RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles »

Présenté Par :

BOUCHENTOUF Lakhdar CHEBCHOUB Nadjet

Sous L'intitulé :

Quelques inégalités intégrales liées à des opérateurs de Riemann-Liouville.

Soutenu publiquement le 13/ 06 /2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr AZZOUZ Noureddine	Grade Université MCA	Président
Mr BENAISSA Bouharket	Grade Université MCA	Encadreur
Mr SOFRANI Mohammed	Grade Université MCB	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Rechreche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques

présenté par

BOUCHENTOUF Lakhdar **CHEBCHOUB Nadjet**

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Equations Differenttielles

sujet de Mémoire

Quelques Inégalités Intégrales Liées à des Opérateurs de Riemann-Liouville

Mémoire de fin d'études pour obtenir

le diplôme de Master

présenter et soutenue publiquement le 12/06/2023

devant le jury composé de

AZZOUZ Noureddine	**MCA**	**Président**
BENAISSA Bouharket	**MCA**	**Encadreur**
SOFRANI Mohammed	**MCB**	**Examinateur**

Remerciement

✓ Nous remercions ALLAH d'abord et avant tout de nous donner la force et la volonté d'accomplir cette œuvre.

✓ Nous tenons à remercier sincèrement **Dr BENAISSA Bouharket** non seulement pour avoir accepté de nous encadrer et aussi nous faire profiter de ses connaissances mais aussi pour sa patience et pour la totale confiance qu'il nous a accordée.

✓ Nous tenons à remercier chaleureusement **Dr AZZOUZ Noureddine** pour l'honneur qu'il nous fait en tant que président de ce jury.

✓ Nous tenons également à remercier **Dr SOFRANI Mohammed** pour l'honneur d'avoir accepté la révision du présent document.

✓ Enfin, nous remercions tous ceux qui ont participé par leurs orientations ou leurs encouragements à la réalisation de ce travail : nos familles, nos amis, nos enseignants.

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter quelques résultats des articles scientifiques internationaux sur les inégalités intégrales fractionnaire en appliquant l'opérateur de Riemann-Liouville. Toutes les inégalités intégrales étudiées sont considérées dans l'espace de Lebesgue L^1. Les techniques utilisées dans la démonstration des théorèmes sont les formules des opérateurs, l'inégalité classique de Hölder pour $p \neq 0$, les propriétés des conjugués, le Théorème de Fubini et la monotonicité des fonctions (croissante, décroissante).
Ce mémoire est composée d'un préliminaire et de deux chapitres.

Dans la section **préliminaire**, des notations et des définitions sont données concernant :

1. **Théorème de Fubini :** on donne une définition et une remarque dans le cas d'une intégrale à borne non constante.

2. **Fonction définie par une intégrale :** nous présentons les deux types de la dérivée d'une fonction définie par une intégrale et le cas

général (Règle de Leibniz).

3. **Fonctions gamma et bêta d' Euler :** on donne des définitions et quelques propriétés.

4. **l'espace de Lebesgue :** on présent la définition de l'espace L^p et la norme $\|.\|_{L^p}$.

5. **L'inégalité de Hölder :** on donne les expressions des trois cas d'inégalité classique de Hölder.

6. **L'opérateur de Hardy :** on donne la définition de l'opérateur de Hardy, l'inégalité de Hardy pour $p > 1$, les inégalités inverses de Hardy pour $0 < p < 1$ et $p > 1$.

7. **Les opérateurs de Riemann-Liouville :**on présent les définitions des opérateurs gauche et droit de Riemann-Liouville et le théorème de la bornitude des opérateurs.

Le premier chapitre est composé de deux articles scientifiques internationaux sur les inégalités intégrales fractionnaire de type Hardy liées aux opérateurs de Riemann-Liouville, nous donnons un détail des versions citées dans l'article [3] et l'article [27].

Dans **le deuxième chapitre** nous présentons une nouvelle forme sur les inégalités intégrales fractionnaire de type Hardy à double ordres liées aux opérateurs de Riemann-Liouville, citées dans les deux articles scientifiques internationaux [4] et [18].

A la fin de ce mémoire, on donne une documentation sur les mathématiciens Fubini, Hardy, Hölder, Liouville et Riemann. Une bibliographie contient les références des articles scientifiques internationaux.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.1. *Soit $f(x, y)$ une fonction mesurable sur Ω et $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $a < b$ et $c < d$. Alors pour presque tous les $x \in (a, b)$, $f(x, y)$ est intégrable sur (c, d) et pour presque tous les $y \in (c, d)$, $f(x, y)$ est intégrable sur (a, b) et :*

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx \right) dy,$$

si $f(x, y)$ est une fonction mesurable sur $(a, b) \times (c, d)$ et les intégrales sont finis, alors toutes les intégrales existent et de plus cette dernière égalité est vérifiée.

Remarque 1.1. *En appliquant le Théorème de Fubini on a le cas particulier où l'intégrale est à borne non constante.*

$$\int_a^b \int_a^x \Phi(t,x)dtdx = \int_a^b \int_t^b \Phi(t,x)dxdt.$$

1.2 Fonction définie par une intégrale

1.2.1 Fonction $x \longmapsto F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$.

Soient f une fonction intégrable sur tout segment $I \subset \mathbb{R}$ et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$. L'intégrale $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ définit une fonction

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt, \end{aligned}$$

F est dérivable en tout $x \in I$ et

$$F'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x)). \tag{1.1}$$

Des cas particuliers : en posant $u(x) = x$ et $v(x) = a$, on a

Fonction : $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Soit f une fonction intégrable sur tout segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{aligned}$$

I) la fonction F est continue sur I et $F(a) = 0$.

II) F est dérivable en tout $x \in I$ et

$$F'(x) = f(x). \tag{1.2}$$

Si on pose $u(x) = b$ et $v(x) = x$, on aura

Fonction : $x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$.

Soit f une fonction intégrable sur tout segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_x^b f(t)dt, \end{aligned}$$

I) la fonction F est continue sur I et $F(b) = 0$.

II) F est dérivable en tout $x \in I$ et

$$F'(x) = -f(x). \tag{1.3}$$

1.2.2 Fonction : $x \longmapsto \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)dt$.

La fonction φ est défini si f est une application de $I \times [a, b]$ où I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \longmapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 1.2. *Si la fonction*

$$\begin{aligned} f : I \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto f(x, t) \end{aligned}$$

est continue sur $I \times [a, b]$ et admet une fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ également continue sur $I \times [a, b]$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b f(x,t)dt \end{aligned}$$

est dérivable sur I, sa dérivée φ' vérifie

$$\forall x \in I : \varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \tag{1.4}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in I : \frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \tag{1.5}$$

1.2.3 Règle de Leibniz

On présente maintenant le cas général des formules précédentes. Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$, la fonction

$$\begin{aligned} f : I \times [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

est continue sur $I \times [a,b]$ et admet une fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ également continue sur $I \times [a,b]$ et

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt,$$

alors la fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle est donnée par

$$F'(x) = v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt. \tag{1.6}$$

Pour détail, voir [21].

1.3 Fonctions gamma et bêta d'Euler

1.3.1 Fonction gamma

Définition 1.1. *soit $x \in]0, +\infty[$ la fonction gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Propriétés

Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (relation de récurrence)

2) $\Gamma(n) = (n-1)\,!$.

1.3.2 Fonction bêta

Définition 1.2. *la fonction bêta notée par β est définie pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ avec $x > 0$ et $y > 0$, on a :*

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Propriétés

1) $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ symétrique.

2) $\beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

1.4 L'espace L^p

Définition 1.3. *(**L'espace** L^p) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$, un ensemble mesurable, $0 < p < \infty$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si et seulement si*

(1) f est mesurable sur Ω.
(2) $\int\limits_{\Omega} \big|f(x)\big|^p dx < \infty$.
On définit la norme par l'expression suivante

$$\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Définition 1.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ ($\big|\Omega\big| > 0$ de mesure non nulle) et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$,. On dit que $f \in L^1(\Omega)$ si f est mesurable et*

$$\big\|f\big\|_{L^1(\Omega)} = \int |f(x)| dx < \infty. \tag{1.7}$$

1.5 Les inégalités de Hölder

Soient Ω un ensemble mesurable non vide de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions mesurables sur Ω telle que $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

I) Pour $p \geq 1$

$$\int\limits_{\Omega} \big|f(x)g(x)\big| dx \leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} \big\|g\big\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

et on écrit

$$\int\limits_{\Omega} \big|f(x)g(x)\big| dx \leq \left(\int\limits_{\Omega} \big|f(x)\big|^p dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} \big|g(x)\big|^{p'} dx\right)^{1/p'}. \tag{1.8}$$

II) Pour $0 < p < 1$ (quasi-norme)

$$\int\limits_{\Omega} \big|f(x)g(x)\big| dx \geq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} \big\|g\big\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

et on écrit

$$\int\limits_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right|dx \geq \left(\int\limits_{\Omega} \left|f(x)\right|^{p}dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p^{'}}dx\right)^{1/p^{'}}. \quad (1.9)$$

III) Pour $p < 0$

$$\int\limits_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right|dx \geq \Big(\int\limits_{\Omega} \left|f(x)\right|^{p}dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p^{'}}dx\Big)^{1/p^{'}}.$$

On peut récrire l'inégalité précédente sous la forme suivante :

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left|f(x)g(x)\right|dx\right)^{p} \leq \left(\int\limits_{\Omega} \left|f(x)\right|^{p}dx\right) \left(\int\limits_{\Omega} \left|g(x)\right|^{p^{'}}dx\right)^{p-1}. \quad (1.10)$$

1.5.1 L'inégalité classique de Hardy

Définition 1.5. *Soit f une fonction mésurable positive sur $(0, +\infty)$, on définit l'opérateur de Hardy, noté $H_f := (Hf)$ par*

$$\big(Hf\big)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\,, \quad (1.11)$$

(la valeur moyenne de la fonction f dans l'intervalle $(0, x)$).

Lemme 1.1. *(l'inégalité classique de Hardy) Soient $p > 1$ et f une fonction positive mésurable sur $(0, +\infty)$, alors on a*

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^{p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \int_0^{+\infty} f^{p}(x)\,dx. \quad (1.12)$$

1.6 Les inégalités inverses de Hardy

Soient $0 < a < b < +\infty$, $p > 0$ et f une fonction positive mesurable sur $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors

1. Pour $p \geq 1$

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x} \right)^p dx - \int_a^b \left(1 - \frac{a}{x}\right)^p f^p(x)dx. \tag{1.13}$$

2. Pour $0 < p < 1$

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \geq \left(1 - \frac{a}{b}\right)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^p} \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{1.14}$$

1.7 Les opérateurs de Riemann-Liouville (R-L)

Premier opérateur, soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $f \in L^1([a, b])$, on considére l'intégrale

$$_{a^+}I^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pour $x \in [a,b]$, on a ${}_{a^+}I^1 f$ est continue sur $[a,b]$ alors il est intégrable. On intègre la deuxième fois et on appliquons le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_a^x I^1 f(s)ds &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds &= \int_a^x \int_a^s f(t)dtds \\ &= \int_a^x \int_t^x f(t)dsdt &= \int_a^x \left(\int_t^x f(t)ds\right) dt \\ &= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x ds\right) dt &= \int_a^x (x-t)f(t)dt,\end{aligned}$$

alors

$$I^2 f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

On intègre la troisième fois :

$$\begin{aligned}\int_a^x I^2 f(s)ds &= \int_a^x \left(\int_a^s (s-t)f(t)dt\right) ds = \int_a^x \int_a^s (s-t)f(t)dtds \\ &= \int_a^x \int_t^x (s-t)f(t)dsdt = \int_a^x \left(\int_t^x (s-t)f(t)ds\right) dt \\ &= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x (s-t)ds\right) dt = \int_a^x f(t) \left(\left[\frac{1}{2}(s-t)^2\right]_t^x\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt,\end{aligned}$$

on déduit

$$I^3 f(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

On intègre la quatrième fois :

$$\int_a^x I^3 f(s)ds$$

$$= \int_a^x \left(\frac{1}{2} \int_a^s (s-t)^2 f(t)dt \right) ds = \frac{1}{2} \int_a^x \int_a^s (s-t)^2 f(t)dt\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^x \int_t^x (s-t)^2 f(t)ds\, dt = \frac{1}{2} \int_a^x \left(\int_t^x (s-t)^2 f(t)ds \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^x f(t) \left(\int_t^x (s-t)^2 ds \right) dt = \frac{1}{2} \int_a^x f(t) \left(\left[\frac{1}{3}(s-t)^3 \right]_t^x \right) dt,$$

on obtient

$$I^4 f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^3 f(t)dt) = \frac{1}{3\,!} \int_a^x (x-t)^3 f(t)dt,$$

si on applique le même processus n fois il résulte

$${}_{a^+}I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)\,!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

par conséquence

$${}_{a^+}I^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,tell que $\alpha > 0$, on écrit

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Deuxième opérateur, pour $f \in L^1([a,b])$, on définit l'opérateur $I(f)$ par

$$If(x) = \int_x^b f(t)dt,$$

on intégre et on applique le Théorème de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_x^b If(s)ds &= \int_x^b \left(\int_s^b f(t)dt\right) ds &&= \int_x^b \int_s^b f(t)dtds \\
&= \int_x^b \int_s^b f(t)dsdt &&= \int_x^b \left(\int_x^t f(t)ds\right) dt \\
&= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t ds\right) dt &&= \int_x^b (t-x)f(t)dt,
\end{aligned}$$

alors

$$I^2 f(x) = \int_x^b (t-x)f(t)dt.$$

On intègre pour la deuxième fois :

$$\begin{aligned}
\int_x^b I^2 f(s)ds &= \int_x^b \left(\int_s^b (t-s)f(t)dt\right) ds &&= \int_x^b \int_s^b (t-s)f(t)dt\, ds \\
&= \int_x^b \int_x^t (t-s)f(t)ds\, dt &&= \int_x^b \left(\int_x^t (t-s)f(t)ds\right) dt \\
&= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)ds\right) dt &&= \int_x^b f(t) \left(\left[\frac{-1}{2}(t-s)^2\right]_x^t\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_x^b (t-x)^2 f(t)dt,
\end{aligned}$$

on déduit

$$I^3 f(x) = \frac{1}{2}\int_x^b (t-x)^2 f(t)dt.$$

Pour la troisième fois par l'intégration, on obtient

$$\int_x^b I^3 f(s)ds$$

$$= \int_x^b \left(\frac{1}{2}\int_s^b (t-s)^2 f(t)dt\right) ds = \frac{1}{2}\int_x^b \int_s^b (t-s)^2 f(t)dt\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^b \int_x^t (t-s)^2 f(t)ds\, dt = \frac{1}{2}\int_x^b \left(\int_x^t (t-s)^2 f(t)ds\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^b f(t)\left(\int_x^t (t-s)^2 ds\right) dt = \frac{1}{2}\int_x^b f(t)\left(\left[\frac{-1}{3}(t-s)^3\right]_x^t\right) dt,$$

on obtient

$$I^4 f(x) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\int_x^b (t-x)^3 f(t)dt) = \frac{1}{3\,!}\int_x^b (t-x)^3 f(t)dt,$$

si on applique le même processus n fois, on résulte

$$I_{b^-}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)\,!}\int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt,$$

par conséquence

$$I_{b^-}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,tell que $\alpha > 0$, on écrit

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

1.7.1 Les opérateurs de Riemann-Liouville

Définition 1.6. *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1\Big([a,b]\Big)$, on appelle l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α á gauche (respectivement á droite) de la fonction f les intégrales suivantes :*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a, \tag{1.15}$$

et

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad b > x. \tag{1.16}$$

1.7.2 Théorème d'existence et de bornitude

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $0 \leq a < b \leq +\infty$.

Théorème 1.3. *Soient f une fonction mesurable sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$, $\alpha > 0$. Si $f \in L^1([a,b])$, alors*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) \in L^1([a,b]), \quad I_{b^-}^{\alpha} f(x) \in L^1([a,b]). \tag{1.17}$$

De plus

$$\|I_{a^+}^{\alpha} f\|_{L^1([a,b])} \leq C\|f\|_{L^1([a,b])}, \quad \|I_{b^-}^{\alpha} f\|_{L^1([a,b])} \leq C\|f\|_{L^1([a,b])}, \tag{1.18}$$

où

$$C = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} . \tag{1.19}$$

Démonstration : Soit $I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ l'opérateur gauche de Riemann- Liouville. On utilise le Théorème de Fubini, on déduit

$$\begin{aligned}
\|I_{a^+}^{\alpha} f\|_{L^1([a,b])} &= \int_a^b \mid I_{a^+}^{\alpha} f(x) \mid dx \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right| dx \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid \, dt\, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid dx \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid \left(\int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx \right) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}_{a^+}f\|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \mid f(t) \mid \left(\frac{1}{\alpha}\Big[(x-t)^{\alpha}\Big]_t^b\right) dt \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^{\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^{\alpha} dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b \mid f(t) \mid (b-a)^{\alpha} dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b \mid f(t) \mid dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^1([a,b])}.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}_{b^-}f\|_{L^1([a,b])} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left|\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt\right| dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid \, dt\, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid dx\right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \mid f(t) \mid \left(\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx\right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \mid f(t) \mid \left(\frac{1}{\alpha}\Big[-(t-x)^{\alpha}\Big]_a^t\right) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_{b^-}^{\alpha}f\|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b \mid f(t) \mid (t-a)^{\alpha}dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b \mid f(t) \mid (b-a)^{\alpha}dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b \mid f(t) \mid dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^1([a,b])}.
\end{aligned}$$

On déduit que les opérateurs $I_{a^+}^{\alpha}f$, $I_{b^-}^{\alpha}f$ sont bornés de l'espace $L^1([a,b])$ vers lui même.

Chapitre 2

Les inégalités inverses de Hardy liées à l'opérateur de Riemann-Liouville

2.1 Introduction

En 2012, Sulaiman a prouve des inégalités intégrales dites inégalités inverses de Hardy [37, Théorème3.1].

Théorème 2.1. *Soient* $0 < a < b < +\infty$, $p > 0$ *et* f *une fonction positive mesurable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors

1. *Pour* $p \geq 1$

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x} \right)^p dx - \int_a^b \left(1 - \frac{a}{x}\right)^p f^p(x) dx \tag{2.1}$$

2. *Pour* $0 < p < 1$

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \geq \left(1-\frac{a}{b}\right)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^p}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{2.2}$$

En 2013, Banyat Sroysang obtient une généralisation des inégalités intégrales précédentes de Hardy, en introduisant un deuxième paramètre $q > 0$.[36, Théorème 2.1]

Théorème 2.2. *Soient* $0 < a < b < +\infty$, $p, q > 0$ *et* f *une fonction positive mesurable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors

1. *Pour* $p \geq 1$

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q} - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x)dx \tag{2.3}$$

2. *Pour* $0 < p < 1$

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \geq \frac{(b-a)^p}{b^q}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^q}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{2.4}$$

En 2020, B. Benaissa a généralisé l'inégalité integrale dite inverse de Hardy [12, Théorème 2.2]

Théorème 2.3. *Soient* $0 < a < b < +\infty$, $p > 0$ *et* f, g *deux fonctions positives mesurables sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Si g *est croissante sur* $[a, b]$, *alors*

1. *pour* $p \geq 1$

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g(x)} f^p(x)dx, \quad (2.5)$$

2. *pour* $0 < p < 1$

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}dx \geq \frac{(b-a)^p}{g(b)} \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \quad (2.6)$$

2.2 Résultats principaux

Dans cette section nous donnons un détail sur l'inégalité integrale inverse de Hardy dans le calcul fractionnel.

Théorème 2.4. *Soient* $f > 0$ *et* $g > 0$ *sur* $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$. *tel que* g *est non-décroissante, alors pour tout* $p > 1$, *et* $\alpha \geq 1$ *on a*

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx \leq \frac{1}{(\alpha(p-1)+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \quad (2.7)$$
$$\times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{f^p(b)}{g(b)}\right) - I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{f^p(b)}{g(b)}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\right)\right].$$

Démonstration :

Soit $I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ l'opérateur gauche de Riemann-Liouville, on a

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(t) (x-t)^{\frac{\alpha-1}{p'}} dt,
\end{aligned}$$

appliquant l'inégalité de Hölder pour $p > 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} f(x) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^x \left((x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(t) \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left((x-t)^{\frac{\alpha-1}{p'}} \right)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x) \right)^p &\leq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{p-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

On a
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[-(x-t)^{\alpha}\Big]_a^x$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha},$$
d' ou
$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)},$$
ce qui donne
$$\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)^p \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\Big(\frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\Big)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt.$$

On intègre par rapport à x sur $[a,b]$, on résulte
$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)^p}{g(x)}\,dx$$
$$\leq \int_a^b g^{-1}(x)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right]dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}\int_a^b g^{-1}(x)(x-a)^{\alpha(p-1)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)dx.$$
Sachons que g est une fonction non-décroissante sur $[a,b]$, on déduit que $g^{-1}=\frac{1}{g}$ est une fonction décroissante sur $[a,b]$, d'où
$$t \leq x \longrightarrow g^{-1}(x) \leq g^{-1}(t), \tag{2.8}$$

d'autre part pour $\alpha \geq 1$ et $a \leq t \leq x \leq b$, on a

$$x - t \leq b - t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} \leq (b-t)^{\alpha-1},$$

ce qui donne

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \leq \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt, \tag{2.9}$$

du (2.8) et (2.9), on obtient

$$g^{-1}(x)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right) \leq$$

$$g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right)$$

par conséquent

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x) \right)^p}{g(x)} dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$

$$\times \int_a^b \left[g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right) \right] dx.$$

Appliquons le Théorème du Fubini, on a

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b \int_a^x g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b \int_t^b g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1} f^p(t) dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t) \left(\int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)} dx\right) dt.$$

On calcul l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)} dx &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\left[(x-a)^{\alpha(p-1)+1}\right]_t^b \\ &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} - (t-a)^{\alpha(p-1)+1}\right]. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx \leq \frac{1}{(\alpha(p-1)+1)\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$

$$\times \int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t)\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} - (t-a)^{\alpha(p-1)+1}\right] dt,$$

posant $C = \dfrac{1}{(\alpha(p-1)+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\leq C\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t)\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\right]dt\right)$$

$$= C\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}dt -$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\alpha-1} f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big)$$

$$= C\Big((b-a)^{\alpha(p-1)+1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}\frac{f^p(t)}{g(t)}dt -$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}\frac{f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}}{g(t)}dt\Big)$$

$$= C\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\, I_{a^+}^{\alpha}\Big(\frac{f^p(b)}{g(b)}\Big) - I_{a^+}^{\alpha}\Big(\frac{f^p(b)}{g(b)}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\right]. \quad \square$$

Théorème 2.5. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$, tel que g est non-décroissante, alors pour tout $0 < p < 1$, et $0 < \alpha \leq 1$ on a*

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx \geq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(b)} \tag{2.10}$$

$$\times\left[(b-a)^{\alpha(1-p)+1}\, I_{a^+}^{\alpha}\Big(f^p(b)\Big) - I_{a^+}^{\alpha}\Big(f^p(b)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\right].$$

Démonstration :

Soit $I_{a^+}^{\alpha}f(x)$ l'opérateur gauche de Riemann-Liouville, on a

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \\
&= \int_a^x \Big[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})} f(t)dt \\
&= \int_a^x \Big[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p}} f(t)\Big[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p'}} dt,
\end{aligned}$$

appliquant l'inégalité de Hölder pour $0 < p < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}f(x) &\geq \left(\int_a^x \left(\Big[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p}} f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left(\Big[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)^p &\geq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]^p \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[-(x-t)^{\alpha}\Big]_a^x$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha},$$

d' où

$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)},$$

ce qui donne

$$\Big(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\Big)^p \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\Big(\frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\Big)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt.$$

On intègre par rapport à x sur $[a,b]$, on résulte

$$\int_a^b \frac{\Big(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\Big)^p}{g(x)}dx$$

$$\geq \int_a^b g^{-1}(x)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right]dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}\int_a^b g^{-1}(x)(x-a)^{\alpha(p-1)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)dx.$$

Sachons que g est une fonction non-décroissante sur $[a,b]$, on déduit que g^{-1} est une fonction décroissante sur $[a,b]$, d'où

$$b \geq x \longrightarrow g^{-1}(x) \geq g^{-1}(b), \tag{2.11}$$

d'autre part pour $0 < \alpha < 1$ et $a \leq t \leq x \leq b$, on a

$$x - t \leq b - t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} \geq (b-t)^{\alpha-1},$$

ce qui donne

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \geq \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt, \tag{2.12}$$

par la multiplication du (2.11) et (2.12), on obtient

$$g^{-1}(x)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right) \geq$$

$$g^{-1}(b)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right),$$

par conséquent

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x) \right)^p}{g(x)} dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$

$$\times \int_a^b \left[g^{-1}(b)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right) \right] dx.$$

Appliquons théorème du Fubini, on a

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b \int_a^x g^{-1}(b)(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt\, dx$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{g(b)} \int_a^b \int_t^b \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} dx\, dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{g(b)} \int_a^b \left(\int_t^b \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} dx \right) dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{g(b)} \int_b^a \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1} \left(\int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)} dx \right) dt.$$

On calcul l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_b^t (x-a)^{\alpha(p-1)} dx &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1} \left[(x-a)^{\alpha(p-1)+1} \right]_t^b \\ &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1} \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} - (t-a)^{\alpha(p-1)+1} \right]. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\int_a^b \frac{\Big(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\Big)^p}{g(x)}\, dx$$

$$\geq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)+1)g(b)} \int_b^a \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} - (t-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)+1)g(b)}\Big(\int_a^b \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}dt +$$

$$- \int_a^b \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big)$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)+1)g(b)}\Big[\frac{(b-a)^{\alpha(p-1)+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt +$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big]$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)+1)g(b)} \Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\, I_{a^+}^{\alpha}\Big(f^p(b)\Big) - I_{a^+}^{\alpha}\Big(f^p(b)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\Big] . \square$$

Théorème 2.6. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$, tel que g est non-croissante, alors pour tout $p < 0$, et $1 \leq \alpha$ on a*

$$\int_a^b \frac{\Big(I_{b^-}^{\alpha} f(x)\Big)^p}{g(x)}\, dx \leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)} \tag{2.13}$$

$$\times \Big[I_{b^-}^{\alpha}\Big(f^p(a)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big) - (b-a)^{\alpha(1-p)+1}\, I_{b^-}^{\alpha}\Big(f^p(a)\Big)\Big] .$$

Démonstration :

Soit $I_{b^-}^{\alpha} f(x)$ l'opérateur droit de Riemann-Liouville, on a

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \int_x^b \Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})} f(t)dt \\ &= \int_x^b \Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p}} f(t) \Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p'}} dt, \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hölder pour $p<0$, on déduit :

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \int_x^b \Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p'}} f(t) \Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p}} dt \\ &\geq \left(\int_x^b \Big(\Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p'}}\Big)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^b \Big(\Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p}} f(t)\Big)^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[\frac{1}{\alpha}(t-x)^{\alpha}\Big]_x^b \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}, \end{aligned}$$

d'où

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) \geq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $p < 0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left(I_{b^-}^{\alpha} f(x)\right)^p &\leq \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) \\
&= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right),
\end{aligned}
$$

on intègre par rapport à x sur l'intervalle $[a, b]$, on résulte que

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx \\
&\leq \int_a^b g^{-1}(x) \left[\frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha(p-1)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right] dx \\
&= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-1}(x)(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx.
\end{aligned}
$$

Sachons que g est une fonction non-croissante sur $[a, b]$, on déduit que g^{-1} est une fonction croissante sur $[a, b]$, d'où

$$
a \leq x \longrightarrow g^{-1}(x) \leq g^{-1}(a), \tag{2.14}
$$

d'autre part pour $1 \leq \alpha$ et $a \leq x \leq t \leq b$, on a

$$
t - x \leq t - a \longrightarrow (t-x)^{\alpha-1} \leq (t-a)^{\alpha-1},
$$

ce qui donne

$$\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt \leq \int_x^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt, \tag{2.15}$$

en multipliant (2.14) et (2.15), on obtient

$$g^{-1}(x)(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right) \leq$$

$$g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right),$$

par conséquent

$$\int_a^b \frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(x) \right)^p}{g(x)} dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$

$$\times \int_a^b \left[g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt \right) \right] dx.$$

On Applique le théorème du Fubini, on a

$$\int_a^b \frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b \int_x^b g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)}(t-a)^{\alpha-1} f^p(t) dt\, dx$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{g(a)} \int_a^b \int_a^t \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\alpha(p-1)} dx\, dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{g(a)} \int_a^b \left(\int_a^t \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\alpha(p-1)} dx \right) dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{g(a)} \int_b^a \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} \left(\int_a^t (b-x)^{\alpha(p-1)} dx \right) dt,$$

on calcul l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_a^t (b-x)^{\alpha(p-1)} dx &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1} \Big[-(b-x)^{\alpha(p-1)+1} \Big]_a^t \\
&= \frac{1}{\alpha(1-p)-1} \Big[(b-t)^{\alpha(p-1)+1} - (b-a)^{\alpha(p-1)+1} \Big].
\end{aligned}$$

alors

$$\int_a^b \frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)} \int_b^a \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}\Big[(b-t)^{\alpha(p-1)+1} - (b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)}\Big(\int_a^b \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\alpha(p-1)+1}dt +$$

$$-\int_a^b \frac{f^p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big)$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)}\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)(b-t)^{\alpha(p-1)+1}dt +$$

$$-\frac{(b-a)^{\alpha(p-1)+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt\Big]$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)}\left[I_{b^-}^{\alpha}\Big(f^p(a)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big) - (b-a)^{\alpha(p-1)+1} I_{b^-}^{\alpha}\Big(f^p(a)\Big)\right]. \qquad \square$$

2.3 Applications

Posant $\alpha = 1$ dans le Théorème 2.4, Théorème 2.5 et Théorème 2.6, on obtient les Corollaires suivants liés à l'intégrale de Riemann.

Corollaire 2.1. *soit $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$. tel que g soit non-croissante, alors pour tout $p > 1$, on a*

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}\, dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g(x)}\, dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g(x)} f^p(x)\, dx \tag{2.16}$$

où $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Corollaire 2.2. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$, tel que g est non-décroissante, alors pour tout $0 < p < 1$, on a*

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}\, dx \geq \frac{(b-a)^p}{g(b)} \int_a^b f^p(x)\, dx - \frac{1}{g(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x)\, dx \tag{2.17}$$

où $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Corollaire 2.3. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$, tel que g est non-croissante, alors pour tout $p < 0$, on a*

$$-p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}\, dx \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b (b-x)^p f^p(x)\, dx - \frac{(b-a)^p}{g(a)} \int_a^b f^p(x)\, dx \tag{2.18}$$

où $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$.

l'inégalite (2.18) est un nouveau résultat pour $p < 0$.

Chapitre 3

Généralisation des inégalités de type Hardy liées à l'opérateur de Riemann-Liouville avec double ordres

3.1 Introduction

L'inégalité inverse de Hardy liée à l'opérateur Riemann-Liouville est donné dans [27] comme suite :

Théorème 3.1. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$. tel que g est non-décroissant, alors pour tout $p > 1$, et $\alpha \geq 1$ on a*

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx \leq \frac{1}{(\alpha(p-1)+1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}$$
$$\times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{f^p(b)}{g(b)}\right) - I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{f^p(b)}{g(b)}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\right)\right]. \tag{3.1}$$

(Voir le chapitre précédent.)

3.2 Résultats principaux

Dans cette section nous donnons un détail des trois théorèmes sur les inégalités intégrales inverses de Hardy liées à l'opérateur Riemann-Liouville avec double ordres. On considère f et g deux fonctions continues sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$.

Théorème 3.2. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$. tel que g est non-décroissante, alors pour tout $p > 1$, $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$ on a*

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(b)\right)^p}{g(b)}\right) \leq \frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)}$$

$$\times\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\, I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(\frac{f^p(b)}{g(b)}\Big) - I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(\frac{f^p(b)}{g(b)}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\right]. \tag{3.2}$$

Démonstration :

Soit $I_{a^+}^{\alpha}f(x)$ l'opérateur gauche de Riemann-Liouville, on a

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}}f(t)(x-t)^{\frac{\alpha-1}{p'}}dt,
\end{aligned}$$

appliquant l'inégalité de Hölder pour $p>1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}f(x) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x \left((x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}}f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x \left((x-t)^{\frac{\alpha-1}{p'}}\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)^p &\leq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]^p \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[-(x-t)^{\alpha}\Big]_a^x\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha},\end{aligned}$$

d' où

$$\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\Big)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\Big(I^{\alpha}_{a^+}f(x)\Big)^p &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\Big(\frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\Big)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt.\end{aligned} \tag{3.3}$$

D'autre part, on a par définition

$$I^{\beta}_{a^+}\Big(G(y)\Big) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^y (y-x)^{\beta-1}G(x)dx,$$

posant

$$G(y) = \left(\frac{\Big(I^{\alpha}_{a^+}f(y)\Big)^p}{g(y)}\right),$$

on obtient

$$I^{\beta}_{a^+}\left(\frac{\Big(I^{\alpha}_{a^+}f(y)\Big)^p}{g(y)}\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^y (y-x)^{\beta-1}\left(\frac{\Big(I^{\alpha}_{a^+}f(x)\Big)^p}{g(x)}\right)dx,$$

pour $y = b$, on a

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^b (b-x)^{\beta-1}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)^p}{g(x)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^b (b-x)^{\beta-1}g^{-1}(x)\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)^p dx.$$

On applique maintenant (3.3), il résulte que

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^b (b-x)^{\beta-1}g^{-1}(x)$$

$$\times\left[\frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha(p-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right]dx$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b g^{-1}(x)(b-x)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)dx.$$

Sachons que g est une fonction non-décroissante sur $[a,b]$, on déduit que $g^{-1} = \dfrac{1}{g}$ est une fonction décroissante sur $[a,b]$, d'où

$$t \leq x \longrightarrow 0 < g^{-1}(x) \leq g^{-1}(t), \tag{3.4}$$

d'autre part pour $\beta \geq 1$ et $a \leq t \leq x \leq b$, on a

$$b-x \leq b-t \longrightarrow (b-x)^{\beta-1} \leq (b-t)^{\beta-1}, \tag{3.5}$$

et pour tout $\alpha \geq 1$ et $a \leq t \leq x \leq b$, on a

$$x - t \leq b - t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} \leq (b-t)^{\alpha-1},$$

ce qui donne

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \leq \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt. \tag{3.6}$$

Appliquant (3.4) ,(3.5) et (3.6), on obtient

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(x)(b-x)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx,$$

par conséquent

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b \left[(b-t)^{\beta-1} g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)\right] dx$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b \int_a^x (b-t)^{\beta-1} g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\, dx.$$

On applique le théorème du Fubini, on conclut

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_a^x(b-t)^{\beta-1}g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\,dx$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_t^b(b-t)^{\beta-1}g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)dx\,dt$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_t^b(b-t)^{\beta+\alpha-2}g^{-1}(t)(x-a)^{\alpha(p-1)}f^p(t)dx\,dt$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)\left(\int_t^b(x-a)^{\alpha(p-1)}dx\right)dt,$$

on a

$$\begin{aligned}\int_t^b(x-a)^{\alpha(p-1)}dx &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\Big[(x-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]_t^b\\ &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big].\end{aligned}$$

par conséquent

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\alpha(p-1)+1}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)$$

$$\times\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]dt$$

$$=\frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)}\Big(\frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)$$

$$\times\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]dt\Big),$$

posant $C=\dfrac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)}$, on déduit

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$=C\Big(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}dt-$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b g^{-1}(t)(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big)$$

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$= C\Big((b-a)^{\alpha(p-1)+1}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}\frac{f^p(t)}{g(t)}dt-$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}\frac{f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}}{g(t)}dt\Big)$$

$$= C\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\, I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(\frac{f^p(b)}{g(b)}\Big) - I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(\frac{f^p(b)}{g(b)}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\Big]. \quad \square$$

Théorème 3.3. *Soient* $f > 0$ *et* $g > 0$ *sur* $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$. *tel que* g *est non-décroissante, alors pour tout* $0 < p < 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ *et* $\alpha + \beta > 1$ *on a*

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right) \geq \frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)g(b)}$$

$$\times\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\, I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(f^p(b)\Big) - I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(f^p(b)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\right]. \tag{3.7}$$

Démonstration :

Soit $I_{a^+}^{\alpha}f(x)$ l'opérateur gauche de Riemann-Liouville

$$I_{a^+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

on a

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})}f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}}f(t)(x-t)^{\frac{\alpha-1}{p'}}dt, \end{aligned}$$

appliquant l'inégalité de Hölder pour $0<p<1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}f(x) &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x \left((x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}}f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x \left((x-t)^{\frac{\alpha-1}{p'}}\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} \left(I^{\alpha}_{a^+}f(x)\right)^p &\geq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]^p \\ &= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[-(x-t)^{\alpha}\Big]_a^x \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}, \end{aligned}$$

d' ou

$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha(p-1)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \left(\frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} (x-a)^{\alpha(p-1)}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} (x-a)^{\alpha(p-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt.\end{aligned} \tag{3.8}$$

On appliquons maintenant (3.8), on résulte que

$$I_{a^+}^{\beta} \left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(b)\right)^p}{g(b)} \right)$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^b (b-x)^{\beta-1} g^{-1}(x)$$

$$\times \left[\frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha(p-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right] dx$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(x)(b-x)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) dx.$$

Sachons que g est une fonction non-décroissante sur $[a,b]$, on déduit que g^{-1} est une fonction décroissante sur $[a,b]$, d'où

$$x \leq b \longrightarrow g^{-1}(x) \geq g^{-1}(b) > 0, \tag{3.9}$$

d'autre part pour $0 < \beta \leq 1$ et $a \leq t \leq x \leq b$, on a

$$b - x \leq b - t \longrightarrow (b-x)^{\beta-1} \geq (b-t)^{\beta-1}, \tag{3.10}$$

et pour tout $0 < \alpha \leq 1$ et $a \leq t \leq x \leq b$, on a

$$x - t \leq b - t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} \geq (b-t)^{\alpha-1},$$

ce qui donne

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt \geq \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt, \tag{3.11}$$

Appliquant (3.9) ,(3.11) et (3.10), on obtient

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\geq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(x)(b-x)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx$$

$$\geq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(b)(b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx$$

$$\geq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(b)(b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx,$$

par conséquent

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(b)\right)^p}{g(b)}\right) \geq \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g^(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$\times \int_a^b \left[(b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)\right].$$

Appliquons théorème du Fubini, on a

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\geq \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_a^x (b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)dt\,dx$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_t^b (b-t)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\alpha-1}f^p(t)dx\,dt$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)g(b)}\int_a^b\int_t^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}(x-a)^{\alpha(p-1)}f^p(t)dx\,dt$$

$$= \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)\left(\int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)}dx\right)dt.$$

On calcul l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)}dx &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\Big[(x-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]_t^b \\ &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big].\end{aligned}$$

Pour $\beta+\alpha>1$, posant

$$C=\frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)},$$

on déduit

$$I_{a^+}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{a^+}^{\alpha}f(b)\right)^p}{g(b)}\right)$$

$$\geq \frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)$$

$$\times\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\right]dt$$

$$=\frac{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}{g(b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha(p-1)+1)}\Big(\frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)$$

$$\times\Big[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}-(t-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]dt\Big)$$

$$=C\Big(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}dt-$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big)$$

$$=C\Big((b-a)^{\alpha(p-1)+1}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)dt-$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\beta+\alpha-2}f^p(t)(t-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\Big)$$

$$=C\left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\,I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(f^p(b)\Big)-I_{a^+}^{\beta+\alpha-1}\Big(f^p(b)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)\right].\ \square$$

Théorème 3.4. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$. tel que g est non-croissante, alors pour tout $p < 0$, et $1 \leq \alpha$ et $1 \leq \beta$ on a*

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left[I_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]^p}{g(a)}\right) dx \leq \frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)(\alpha(1-p)-1)g(a)\Gamma(\beta)}$$

$$\times\left[I_{b^-}^{\alpha+\beta-1}\Big(f^p(a)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big) - (b-a)^{\alpha(p-1)+1}\, I_{b^-}^{\alpha+\beta-1} f^p(a)\right]. \tag{3.12}$$

Démonstration :

Soit $I_{b^-}^{\alpha} f(x)$ l'opérateur droit de Riemann-Liouville, on a :

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \int_x^b \left[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})} f(t)dt \\ &= \int_x^b \left[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\frac{1}{p'}} f(t)dt, \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hölder pour $p < 0$, on déduit :

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \int_x^b \left[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\frac{1}{p}} f(t)dt \\ &\geq \Big(\int_x^b \Big(\Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p'}}\Big)^{p'} dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_x^b \Big(\Big[\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big]^{\frac{1}{p}} f(t)\Big)^{p} dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f^p(t)\Big)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

on a

$$\int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt \;= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\frac{1}{\alpha}(t-x)^{\alpha}\Big]_x^b$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha},$$

d'où

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) \;\geq \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $p<0$, on obtient

$$(I_{b^-}^{\alpha} f(x))^p \;\leq \Bigg[\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Bigg]^p$$

$$= \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha}\Big)^{p-1}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\Big)$$

$$= \frac{1}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)}(b-x)^{\alpha(p-1)}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\Big)$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha(p-1)}\Big(\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\Big),$$

D'autre part, on a par définition

$$I_{b^-}^{\beta}\Big(G(y)\Big) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_y^b (x-y)^{\beta-1}G(x)dx,$$

posant

$$G(y) = \left(\frac{\Big(I_{b^-}^{\alpha} f(y)\Big)^p}{g(y)}\right),$$

on obtient

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(y)\right)^p}{g(y)}\right)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_y^b(x-y)^{\beta-1}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(x)\right)^p}{g(x)}\right)dx,$$

pour $y=a$, on a

$$\begin{aligned}I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(a)\right)^p}{g(a)}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^b(x-a)^{\beta-1}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(x)\right)^p}{g(x)}\right)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^b(x-a)^{\beta-1}g^{-1}(x)\left(I_{b^-}^{\alpha}f(x)\right)^p dx,\end{aligned}$$

on résulte

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(a)\right)^p}{g(a)}\right)\leq\frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \tag{3.13}$$

$$\times\int_a^b(x-a)^{\beta-1}g^{-1}(x)\,(b-x)^{\alpha(p-1)}\left(\int_x^b(t-x)^{\alpha-1}f^p(t)dt\right)dx.$$

Sachons que g est une fonction non-croissante sur $[a,b]$, on déduit que g^{-1} est une fonction croissante sur $[a,b]$, d'où

$$a\leq x\longrightarrow g^{-1}(x)\leq g^{-1}(a),$$

ce qui donne

$$g^{-1}(x)(b-x)^{\alpha(p-1)}\leq g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)}, \tag{3.14}$$

d'autre part pour $1 \leq \alpha$ et $a \leq x \leq t \leq b$, on a

$$t - x \leq t - a \longrightarrow (t-x)^{\alpha-1} \leq (t-a)^{\alpha-1},$$

ce qui donne

$$\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt \leq \int_x^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt, \tag{3.15}$$

et part pour $1 \leq \beta$ et $a \leq x \leq t \leq b$, on a

$$t - a \geq x - a \longrightarrow (t-a)^{\beta-1} \geq (x-a)^{\beta-1} \tag{3.16}$$

Appliquant(3.14) et (3.15) dans (3.13) , on obtient

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(a)\right)^p}{g(a)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(x)(x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b g^{-1}(a)(x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (t-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right) dx,$$

donc

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(a)\right)^p}{g(a)}\right) \leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$\times \int_a^b \left[(t-a)^{\beta-1} g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)} \left(\int_x^b (x-a)^{\alpha-1} f^p(t)dt\right)\right] dx$$

On Applique (3.16) et le Théorème du Fubini, on a

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(a)\right)^p}{g(a)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_x^b (x-a)^{\beta-1}g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)}(t-a)^{\alpha-1}f^p(t)dt\,dx$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_x^b (t-a)^{\beta-1}g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)}(t-a)^{\alpha-1}f^p(t)dt\,dx$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_x^b (t-a)^{\alpha+\beta-2}g^{-1}(a)(b-x)^{\alpha(p-1)}f^p(t)dt\,dx$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\int_a^t f^p(t)g^{-1}(a)(t-a)^{\alpha+\beta-2}(b-x)^{\alpha(p-1)}dx\,dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^b\left(\int_a^t g^{-1}(a)f^p(t)(t-a)^{\alpha+\beta-2}(b-x)^{\alpha(p-1)}dx\right)dt$$

$$= \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_b^a g^{-1}(a)f^p(t)(t-a)^{\alpha+\beta-2}\left(\int_a^t (b-x)^{\alpha(p-1)}dx\right)dt,$$

on calcul l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}\int_a^t (b-x)^{\alpha(p-1)}dx &= \frac{1}{\alpha(p-1)+1}\Big[-(b-x)^{\alpha(p-1)+1}\Big]_a^t\\ &= \frac{1}{\alpha(1-p)-1}\Big[(b-t)^{\alpha(p-1)+1}-(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$I_{b^-}^{\beta}\left(\frac{\left(I_{b^-}^{\alpha}f(a)\right)^p}{g(a)}\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_b^a f^p(t)(t-a)^{\alpha+\beta-2}$$

$$\times\Big[(b-t)^{\alpha(p-1)+1}-(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big]dt$$

$$\text{posant} C=\frac{\Gamma(\beta+\alpha-1)\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)(\alpha(1-p)-1)g(a)\Gamma(\beta)}$$

$$=C\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b f^p(t)(t-a)^{\alpha+\beta-2}(b-t)^{\alpha(p-1)+1}dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b f^p(t)(t-a)^{\alpha+\beta-2}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}dt\right)$$

$$=C\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (t-a)^{\alpha+\beta-2}f^p(t)(b-t)^{\alpha(p-1)+1}dt\right.$$

$$\left.-\frac{(b-a)^{\alpha(p-1)+1}}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\int_a^b (t-a)^{\alpha+\beta-2}f^p(t)dt\right]$$

$$=C\left[I_{b^-}^{\alpha+\beta-1}\Big(f^p(a)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\Big)-(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\,I_{b^-}^{\alpha+\beta-1}\Big(f^p(a)\Big)\right].\ \square$$

3.3 Applications

Posant $\beta = 1$ dans le Théorème 3.2, Théorème 3.3 et le Théorème 3.4, on en déduit les Corollaires suivants liés à Riemann-Liouville inégalités avec l'ordre α

Corollaire 3.1. *soit $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$. tel que g soit non-croissante.alors,pour tout $p > 1$, $\alpha \geq 1$, on obtient*

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(p-1)+1)} \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+1} I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{f^p(b)}{g(b)}\right) - I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{f^p(b)}{g(b)}(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\right)\right]. \tag{3.17}$$

Corollaire 3.2. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$. tel que g est non-décroissant, alors pour tout $0 < p < 1$ et $0 < \alpha \leq 1$ on a*

$$\int_a^b \frac{\left(I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx$$

$$\geq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(b)} \left[(b-a)^{\alpha(1-p)+1} I_{a^+}^{\alpha}\left(f^p(b)\right) - I_{a^+}^{\alpha}\left(f^p(b)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\right)\right]. \tag{3.18}$$

Corollaire 3.3. *Soient $f > 0$ et $g > 0$ sur $[a,b] \subseteq [0,+\infty[$. tel que g est non-croissant, alors pour tout $p < 0$, et $1 \leq \alpha$ on a*

$$\int_a^b \frac{\left(I_{b^-}^{\alpha} f(x)\right)^p}{g(x)} dx \leq \frac{\Gamma^{1-p}(\alpha+1)}{(\alpha(1-p)-1)g(a)} \tag{3.19}$$

$$\times \left[I_{b^-}^{\alpha}\left(f^p(a)(b-a)^{\alpha(p-1)+1}\right) - (b-a)^{\alpha(1-p)+1} I_{b^-}^{\alpha}\left(f^p(a)\right)\right].$$

Documentation

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann était un mathématicien allemand né le 17 septembre 1826 à Breselenz, en Allemagne, et décédé le 20 juillet 1866 à Selasca, en Italie. Il est surtout connu pour ses contributions majeures dans le domaine de l'analyse mathématique et de la géométrie. L'une de ses réalisations les plus célèbres est la formulation de la "théorie des fonctions abéliennes", qui a eu un impact significatif sur le développement ultérieur des mathématiques. Il est également connu pour ses travaux sur la géométrie riemannienne, qui a jeté les bases de la relativité générale d'Albert Einstein. Sa vision novatrice des concepts mathématiques a grandement influencé de nombreux domaines de la discipline

Godfrey Harold Hardy

Godfrey Harold Hardy (7 février 1877 - 1er décembre 1947, mathématicien britannique), connu pour ses réalisations en théorie des nombres et en analyse mathématique. En biologie, il est connu pour le principe de Hardy-Weinberg, un principe de base de la génétique des populations. G. H. Hardy est généralement connu de ceux qui ne sont pas dans le domaine des mathématiques pour son essai de 1940 A Mathematician's Apology , souvent considéré comme l'un des meilleurs aperçus de l'esprit d'un mathématicien en activité écrit pour le profane. À partir de 1914, Hardy était le mentor du mathématicien indien Srinivasa Ramanujan, une relation devenue célèbre, il a presque immédiatement reconnu l'éclat extraordinaire quoique sans instruction de Ramanujan. L'inégalité de Hardy a été publiée et prouvée pour la premiére fois (du moins la version discréte avec une constante moins précise) en 1920 dans une note de Hardy, la formulation originale était sous une forme intégrale légèrement différente de la précédente.

Guido Fubini

GUido Fubini (19 janvier 1879- 06 juin 1943) était un mathématicien italien renommé. Ses contributions notables incluent l'intégrale de Fubini, l'analyse mathématique, les séries de Fourier et la géométrie différentielle. Son travail a influencé divers domaines des mathématiques et reste une référence aujourd'hui.

Joseph Liouville

JOseph Liouville (1809-1882) était un mathématicien français.Il est connu pour ses contributions importantes dans divers domaines des mathématiques,notamment l'analyse, la théorie des nombres et la géométrie. Liouville a joué un rôle clé dans le développement de la théorie des nombres transcendants et a introduit les nombres transcendants de Liouville, qui sont des exemples concrets de nombres transcendants. Ses travaux ont également jeté les bases de la théorie des fonctions analytiques, de la théorie des séries et de la théorie des équationd différentielles

Otto Hölder

Otto Ludwig Hölder (22 décembre 1859 - 29 août 1937) était un mathématicien allemand né à Stuttgart. Hölder a d'abord étudié au Polytechnikum (qui est aujourd'hui l'Université de Stuttgart) puis, en 1877, il est allé à Berlin où il a été l'élève de Leopold Kronecker, Karl Weierstrass et Ernst Kummer. En analyse mathématique, l'inégalité de Hölder est une inégalité fondamentale dans le calcul en analyse fonctionnelle et un outil indispensable pour l'étude des espaces L^p. L'inégalité inverse de Hölder a été explorée par un certain nombre de scientifiques à travers des articles récents.

Bibliographie

[1] S. Abramovich, K. knlic, J. Pecacard, E. Presson :*Some new refined Hardy type inequalities with general kernels and measures* ,Aequast. Math., 79 (2010), 157–172.

[2] B. G. Pachpatte :*On some generalizations of Hardy's integral inequality,* J. Math. Anal. Appl., 234(1) (1999), 15–30.

[3] B. Benaissa *Discussions on hardy-type inequalities via Riemann-Liouville fractional integral inequality,* Mathematica Montisnigri. vol, 53. no, 2 (2022). pp, 12–16. https ://doi.org/10.20948/mathmontis-2022-53-2

[4] B. Benaissa *generalizing Hardy type inequalities via k-Riemann-liouville fractional integral operators involving two orders.* Honam Mathematical J. **44** (2022), No. 2, pp. 271–280. https ://doi.org/10.5831/HMJ.2022.44.2.271

[5] B. Benaissa *On the Reverse Minkowski's Integral Inequality,* Kragujevac. J. Math. Vol.46 (3) (2022), 407–416.

[6] B. Benaissa, M.Z. Sarikaya, A. Senouci, *On some new Hardy-type inequalities,* Math.Meth.Appl.Sci,**43**, 8488–8495(2020). https ://doi.org/10.102/maa.6503

[7] B. Benaissa, A. Benguassoum, *Reverses Hardy-Type Inequalities via jensen Integral Inequality,* Math. Montis., **52**, 43-–51 (2021).

[8] B. Benaissa, M.Z. Sarikaya,*Some Hardy-Type integral inequalities involving functions of two independent variables,* Positivity, **25**, 853–866 (2021).http ://.doi.org/10.1007/s11117-020-00791-5

[9] B. Benaissa, A. Senouci, *Some new integral inequalities through the steklov operator,* Math. Montis., **49**, 49–56(2020).

[10] B. Benaissa, *Some inequalities on time Scales Similar to Reverse Hardy's inequality,* Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Math. Znan, (2020), Forthcoming papers (with pdf preview).

[11] B. Benaissa *More on Minkowski and Hardy integral inequality on time scale,* Ric. diMat, (2021).http ://.doi.org/10.1007/s11587-021-00595-z

[12] B. Benaissa *More on reverses of Minkowski's inequalities and Hardy's integral inequalities,* Asian-Eur. J. Math. **13** (2020), no. 3. https ://doi.org/10.1142/S1793557120500643.

[13] B. Benaissa, A. Benguessoum *Reverses Hardy-type Inequalities Via Jensen Integral Inequality,* Math. Montisnigri. **52** (2021), no. 5. https ://10.20948/mathmontis-2021-52-5

[14] B. Benaissa *Some inequalities on Time Scales Similar to Reverse Hardy's Inequality,* Rad. Hravt. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. (2022), vol. 26(551), pp. 113–126. https ://10.21857/mnlqgcr4ry

[15] Y. Bicheng, Z. Zhuohuaz, L. Debnath : *On new generalizations of Hardy's integral inequality,* J. Math. Anal. Appl., 217 (1998), 321–327.

[16] W. S. Cheung, Z . Hanjs, J. Pecaric : *Some Hardy-type inequalities,* J. Math. Anal. Appl., 250 (2000), 621–634.

[17] Z. Dahmani :*About some integral inequality using Riemann-liouville integrals,*General Mathemathics.20 (4) (2012), 63–69

[18] Z. Dahmani, A. khameli, K. Freha *Further generalizations on some hardy type RL-integral inequalities,* Interdiscip. Math. J. **23** (2010), no. 8, 1487–1495.https ://10.1080/09720502.2020.1754543.

[19] Z. Denton, S. Vastava : *Fractional integral inequalities and applications,* Comput. Math. Appl., Volume59, Issue 3, February 2010, Pages 1087–1094.

[20] R. Gorenflo, F. Mainardi :*Fractional calculus :integral and differential equations of fractional order,* Sprenger Verlag, Wien, (1997), 223–276.

[21] B. Halim , *Introduction Aux Équations Intégrales Linéaires Méthodes Et Applications.*Univ. Tiaret, Faculte. M.I

[22] Z. Hanjs, C. E. M. Pearce, J. Pecaric :*Multivariate Hardy-type inequalities.* Tamkang J. Math., 31 (2000), 149-–158.

[23] G. H. Hardy *Notes on a theorem of Hilbert.* Math Z 6, 314–317 (1920).

[24] G. H. Hardy *Note on some point in the integral calculus.* Messenger of Math., 57(1928), 12–16.

[25] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, Combridge, 1959.

[26] M. Houas, Z. Dahmani M. Z. Sarikaya : *Some integral inequalities (k,s)-Riemann-Liouville fractional operators,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, 21 :7–8, (2018), 1575–1585, DOI :10.1080/09720502.2018.1478768

[27] A. Khameli, Z. Dahmani, K. Freha, M. Z . Sarikaya, "*New Riemann-Liouville generalizations for some inequalities of Hardy type*", Malaya J. Mat., **4** (2), 277–283 (2016).

[28] A. Kufner, L. Maligranda, L. E. Persson :*The Hardy inequality, about its history and some related results,* Vydareatesky Sevis Publising House, Pilsen, 2007.

[29] A. Kufner, L. Maligranda, L. E. Persson :*The prehistory of the Hardy inequality,* Amer. Math. Monthly, 113 (8) (2006), 715–762.

[30] N. Levinson : *Generalizations of an inequality of Hardy.* Duke Math. J., 31(1964), 389–394.

[31] Z. Lin, J.R. Wang :*New Riemann-Liouville fractional Hermite-Hamard inequalities via two kinds of convex functions,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, 20 :2, (2017), 357–382, DOI :10.1080/09720502.2014.914281

[32] M. Z. Sarikaya, H. Yildirim :*Some Hardy type integral inequalities.* JIPAM Journal, 7(5), Art. 178, (2006), 1–5.

[33] M. Z. Sarikaya, A. Karaca *On the k-Riemann-Liouville fractional integral and applications*, Int. J. Stat. Math. **1** (2014), no. 2, 033-043.

[34] M. Z. Sarikaya, C. C. Bilisik, and T. Tunc, *On Hardy type inequalities via k-fractional integral*, TWMS J. App. Eng. Math. **10** (2020), no. 2, 443–451.

[35] S. Wu, B. Sroysang and S. Li :*A further generalization of certain integral inequalities similar to Hardy's inequality.* J .Nonlinear Sci. Appl., 9(2016), 1093–1102.

[36] Baynat Sroysang, *A Generalization of some Integral Inequalities Similar to Hardy's Inequality*, Mathematica Aeterna. **3** (2013), no. 7, 593–596.

[37] W.T. Sulaiman :*Reverses of Minkowski's, Holder's, and Hardy's integral inequalities* , Int. J. Mod. Math. Sci, 1(1), (2012), 14–24.

[38] W.T. Sulaiman :*Some Hardy type integral inequalities.* Appl. Math. Letters, 25(2012), 520–525.

[39] A. Wedestig, *Some new Hardy type inequalities and their limiting inequalities,* J. Inequal. Pure and Appl. Math. , 4(3) Art. 61, 2003