RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Présenté en vue de l'obtention de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyses Fonctionnelles et Applications »

Présenté Par :
FENDI MARWA
KHATIR HOUARIA

Sous L'intitulé :

Introduction Aux Espaces De Hardy

Soutenu publiquement le 04 /07 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. Ahmed- Hallouz	M.C.B	Université -Tiaret	Président
Mr. Mouloud- Aissani	M.C.B	Université -Tiaret	Encadreur
Mr. Abderrahmane- Ouardani	M.C.B	Université -Tiaret	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

*Avant de commencer la présentation de ce travail, nous tenons à remercier sincèrement et profondément en premier lieu notre Dieu **ALLAH** tout-Puissant.*

*Nous devons exprimer notre gratitude à Encadreur **Mr. Mouloud- Aissani**, d'avoir accepter de nous encadrer avec enthousiasme et beaucoup d'attention, ainsi que pour sa gentillesse, sa disponibilité, et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, non seulement dans le carde du mémoire.*

*Nous tenons à remercier aussi les nombres de jury **Mr.Abderrahmane-Ouardani** et **Mr.Ahmed- Hallouz** ,d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.*

Nous ne pouvons oublier de remercier les parents pour leur soutien, leur aide et patience, tout au long de nos études.

Enfin, nous adressons nos remerciements à tous nos professeurs, collègues et tous ceux qui nous ont encouragés, à faire ce travail.

Dédicaces

je dédie ce travail :

À mes chèrs parents pour leur soutien, leur patience

et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.

*À mes frères, ainsi ma famille **FENDI** et **BELLAL** .*

À mes Amis. À Tous mes professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

MARWA

je dédie ce travail :

À mes chères parents pour leur soutien, leur patience

et leurs encouragements durent mon parcours universitaire.

*À mes frères, ainsi ma famille **KHATIR** .*

À mes Amis. À Tous mes professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

HOUARIA

TABLE DES MATIÈRES

1 Rappels sur les séries entières **6**

1.1 Séries entières 7

1.1.1 Résultats sur les séries entières 8

1.2 Fonction analytique 10

1.2.1 Propositions sur les fonction analytique 10

1.3 Série entière définit fonction analytique 11

1.4 Fonction analytique définit série entière 14

2 Introduction aux espaces de Hardy **16**

2.1 L'espace de Hardy-Hilbert 16

3 Les opérateurs shift **38**

3.1 Les opérateurs shifts 38

3.2 Sous-espace invariants et réduisant 42

INTRODUCTION

G.H.Hardy disait que la beauté est le premier test : dans le monde, il n'y a pas de place permanente pour les mathématiques moches.
L'analyse complexe est la plus belle partie de l'analyse classique. Les espaces de Hardy en une seule variable ont leur cadre original dans l'analyse complexe.

Leur première apparition était comme des espaces de fonctions holomorphes. Ils ont été introduit pour caractériser le comportement au bord du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ des fonctions y sont définies et pour traiter certains problèmes évoqués. Citons à titre d'exemple la question : Quelles sont les fonctions f possibles définies de $S^1 \to \mathbb{C}$ ($S^1 = \textit{bord de } \mathbb{D}$) résultant(provenant) comme valeurs au bord de certaines fonctions holomorphes $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

Le défaut de la compacité de $\mathbb{D}$, rend le comportement des fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{D}$ imprévisible lorsqu'on s'approche du bord du disque. Pour donner une notion cohérente au valeur de F sur le bord de $\mathbb{D}$, on a imposé des conditions d'intégrabilités sur la fonction F.

Si la trace de F sur $\partial\mathbb{D} = S^1$ est une fonction complexe f appartenant à l'espace $\mathbf{L^p}(S^1)$ pour un certain $1 \leq p \leq \infty$, alors F est donnée par l'intégrale de Poisson de f, via la formule :

$$F(re^{i\theta}) = \int_{S^1} P_r(e^{i(\theta-\eta)})f(e^{i\eta})d\eta,$$

où P_r est le noyau de Poisson positif satisfaisant

$$\int_{S^1} P_r(e^{i\theta})d\theta = 1$$

pour tout réel $0 \leq r < 1$. De plus, on

$$\|F(r.)\|_{\mathbf{L^p}(S^1)} \leq \|f\|_{\mathbf{L^p}(S^1)}.$$

Aussi, les normes $\|F(r.)\|_{\mathbf{L^p}(S^1)}$ restent bornées quand le réel positif tend d'une façon croissante vers l'unité 1.

Pour $p = 1$, les traces possibles sont précisément les fonctions à valeurs complexes $f \in \mathbf{L^1}(S^1)$ satisfaisant $\widetilde{f}(k) = 0$ pour $k < 0$, où $\widetilde{f}(k)$ est le coefficient de Fourier de la fonction f d'ordre k. En 1972, Fefferman et Stein ont donné une caractérisation réaliste des espaces de Hardy, en introduisant les fonctions maximales, et en montrant que le noyau de Poisson peut être remplacé par n'importe quel autre noyau.

La théorie des espaces de Hilbert et les opérateurs sur ces espace produisent un nombre de résultats élégants. On peut citer à titre d'exemple les preuves des différentes formules intégrales de poisson et celle de Cauchy.

Ils constituent aussi un cadre adéquat pour comprendre la structure des sous-espaces invariants pour l'opérateur shift, qui permet à son tour d'obtenir des résultats utiles sur la factorisation des fonctions analytiques et d'autres de leurs aspects.

Les études précoces sur les fonctions de l'espace $\mathbf{H^2}$ ont concerné les propriétés individuelles des fonctions analytiques .Les ouvrages de Privalov [11] et Goluzin [12] donnent de bonnes expositions dans ce sens.

L'intérêt des espaces de Hardy $\mathbf{H^2}$ a été largement stimulé par les travaux de Beurling [13] où il a caractérisé les sous-espace invariants de l'opérateur shift défini dans $\mathbf{H^2}$. Ils ont stimulé aussi les spécialistes de l'analyse fonctionnelle à étudier les différentes propriétés de $\mathbf{H^2}$ comme espace vectoriel et à étudier les opérateurs sur eux.

Les espaces $\mathbf{H^2}$ seront sujet de notre mémoire en exposant l'importance de ces espaces à travers certains résultats classiques, et les propriétés de l'opérateur shift.

Ce travail est séquencé premièrement par un rappel sur les différents résultats concernant les propriétés fondamentales des séries entières et les fonctions analytiques, secondé ensuite, par une introduction aux espaces de Hardy $\mathbf{H^2}$, en y exposant la définition et leurs propriétés illustrant leurs importance. Enfin, il aborde en dernière partie les opérateurs shift et leurs propriétés définis dans $\mathbf{H^2}$.

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

Suite convergente. Une suite de réels est dite convergente s'il existe un nombre réel l telle que :

$$\exists\, l \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Série convergente. Une série est dite convergente si la suite de ses somme partielles a une limite dans l'espace considéré ; dans le cas contraire elle est dite divergente.

Convergence absolue. Une série de terme générale (a_n) converge absolument si la série de terme générale $(|a_n|)$ converge. Il est à noter que toute série absolument convergente est convergente, et que la réciproque est fausse.

Théorème 1.0.1. ***(Weierstrass M-Test)***[3]
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non négatives telle que $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$. Soit

$(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur* $S \subset \mathbb{R}$.
Si $|g_k(x)| \leqslant M_k, \quad \forall x \in S$, *alors* $\sum_k^{\infty} g_k$ *converge uniformément sur* S.

1.1 Séries entières

Définition 1.1.1. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme* $\sum_n^{\infty} a_n z^n$ *où* (a_n) *est une suite de nombres complexe et* $z \in \mathbb{C}$.

• Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers l quand n tend vers ∞. Alors ;
- Si $l > 1$, la série $\sum_n^{\infty} u_n$ diverge grossièrement.
-Si $l < 1$, la série $\sum_n^{\infty} u_n$converge absolument.
Généralement, pour $l = 1$ on ne peut décider.

Convergence uniforme. Pour une série entière de rayon de convergence R ; il y a convergence uniforme de la série dans tous disque $\bar{D}(0, \rho)$ avec $0 < \rho < R$. En général pas dans le disque de convergence $D(0, R)$, mais la somme de la série entière est continue dans tout le disque de convergence $D(0, R)$.

Théorème 1.1.1. *[1] Soit* $\sum_{n}^{\infty} a_n$ *une série numérique et* α *le réel défini par* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Alors,*

a) Si $\alpha < 1$, *la série* $\sum_{n}^{\infty} a_n$ *converge.*

b) Si $\alpha > 1$, *la série* $\sum_{n}^{\infty} a_n$ *diverge.*

c) Si $\alpha = 1$, *on ne peut décider.*

1.1.1 Résultats sur les séries entières

Proposition 1.1.1. *[3] Soit* $(a_n)_n$ *une suite de nombre complexes et a un élément de* $\mathbb{C}$. *Si la série entière* $\sum_{n}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *a pour rayon de convergence* $\mathbf{R}$. *Alors*

$$\mathbf{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

quand cette limite existe.

Proposition 1.1.2. *[3] Soient* $\sum_{n}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n}^{\infty} b_n$ *deux série absolument convergentes, et posons*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors, la série $\sum_{n}^{\infty} c_n$ *est absolument convergente et a pour somme*

$$(\sum_{n}^{\infty} a_n)(\sum_{n}^{\infty} b_n).$$

Proposition 1.1.3. *[3] Soit* $\sum_n^{\infty} a_n(z-a)^n$ *et* $\sum_n^{\infty} b^n(z-a)^n$ *deux séries de rayon de convergence commun* $r > 0$. *Posons*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors les deux séries entières $\sum_n^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n$ *et* $\sum_n^{\infty} c_n(z-a)^n$ *ont le même rayon de convergence* r, *et sont des fonctions analytiques. De plus on a*

$$\sum_n^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n = \left[\sum_n^{\infty} a_n(z-a)^n\right] + \left[\sum_n^{\infty} b_n(z-a)^n\right]$$

$$\sum_n^{\infty} c_n(z-a)^n = \left[\sum_n^{\infty} a_n(z-a)^n\right]\left[\sum_n^{\infty} b_n(z-a)^n\right].$$

pour $|z-a| < r$.

Théorème 1.1.2. *[3] Pour une série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$; *on définit le nombre réel et positif* $\mathbf{R}$ *avec,* $0 \leq \mathbf{R} \leq \infty$, *par :*

$$\frac{1}{\mathbf{R}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Alors :

a) Si $|z-a| < \mathbf{R}$, *la série est absolument convergente.*

b) Si $|z-a| > \mathbf{R}$, *la série diverge.*

c) Pour tout $0 < \mathbf{r} < \mathbf{R}$, *la série converge uniformément sur le disque compact* $\{z : |z| \leq \mathbf{r}\}$.

Preuve. a) Pour simplifier on peut supposer $a = 0$.

Si $|z| < \mathbf{R}$, on peut trouver un réel positif $\mathbf{r}$ tel que $|z| < \mathbf{r} < \mathbf{R}$, et un entier N tel que $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{\mathbf{r}}$ pour tout $n \geq N$ (car $\dfrac{1}{\mathbf{r}} > \dfrac{1}{\mathbf{R}}$), et que $|a_n| < \dfrac{1}{\mathbf{r}^n}$ et $|a_n z^n| < \left(\dfrac{|z|}{\mathbf{r}}\right)^n$ pour tout $n \geq N$.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$ est dominée par la série $\displaystyle\sum_{n}^{\infty}\left(\frac{|z|}{n}\right)^n$, et pour $\dfrac{|z|^n}{\mathbf{r}} < 1$ la série converge absolument pour tout $|z| < \mathbf{R}$.

c) Maintenant on pose $\mathbf{r} < \mathbf{R}$ et on choisis un réel ρ tel que $\mathbf{r} < \rho < \mathbf{R}$. On prend N tel que $|a_n|^n < \dfrac{1}{\rho^n}$ pour tout $n \geq N$.

Si $|z| \leq \mathbf{r}$, alors $|a_n z^n| \leqslant \left(\dfrac{\mathbf{r}}{\rho}\right)^n$ et $\left(\dfrac{\mathbf{r}}{\rho}\right) < 1$. Selon le **Weierstrass M-Test** la série entière converge uniformément on $\{z : |z| < \mathbf{r}\} \Rightarrow (prouve(a)et(c))$

b) Pour preuve (b), tq $|z| < \mathbf{R}$ et on choisis $\mathbf{r}$ avec $|z| > \mathbf{r} > \mathbf{R}$ alors $\dfrac{1}{\mathbf{r}} < \dfrac{1}{\mathbf{R}}$ pour la définition de lim sup, donner n tq $\dfrac{1}{\mathbf{r}} < |a_n|^{\frac{1}{n}}$ donc $|a_n z^n| > \left(\dfrac{|z|}{\mathbf{r}}\right)^n$ et de puis $\left(\dfrac{|z|}{\mathbf{r}}\right)^n > 1$ ces termes devenir sans limite.

□

1.2 Fonction analytique

Proposition 1.2.1. *Soit G un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors f est continument différentiable.*

1.2.1 Propositions sur les fonction analytique

Proposition 1.2.2. *[3] Si $f : G \to \mathbb{C}$ est différentiable en un point a de G alors f est continue en a.*

Proposition 1.2.3. *[3] Soit f la fonction définie telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, de rayon de convergence $\mathbf{R}$ strictement positif. Alors :*

(a) Pour $k \geq 1$ la série

$$\sum n(n-1)...(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \tag{1.1}$$

a le même rayon de convergence $\mathbf{R}$.

(b) La fonction f est infiniment différentiable sur le disque $B(a, \mathbf{R})$. De plus, $f^{(k)}(z)$ est donné par la série (1.1) pour tout entier $k \geq 1$ et tout complexe z tel que $|z-a| < \mathbf{R}$

(c) Pour $n \geq 0$; on a

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a). \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.4. *[3] Si G est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : G \to \mathbb{C}$ est différentiable avec $f'(z) = 0$ pour tout z dans G alors f est constante.*

1.3 Série entière définit fonction analytique

Théorème 1.3.1. *[9] Pour toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ correspond un nombre réel positif $\mathbf{R}$, $0 \leq \mathbf{R} \leq \infty$, appelé rayon de convergence.*

Dans le disque $|z| < \mathbf{R}$; la somme de la séries est une fonction analytique. La dérivée peut être obtenue par différenciation terme à terme, et la série dérivée a le même rayon de convergence $\mathbf{R}$.

Preuve. Pour $|z| < \mathbf{R}$, on a

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n = \mathbf{S}_n(z) + \mathbf{R}_n(z)$$

où

$$\mathbf{S}_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1}$$

$$\mathbf{R}_n(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_k z^n$$

Et aussi

$$f_1(z) = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{S'_n(z)}$$

Il faut montrer que $f'(z) = f_1(z)$

Considérons l'identité

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_o} - f_1(z_0) = \left(\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S'_n(z_0)\right) + (S'_n(z_0) - f_1(z_0)) + \left(\frac{R_n(z) - R_n(z_0}{z - z_0}\right) \quad (1.3)$$

On suppose que $z \neq z_0$ et $|z - z_o| < \rho < \mathbf{R}$. Donc le dernier terme peut être réécrit sous la forme

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \left(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + ... + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}\right)$$

Et on conclut que

$$\left|\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}$$

L'expression de droite est le terme restant dans une série convergente. Donc on peut trouver un rang n_0 tel que

$$\left|\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $n \geq n_0$.

Il existe un rang n_1 tel que $|S'_n(z_0) - f_1(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour $n \geq n_1$. Si l'on choisit un entier fixe $n \geq n_0 \geq n_1$; par la définition de la dérivée on peut trouver $\delta > 0$ tel que si $0 < |z - z_0| < \delta$ alors

$$\left| \frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S'_n(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Lorsque toutes les inégalités sont combinées, il s'ensuit par (1.3) que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_o} - f_1(z_0) \right| < \varepsilon$$

Quand $0 < |z - z_0| < \delta$ on a prouvé que $f'(z_0)$ existe et est égale à $f_1(z_0)$.

On a en réalité prouvé que : une série entière avec un rayon de convergence positif a des dérivées de tous ordres , et elles sont données explicitement par les expressions

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ...$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 + ...$$

....

....

$$f^k = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} z^2 + ...$$

En particulier, si on regarde la dernière ligne on voit que $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, et la série entière devient

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f"(0)}{2!} z^2 + ... + \frac{f^n}{n!} z^{(n)} + ...$$

C'est le développement familier de Taylor-Maclaurin, mais nous ne l'avons prouvé que sous l'hypothèse que $f(z)$ a un développement en série entière. Nous savons que le développement est déterminé de manière unique, s'il existe, mais la partie principale manque toujours, à savoir que chaque fonction analytique a un développement de Taylor.

$\square$

1.4 Fonction analytique définit série entière

Proposition 1.4.1. *[3] Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction analytique et r un réel positif tel que le disque $B(a; \mathbf{r})$ soit inclus dans G pour un certain $\mathbf{r} > \mathbf{0}$. Posons $\gamma(t) = a + \mathbf{r}\exp^{it}$, pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

pour tout complexe z tel que $|z - a| < \mathbf{r}$.

Lemme 1.4.1. *[3] Si γ est rectifiable dans $\mathbb{C}$ et si F_n et F sont des fonctions continues sur γ telle que $F = u - \lim F_n$ dans γ ; alors $\int_\gamma F = \lim \int_\gamma F_n$.*

Théorème 1.4.1. *[3] Si f est une fonction analytique sur le disque $B(a; \mathbf{R})$, alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ pour tout z tel que $|z - a| < \mathbf{R}$ avec $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ et la série entière est de rayon de convergence supérieure ou égal à $\mathbf{R}$.*

Preuve. Soit $0 < \mathbf{r} < \mathbf{R}$. Donc, $\overline{\mathbb{D}}(a; \mathbf{r}) \subset \mathbb{D}(a; \mathbf{R})$. Si $\gamma(\theta) = a + \mathbf{r}\exp^{i\theta}$, pour $0 \leq \theta \leq 2\pi i$, par la proposition (1.4.1) on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

pour tout z tel que $|z-a| < \mathbf{r}$.

Mais pour $|z-a| < \mathbf{r}$ et appartient a cercle $\{\gamma\}$.

$$\frac{|f(w)||z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{M}{\mathbf{r}}\left(\frac{|z-a|}{\mathbf{r}}\right)^n$$

où $M = max\{|f(w)|; |w-a| = \mathbf{r}\}$ quand $\dfrac{|z-a|}{\mathbf{r}} < 1$, d'après le théorème de

Weierstrass M - Test donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$ converge uniformément pour le lemme (1.4.1)

et parce de suit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right](z-a)^n \tag{1.4}$$

Si

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

Alors a_n est indépendant de z, et donc (1.4) est la série entière qui converges pour $|z-a| < \mathbf{r}$

donc $a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)$, donc la valeur de a_n est indépendant de γ, qui est indépendant de $\mathbf{r}$ alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \tag{1.5}$$

Pour $|z-a| < \mathbf{r}$ où $\mathbf{r}$ valeur arbitraire, $\mathbf{r} < \mathbf{R}$ par conséquent (1.5) série entière est représentation du fonction analytique.

Pour $|z-a| < \mathbf{R}$ le rayon de convergence de (1.5) doit être au moins $\mathbf{R}$. $\square$

CHAPITRE 2

INTRODUCTION AUX ESPACES DE HARDY

Dans ce chapitre, on donne des définitions et quelques propriétés de l'espace **Hardy-Hilbert**, en s'inspirant du livre [10]

2.1 L'espace de Hardy-Hilbert

L'espace de Hilbert le plus familier est l'espace des suites à éléments dans $\mathbb{C}$ à carrés sommables ; noté $l^2(\mathbb{N})$ ou l^2 tout court. C'est-à-dire

$$l^2 = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

L'addition de vecteurs et la multiplication de vecteurs par des nombres complexes sont effectuées par composantes. La norme du vecteur $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de l^2 est définie par

$$\|\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et le produit scalaire des vecteurs $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ est défini par

$$(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

L'espace l^2 est séparable, et tous les espaces de Hilbert complexes séparables de dimension infinie son isomorphes enter eux ([4, p. 20], [5, pp. 30-31], [6, p. 90]). Néanmoins, il est souvent utile de considérer des espaces de Hilbert particuliers qui ont une structure supplémentaire. L'espace qui nous concerne est bien l'espace de Hardy. C'est un espace de Hilbert séparable dont les éléments sont des fonctions analytiques.

Définition 2.1.1. *L'espace de Hardy-Hilbert, dénoté par* $\mathbf{H^2}$*, est constitué de toutes les fonctions analytiques ayant des représentations en série entière avec des coefficients complexes de carrés sommables. C'est-à-dire*

$$\mathbf{H^2} = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \textit{avec} \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Le produit scalaire sur $\mathbf{H^2}$ *est défini par*

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

pour tout éléments $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *et* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *de* H^2*. La norme induite d'un vecteur* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est donnée par*

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'application $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est clairement un isomorphisme de* l^2 *sur* $\mathbf{H^2}$*. Il en résulte en particulier que,* $\mathbf{H^2}$ *est un espace de Hilbert.*

Théorème 2.1.1. *Chaque fonction de* $\mathbf{H^2}$ *est analytique sur le disque unitaire ouvert.*

Preuve. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ un élément de H^2 et $|z_0| < 1$ un élément de $\mathbb{C}$; il faut montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge. Puisque $|z_0| < 1$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n$ converge . Il existerait alors une constante K telle que $|a_n| \leq K$ pour tout entier n (*puisque*$\{a_n\}$ est dans l^2).

Ainsi
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0^n| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n;$$
donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge absolument. □

Notation 2.1.1. *Le disque unitaire ouvert dans le plan complexe* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *sera noté par* $\mathbb{D}$*, et le cercle unitaire* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *sera noté par* S^1

L'espace $\mathbf{H^2}$ *contient évidemment tous les polynômes et de nombreuses autres fonctions analytiques.*

Exemple 2.1.1. *Pour chaque point* $e^{i\theta_0} \in S^1$*, il y a une fonction de* $\mathbf{H^2}$ *qui n'est pas analytique en* $e^{i\theta_0} \in S^1$*.*

En effet. Soit θ_0 un réel de l'intervalle $[0, 2\pi]$. On définit la fonction f_{θ_0} par

$$f_{\theta_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\theta_0}}{n} z^n \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Puisque la suite $\left\{\dfrac{e^{-in\theta_0}}{n}\right\} \in l^2$, la fonction $f\theta_0$ est un élément de $\mathbf{H^2}$. Lorsque on fait tendre z vers $e^{i\theta_0}$ à partir de l'intérieur du disque $\mathbb{D}$, le module $|f_{\theta_0}(z)|$ tend vers l'infini. Donc il n'y a aucun moyen de définir f_{θ_0}, de sorte qu'il soit analytique en $e^{i\theta_0}$. $\square$

Exemple 2.1.2. *La fonction* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *est analytique sur* $\mathbb{D}$ *mais n'est pas dans* $\mathbf{H^2}$.

En effet. Puisque $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pour tout z de $\mathbb{D}$, les coefficients de la fonction f ne sont pas à carrés sommables. $\square$

Les fonctionnelles linéaires bornées (c'est-à-dire les applications linéaires continus d'un espace linéaire dans l'espace des nombres complexes) sont très importantes dans l'étude des opérateurs linéaires. Les fonctionnelles "évaluations ponctuelles" sont des fonctionnelles linéaires continues particulièrement utiles sur $\mathbf{H^2}$.

Théorème 2.1.2. *Pour chaque* $z_0 \in \mathbb{D}$*, l'application qui assigne à chaque fonction* f *de* H^2 *le nombre complexe* $f(z_0)$ *est une fonctionnelle linéaire bornée sur* $\mathbf{H^2}$.

Preuve. En effet,pour $z_0 \in \mathbb{D}$ fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n\right| \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|.
\end{aligned}$$

Il est évident que l'évaluation en z_0 est une application linéaire de $\mathbf{H^2}$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi l'application est une fonctionnelle linéaire bornée de norme au plus égale à $\left(\sum_{n=0}^{\infty}|z_0|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$. □

Le théorème de représentation de Riesz stipule que toute fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert peut être représentée par un produit scalaire avec un vecteur dans l'espace ([4, p.13], [5, pp.31-32], [6, p.142]). Cette représentation peut être énoncée explicitement pour les évaluations ponctuelles sur $\mathbf{H^2}$.

Définition 2.1.2. *Pour $z_0 \in \mathbb{D}$, la fonction K_{z_0} définie par*

$$K_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z_0}^n z^n = \frac{1}{1 - \bar{z_0} z}$$

est appelée le noyau reproduisant pour z_0 dans $\mathbf{H^2}$.

Il est évident que $K_{z_0} \in \mathbf{H^2}$. Les évaluations ponctuelles sont représentées comme produit scalaire avec des noyaux reproduisant.

Théorème 2.1.3. *Pour tout complexe $z_0 \in \mathbb{D}$ et toute fonction f appartenant à $\mathbf{H^2}$, on a*

$$f(z_0) = (f; K_{z_0})$$

et

$$\|K_{z_0}\| = (1 - |z_0|^2)^{\frac{-1}{2}}$$

Preuve. L'écriture de la fonction K_{z_0} sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0}^n z^n$ donne

$$(f; K_{z_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n = f(z_0),$$

et

$$\|K_{z_0}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{z}_0|^{2n}.$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} |\bar{z}_0|^{2n} = \frac{1}{1-|z_0|^2}$, il s'ensuit que

$$\|K_{z_0}\| = \frac{1}{(1-|z_0|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

□

La première application des noyaux reproduisant consiste à établir la relation suivante entre la convergence dans $\mathbf{H^2}$ et la convergence ordinaire dans l'espace des fonctions analytiques.

Théorème 2.1.4. *Si la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge vers f dans $\mathbf{H^2}$, alors $\{f_n\}$ converge vers f uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$.*

Preuve. Pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ fixé, on a

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| = |(f_n - f, K_{Z_0})| \leq \|f_n - f\| \|K_{z_0}\|.$$

Si K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$, alors il existerait une constante M positive telle que $\|K_{z_0}\| \leq M$, pour tout $z_0 \in K$ (M peut être pris comme la borne supérieure de $\frac{1}{\sqrt{1-|z_0|^2}}$ pour $z_0 \in K$).

Ainsi

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq M\|f_n - f\| \quad \text{pour tout } z_0 \in K,$$

ce qui implique clairement le théorème. □

Ainsi la convergence en norme dans l'espace de Hilbert $\mathbf{H^2}$ implique la convergence pour la topologie standard de l'espace de toutes les fonctions analytiques sur le disque $\mathbb{D}$.

Une autre approche qui permet de caractériser les éléments de $\mathbf{H^2}$ consiste à le regarder comme un sous-espace d'un autre espace de Hilbert bien connu.

On note par $\mathbf{L^2} = \mathbf{L^2}(S^1)$ l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable sur le cercle unité S^1 par rapport à la mesure de Lebesgue, normalisée de sorte que la mesure du cercle entier soit égale à 1. On munit cet espace par le produit scalaire donné par :

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \overline{g\left(^{e^{i\theta}}\right)} d\theta,$$

pour tout éléments f g de $\mathbf{L^2}$, où $d\theta$ désigne la mesure de Lebesgue ordinaire (non normalisée) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Ceci induit une norme qui assigne à chaque fonction f dans $\mathbf{L^2}$ le réel donné par

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On convient d'utiliser les mêmes symboles pour désigner les normes et les produits scalaires de tous les espaces de Hilbert que nous considérons. C'est le contexte qui détermine de quelle norme ou quel produit scalaire il s'agit.

Comme à l'accoutumée, on abuse souvent du langage et on considère $\mathbf{L^2}$ comme un espace de fonctions qui est en fait un espace de classes d'équivalence de fonctions. Alors,on dit que deux fonctions $\mathbf{L^2}$ sont égales quand on veut dire qu'elles sont égales presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée . On omettra parfois les mots " presque partout " (ou " p.p.") à moins que nous ne souhaitions souligner que l'égalité ne vaut que dans ce sens.

Pour chaque entier n, on associe la fonction définie sur la cercle S^1 par $e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$. Il est bien connu que l'ensemble $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormale dans l'espace $\mathbf{L^2}$ ([7, p. 24], [4, p. 21], [8, p. 48], [2, pp. 89-92]). On définit l'espace $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ comme étant le sous-espace de $\mathbf{L^2}$ constitué de fonctions de $\mathbf{L^2}$ à coefficients de Fourier d'ordre négatif nul :

$$\widetilde{\mathbf{H^2}} = \{\widetilde{f} \in \mathbf{L^2} : (\widetilde{f}, e_n) = 0 \quad \text{pour} n < 0\}.$$

Soit, $\widetilde{f}$ un élément $\widetilde{\mathbf{H^2}}$. Si sa série de Fourier suivant base suscitée est de la forme

$$\widetilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

il est clair que $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{L^2}$. De plus, il existe une identification naturelle entre $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ et $\mathbf{H^2}$. A savoir, on identifie la fonction $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathbf{H^2}}$ ayant la décomposition en série de Fourier sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ avec fonction analytique $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Cette identification est clairement un isomorphisme entre $\mathbf{H^2}$ et $\widetilde{\mathbf{H^2}}$. Bien sur, cette identification, bien que naturelle, elle ne décrit pas (du moins de manière évidente) la relation entre $f \in \mathbf{H^2}$ et $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathbf{H^2}}$. Essayons de l'expliciter dans ce qui suit.

Considérons un élément $\widetilde{f}$de $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ représenté en série de Fourier par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ et f un élément $\mathbf{H^2}$ représenté en série entière par
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Pour tout réel positif $0 < r < 1$, on définit la fonction f_r par :

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Clairement, f_r est un élément $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ pour chaque valeur de r.

Théorème 2.1.5. *Soient $\widetilde{f}$ et f_r, des fonctions telle quelles sont définies précédemment. Alors*

$$\lim_{r \to 1^-} \|\widetilde{f} - f_r\| = 0 \qquad \textit{dans} \quad \widetilde{\mathbf{H^2}}.$$

Preuve. Soit ε un réel strictement positif donné. Comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, on peut choisir un entier naturel n_0 tel que

$$\sum_{n_0}^{\infty} |a_n|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons maintenant un réel s compris entre 0 et 1 tel que pour chaque $r \in (s, 1)$ nous ayons

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puis, depuis

$$\left\|\widetilde{f} - f_r\right\|^2 = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n r^n) e^{in\theta}\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2,$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f} - f_r\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2(1-r^n)^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2(1-r^n)^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Comme conséquence, nous avons le corollaire important suivant :

Corollaire 2.1.1. *Pour chaque élément f de $\mathbf{H^2}$, il existe une suite croissante de réels positifs $\{r_n\}$ convergeant vers 1 telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n e^{i\theta}) = \widetilde{f}(e^{i\theta})$$

pour presque tout θ

Preuve. Il est bien connu que la convergence dans la topologie de $\mathbf{L^2}$ implique l'existence d'une sous-suite qui converge point presque partout [2, p. 68], donc cela découle du théorème précédent. □

On prouve un résultat plus fort à la fin de cette section : $\lim_{r\to 1-} f(re^{i\theta}) = \widetilde{f}(e^{i\theta})$ pour presque partout (c'est-à-dire pas seulement pour une sous-suite $\{r_n\} \to 1$).

De ce qui précède, on peut donner une autre définition de l'espace de Hardy-Hilbert.

Théorème 2.1.6. *Soit f une fonction analytique sur le disque $\mathbb{D}$. Alors, f est élément de $\mathbf{H^2}$ si et seulement si*

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Preuve. Soit f fonction analytique sur $\mathbb{D}$. Supposons que f est dans $\mathbf{H^2}$ avec sa représentation en série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors, pour tout réel $0 < r < 1$, on a

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}.$$

Puisque

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m},$$

l'intégration de l'expression ci-dessus de $|f(re^{i\theta})|^2$ par rapport à θ et sa division par 2π, donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Comme f appartient à $\mathbf{H^2}$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} d\theta \leq \|f\|^2$ pour tout r dans $[0, 1)$.
Par conséquent,

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Réciproquement, supposons que $\sup_{0<r<1} \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ est fini. Comme montré ci-dessus, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 re^{2\theta}.$$

Si la fonction f n'était pas dans $\mathbf{H^2}$, le membre de droite peut être rendu arbitrairement grand en prenant r suffisamment proche de 1. Mais cela contredirait l'hypothèse selon laquelle $\sup_{0<r<1} \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ est fini. □

Corollaire 2.1.2. *Pour toute fonction f analytique sur le disque unité $\mathbb{D}$, la fonction en la variable r définie par*

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

est croissante. Par conséquent, $\lim\limits_{r\to 1^-} M(r) = \sup\limits_{0<r<1} M(r)$. Il en découle que la fonction f est dans $\mathbf{H^2}$ si et seulement si $\lim\limits_{r\to 1^-} M(r) < \infty$. Dans ce cas, $\lim\limits_{r\to 1^-} M(r) = \|f\|^2$, par ([1, le théorème 7. 10, p. 148]). Autrement dit,

$$\|f\|^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Preuve. Cela découle immédiatement de l'identité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

établie au cours de la démonstration du théorème précédent □

Exemple 2.1.3. *Pour tout paramètre $s \in (0, \frac{1}{2})$, la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^s}$$

est un élément de $\mathbf{H^2}$. (On rappelle que $(1-z)^s = \exp(s \log(1-z))$, où $\log$ désigne la branche principale du logarithme)

En effet . Pour n'importe quelle valeur de s fixée dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$ posons

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^s}.$$

A chaque valeur r, posons

$$M(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

D'après le théorème (2.1.6), il suffit de montre qu'il existe une constante M tele que $M(r) \leq M$ pour toute valeur $r \in (0,1)$.

Pour une valeur r fixée, un simple calcul donne

$$|1 - re^{i\theta}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\theta.$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{1}{(1-re^{i\theta})^s}\right| = \frac{1}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s}.$$

Pour estimer la grandeur $M(r)$, notez d'abord que la périodicité du cosinus implique que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s}.\end{aligned}$$

Nous allons procéder à l'estimation chacune de ces intégrales de façon séparée. Pour estimer la première intégrale, commençons d'abord par noter que $1 + r^2 - 2r\cos\theta = (r - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$, qui est visiblement supérieure ou égal à $\sin\theta$. Il s'ensuit que,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s} \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta^{2s}}.$$

Pour réaliser la convergence de cette dernière intégrale, on peut l'écrire sous la forme
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta^{2s}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sin\theta^{2s}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta^{2s}}.$$

Il suffit alors de montrer que
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sin\theta^{2s}}.$$
converge.

On vérifie facilement que pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ on a $\theta\leq\tan\theta$. Par suite $\theta\geq\theta\cos\theta$. Ainsi, pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{4})$, on a $\sin\theta\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\theta$. Par conséquent ,
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sin\theta^{2s}}\leq\frac{2^s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\theta^{2s}}.$$
Comme cela est bien connu il est facilement vérifiable que ,
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\theta^{2s}}$$
converge lorsque $2s<1$. autrement dit, l'intégrale est finie lorsque $s<\frac{1}{2}$.

Procédons maintenant à l'estimation de l'intégrale
$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s}.$$
Comme , $\cos\theta\leq 0$ pour tout $\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, on a
$$1+r^2-2r\cos\theta\geq 1+r^2$$
pour de telles valeurs de θ. On en déduit que
$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^s}\leq\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2}\frac{d\theta}{(1+r^2)^s}\leq\frac{1}{2(1+r^2)^s}\leq\frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $r \in [0,1]$

$$M(r) \leq \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^{2s}\theta} + \frac{2^s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\theta^{2s}} + \frac{1}{2}$$

Remarquons que cette borne sur M(r) est indépendante de la variable r, il en résulte du (2.1.6) que f est dans $\mathbf{H^2}$. □

Un autre espace de fonctions analytiques apparait dans l'étude des opérateurs sur $\mathbf{H^2}$. Il s'agit de l'espace des fonctions analytiques bornées.

Définition 2.1.3. *L'espace $\mathbf{H}^\infty$ est constitué de toutes les fonctions analytiques bornées sur le disque unitaire ouvert. Les opérations vectorielles sont l'addition ponctuelle habituelle de fonction et la multiplication par des scalaires complexes. La norme d'une fonction f dans $\mathbf{H}^\infty$ est définie par $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$.*

Comme la convergence dans la norme sur $\mathbf{H}^\infty$ implique une convergence uniforme sur le disque, on voit facilement que $\mathbf{H}^\infty$ est un espace de Banach.

Corollaire 2.1.3. *Tout fonction dans $\mathbf{H}^\infty$ est un élément dans $\mathbf{H^2}$.*

Preuve. C'est un résultat qui découle immédiatement de la caractérisation de $\mathbf{H^2}$ donnée dans le théorème (2.1.6) □

Théorème 2.1.7. *Si f appartient à $\mathbf{H}^\infty$ et que f n'est pas une constante, alors $|f(z)| < \|f\|_\infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Preuve. Ceci est une conséquence immédiate du théorème du module maximum ([3, pp. 79, 128], [2, p. 212]). □

Exemple 2.1.4. *Pour chaque nombre réel* t*, la fonction*

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{it}$$

est un élément dans $\mathbf{H}^\infty$*. (Rappelez-vous* $\omega^{i\theta} = \exp(it \log \omega)$*, où* $\log$ *est la branche principale du logarithme complexe).*

Preuve. Notez que, pour chaque complexe $z \in \mathbb{D}$, le nombre

$$\omega = \frac{1+z}{1-z}$$

est dans le demi-plan droit ouvert. Pour chacun de ces ω,

$$\omega^{it} = \exp(it \log \omega) = \exp(it(\log r + i\theta)),$$

où $\omega = re^{i\theta}$ et θ est dans $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il s'ensuit que $|\omega^{it}| = exp(-t\theta)$, qui est au plus $\exp\left(\frac{|t|\pi}{2}\right)$. Ainsi

$$\left|\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{it}\right| \leq \exp\left(\frac{|t|\pi}{2}\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. □

Le noyau reproduisant peut être utilisé pour donner une preuve simplifiée de la formule intégrale de Cauchy.

Théorème 2.1.8 (Formule intégrale de Cauchy). *Soit* f *une fonction analytique sur un ouvert contenant le disque fermé* $\overline{\mathbb{D}}$ *et* $z_0 \in \mathbb{D}$*. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Preuve. Puisque f est analytique sur $\mathbb{D}$, le corollaire (2.1.1) implique que

$$\widetilde{f}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

pour tout θ. Notons que K_{z_0}, est continue sur $\mathbb{D}$, et donc

$$\widetilde{K_{z_0}}(e^{i\theta}) = \frac{1}{1-\bar{z}_0 e^{i\theta}}.$$

pour $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{f}, \widetilde{k_{z_0}}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})\overline{\widetilde{k_{z_0}}(e^{i\theta})}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})k_{z_0}(e^{i\theta})d\theta
\end{aligned}$$

On a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad \overline{k_{z_0}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Donc

$$f(e^{in\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \quad , \quad k_{z_0}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} e^{-in\theta}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})k_{z_0}(e^{i\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{b_m} e^{-im\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{b_m} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{b_m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta
\end{aligned}$$

et on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_n\overline{b_m}\int_{n=0}^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{b_n}=(f,k_{z_0}).$$

Donc

$$\begin{aligned}f(z_0)=(f,k_{z_0})=\left(\widetilde{f},\widetilde{k_{z_0}}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{f}(e^{i\theta})\overline{\widetilde{k_{z_0}}(e^{i\theta})}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{f}(e^{i\theta})\frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\widetilde{f}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z_0}ie^{i\theta}d\theta.\end{aligned}$$

Soit $z=e^{i\theta}$, cette expression devient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{\widetilde{f}(z)}{z-z_0}dz.$$

Ainsi

$$f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{\widetilde{f}(z)}{z-z_0}dz.$$

Puisque $f(z)=\widetilde{f}(z)$ quand $|z|=1$, on a

$$f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

□

Une approche similaire peut être adoptée pour la formule intégrale de Poisson.

Définition 2.1.4. *Pour $0\leq r<1$ et $\psi\in[0,2\pi]$, le noyau de Poisson est défini par*

$$P_r(\psi)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}.$$

Observons que $P_r(\psi) > 0$ *pour tout* $r \in [0,1]$ *et tout* ψ*, puisque*

$$1 - r^2 > 0$$

et

$$1 - 2r\cos\psi + r^2 > 0.$$

Théorème 2.1.9 (Formule intégrale de Poisson). *Si* f *est dans* $\mathbf{H^2}$ *et* re^{it} *dans* $\mathbb{D}$*, alors*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta - t)d\theta.$$

Preuve. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. Puisque

$$\widetilde{k_{z_0}}(e^{i\theta}) = \frac{1}{1 - \overline{z_0}e^{i\theta}},$$

on a

$$f(z_0) = (f, k_{z_0}) = \left(\widetilde{f}, \widetilde{k_{z_0}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{f}(e^{i\theta})}{1 - z_0e^{-i\theta}}d\theta.$$

Mais

$$\frac{1}{1 - z_0e^{-i\theta}} = 1 + z_0e^{-i\theta} + z_0^2e^{-2i\theta} + z_0^3e^{-3i\theta} + ...,$$

donc la fonction

$$\frac{1}{1 - z_0e^{-i\theta}} - 1$$

a tous ses coefficients de Fourier correspondant à des indices non négatifs égaux à 0. Il est donc orthogonal à $\widetilde{f}$. Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})\overline{\left(\frac{1}{1 - z_0e^{-i\theta}} - 1\right)}d\theta = 0.$$

L'ajout de cette intégrale à celle affichée ci-dessus pour $f(z_0)$ donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) \left(\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \overline{z_0} e^{i\theta}} - 1 \right) d\theta.$$

Si $z_0 = re^{it}$, un calcule très simple montre que

$$\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \overline{z_0} e^{i\theta}} - 1 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

Mais

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2},$$

donc

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta.$$

□

Le fait suivant sera nécessaire dans les applications ultérieure du théorème ci-dessus.

Corollaire 2.1.4. *Pour $r \in [0, 1]$ et tout nombre réel ,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta = 1.$$

Preuve. C'est une application immédiat du théorème (2.1.9) au cas où f est la fonction constante 1. □

Définition 2.1.5. *La fonction mesurable sur S^1 est essentiellement bornée s'il existe un certain M_0 tel que la mesure de*

$$\{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > M_0\}$$

est 0. L'espace $\mathbf{L}^\infty$ *est la collection de toutes (classes d'équivalence modulo ensembles des mesure zéro)de fonctions mesurables essentiellement bornées. La norme essentielle de la fonction* $\phi \in \mathbf{L}_\infty$ *, notée* $\|\phi\|_\infty$*, est définie par*

$$\|\phi\|_\infty = \inf\{M : \text{ la mesure de } \{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > M\} \text{ est 0}\}.$$

Observons que, pour $\phi \in \mathbf{L}_\infty$*, l'inégalité* $|\phi(e^{i\theta})| \leq \|\phi\|_\infty$ *vaut pour presque tous les* θ

Corollaire 2.1.5. *Soit* $f \in \mathbf{H^2}$ *et supposons que* $|\widetilde{f}(e^{i\theta})| \leq K$ *p.p. Alors* $f(z) \leq K$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$*. En particulier, une fonction dans* $\mathbf{H^2}$ *dont la fonction frontière est dans* $\mathbf{L}^\infty$ *doit être dans* $\mathbf{H}^\infty$*.*

Preuve. Rappelons que $P_r(\theta) > 0$ pour tout θ et $0 \leq r < 1$. Pour $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ l'application de la formule intégrale de Poisson(théorème (2.1.9)) à f donne

$$\begin{aligned}
|f(re^{i\theta})| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta - t)d\theta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\widetilde{f}(e^{i\theta})|P_r(\theta - t)d\theta \\
&\leq K\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\theta \\
&= K,
\end{aligned}$$

□

par le corollaire précédant. donc $|f(z)| \leq K$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, au choix.

Remarque. Pour chaque nombre réel $p \geq 1$, l'espace $\mathbf{H^p}$ est défini comme étant constitué de l'ensemble de tout les fonctions f analytiques sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

La norme $\mathbf{H^p}$ de f est définie comme étant

$$\|f\|^p = \left(\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que le théorème (2.1.6) ci-dessus montre que, dans le cas $p = 2$, cette définition est équivalente à celle que nous avons utilisée.

CHAPITRE 3

LES OPÉRATEURS SHIFT

Nous introduisons dans cette section l'opérateur shift, un des opérateurs les plus intéressants puis nous caractériserons ses sous-espaces invariants ce qui conduit naturellement à ce qu'on appelle la factorisation des fonctions dans $\mathbf{H^2}$

3.1 Les opérateurs shifts

Définition 3.1.1. *Sur l'espace de Hilbert l^2, on définit l'opérateur de shift unilatéral U par*

$$U(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$$

pour tout élément $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$ appartenant à l^2. On vérifie facilement qu'il est bien défini, et qu'il s'agit d'un opérateur linéaire borné.

Théorème 3.1.1. *(i) l'opérateur shift unilatéral est une isométrie (c'est-à-dire, $\|Uf\| = \|f\|$ pour tout $f \in l^2$)*

(ii) L'adjoint, U^*, de l'opérateur shift unilatéral a la forme suivante

$$U^*(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) = (a_1, a_2, a_3, ...).$$

pour $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) \in l^2$ (l'opérateur U^* est le shift unilatéral vers l'arrière.)

Preuve. Pour prouver (i), il faut montrer que $\|(a_0, a_1, a_2, ...)\| = \|(0, a_0, a_1, a_2, ...)\|$. Mais c'est trivial puisque $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = |0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}|^2$.

Pour prouver (ii), considérons l'opérateur A dans l^2 défini par $A(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) = (a_1, a_2, a_3, a_4 ...)$. Soient $x = (a_0, a_1, a_2, ...)$ et $y = (b_0, b_1, b_2, ...)$ deux vecteurs quelconques de l^2. Remarquons que

$$(Ux, y) = ((0, a_0, a_1, a_2, ...), (b_0, b_1, b_2, b_3, ...)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \overline{b_k}$$

et que

$$(x, Ay) = ((a_0, a_1, a_2, a_3, ...), ((b_1, b_2, b_3, b_4, ...)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_{k+1}}.$$

Puisque ces sommes sont égales, il s'ensuit que $A = U^*$. □

Il existe également des opérateurs shifts bilatéraux, définis sur l'espace des séquences à compteur dans $\mathbb{Z}$.

Définition 3.1.2. *L'espace $l^2(\mathbb{Z})$ est défini comme étant l'espace de toutes les séquences à indices dans $\mathbb{Z}$ de carrés sommables c'est-à-dire,*

$$l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Remarquons que la coordonnée d'indice zéro de la séquence est écrite en gras ; ceci est nécessaire pour distinguer une séquence d'un shift d'elle-même.

Définition 3.1.3. *Le shift bilatéral est l'opérateur W défini sur $l^2(\mathbb{Z})$ par*

$$W = (..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...) = (..., a_{-3}, a_{-2}, \mathbf{a_{-1}}, a_0, a_1, ...),$$

où le gras indique la position de la coordonnée d'indice zéro.

Théorème 3.1.2. *(i) l'opérateur shift bilatéral est un opérateur unitaire.*

(ii) L'adjoint de l'opérateur shift bilatéral, appelé shift bilatéral arrière, est donné par

$$W^*(..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...) = (..., a_{-1}, a_0, \mathbf{a_1}, a_2, a_3, ...).$$

pour tout élément $(..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...)$ de $l^2(\mathbb{Z})$.

Preuve. Il est clair que $\|W(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{Z})$. Par conséquent, l'opérateur W est une isométrie. Soit A l'opérateur linéaire borné défini par

$$A(..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...) = (..., a_{-1}, a_0, \mathbf{a_1}, a_2, a_3, ...).$$

pour tout élément $(..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...)$ de $l^2(\mathbb{Z})$ Évidemment, on réalise que $AW = WA = I$. C'est-à-dire W est une isométrie inversible ; Ainsi, W est un opérateur unitaire.

Nous devons montrer que $(Wx, y) = (x, Ay)$ pour tout x et tout $y \in l^2(\mathbb{Z})$. En effet, soit

$$x = (..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...) \quad et \quad y = (..., b_{-2}, b_{-1}, \mathbf{b_0}, b_1, b_2, ...).$$

deux éléments de $l^2(\mathbb{Z})$. Remarquons que

$$(Wx, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{n-1}\overline{b_n}$$

et que

$$(x, Ay) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}}.$$

Comme ces sommes sont égales entre elles, on conclut donc que $A = W^*$. $\square$

Définition 3.1.4. *On appelle opérateur de multiplication, l'opérateur noté M_z ("multiplication par z") défini sur $\mathbf{H^2}$ par*

$$(M_z f)(z) = zf(z).$$

pour tout f appartenant à $\mathbf{H^2}$. Il est claire que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors

$$(M_z f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$$

On remarque ainsi que l'opérateur M_z, agit comme l'opérateur shift unilatéral.

Théorème 3.1.3. *L'opérateur M_z, sur $\mathbf{H^2}$ est unitairement équivalent au shift unilatéral.*

Preuve. Soit V l'opérateur unitaire appliquant l^2 sur $\mathbf{H^2}$ d'après l'expression donnée par

$$V(a_0, a_1, a_2, ...) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

pour tout $(a_0, a_1, a_2, ...)$ de l^2. Il est facile de vérifier que $VU = M_z V$. $\square$

Ainsi on peut regarder M_z, comme une représentation de l'opérateur shift unilatéral sur $\mathbf{H^2}$. de ce fait, nous nous référons à M_z comme U lorsqu'aucune confusion n'est possible. Remarquons aussi que $M_z e_k = e_{k+1}$ pour $k = 0, 1, 2, ...$, où $e_k(z) = z^k$.

D'une façon analogue, l'opérateur shift bilatéral a une représentation sur l'espaces H^2.

Définition 3.1.5. *On définit les opérateurs $M_{e^{i\theta}}$ et $M_{e^{-i\theta}}$ sur H^2 par :*

$$(M_{e^{i\theta}}f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta}) \quad et \quad (M_{e^{-i\theta}}f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}).$$

On vérifie facilement qu'ils sont bien définis en tant que opérateurs linéaires bornés.

Théorème 3.1.4. *L'opérateur $M_{e^{i\theta}}$ sur H^2 est unitairement équivalent à l'opérateur shift bilatéral W sur $l^2(\mathbb{Z})$, aussi, l'opérateur $M_{e^{-i\theta}}$ est unitairement équivalent à W^**

Preuve. Si V est l'opérateur unitaire appliquant $l^2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbf{L^2}$ à travers l'action donnée par

$$V(..., a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, ...) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

on vérifie facilement que $VW = M_{e^{i\theta}}V$. La prise des adjoints montre que $V^*M_{e^{-i\theta}} = W^*V^*$ et le théorème s'ensuit (puisque V^* est aussi unitaire). □

Ce qui suit est trivial à vérifier mais important à noter.

Théorème 3.1.5. *L'opérateur $M_{e^{i\theta}}$ laisse le sous-espace $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ de $\mathbf{L^2}$ invariant et la restriction de $M_{e^{i\theta}}$ à $\widetilde{\mathbf{H^2}}$ est le shift unilatéral sur $\widetilde{\mathbf{H^2}}$. Sur $l^2(\mathbb{Z})$, l'opérateur W quitte le sous-espace l^2, constitué des séquences dont les coordonnées dans les positions négatives sont 0, invariantes, et la restriction de W à l^2 est le shift unilatéral sur l^2.*

Preuve. C'est immédiat. □

3.2 Sous-espace invariants et réduisant

Il existe des sous-espaces invariants évidents pour l'opérateur shift unilatéral. En considérant U comme un opérateur sur l^2, il est clair que, pour chaque nombre naturel n, le sous-espace constitué des suites dont les n premières coordonnées sont nulles est invariant sous U. Le sous-espace invariant correspondant pour M_z dans $\mathbf{H^2}$ est le sous-espace de $\mathbf{H^2}$ constitué des fonctions dont les n premières dérivées (dont la dérivée d'ordre 0)sont nulles à l'origine.

Le shift unilatéral possède de nombreux sous-espaces invariants très difficiles à décrire dans l'espace l^2. Nous verrons que tout les sous-espaces invariants du shift unilatéral peuvent être explicitement décrits comme des sous-espace de $\mathbf{H^2}$.

Théorème 3.2.1. *Les seuls sous-espaces réduisant de l'opérateur shift unilatéral sont* $\{0\}$ *et l'espace entier.*

Preuve. Ceci facilement prouvé en utilisant n'importe quelle représentation de U. Supposons que $\mathcal{M}$ est un sous-espace de l^2 qui réduit U et est différent de $\{0\}$. Il faut montrer que $\mathcal{M} = l^2$.

Puisque $\mathcal{M}\{0\} \neq 0$, il s'ensuit qu'il existe un vecteur non nul

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) \in \mathcal{M}.$$

Puisque $\mathcal{M}$ est réducteur, il est invariant sous U et U^*. Choisissons k_0 tel que $a_{k_0} \neq 0$. Alors $U^{*k_{z_0}}(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$ a sa première coordonnée différente de zéro et est dans $\mathcal{M}$. En réétiquetant, on peut supposer que

$$UU^*(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, a_3, ...),$$

et donc $(0, a_1, a_2, a_3, ...) \in \mathcal{M}$. Il s'ensuit que

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, ...) - (0, a_1, a_2, a_3, ...) = (a_0, 0, 0, 0, ...) \in \mathcal{M},$$

puisque $\mathcal{M}$ est sous-espace. En divisant par a_0, on voit que (1, 0, 0, 0, ...)est dans $\mathcal{M}$; c'est-à-dire $e_n = U^n e_0$ pour tout n. Il s'ensuit que $\mathcal{M}$ contient tout vecteur de base e_n, donc $\mathcal{M} = l^2$. $\square$

Définition 3.2.1. *Le sous-espace $\mathcal{M}$ réduit l'opérateur A si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\perp$ sont invariants sous A.*

Définition 3.2.2. *Le commutant d'un opérateur linéaire borné A est l'ensemble de tout les opérateurs linéaires bornés qui commutent avec A.*

Définition 3.2.3. *Soit ϕ une fonction dans $\mathbf{L}^\infty$. l'opérateur de multiplication par ϕ, noté M_ϕ, est défini par $M_\phi f = \phi f$ pour tout $f \in \mathbf{L^2}$.*

Théorème 3.2.2. *Si ϕ est une fonction dans $\mathbf{L}^\infty$. Alors $\|M\phi\| = \|\phi\|_\infty$.*

Preuve. Soit $f \in \mathbf{L^2}$ avec $\|f\| = 1$. Puisque $|\phi(e^{i\theta})| \leq \|\phi\|_\infty$ p.p. il s'ensuit que

$$\|M_\phi f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|\phi\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Cela implique que $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. On établit maintenant l'inégalité inverse. Soit $\lambda_0 = \|\phi\|_\infty$. Si $\lambda_0 = 0$ il n'y a rien à prouver. Supposons donc $\lambda_0 \neq 0$. Pour tout les nombre naturels n, l'ensemble

$$E_n = \left\{ e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > \lambda_0 - \frac{1}{n} \right\}$$

a une mesure positive. Si $\mathcal{X}_n$ est la fonction caractéristique de cet ensemble et m est la mesure de Lebesgue normalisée sur S^1, lorsque n est suffisamment grand pour que $\lambda_0 - 1/n > 0$, on a

$$\begin{aligned}\|M_\phi \mathcal{X}_n\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} |\phi(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} \left(\lambda_0 - \frac{1}{n}\right)^2 d\theta \\ &= \left(\lambda_0 - \frac{1}{n}\right)^2 m(E_n).\end{aligned}$$

Aussi, $\|\mathcal{X}_n\|^2 = m(E_n)$. Il s'ensuit que si $f_n = \mathcal{X}_n/\|\mathcal{X}_n\|$, alors

$$\|M_\phi f_n\| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}$$

pour n suffisamment grand, et donc

$$\|M_\phi\| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}$$

pour n suffisamment grand. Ainsi $\|M_\phi\| \geq \lambda_0 = \|\phi\|_\infty$. □

Théorème 3.2.3. *Soit P la projection sur le sous-espace $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{M}$ est un sous-espace réduisant pour A si et seulement si $PA = AP$. De plus, $\mathcal{M}$ réduit A si et seulement si $\mathcal{M}$ est invariant sous A et sous A^*.*

Preuve. Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace réduisant, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\perp$ sont invariants par A. Soit P l'opérateur de la projection orthogonale sur $\mathcal{M}$, on voit facilement que $I - P$ est la projection $\mathcal{M}^\perp$. Le théorème précédent implique alors $A(I - P) = (I - P)A(I - P)$. En développant cette dernière équation, on obtient $A - AP = A - PA - AP + PAP$, ce qui se simplifie en $PAP = PA$. Comme $\mathcal{M}$ est invariant par A (sous espace invariant) nous avons aussi $AP = PAP$ et donc $PA = AP$.

Inversement, supposons $AP = PA$. Soit $f \in \mathcal{M}$; pour prouver que $\mathcal{M}$ est invariant, il faut montrer que $Af \in \mathcal{M}$ pour tout f appartenant à $\mathcal{M}$. Par hypothèse, ona $PAf = APf$ et, puisque $Pf = f$, il s'ensuit que $PAf = Af$, qui est équivalent à $Af \in \mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est invariant par A. On a aussi que $(I-P)A = A(I-P)$ et donc un argument analogue montre que si $f \in \mathcal{M}^{\perp}$, alors $Af \in \mathcal{M}^{\perp}$. Donc $\mathcal{M}^{\perp} \in LatA$ et A est réduisant. Pour la deuxième partie du théorème, notez que, puisque P est auto-adjoint, $PA = AP$ si et seulement si $PA^* = A^*P$. Cela signifie que $\mathcal{M}$ est réduisant pour A si et seulement si $\mathcal{M}$ est réduisant pour A^*. En particulier, $\mathcal{M}$ est invariant à la fois pour A et A^*.

Pour l'inverse de la deuxième partie, remarquons d'abord que $PAP = AP$ et que $PA^*P = A^*P$. Si nous prenons l'adjoint de cette dernière équation, il s'ensuit que $AP = PA$ et donc $\mathcal{M}$ est réduisant, par la première partie du théorème. $\square$

Théorème 3.2.4. *Le commutant de W (considéré comme un opérateur sur $\mathbf{L^2}$) est de la forme*

$$\{M_\phi : \phi \in \mathbf{L}^\infty\}.$$

Preuve. Rappelons que $W = M_{e^{i\theta}}$. Si $\phi \in \mathbf{L}^\infty$, alors clairement M_ϕ commute avec $M_{e^{i\theta}}$ et donc $\{M_\phi : \phi \in \mathbf{L}^\infty\}$ est contenu dans l'ensemble des opérateurs qui commutent avec W.

Inversement, supposons que A est dans les commutant W. On définit $\phi = Ae_0$ où e_0 est le vecteur de la base orthonormale d'indice n zéro. Clairement $\phi \in \mathbf{L^2}$. Il faut montrer que $\phi \in \mathbf{L}^\infty$ et que $A = M_\phi$. Comme A commute avec W^n pour tout entier n, il s'ensuit que

$$Ae^{i\theta} = AW^n e_0 = W^n A e_0 = e^{in\theta} A e_0 = \phi e^{in\theta}$$

pour $n = 0, 1, 2, ...$ Puisque W est inversible, il s'ensuit que $AW^{-1} = W^{-1}A$, et donc que $Ae^{in\theta} = \phi e^{in\theta}$ pour tout entier n. Par linéarité, il s'ensuit que $Ap = \phi p$ pour tout polynôme trigonométrique P.

Si f est une fonction quelconque de $\mathbf{L^2}$, par densité il existerait une suite de polynômes trigonométriques $\{P_n\}$ telle que $\{p_n\} \to f$ dans $\mathbf{L^2}$ lorsque $n \to \infty$. Puisque A est continue, il s'ensuit que $\{AP_n\} \to Af$, et donc que $\{\phi p_n\} \to Af$ dans $\mathbf{L^2}$.

Maintenant, puisque $\{P_n\} \to f$ dans $\mathbf{L^2}$, il existerait une sous-suite, disons $\{P_{n_i}\}$ telle que $\{P_{n_i}\} \to f$ presque par tout sur S^1. Ainsi $\{\phi p_{n_i}\} \to \phi f$ presque partout. Et puisque $\{\phi f p_{n_i}\} \to Af$ sur $\mathbf{L^2}$, il existe une sous-suite $\{p_{n_{i_k}}\}$ avec $\{Ap_{n_{i_k}}\} \to Af$ presque partout et $\{Ap_{n_{i_k}}\} \to \phi f$ presque partout. Donc $Af = \phi f$ presque partout. Autrement dit, $A = M_\phi$.

Il reste à montrer que $\phi \in \mathbf{L}^\infty$. Fixons un entier naturel n et posons $E_n = \{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > n\}$. Il faut montrer que $m(E_n) = 0$ pour n suffisamment grand, où m est la mesure de Lebesgue normalisée sur S^1. Soit $\mathcal{X}_n$ la fonction caractéristique de E_n (qui est clairement dans $\mathbf{L}^\infty$). Alors

$$\|A\mathcal{X}_n\|^2 = \|\phi\mathcal{X}_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} |\phi(e^{i\theta})|^2 d\theta \geq n^2 m(E_n).$$

Aussi,

$$\|\mathcal{X}_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} d\theta = m(E_n).$$

Ainsi

$$n^2\|\mathcal{X}_n\|^2 \leq \|A\mathcal{X}_n\|^2 \leq \|A\|^2\|\mathcal{X}_n\|^2$$

.

Donc pour un entier n supérieure à $\|A\|$ la double inégalité précédente ne tient vraie que si $\|\mathcal{X}_n\| = 0$, c'est-à-dire que $m(E_n) = 0$. Par conséquent, $\phi \in \mathbf{L}^\infty$ $\square$

A ce stade on est en mesure de décrire explicitement les sous-espaces réduisant de l'opérateur shift bilatéral.

Corollaire 3.2.1. *Les sous-espaces réduisant de l'opérateur shift bilatéral sur* $\mathbf{L^2}$ *sont des sous-espaces de la forme*

$$\mathcal{M}_E = \{f \in \mathbf{L}^2 : f(e^{i\theta}) = 0 \quad \textit{p.p. sur } E\}$$

pour les sous-ensembles mesurables $E \subset S^1$.

Preuve. Soit E un sous-ensemble mesurable de S^1 et considérons le sous espace fermé

$$\mathcal{M}_E = \{f \in \mathbf{L}^2 : f(e^{i\theta}) = 0 \quad \text{p.p. sur E}\}$$

. Si $f(e^{i\theta_0}) = 0$, alors $e^{i\theta_0}f(e^{i\theta_0}) = 0$, donc $\mathcal{M}_E$ est invariant sous W.
De même, si $f(e^{i\theta_0}) = 0$, alors $e^{-i\theta_0}f(e^{i\theta_0}) = 0$, donc $\mathcal{M}_E$ est invariant sous W^*. D'après le théorème (3.2.3), $\mathcal{M}_E$ est réduisant.

Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace réduisant de W et P est la projection sur $\mathcal{M}$, alors $WP = PW$, d'après le théorème (3.2.3). D'après le théorème précédent, l'opérateur P est un opérateur de multiplication : $P = M_\phi$ pour certains $\phi \in \mathbf{L}^\infty$. Puisque P

est une projection, $P^2 = P$ et donc $M_\phi^2 = M_\phi$. Cela, implique que $\phi^2 = \phi$ presque partout.

Mais ceci implique que $\phi = \mathcal{X}_F$, la fonction caractéristique mesurable $F = \{e^{i\theta} \in S^1 : \phi(e^{i\theta}) = 1\}$. Ainsi $\mathcal{M} = \{f \in \mathbf{L}^2 : f\ \mathcal{X}_F = f\}$. Soit E le complémentaire de F dans S^1 ; alors $\mathcal{M} = \{f \in \mathbf{L}^2 : f(e^{i\theta}) = 0 \quad \text{p.p. sur E}\} = \mathcal{M}_E$. $\square$

CONCLUSION

Pour conclure, on peut dire que, avec tout ce travail réalisé on est loin de prétendre avoir exploré la globalité de ce sujet à cause de son étendue. Ce domaine d'analyse mérite sa part d'intérêt et reste à ce jours un domaine de recherche très actif malgré ses origines relativement anciennes qui remontent approximativement aux années 40-50. Comme perspective, on peut développer dans ces espaces, la factorisation des fonctions, la théorie des opérateurs linéaires qui peut décrire d'une manière consistante le passage de l''algèbre à l'analyse fonctionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, third edition, McGraw-Hill, New York, 1976.

[2] Walter Rudin, Real and Complex Analysis, third edition, McGeaw Hill, New York, 1986.

[3] John B, Conway, Functions of One Complax Variable, second edition, Springer, New York, 1978.

[4] John B. Conway, A Course in functional Analysis, second edition, Springer, New York, 1997.

[5] Paul R. Halmos, Introduction to Hilbert Space, reprint of the second edition (1957), AMS Chelsea Publishing, Providence, 1998.

[6] Angus E, Taylor and David C. Lay, Introduction to Functional Analysis, second edition, John Wiley, New York, 1980.

[7] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover, Mineola, NY, 1993.

[8] Michael Reed and Barry Simon, Methods of Modern Mathematical Physics. I : Functional Analysis, revised and enlarged edition, Academic Press, New York, 1980.

[9] Lars V.Ahlfors , Complex Analysis , third edition, McGraw-Hill, New York, 1979.

[10] Rubén A. Martínez-Avendano Peter Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Editorial Board S. Axler K.A. Ribet.

[11] I.I.Privalov, Randeigen schaften analytischer funktionen, Deutsher. Verlag der Wissenschaften. 1956.

[12] G.M.Goluzin ,Geomrtry theory of functions of a complex variable. AMS, Providence 1969

[13] Arne Beurling, On two problems concerning linear transformation in Hilbert Spaces. Acta Math. 81(1949) pp 239-255.