u^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}[2\int uv + \int v^2] \\ &= \int uv\,dx + \int v^2\,dx \quad (\int v^2 = A(v)). \end{aligned}$$

Si $\|v\| \to 0$, alors $\int u\,dx \to 0$ (Car $\int uv \leq \|u\|\|v\|$).
D'où J est Fréchet-différentiables est sa dérivée est $J'(u)v = \int uv\,dx$.

Proposition 3.1.1. *Si $I : U \to \mathbb{R}$ est Fréchet-différentiable au point $u \in U$, alors I est continue en u.*

preuve En effet supposons que $I : U \to \mathbb{R}$ est Fréchet-différentiable en u, et montrons que I est continue en u. Par hypothèse, on écrit :

$$\forall v \in E,\ I(u+v) = I(u) + I'(u)v + o(\|v\|),\ \|v\| \to 0,$$

avec $I'(u) \in E'$. En particulier $\lim_{v\to 0} I(u+v) = I(u)$ car

$$\lim_{v\to 0} I'(u)v = I'(u)(\lim_{v\to 0} v) = 0 = I'(u)(0) = 0,\ \ et\ \ \lim_{v\to 0} o(\|v\|) = 0.$$

Par conséquent, I est continue en u. ■

Proposition 3.1.2. *(opérations sur les fonctionnelle Fréchet-différentiables) Soient I et J deux fonctionnelles différentiables au sens de Fréchet au point $u \in U$.Alors :*
1. La fonctionnelle $(aI + bJ)(a, b \in \mathbb{R})$ est Fréchet-différentiable en u et on a

$$(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$$

2. Le produit IJ est Fréchet-différentiable en u et on a

$$(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u)$$

3. Si $\gamma : \mathbb{R} \to U$ est Fréchet-différentiable en t_0 avec $u = \gamma(t_0)$. Alors la composition $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\eta(t) = I(\gamma(t))$ est différentiable en t_0 et on a

$$\eta'(t_0) = I'(u)\gamma'(t_0).$$

4. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble ouvert, $f : A \to \mathbb{R}$ est différentiable en $I(u) \in A$. Alors la composition K(u)=f(I(u)) est définie sur un voisinage ouvert V de u et est différentiable en u et on a :

$$K'(u) = f'(I(u))I'(u)$$

3.2 problème de minimisation

Théorème 3.2.1. *[14] Soit E un espace de Banach réflexif, soit $j : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue, convexe et coercive, alors j admet un point minimum global.*

preuve si $j \equiv +\infty$ sur E alors là rien à prouver. Supposons que $j \not\equiv +\infty$ et on note $\alpha = \inf_{u \in E} j(u) \geq -\infty$. Soit $u_k \subset E$ une suite minimisante ($\lim_{j \to \infty} j(u_k) = \alpha$).
maintenant,supposons qu'on :
(i) La suite u_k est uniformement bornée dans E.
(ii) Il existe une sous suite u_{nk} tels que $u_{nk} \to u$, pour certains $u \in$ E.
D'après le théorème [3.2.1] alors J est f.s.c.i on a :
et par la preuve du théorème précédent,on a ;

$$j(u) \leq \lim_{k \to \infty} \inf j(u_{nk}) = \lim_{k \to \infty} j(u_{nk}) = \alpha, \tag{3.2}$$

et comme $j(u) \geq \alpha$ et d'après l'inégalité (3.2), alors on a :

$$j(u) = \inf_E j,$$

ceci montre que $\alpha = j(u)$. Donc u est un point minimum global de j. Ainsi, on justifier (i) et (ii) pour compléter la preuve ■

Théorème 3.2.2. *[15] soient E un espace de Banach réflexif, et C un sous-ensemble faiblement fermé de E. Une fonctionnelle j définie sur C tells que :*
(i) $\lim_{\|u\|_c \to +\infty} j(u) = +\infty.$
(ii) j est (f.s.c.i)
Alors j est bornée inférieurement sur C et atteint sa borne inférieure en un point $u \in C$.

preuve Comme la preuve précédant. Supposons que j$\not\equiv +\infty$ et on note $\alpha = \inf_{u \in C} j(u) \geq -\infty$. Soit $u_k \subset C$une suite minimisante, et sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème précédente
Depuis $u_{nk} \to u$ par (ii) et C est faiblement fermé alors $u \in C$, j est(f.s.c.i)et avec même principe

$$j(u) = \inf_C j$$

Ainsi, la justification de (i) est reste le même et pour (ii) : ■
preuve de (ii) :E est réflexif, alors par le théorème la boule fermé $\overline{B(0,R)}$ de E est

faiblement compact. Depuis(u_k)est bornée dans E.
D'après (i) alors $u_k \subset \overline{B(0,R)}$, pour certains $R(\|u_k\| \leq R)$.
Donc la suite (u_k) admet une sous suite convergente faiblement vers $u \in \overline{B(0,R)} \subset E$.
Un sous-ensemble convexe fermé et bornée de E est faiblement compact. Alors en peut remplace $\overline{B_R}$ par $B_R \cap C$ dans théorème. ∎

Corollaire 4. *Soit un sous-ensemble convexe fermé $C \subset E$. Sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème, il existe $u_0 \in C$ tels que $j(u_0) = \inf_C j$.*

Théorème 3.2.3. *[14] Si $j : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle strictement convexe, alors j admet au plus un point minimum unique en E.*

preuveSupposons que j admet deux différentes minimum global $u_1 et u_2$ dans E. par strictement convexité

$$min\, j(u) \leq j(\frac{u_1+u_2}{2}) < \frac{1}{2}j(u_1) + \frac{1}{2}j(u_2) = \min_{u\in E} j(u)$$

Une contradiction. ∎

3.3 Application

Application 1(Cas linéaire)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $q \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant $q(x) \geq 0$, p.p. $x \in \Omega$.
Montrer que pour tout $h \in L^2(\Omega)$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x) \;\; p.p \;\; x \in \Omega \\ u = 0, \qquad sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

admet une solution (unique) faible.
Solution :
1.Pour résoudre le problème (3.3) : En multipliant l'équation dans (3.3) par $v \in C^0_\infty(\Omega)$ puis en intégrant sur Ω, on obtient grâce a la formule de Green :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega q(x)uv = \int_\Omega h(x)v.$$

Par conséquente, une solution faible du problème (3.3) est une fonction $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega q(x)uv = \int_\Omega h(x)v, \;\forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{3.4}$$

2. Le choix de la fonctionnelle : On pose $v = u$ dans (3.4), on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega q(x)u^2 - \int_\Omega h(x)u = 0, \; u \in H^1_0(\Omega)$$

On veut choisir une fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ donc ses points critiques u sont des solutions(faibles) du problème (3.3). Pour cela, soit la fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2 - \int_\Omega h(x)u$$

La fonctionnelle J est (Fréchet) différentiable sur $H_0^1(\Omega)$ (car elle est la somme de 3 fonctionnelles sont Fréchet différentielles.)et on a

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega q(x)uv - \int_\Omega h(x)v dx,\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que tout point critique de J est une solution (faible)du problème (3.3).
De plus, tout point critique de J est un minimum de J inversement.
On montre que le problème (3.3) admet une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ revient à montrer que la fonctionnelle J admet un minimum sur $H_0^1(\Omega)$.
3. Minimiser J sur $H_0^1(\Omega)$:
(1) l'espace $H_0^1(\Omega)$ est réflexif.
(2) J est continue sur $H_0^1(\Omega)$ car elle est Fréchet différentiable.
(3) J est strictement convexe. En effet, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ avec $u \neq v$,

$$\begin{aligned}(J'(u) - J'(v))(u - v) &= \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2 dx + \int_\Omega q(x)(u - v)^2 dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2 dx \quad (car\ q(x) \geq 0) \\ &= \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2 dx \\ &= ||u - v||^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &> 0, \forall u \neq v.\end{aligned}$$

(4) J est coercive. Comme $q(x) \geq 0$, il vient :

$$\begin{aligned}&J(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega hu \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - ||h||_{L^2}||u||_{L^2} \quad \text{(par l'inégalité de Hölder)} \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - C||h||_{L^2}||\nabla u||_{L^2} \quad \text{(par l'inégalité de Poincaré)} \\ &= \frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - C||h||_{L^2}||\nabla u||_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - C'||u||_{H_0^1(\Omega)} \ \geq c||u||\ \ (C' := C||h||_{L^2})\end{aligned}$$

Il résulte que J admet un minimum unique dans $H_0^1(\Omega)$, i.e. le problème (3.3) admet une solution (faible) unique dans $H_0^1(\Omega)$.
Application 2 (Cas non linéaire)

Soit E= $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in E' = W_0^{-1,p'}(\Omega)(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$. On munit l'espace de Banach E par la norme

$$\begin{aligned}||u||_E &= (\int_\Omega |u|^p)^{1/p} + (\int_\Omega |\nabla u|^p)^{1/p}\\ &= ||u||_{L^p} + ||\nabla u||_{L^p}\end{aligned}$$

Montrer que le problème

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = \ f, \quad p.px \in \Omega \\ u = 0 \quad sur \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

admet au moins une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Solution :
1. On Définit une solution faible du problème (3.5) : Pour cela, en multipliant l'équation dans (3.5) par $v \in C_\infty^0(\Omega)$ puis en intégrant sur Ω, on obtient grâce a la formule de Green :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv = \int_\Omega fv.$$

Par conséquent, une solution faible du problème (3.5) est une fonction $u \in w_0^{1,p}(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv = \int_\Omega fv, \ \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.6}$$

2. Le choix de la fonctionnelle : On pose $v = u$ dans (3.6), on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p - \int_\Omega fv = 0, \ u \in w_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.7}$$

On veut choisir une fonctionnelle $J : w_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dont ses points critiques u sont solutions (faibles) du problème (3.5). Pour cela, soit la fonctionnelle $J : w_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p - \int_\Omega fvdx. \tag{3.8}$$

-La fonctionnelle J est Fréchet différentiable sur $w_0^{1,p}(\Omega)$ et on :

$$J'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v + \int_\Omega |u|^{p-2}uv - \int_\Omega fvdx, \ \ \forall v \in w_0^{1,p}(\Omega).$$

Notons que tout point critique de J est une solution(faible) du problème (3.5).
De plus, tout point critique de J est un minimum de J et inversement. Donc montrer que le problème(3.5)admet une solution faible dans$W_0^{1,p}(\Omega)$revient à montrer que la fonctionnelle J admet un minimum sur $W_0^{1,p}(\Omega)$

3. Minimiser J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$: comme $1 < p < \infty$, l'espace$W_0^{1,p}(\Omega)$est de Banach réflexif. De plus, on peut écrire :

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \int_\Omega fu, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.9}$$

-L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est de Banach réflexif et la fonctionnelle J est :
(1) convexe. En effet, soit $t \in [0,1]$ et $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De (3.9), il vient :

$$J((1-t)u + tv) = \frac{1}{p}\|(1-t)u + tv\|^p_{L^p} + \frac{1}{p}\|(1-t)\nabla u + t\nabla v\|^p_{L^p} - \int_\Omega f((1-t)u + tv)$$

Mais

$$\|(1-t)u + tv\|_{L^p(\Omega)} \leq (1-t)\|u\|_{L^p(\Omega)} + t\|v\|_{L^p(\Omega)},$$

et comme l'application $s \mapsto s^p$, $s \geq 0$ est croissante et convexe, on a :

$$\|(1-t)u + tv\|^p_{L^p(\Omega)} \leq ((1-t)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + t\|v\|^p_{L^p(\Omega)})^p \leq (1-t)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + t\|v\|^p_{L^p(\Omega)},$$

Une inégalité similaire est obtenue en remplaçant u par ∇u et v par ∇v,

$$\|(1-t)\nabla u + t\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} \leq (1-t)\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + t\|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)}$$

D'où, puisque f est linéaire, on obtient :

$$J((1-t)u + tv) \leq (1-t)J(u) + tJ(v).$$

(2) continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$; En effet, soit $(u_n)_n$ une suite de E convergente vers $u \in E$. On a $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$ et $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ (continuité de la norme) et $\int_\Omega fu_n \to \int_\Omega fu$, car $f \in E'$, donc :

$$\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} \to \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \int \omega f u_n \\ &\to \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \int \omega f u_n \\ &= J(u). \end{aligned}$$

Remarque : on peut conclure directement que J est continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ puisqu'elle est Fréchet différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(3) Coerecivité : En utilisant l'inégalité $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$, $\forall a, b \geq 0$ et puisque $\int \omega f u \leq \|f\|_{E'}\|u\|_E$, on obtient de (3.9)

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}) - \int \omega f u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ &\geq \frac{2^{1-p}}{p}(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)})^p - \int \omega f u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ &= \frac{2^{1-p}}{p}\|u\|^p_E - \int \omega f u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ &\geq \frac{2^{1-p}}{p}\|u\|^p_E - \|f\|_{E'}\|u\|_E \\ &\to 0, \quad si \|u\|_E \to 0 (car 1 < p), \end{aligned}$$

il existe donc, une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $J(u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v)$. Ce minimum est une solution (faible) du problème (3.5).

3.4 Condition de Palais-Smale

Soit X un espace de Banach. Dans toute la suite lorsque l'on considère une contraire du type :

$$S := \{v \in X; F(v) = 0\}, \tag{3.10}$$

on suppose toujours que :

$$F \in C^1(X, \mathbb{R}), \quad \forall v \in S, \; F'(v) \neq 0. \tag{3.11}$$

Définition 3.4.1. *[10] soient X un espace de Banach, et $J : X \to R$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de palais-smale(au niveau c), si toute$(u_n)_n$ de X telle que*

$$J(u_n) \to c \quad dans \,\mathbb{R}, \quad et \quad J'(u_n) \to 0 \quad dans \,\mathbb{X}',$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

3.5 Théorème de min-max

Théorème 3.5.1. *[17] Soit c un ensemble de parties de X non vide et*

$$c = \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{u \in A} J(u).$$

On suppose que J vérifie la condition de palais-male [3.4.1] *au niveau c, que $c \in \mathbb{R}$ et qu'il existe α tel que $\mathbb{A}$ soit stable par $D_c^{\varepsilon_0}$ pour tout ε_0 vérifiant $0 < \varepsilon_0 < \alpha$, (c'est-à-dire que si $A \in \mathbb{A}$, alors $\eta(A) \in \mathbb{A}$ pour tout $\eta \in D_c^{\varepsilon_0}$).*
Alors c est une valeur critique de J.

Remarque 3.5.1. *[17]*
1) Si J vérifie la condition de Palais-Smale, -J aussi. On a donc un résultat analogue pour

$$d = \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{u \in A} J(u)$$

2)Si $\mathbb{A} = \{\{u\}, u \in X\}$, alors on retrouve le fait qu'une fonctionnelle qui vérifie la condition de palais-Smale et qui est minorée atteint sa borne inférieure.

3.6 Théorème de Col

Théorème 3.6.1. *[17] si $J \in C^1(X; \mathbb{R})$ vérifie la condition de Palais-Smale telle que*
i) J(0)=0,
ii) ∃ R>0 et a>0 tels que si $\|u\|_X = R$, alors J(u)≥a,
iii) ∃$v \in X$, $\|v\|_X$>R, tel que J(v)<a.
Alors J admet une valeur critique c ≥a.

preuve[17] On applique le principe du min-max avec

$$A = \{\gamma([0, 1]); \gamma \in C([0, 1]; X), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$$

et,

$$\alpha = \frac{1}{2} min\{a, a - J(v), \varepsilon_0\} > 0$$

soit γ un chemin contenu reliant 0 à v et $A = \gamma([0, 1])$ l'élément de A qui lui est associé. Comme la fonction $t \to \|\gamma(t)\|_X$ est continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s \in [0, 1]$ tel que $\|\gamma(s)\|_X = R$. Par conséquent, $\sup\limits_{A} J(u) > a$,ce qui implique que

$$c = \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{u \in A} J(u) \geq a$$

D'autre part, $c < +\infty$ car l'image d'un chemin est compacte dans X. Maintenant, Soit η un homéomorphisme de D_c^α. Par construction, on a

$$J(0) = 0 \leq a - \alpha \leq c - \alpha$$

et

$$J(v) = a + J(v) - a \leq a - \alpha \leq c - \alpha,$$

donc on a $\eta(0) = 0$ et $\eta(v) = v$ par définition de D_c^α. Par conséquent,

$$\eta o \gamma(0) = 0 \, et \, \eta(1) = v$$

ce qui équivaut à dire que $\eta(A) \in \mathbb{A}$. ■

Un autre résultat important qui assure l'existence d'une suite de Palais-Smale pour certaines fonctionnelles, est le Principe variationnel d'Ekeland.

3.7 Principe d'Ekeland

Théorème 3.7.1. *(principe variationnele d'ekeland,forme faible 1979,[10]) soit (X, d) est un espace métrique complet et soit $j \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle qui est semi-continue inférieurement. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in X$ qui satisfait*

$$j(u_\varepsilon) \leq \inf_X j + \varepsilon,$$

et chaque fois $w \in X$ avec $w \neq u_\varepsilon$, alors

$$j(u_\varepsilon) < j(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

preuve Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère épigraphe de j :

$$A := \{(x, a) \in (X \times \mathbb{R}); j(x) \leq a\}$$

Puisque j est semi-continue inférieurement, A est fermé sur $X \times \mathbb{R}$. On définit une relation d'ordre par :

$$(x, a) \leq (y, b) \Leftrightarrow a - b + \varepsilon d(x, y) \leq 0$$

on va construire une suite d'ensembles A_n comme suite : pour $x_1 \in X$ fixé tel que

$$c \leq j(x_1) \leq c + \varepsilon,$$

on pose : $a_1 := J(x_1)$ et $A_1 := \{(x, a) \in A, (x, a) \leq (x_1, a_1)\}$. En supposant que (x_i, a_i) est déterminé et

$$A_i := \{(x, a) \in A, (x, a) \leq (x_i, a_i)\},$$

Pour $i \leq n$, on pose : $\widetilde{A_n} := \{x \in X; \exists a \in \mathbb{R}$, tel que : $(x, a) \in A_n\}$.
et $c_n := \inf_{x \in \widetilde{A_n}} j(u)$. Supposons un instant que $a_i > c_i$ pour $i \leq n$, il est claire qu'on peut fixé $(x_{n+1}, a_{n+1}) \in A_n$ tel que :

$$0 \leq j(x_{n+1}) - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n), a_{n+1} := j(x_{n+1}). \tag{3.12}$$

on pose ensuite $A_{n+1} := \{(x, a) \in (A) ; (x, a) \leq (x_{n+1}, a_{n+1})\}$ et on vérifie que :
$A_{n+1} \subset A_n$ et que $c \leq c_n \leq c_{n+1} := \inf_{x \in \widetilde{A_{n+1}}} j(u)$.
D'où, en utilisant les relations (3.12) :

$$0 \leq a_{n+1} - c_{n+1} \leq a_{n+1} - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n) \leq 2^{-n}(a_1 - c_1).$$

Par ailleurs, dire que $(x, a) \in A_{n+1}$ signifie que :

$$a - a_{n+1} + \varepsilon d(x, x_{n+1}) \leq 0.$$

on en conclus que : $\varepsilon d(x, x_{n+1}) \leq a_{n+1} - a \leq a_{n+1} - j(x) \leq a_{n+1} - c_{n+1}$ et par conséquent :

$$d(x, x_{n+1}) + |a - a_{n+1}| \leq (1 + \frac{1}{\varepsilon})2^{-n}(a_1 - c_1),$$

Ce qui implique le diamètre de A_{n+1} tend vers zéro. Comme A est complet, il existe un unique $(u, b) \in A$ tel que :

$$\{(a, b)\} = \cap_{n\geq 1} A_n.$$

Soit $(x, a) \in A$ tel que $(x, a) \leq (u, b)$, alors on a pour tout $n \geq 1$, $(x, a) \leq (x_n, a_n)$, ce qui implique que $(x, a) \cap_{n\geq 1} A_n$, c'est-à-dire $(x, a) = (u, b)$. Cela signifie que (u, b) est minimal dans A :

$$(x, a) \in A \ et \ (x, a) \leq (u, b) \Rightarrow (x, a) = (u, b).$$

D'après part on a : $(u, j(u)) \leq (u, b)$, et compte tenu du fais que (u, b) est minimal dans A, on conclut que $b = J(u)$. Ainsi on voit que $(u, J(u))$ est minimal dans A, c'est-à-dire que :

$$(x, a) \in A, (x, a) \neq (u, j(u)) \Rightarrow a - j(u) + \varepsilon d(x, u) > 0.$$

En particulier, en prenant a=j(u) et $x \neq u$, et remarquant que $j(u) \leq j(x_1) \leq c + \varepsilon$. On conclut la preuve de lemme.
S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $c_n = a_n = j(x_n)$, alors $A_n = \{(x_n, a_n)\}$.
En effet, $(x, a) \in A$ et $(x, a) \leq (x_n, a_n)$ signifie, par la déformation de la relation $(\leq)$:

$$a - a_n + \varepsilon d(x, x_n) \leq 0, \quad c_n = a_n = j(x_n) \leq j(x) \leq a.$$

On en déduire que $a = a_n$ et $x = x_n$. On pose alors $(u, b) = (x_n, a_n)$ et on vérifie que (u, b) est minimal dans A. ■

3.8 application

Application 1
considérons le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \quad sur \Omega \\ u = 0 \quad sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur Laplacien $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et une fonction $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et G sa primitive s'annulant en 0 telle que :
i) g(0)=0,
ii) $\limsup_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} < \lambda_1$
iii) il existe $\theta > 2,\ R > 0,$ tels que $0 \leq \theta G(s) \leq sg(s)$ pour $|s| \geq R$,
iv) $\frac{g(s)}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} \to 0$ quand $s \to \underline{+}\infty$

La condition i) implique que (3.13) admet la solution triviale u=0.
Montrons que (3.13) admet une autre solution.

Trouver les solutions du problème (3.13) est ramenée à trouver les points critiques de la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(u)dx,$$

qui est bien définie et de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et dont la différentielle est donnée par :

$$DJ(u) = -\Delta u - g(u), \ \ (au\ sens\ de\ H^{-1}(\Omega))$$

Nous montrons que le théorème du Col s'applique ce qui assure l'existence d'une valeur critique c. Et si c est strictement positive, il existe alors au moins un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque J(0)=0<c.
Pour pouvoir appliquer le théorème du Col nous procédons par étapes en montrant des résultats auxiliaires

Théorème 3.8.1. *(théorème d'Egorov) pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble mesurable* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *tel que* $mes(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *et* (u_n) *converge uniformément vers u sur* Ω_ε.

Résultat 1 : L'hypothèse iv) sur g implique :
Si une suite de fonctions mesurables (u_n) qui tend presque partout vers u est telle que $\int_{\Omega} |u_n|^{\frac{2N}{N+2}} < c$. Alors :

$$g(u_n)_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \to g(u).$$

preuve Par le théorème d'Egorov [3.8.1]. Utilisant iv) la définition de limite et la continuité de g on a :

$$|g(s)| \leq \varepsilon' |s|^{\frac{N-2}{N+2}} + C(\varepsilon') \tag{3.14}$$

On a :

$$\int_{\Omega} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx = \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - (g(u))|^{\frac{2N}{N+2}} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx$$

Tout d'abord, sur le complémentaire de Ω_ε, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx &\leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1} \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} (|g(u_n)|^{\frac{2N}{N+2}} - |g(u)|^{\frac{2N}{N+2}}|)dx \\
&\leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1} \varepsilon'^{\frac{2N}{N+2}} \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} (|u_n|^{\frac{2N}{N+2}} - |u|^{\frac{2N}{N+2}}|)dx + mes(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) C^{\frac{2N}{N+2}}(\varepsilon') \\
&\leq 2^{\frac{2N}{N+2}} \varepsilon'^{\frac{2N}{N+2}} C + \varepsilon C^{\frac{2N}{N+2}}(\varepsilon'), \qquad (3)
\end{aligned}$$

par le lemme de Fatou (1.2), on a :

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |\lim_{n\to\infty} u_n|^{\frac{2N}{N+2}} dx = \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |u|^{\frac{2N}{N+2}} \leq C.)$$

Dans (3), on choisit d'abord ε' pour rendre le premier terme assez petit, puis ε pour le second terme. Une fois ε fixé, on a par convergence uniforme,

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |g(u_n) - g(u)|^{\frac{2N}{N+2}} dx \to 0 \ \ quand\ n \to +\infty$$

D'où le résultat ∎

Résultat 2 : La fonctionnelle J est vérifie la condition de Palais-Smale.

preuve Soit une suite telle que $J(u_n) \to c$ et $DJ(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

De iii) et la continuité de G on a :

$$\forall s, \quad \theta G(s) \leq sg(s) - Cste$$

et par suite,

$$\langle DJ(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega (-\Delta u_n - g(u_n))u_n dx \qquad (4) \tag{3.15}$$

$$= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega g(u_n)u_n dx \tag{3.16}$$

$$\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \theta \int_\Omega G(u_n)dx + Cmes\Omega \tag{3.17}$$

$$= \theta J(u_n) - (\frac{\theta}{2} - 1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + Cmes\Omega \quad (5) \tag{3.18}$$

De (5), et comme $\theta > 2$, on a :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \frac{2\theta}{\theta - 2} J(u_n) + Cmes\Omega - \langle DJ(u_n), u_n\rangle. \qquad (6)$$

Des hypothèses sur (u_n), (6) et l'inégalité de Poincaré en déduit que (u_n) est uniformement bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on peut alors en extraire une sous-suite (toujours notée (u_n)) et trouver un $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $u_n \to u$ p.p. dans Ω. Maintenant, par l'injection de Sobolev

$$\int_\Omega |u_n|^{2*} dx \leq C,$$

et, en utilisant le **Résultat 1,**

$$g(u_n) \xrightarrow[L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)]{} g(u).$$

Or a l'exposant conjugué de 2^* n'est autre que $\dfrac{2N}{N+2}$ et comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, par dualité, il vient $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

On a obtenu que

$$-\Delta u_n = DJ(u_n) + g(u_n) \to g(u) \quad dans\ \ H^{-1}(\Omega).$$

Rappelons que $(\Delta u_n)^{-1}$ est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ ce qui montre que

$$u_n \to (-\Delta)^{-1}(g(u)) \quad dans\, H_0^1(\Omega)$$

alors la condition de Palais-Smale est satisfais.

■ **Résultat 3 :** La fonctionnelle J vérifie les hypothèses du théorème du Col.

preuve On a par définition de J : J(0)=0.

De plus, comme λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$, on a :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_1 ||u||_{L^2(\Omega)}, \quad pour\ tout\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Par l'hypothèse ii),il existe $\mu < \lambda_1$ tel que $g(s)\backslash s \leq \mu$ au voisinage de 0. Par ailleurs, au voisinage de l'infini, on a :

$$|g(s)| \leq C|s|^{\frac{N+2}{N-2}},$$

On peut donc écrire

$$g(s) \leq \mu s + Cs^{\frac{N+2}{N-2}}, \quad pour\ \ s \geq 0,$$

et

$$g(s) \geq \mu s + Cs^{\frac{N+2}{N-2}}, \quad pour\ \ s \leq 0.$$

Dans les deux cas, en intégrant à partir de 0, on obtient

$$G(s) \leq \frac{\mu}{2}s^2 + C|s|^{2*}. \quad (7)$$

Si, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1-\varepsilon)\lambda_1 - \mu \geq 0,$$

alors, utilisant (7), on peut minorer J au voisinage de 0 par

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (\frac{1-\varepsilon}{2}\lambda_1 - \frac{\mu}{2})\int_\Omega |u|^2 dx - C\int_\Omega |u|^{2*}dx \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - C||u||^{2*}_{L^{2*}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour u au voisinage de 0 dans $H_0^1(\Omega)$ et en utilisant l'injection de Sobolev puisque on a 2*>2, on obtient :

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\varepsilon}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - C||u||^{2*}_{L^{2*}(\Omega)} \\ &\geq c||u||^2_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

D'où la condition ii) du théorème du Col.

Enfin, soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ fonction propre de $-\Delta$ associée à la valeur propre λ_1, φ_1 est considérée normalisée dans $L^2(\Omega)$ et positive.

Pour tout $\zeta > 0$ on a :

$$J(\zeta\varphi_1) = \frac{\zeta^2\lambda_1^2}{2} - \int_\Omega G(\zeta\varphi_1)dx$$

Par iv), g croît sur-linéairement à l'infini, il existe donc $\beta > \lambda_1$ tel que $g(s) \geq \beta s$ pour s assez grand, d'où :

$$\forall s \geq 0, \quad g(s) \geq \beta s - c$$

Par conséquent,

$$\forall s \geq 0, \quad G(s) \geq \beta \frac{s^2}{2} - c.$$

Il s'ensuit que

$$J(\zeta\varphi_1) \leq \frac{\zeta^2(\lambda_1 - \beta)}{2} - c.$$

Il existe donc $\zeta > 0$ tel que $J(\zeta\varphi_1) < 0$, c'est-à-dire la condition iii) du théorème du Col se trouve vérifiée.

Alors, par application du théorème il existe une valeur critique c strictement positive, par suite il existe au moins un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque J(0)=0<c. ∎

Chapitre 4

Méthode de la monotonie

La méthode de monotonie connue aussi comme ma méthode des sur et sous solutions, est une méthode basée en essentielment sur le principe de maximum, on utilise cette méthode dans le cas non linéaires qui ne peuvent pas être résolus par les techniques variationnelles.

Théorème 4.0.2. *[20](le principe de maximum)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on considère l'opérateur L défini par

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_{ij}} + \sum_{i,j=1}^{N} b_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i} + cu.$$

ou a_{ij}, b_i, c sont des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$.
On suppose que la matrice $a(.) \equiv (a_{ij})$ vérifie la condition d'ellipticité suivante :

$$\exists C > 0 telque \forall \xi \in \mathbb{R}^N \langle a(x)x_i, x_i\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2 p.p dans \Omega. \tag{4.1}$$

On suppose que $c \geq 0$, alors si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, vérifie $Lu \leq 0 dans \Omega$, on a

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \leq \max_{y\in\partial\Omega} u_+(y), \tag{4.2}$$

ou $u_+(y) = max\{u(y), 0\}$. De plus si u atteint un maximum positif à l'intérieure de Ω, alors u est constant sur Ω.

Exemple 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, On considère le problème suivantes :*

$$\begin{cases} Lu = f(u) & dans \ \Omega \\ u = 0 & dans \ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

Définition 4.0.1. ***(sous et sur solution)*** *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$,*
et $u \in w^{1,2}(\Omega)$. On dit que u est une sur(resp-sous) solutions de (4.3) si $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et pour tout $\phi \in w_0^{1,2}(\Omega)$ tell que $\phi \geq 0$, on a :

$$\int_\Omega L(u)\phi dx \geq \int_\Omega f(u)\phi dx \,(resp. \leq \int_\Omega f(x)\phi dx), \tag{4.4}$$

Théorème 4.0.3. *Supposons qu'il existe une sur-solution u et une sous-solution v telles que $u \le v$, alors le problème* (3.9) *admet une solution minimale u^* et une solution minimale w^* telles que $u \le u^* \le w^* \le v$.*

Remarque 4.0.1. *1. Dans le cas ou f est croissante en u, en général, on peut appliquer l'argument de la monotonie à condition de construire une sous-solution et une sur-solution comparable.*
2. On peut appliquer la méthode de la monotonie dans quelques cas ou f dépend du gradient de u (c.à.d. f est de la forme $f(x, u, \nabla u)$), à condition d'avoir un principe de comparaison ainsi qu'une sous-solution et une sur-solution comparables.

4.1 Application

Soient $q, p \in \mathbb{R}$ tels que 0<q<1<p, et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u \quad dans\ \Omega, \\ u = 0 \qquad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

ou Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$.
Si $p \le 2^* - 1$, la fonctionnelle d'énergie associée au problème (4.5) est bien définie dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$, elle est donnée par :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx.$$

Par contre si $p > 2^* - 1$, J n'est pas définie dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Pour prouver l'existence d'une solution non triviale pour le problème (4.5) on va utiliser l'argument de sous-sur-solution.
Commençons par rappeler le principe de comparaison :

Lemme 4.1.1. ***(Principe de comparaison)*** *Soit f une fonction positive continue telle que $\frac{f(u)}{u^{p-1}} \downarrow$ avec p> 1. On suppose que $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ sont telles que :*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \ge f(u), \quad u > 0 \ \ dans\ \Omega, \\ -\Delta_p v \ge f(v), \quad v > 0 \ \ sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

Alors $u \ge v$ dans Ω.
Pour le problème (4.5)*, on a le résultat suivant.*

Théorème 4.1.1. ***(Ambrosetti-Brézis-Cerami)*** *Supposons que 0<q<1<p, alors il existe λ^* tels que pour tout $\lambda \in (0, \lambda^*)$, le problème* (4.5) *admet une solution minimale positive. Si $\lambda > \lambda^*$, le problème* (4.5) *n'admet pas de solution positive.*

preuve Comme q< 1, on considère u_0 la seule solution de problème :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = u_0^q, \quad u_0 > 0, \ \ x \in \Omega. \\ u_{0|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

L'existence de u_0 se déduit facilement par un argument de minimisation. L'unicité de u_0 est une conséquence du Lemme de comparaison. Pour $\lambda > 0$, on pose $u_\lambda = \lambda^{1-q}u_0$, alors u_λ résout le problème

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda^q, \quad u_\lambda > 0, \ x \in \Omega, \\ u_{\lambda|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Il est clair que u_λ est une sous-solution du problème(4.5). Pour construire une sur-solution on considère ϕ la seule solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 1, \quad \phi > 0, \quad x \in \Omega, \\ \phi_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

L'existence et l'unicité de ϕ sont des conséquences du théorème de Lax-Milgram. D'après les résultats de la régularité on déduit que $\phi \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$. Pour M> 0, on pose $\phi_M = M\phi$, alors ϕ_M est une sur-solution de (4.5) si :

$$\lambda \leq \frac{1}{\|\phi\|^q_{L^\infty(\Omega)}}(M^{1-q} - M^{p-q}\|\phi\|^p_{L^\infty(\Omega)}) \equiv D(M).$$

Comme 0<q<1<p, on obtient que $\max_{\{M>0\}} D(M) = \lambda^* < \infty$ et il existe $M^* > 0$ tel que $D(M^*) = \lambda^*$.

Fixons $\lambda \leq \lambda^*$, alors ϕ_{M^*} est une sur-solution de (4.5). Par le principe de comparaison dans le Lemme, il résulte que $u_\lambda \leq \phi_{M^*}$. Donc on a construit une sous-solution et une sur-solution de (4.5) qui sont ordonnées. Par la construction établie dans le théorème on déduit l'existence d'une solution $\hat{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $u_\lambda \leq \hat{u} \leq \phi_M$.
Trivialement $\hat{u}$ est une solution minimale (pour l'ensemble des solutions positives). En effet, si $\hat{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est une autre solution positive de (4.5) (pour la même valeur de λ), on déduit facilement (par le principe de comparaison) que $\overline{u} \geq u_\lambda$). D'après la construction de $\hat{u}$ (voir théorème), il résulte que $\hat{u} \leq \overline{u}$, donc $\hat{u}$ est minimale.
On définit maintenant l'ensemble

$\Lambda^* = \sup\{\lambda|$ tel que le problème (4.5) admet une solution dans $W_0^{1,2}(\Omega)\}$.

Notre but maintenant est de prouver que $\Lambda^* < \infty$. Sans perte de généralité on peut suppose que $\Lambda* > 1$. Soit $\lambda > 1$ tel que le problème (4.5) admet une solution. On pose $v_\lambda = \lambda u_0$, alors $-\Delta v_\lambda \leq \lambda h(x) v_\lambda^q$. Par le Lemme, on déduit que $u_\lambda \geq \lambda v_1$, et par conséquence si u_λ est une solution positive de (4.5) pour $\lambda > 1$, il découle que $u_\lambda \geq \lambda v_1 \geq u_0$.
Pour le problème (4.5), on peut résumer les résultats obtenus dans les points suivantes : Il existe Λ^* tel que :
1. Le problème (4.5) a au moins une solution positive pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$.
2. Le problème (4.5) n'admet pas de solution positive pour $\lambda > \Lambda^*$.
Par un argument de Col on arrive à prouver que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$, le problème (4.5) a au moins deux solutions positives. ∎

Conclusion

Dans ce travail en cherche l'existence et l'unicité de la solution de la formulation d'EDF.
Dans le cas linéaire en utilise le théorème de Lax-Milgram, mais dans le cas non linéaire en utilise les techniques de problème de minimisation ou on cherche les points critiques de la fonctionnelle.
A la fin on utilise la méthode de la monotonie connue aussi comme la méthode des sur-et sous solutions, si les problèmes non linéaires qui ne peuvent par être résolus par des techniques variationnelles, qui basée sur le principe du maximum.

Bibliographie

[1] Ahmed Lesfari, distributions,analyse de fourier et transformation de Laplace, p16-18,42, ellipses, 2012.

[2] Claude Zuily, éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, p19, dunod, 2002.

[3] El Haj Laamri mesures,intégration, convolution et transformée de fourier des fonctions, p187-198, dunod, paris, 2001.

[4] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic press, p44-47, New York, 1975.

[5] Grégoire allaire, analyse numérique et optimisation, p86-93, deuxième édition, école polytechnique, 11 juillet 2005.

[6] A.Bendali, méthode des éléments finis, Toulouse, 2013.

[7] B.Maurey, Analyse fonctionnelle théorie spectrale allégées,2000-2001.

[8] Sabit Souhila, cours équation elliptique, Master2 afed, university ibn khaldoun, tiaret.

[9] Bougherara Brahim, Analyse fonctionnelle,université de Mohammed Boudiaf, M'sila,p2,2021.

[10] Otared kavian,introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, p156, springer-verlag, 20 juillet 1993.

[11] Introduction au calcul variationnel et application, Cours de Master 2, Département de Mathématique et Information, Université d'Alger 1.

[12] J.M.Borwein and Q.J.Zhu. Techniques of Variational Analysis. springer,2005.

[13] Jabri. the mountan pass theorem Variants, generalizations and some Applications. Cambridge university press, new York. (2003).

[14] M.badiale, E.Serra, Semilinear Elliptic Equations for beginners, Spriner-Verlag, London, 2011.

[15] D.G.Costa, An Invitation to Variational Methods In Differetial Equations, Birkhäuser Boston, Boston, 2007.

[16] A. Lesfari, introduction aux équations aux dérivées partielles(EDP), université chouaib doukkali, p29, B.P.20, El-jadida, Maroc, 2014-2017.

[17] N.Daoudi-Merzaui, Méthodes de résolution des problémes elliptiques.

[18] Hakim Lakhal, Formulation Variationnelle des problèmes elliptiques, Département de mathématiques, université 20 aout 55, Skikda.

[19] Aref Jeribi, Résolution de divers problèmes elliptiques par des méthodes d'éléments finis, ellipses, Paris, 2021.

[20] Boumediene Abdellaoui, Youssouf Oussama Boukarabila, Sofiane El Hadi Miri, Introduction aux méthodes variationnelle et applications à la résolutions des EDP elliptiques. Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen, June 2018.

[21] Boudouda Halima, Deghdache Meriem, étude d'une inéquation quasi-variationnelle de type elliptique, Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel, 2016-2017.

[22] Dalla Zineb, Sur la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et ses applications sur les équations différentielles fractionnaires, Université Ahmed Draia, Adrar, 2020-2021.

Abstract :
In this work, we explored in the framework of solving partial differential equations generally, some variational methods more precisely the col theory(mountain pass) and the problems of minimisation and no variational which is the monotone method.

Key words :
frechet defferentiable, variational method, minimisation(minimization) problems, variational principle of Ekeland , Lax-Milgram, Mountain pass theory, palais-smale condition, weak solution, monotone method.

Résume :
Dans ce travail, nous avons exploré dans le cadre de la résolution des équations aux dérivées partielles généralement, quelques méthodes variationnelles plus précisément la théorème de col(mountain pass) et les problèmes de minimisation et no variationnelles qu'est la méthode de monotone.

Mots clés :
Fréchet-différentiable, solution faible, formulation variationnelle, problème de minimisation, théorème de col(mountain pass),principe variationnelle d'Ekeland ,condition de Palais-smale, Lax-Milgram, méthode de monotone.