

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structures

Présenté par :

BEKADA Chahinaz

BENTEMRA Djamila

Sujet du mémoire

***Effet de formes de la distribution de la porosité sur la flexion
et la vibration des plaques P-FGM***

Soutenu publiquement le .../06/2023 devant le jury composé de :

Mme, OUAZIR Khatima

Président

Mme, KHELIFA Zoubida

Rapporteur

Mr, TLIDJI Youcef

Examineur

Mr, DRICHE Kadda

Examineur

2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Nos remerciements s'adressent d'abord à Dieu, créateur de toutes choses, pour son souffle et tous ses innombrables bienfaits

*On tient à remercier tout particulièrement notre encadrant mme **KHELIFA ZOUBIDA** de nous avoir suivis et conseillés tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

Ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien actif des membres de notre famille, surtout nos parents qu'ils nous ont toujours encouragé moralement et matériellement et à qui on tient à les remercier.

Enfin on tient à exprimer vivement nos remerciements avec une profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à sa réalisation, car un projet ne peut pas être le fruit d'une seule personne.

Merci encore une fois

Dédicaces

*Je dédie ce mémoire, plus particulièrement ma grand-mère **Haja Ouda** pour tous les conseils, pour tous les encouragements et pour toutes les prières.*

Je saisis l'occasion pour remercier mes parents pour tous les incommensurables sacrifices consentis pour toute ma formation.

*A l'homme, mon précieux offre du Dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :
mon papa **Bentemra Aziz**.*

*A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable **Mama Khaldia**.*

*A ma tata d'amour **Fatima Bentemra** et son mari oncle Sam pour leurs amours et leurs encouragements Merci!*

*Merci à mon frère **Karim** et ma petite sœur **Bouchra**. Que Dieu leur donne une longue vie et joyeuse vie Inshaa Allah.*

Merci mon binôme pour le soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

*A la mémoire de mon grand-père Haj Bentemra que Dieu lui garde dans son vaste paradis
A mes amis **Abdellah, Omar**.*

Djamila

Dédicaces

Je dédie ce travail

A ma famille, elle qui m'a doté d'une éducation

Digne, son amour a fait de moi ce que je suis Aujourd'hui

*Particulièrement à mon père **HABIB**, pour le goût à l'effort qu'il a suscité en moi, de par sa rigueur.*

*A ma mère **NADIA** ceci est ma profonde gratitude pour ton éternel amour, que ce rapport soit le meilleur cadeau que je puisse t'offrir.*

*A mon cher mari d'amour **RAFIK** pour son soutien et encouragements tout au long de ce projet.*

*A ma grand-mère **RABIAA** Ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité*

*A ma deuxième famille **KENZA** et ma sœur **DJAMILA** pour le soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.*

Puisse Dieu, créateur de toute choses, pour la santé et la force de faire face chaque jour avec optimisme et foi.

Chahinaz

Sommaire

Liste des tableaux	IV
Liste des figures	V
Liste des notations	VII
Résumé	IX
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Le concept de matériaux fonctionnellement gradués.....	3
I.3. Historique des FGM.....	5
I.4. Lois de mélange	5
I.4.1. Propriétés matérielles des structures P-FGM.....	6
I.4.2. Propriétés matérielles des structures S-FGM.....	7
I.4.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	8
I.5. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	9
I.6. Propriétés physiques et mécaniques des constituants de FGM	12
I.6.1. Propriétés de l'Aluminium	12
I.6.1.1. Propriétés physiques.....	12
I.6.1.2. Propriétés mécaniques.....	12
I.6.2. Propriétés de la céramique	13
I.6.2.1 Propriétés physiques	13
I.6.2.2 Propriétés mécaniques	13
I.7. Avantages et inconvénients des matériaux classés par performance	14
I.7.1. Avantages FGM	14
I.7.2. Inconvénients des FGM	14
I.8. Domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés FGM	15
I.8.1. Aérospatiale	15
I.8.2. Médecine.....	15
I.8.3. Défense	15

I.8.4. Marine	16
I.8.5. Génie civil	16
I.8.6. Chimique	16
I.8.7. L'énergie nucléaire	17
I.8.8. Électronique	17
I.8.9. Optique	17
I.8.10. Conversion d'énergie	17
I.8.11. Industrie automobile	17
I.8.12. Équipements sportifs	18
I.9. Les méthodes de fabrication du matériau à gradient de propriétés	18
I.9.1. Les procédés à l'état solide	19
I.9.1.1. Compaction Sèche des Poudres	19
I.9.1.2. Diffusion collage	19
I.9.2. Les procédés à l'état liquide	19
I.9.2.1. Frittage et Infiltration	19
I.9.2.2. Coulée par centrifugation (centrifugat casting)	19
I.9.3. Processus de dépôt	20
I.9.3.1. Dépôt physique en phase vapeur	20
I.9.3.2. Dépôts laser	20
I.10 Conclusion	21

Chapitre II : Les différentes Théories des plaques

II.1. Introduction	22
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	22
II.2.1. Approche monocouche équivalente	22
II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)	22
II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)	23
II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé	25
II. 2. 2. Approche par couche	29

II.3. Conclusion.....	31
-----------------------	----

Chapitre III : Effet de forme de distribution de la porosité sur le Flexion et la vibration des plaques P.FGM

III.1. Introduction	32
III.2. Description du problème et équation de base.....	32
III.2.1. Configuration géométrique	32
III.2.2. Cinématique et équations constitutive.....	34
III.2.2.1. Champs de déplacement.....	34
III.2.2.2. Champs de déformation	35
III.2.2.3. Relations constitutives.....	35
III.2.2.4. Equations de mouvement	36
III.2.3.Solutions analytiques des plaques rectangulaires simple ment soutenues.....	40
III.3 .Conclusion.....	42

Chapitre IV : Validation et comparaison des résultats

IV.1. Introduction.....	43
IV.2. Propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée étudiée	43
IV.3. Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres	44
IV.3.1. Analyse de flexion	44
IV.4. Analyse dynamique.....	53
IV.5. Conclusion	57
Conclusion générale	60

Recherches bibliographiques

Liste de tableau

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Tableau III.1 : Différentes formes de distribution de la porosité.

Tableau IV.1: Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés.

Tableau IV.2: Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondants

Tableau IV.3: Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les déplacements sans dimension d'une plaque carrée FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

Tableau IV.4 : Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

Tableau IV.5: Comparaison des trois premières fréquences naturelles de la plaque Al/ZrO₂ pour différentes valeurs du rapport a/h .

Liste des figures

Figure I.1 : Variation de la composition d'un FGM.

Figure I.2 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

Figure I.3 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

Figure I.4 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure E-FGM.

Figure I.5 : La distribution composante des matériaux.

Figure I.6 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Nora Kassimi,]

Figure I.7 : Application dans le domaine aérospatial [S. BRAIRI, 2018/2019].

Figure I.8 : Variation graduelle dans l'os humain [A.SAID, 2016].

Figure I.9 : Utilisation dans l'industrie de la défense [S. BRAIRI, 2019]

Figure I.10 : Utilisation dans l'industrie d'énergie [S. BRAIRI, 2019]

Figure I.11 : Méthodes de fabrication de FGM

Figure I.12 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation

Figure II.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Figure. II.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur

Figure.II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Figure. II.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

Figure.II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

Figure.II.7: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche. Cinématique [Nguyen.2004].

Figure II. 8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [Nguyen.2004].

Figure III.1 : Géométrie de la plaque FGM rectangulaire et coordonnées

Figure IV.1: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnel en fonction du rapport (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ (k=1; $\alpha=0.2$).

Figure IV.2: Effet de la forme de la distribution de porosité sur les déflexions sans dimension en fonction du rapport coté épaisseur (a/h) d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ (k = 1; $\alpha = 0,2$).

Figure IV.3 : Effet du coefficient de porosité sur la déflexion centrale de la plaque carrée en FGM (k = 1).

Figure IV.4 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ (a / h = 10; $\alpha=0.2$).

Figure IV.5 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ (a / h = 10; $\alpha=0.2$).

Figure IV.6: Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ (a / h = 10; $\alpha=0.2$)

Figure IV.7 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ (a / h = 10; $\alpha=0.2$)

Figure IV.8: Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ (a / h = 10; $\alpha=0.2$).

Figure IV.9 : Effet de la forme de la distribution de porosité sur la fréquence fondamentale adimensionnel en fonction du rapport par rapport (a/h) d'une plaque carrée en FGM (k=2)

Figure IV.10: Effet du coefficient de porosité sur la fréquence fondamentale adimensionnel de la plaque FGM (k = 2)

Liste de notation

FGM : Les matériaux à gradient de propriétés.

E : Le module de Young.

$E(z)$: Module de Young en fonction de « z ».

E_c : Module de Young de la céramique.

E_m : Module de Young du métal.

G : Le module de cisaillement.

$G(z)$: Module de cisaillement en fonction de « z ».

ν : Le coefficient de Poisson.

$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de « z ».

V : La fraction volumique.

ρ : La masse volumique.

α : indice de porosité.

P_c, P_m sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement.

p : Paramètre du matériau

a : Longueur de la plaque suivant la direction de x .

b : Largeur de la plaque suivant la direction de y .

h : l'épaisseur de la plaque suivant la direction de z .

a/h : L'élancement.

u, v, w_b, w_s : Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α .

w : La flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α .

γ_{α}^0 : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

∂ : Dérivée partielle.

i et j : Sont des nombres naturels.

ϕ_x, ϕ_y , Les rotations autour des axes x, y

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$: Déformation dans la direction x, y

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Les contraintes normales.

γ_{xz}, γ_{yz} : Les déformations de cisaillement.

τ_{xz}, τ_{yz} : Les contraintes de cisaillement.

Q_{ij} : Les coefficients de rigidité.

N, M et S : Les résultantes des contraintes.

A_{ij}, B_{ij} etc. : les termes de la matrice de rigidité de la plaque.

[R] : La matrice symétrique.

{ } : Vecteur colonne.

[] : Matrice.

Résumé :

Dans ce travail, une théorie de cisaillement hyperbolique est présentée pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques à gradient de propriétés en tenant compte des porosités qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur de ce matériau au cours de sa fabrication. Quatre types de porosité différentes sont utilisés dans cette étude. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. La procédure de Navier est mise en œuvre pour la résolution des équations du mouvement. Dans les exemples numériques, l'effet de plusieurs paramètres tels que : la fraction de porosité, forme de porosité et les paramètres géométriques sont étudiés. Il a été constaté que la forme de distribution de la porosité influe de manière significative sur le comportement statique et dynamique des plaques à gradient de propriétés.

Mots-clés : Flexion ; Vibration libre ; Matériaux à gradient de propriétés ; Porosité ; Principe d'Hamilton.

Abstract:

In this work a hyperbolic shear theory is presented for the analysis of the bending and the free vibration of the plates with gradient of properties taking into account the porosities which may possibly occur inside this material during their manufacture. Four different types of porosity are used in this study. The equations of motion are derived using Hamilton's principle. The Navier procedure is implemented for solving the equations of motion. In the numerical examples, the effect of several parameters such as: the porosity fraction, porosity shape and geometric parameters are studied. It has been found that the form of distribution of the porosity significantly influences the static and dynamic behavior of the plates with gradient of properties,

Keywords: Bending; free vibration; Materials with gradient of properties; Porosity; principle Hamilton.

ملخص:

في هذا العمل ، يتم تقديم نظرية القص الزائدي لتحليل الانحناء والاهتزاز الحر للألواح مع تدرج الخصائص مع مراعاة المسامات التي قد تحدث داخل هذه المادة أثناء تصنيعها. يتم استخدام أربعة أنواع مختلفة من المسامية في هذه الدراسة. معادلات الحركة مشتقة باستخدام مبدأ هاميلتون. يتم تنفيذ إجراء نافير لحل معادلات الحركة. في الأمثلة العددية ، يتم دراسة تأثير العديد من المعلمات مثل: جزء المسامية وشكل المسامية والمعلومات الهندسية. لقد وجد أن شكل توزيع المسامية يؤثر بشكل كبير على السلوك الثابت والديناميكي للألواح ذات التدرج اللوني للخصائص.

الكلمات المفتاحية: الانحناء ؛ الاهتزاز الحر ؛ المواد ذات التدرج في الخصائص ؛ المسامية ؛ مبدأ هاميلتون.

Introduction général

Les matériaux à gradation de propriétés (FGM) constituent une nouvelle classe de matériaux techniques qui ont été développés en combinant des matériaux dissemblables afin d'obtenir une variation régulière des propriétés des matériaux le long de la ou des directions souhaitées. Les matériaux à gradient fonctionnel ont un grand potentiel d'amélioration des performances matérielles/structurelles dans de nombreuses applications techniques, précisément en raison de leur microstructure hétérogène à gradient spatial.

La nécessité de développement du monde industriel a mené à l'amélioration remarquable de la science et la recherche scientifique. Cette évolution ne peut être produit sans le progrès de la science qui donnait les résultats de l'étude scientifique, ce qui admet la création des procédés modernes dans le monde industriel.

Au stade de la production des matériaux à gradation de propriétés des micro-vides et des porosités peuvent apparaître en raison d'erreurs de production ou d'erreurs techniques. Avec la porosité, le comportement mécanique des matériaux à gradation fonctionnelle change considérablement. Ainsi, l'effet de la porosité sur les matériaux à gradation fonctionnelle est un problème important et doit être étudié afin de concevoir ces composites en toute sécurité.

Ce travail vise à étudier l'effet de la forme de distribution de la porosité sur le comportement en flexion et en vibration libre des plaques en FGM de type P-FGM. L'effet dû à la porosité est inclus en utilisant une loi de mélange modifiée couvrant les phases de porosité proposées par plusieurs chercheurs.

Notre travail de recherche est donc organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, on a présenté une étude bibliographique sur la nouvelle classe de composites désignés par les matériaux fonctionnellement gradués, en discutons sur la recherche scientifique pour le développement de ces matériaux ainsi que les différents procédés de fabrication et leurs intérêts dans les secteurs de l'industrie moderne.

Dans le second chapitre, on a exposé une recherche bibliographique sur les différentes théories des plaques afin de comprendre : la théorie classique des plaques, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et les théories d'ordre élevé.

Quant au troisième chapitre un développement analytique de la présente théorie de cisaillement (2D) qui tient en considération les effets du cisaillement transversal dans les plaques poreuses en FGM a été fait sur la base des formulations théoriques, ensuite on est arrivé à une solution analytique de la flexion et de la vibration de ces plaques.

Dans le dernier chapitre nous avons présenté les résultats numériques obtenus par l'application du modèle proposé pour l'analyse du comportement de flexion et la vibration des plaques poreuse a gradients de propriétés, ces résultats ont été comparés et validés par la suite avec les résultats des autres théories.

Ce travail s'achèvera par une conclusion générale de l'étude réalisée ainsi que par des perspectives pour des travaux futurs.

CHAPITRE I :
Généralités sur les matériaux FGM

I.1. Introduction :

Les matériaux à gradients de propriétés (FGM) ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux températures ultra-hautes. Les FGM sont au microscope des matériaux composites non homogènes. Ces matériaux sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique. L'avantage d'utiliser ces matériaux est qu'ils peuvent résister à de hautes températures tout en maintenant leur propriété structurelle.

Ces dernières années le domaine de la recherche scientifique et technologique a connu une étude intense sur les propriétés mécaniques et physiques remarquables et leurs différences pour différents matériaux. Ces matériaux FGM ont des changements graduels et continus dans la fraction volumique de chaque constituant, ce qui entraîne la modification des propriétés du matériau qui en résulte élimine alors la discontinuité à l'interface.

Les propriétés des matériaux constitutifs sont préservées. Par conséquent, ils peuvent combiner les propriétés des deux. Des circonscriptions complètement différentes, aucune ne faisant des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi que les FGM sont faites. La combinaison du métal et de la céramique combine la dureté et l'usinabilité du métal avec la résistance à la chaleur, la résistance à l'usure et la résistance à l'oxydation céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des spécifications multinormes.

I.2. Le concept de matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept de "matériaux à gradient de propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGMs peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitues de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs la figure (I.1).des matériaux composites conventionnels .dans certain cas, on peut avoir un FGM constitue d'un même matériau mais microstructure différente[Koizumi.1992].

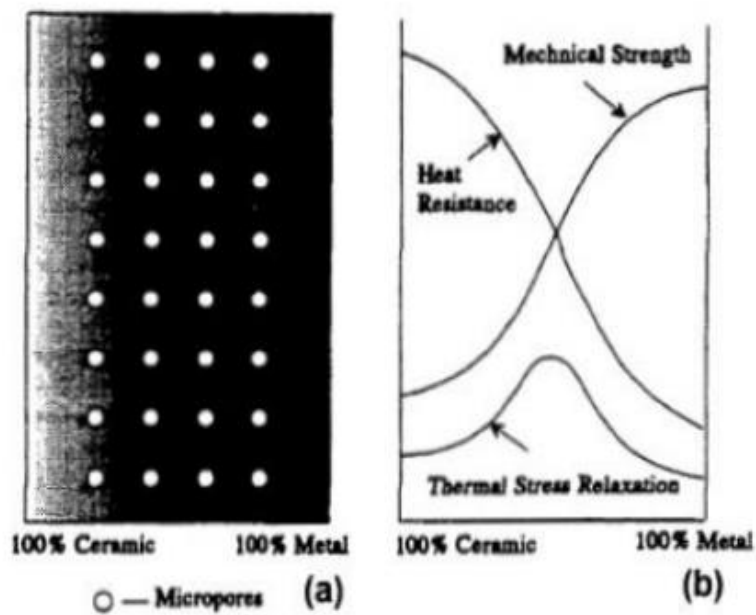


Figure I.1 : Variation de la composition d'un FGM [Hadji 2012]

(a) Conductivité thermique,

(b) résistance mécanique,

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'un gradient de température de l'ordre 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi.1992].

I.3.le Historique de FGM :

En ce qui suit des dates qui représentent l'évolution de la recherche sur les matériaux à gradients de propriétés depuis leur découverte.

- En 1984. Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)

- En 1986. Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
- En 1987- 1989. Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
- En 1988. Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
- En 1989. Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Kôln, (Allemagne).
- En 1990. 1^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM). De la s
- En 1990-1991. FGM partie I-phase (2)
- En 1992. Études de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA.
- En 1993. Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM.
- En 1994. 3^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse)
- En 1995. Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95), (Sendai).
- En 1996. 4^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba (japon). [I. BELKORISSAT, 2015].

I.4. Lois de mélange :

La plupart des articles de la littérature sur les FGM utilisent la loi simple du mélange pour obtenir les propriétés matérielles effectives. En ce qui concerne les fonctions de distribution de fraction volumique, les propriétés matérielles équivalentes des FGM pourraient être déterminées par diverses fonctions sous forme de loi de puissance (P-FGM), sigmoïde (S-FGM) ou exponentielle (E-FGM)[a. HOUARI, 2021].

I.4.1. Propriétés matérielles des structures P-FGM :

La fraction volumique du type P-FGM est considérée comme variation dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la loi de puissance :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \tag{I.1}$$

Avec :

k : représente paramètre matériel,

h : l'épaisseur de la structure

z : la coordonnée suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles d'un matériau P-FGM peuvent donc s'écrire comme suit

$$(z) = (E_c - E_m) (z) + E_m \tag{I.2}$$

E_c et E_m Sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure (céramique)

$z = + h/2$ et de la surface inférieure (métal) $z = - h/2$ de la structure P-FGM

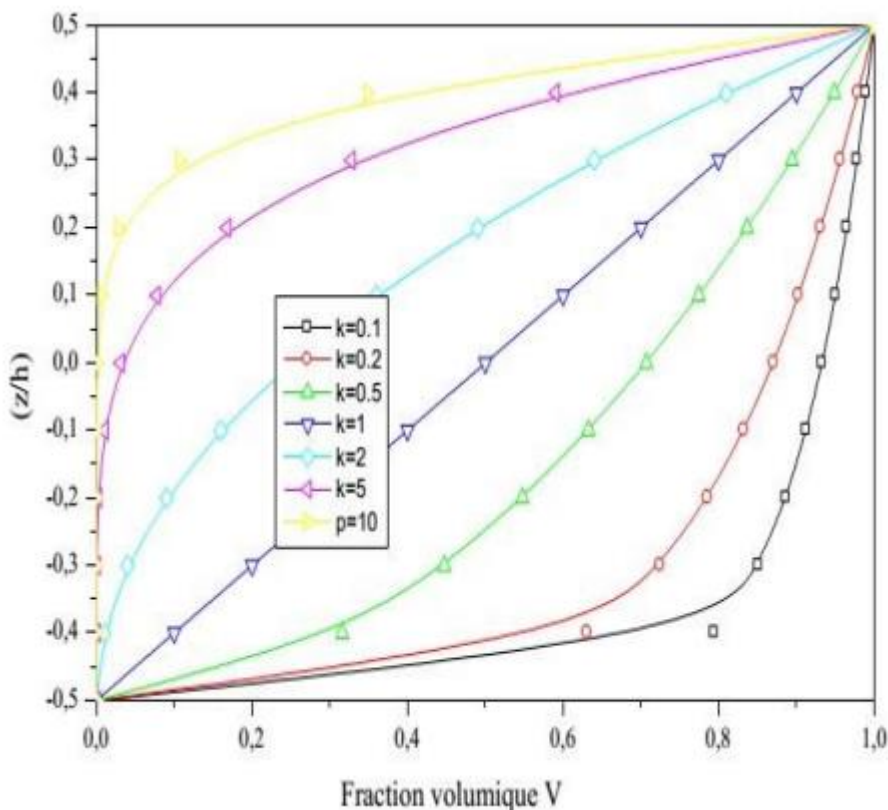


Figure I.2 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [R.MEKSI, 2019]

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est illustrée sur la Figure I.2 apparaît clairement que la fraction volumique se rapproche vers la

surface métallique pour « K1 » elle augmente rapidement près de la surface céramique et la variation du module de Young devient linéaire pour $k = 10$. On constate aussi que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on l'augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque, et vice versa : la plaque devient de moins résistance si son module de Young est faible, et ceci est dû à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal [K.BOUAFIA, 2017].

I.4.2. Propriétés matérielles des structures S-FGM :

Chung et chi ont défini la fraction de volume de la structure FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :[a. HOUARI, 2021]

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h+z}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^k \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I.3a}$$

$$V_2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h-z}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{I.3b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM

$$E(z) = (1 - V_2(z)) E_1 + V_2(z) E_2 \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I.4a}$$

$$E(z) = (1 - V_1(z)) E_2 + V_1(z) E_1 \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I.4b}$$

La Figure I.3 exprime que la variation de la fraction volumique déterminée par les équations (I.3) et (I.4)

En distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque SFGM).

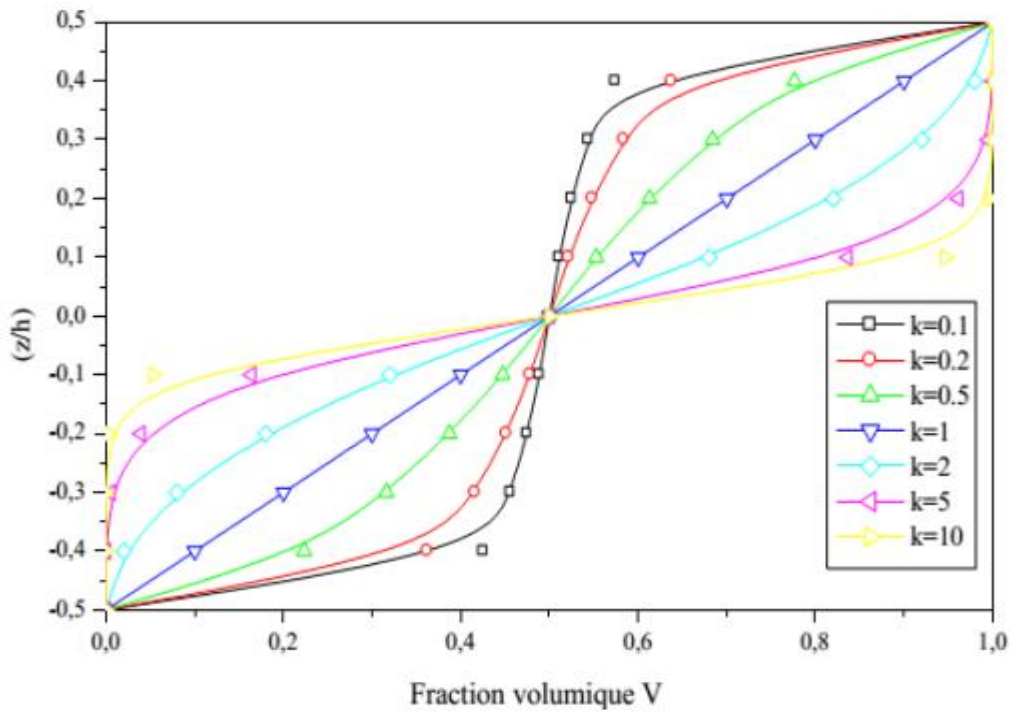


Figure I.3 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [Koizumi M.]

I.4.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

-la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \tag{I.5a}$$

$$A = E_2 \tag{I.5b}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.5c}$$

D'après la Figure I.4, on observe que l'accroissement du module de Young est proportionnel à l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal tout en allant vers l'extrémité supérieure de la structure [K.BOUAFIA, 2017].

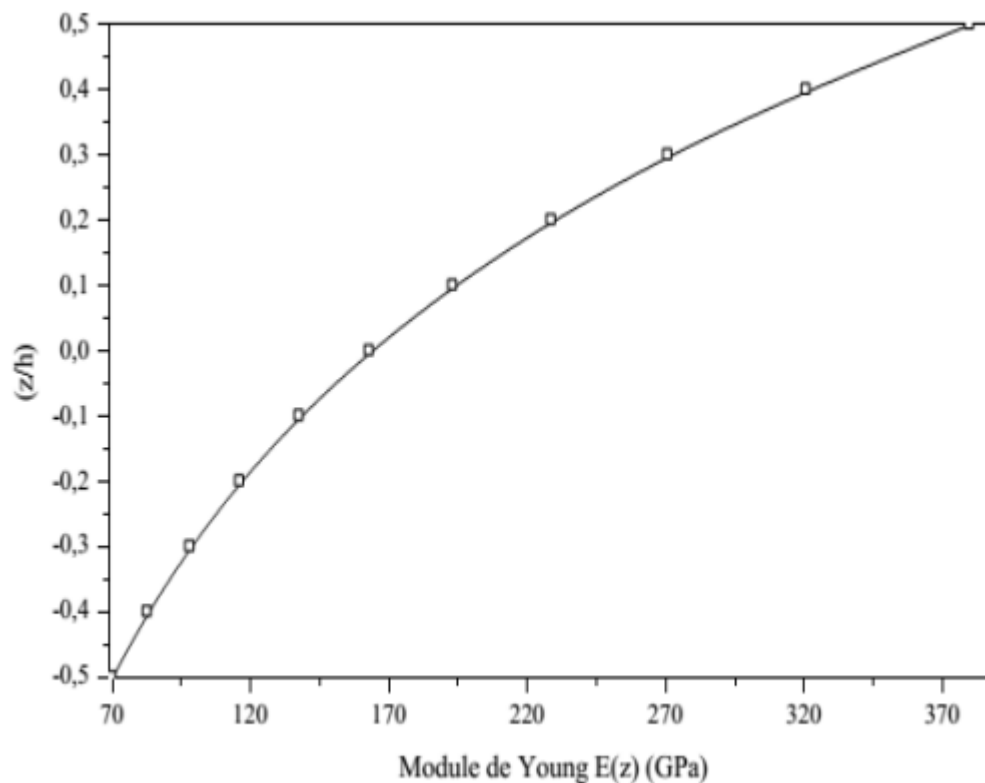


Figure I.4 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure E-FGM.

I.5. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels :

Les matériaux composites comprennent plusieurs matériaux combinés en un corps singulier. Propriétés qui ne peuvent être obtenues en combinant aucun des éléments de base.

Les FGM contiennent plusieurs composants tels que des pièces en céramique. Composés de plusieurs matériaux, les composites ressemblent à une figure 3D hétérogène. Dans certains cas, les FGM peuvent être pratiquées avec le même matériel mais à des fins différentes avec une microstructure différente [Nora Kassimi,].

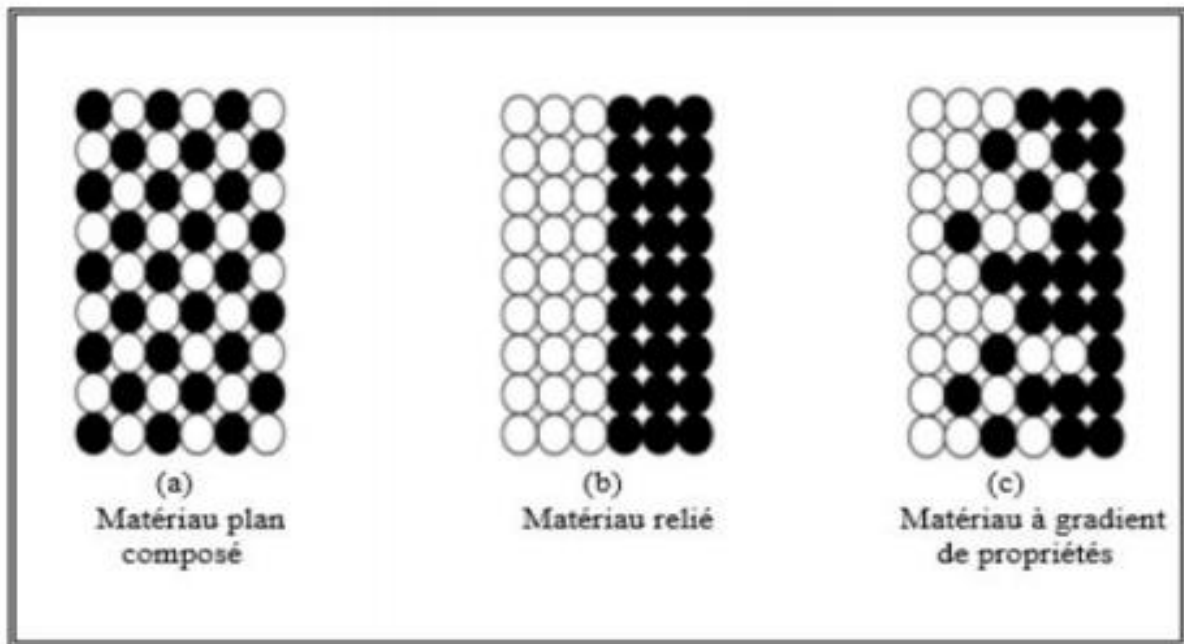


Figure I. 5: La distribution composante des matériaux[A.SAID.2016].

[Yashihisa15] a créé un modèle qui démontre les différences entre les matériaux avec seulement quelques éléments. Le gradient de propriété (FGM) est utilisé en plus des matériaux conventionnels Une frontière se situe entre le plan et le matériau. Il relie les deux au moyen d'un plan composé. Les propriétés du FGM diffèrent de celles des deux autres matériaux.

Les gens remarquent les dispositifs FGM en raison de leur forme plane et de leur composition. Leur utilisation dans de multiples industries grâce à leur capacité à effectuer les deux tâches. Pour produire un produit mixte avec une distribution graduée des composants, chaque matière première doit être mélangée.

Le métal et la céramique se combinent de façon continue pour créer une FGM, offrant une résistance et une conductivité thermique accrues du côté métallique. Sa face en céramique résiste aux hautes températures avec peu de dommages.

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
	<p>Structure</p> <p>Eléments constitutants :</p> <p>Céramique </p> <p>Métal </p> <p>Microporosité </p> <p>Fibre </p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.6 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.[Koizumi M,]

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

Matériaux	La Couches de Matériau	Les propriétés mécaniques
Céramique	La face à haute température	-Bonne résistance thermique -Faible conductivité thermique - bonne résistance à l'oxydation
Céramique-métal	Couches intermédiaire	-Élimination des problèmes de l'interface -relaxer les contraintes thermiques
Métal	La face à basse température	-Bonne résistance mécanique -Conductivité thermique élevée - très bonne ténacité

TableauI.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

1.6. Propriétés physiques et mécaniques des constituants de FGM :

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux combinés qui ont des propriétés qui ne peuvent être obtenues avec aucun des constituants a établi un modèle simple illustrant différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels.[Yashihisa 15].

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistance aux hautes températures dans le côté en céramique.

1.6.1. Propriétés de l'Aluminium :

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

1.6.1.1. Propriétés physiques :

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°C. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut facilement le mettre en forme. La masse volumique de l'aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport. [N. Kassimi 2011]

1.6.1.2. Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes : Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal. [N. Kassimi 2011] :

- Résistance à la traction.
- Bon rapport force/poids.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser:

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).
- Entièrement recyclable.

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme un

revêtement extérieur de bâtiments Dans les milieux corrosifs et en l'absence de la couche d'oxyde les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres de la corrosion sous contrainte ou une corrosion généralisée peuvent se développer. Dans des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état. [L. Hadji, 2012], [N. Kassimi, 2011]

I.6.2. Propriétés de la céramique:

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater. [N. Kassimi, 2011]

I.6.2.1 Propriétés physiques:

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. L'utilisation de la céramiques impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique, métallurgique, aéronautique, spatiale, médicale et dans les revêtements. [L. Hadji, 2012]

I.6.2.2 Propriétés mécaniques:

Les propriétés mécaniques de la céramique sont :

- Un module de Young élevé (Liaisons, covalente, ioniques) ;
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée) ;
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression (200 MPa) [N. Kassimi 2011].

I.7. Avantages et inconvénients des matériaux classés par performance :

I.7.1. Avantages FGM :

En plus de remplir son objectif principal, qui est de fournir une variété de Propriétés souhaitées en divers points et surfaces des futurs produits pouvant être fabriqués Divers avantages ont été mis en évidence par des revêtements simples et bien d'autres De la FGM. Ils énumèrent quelques-uns des principaux avantages qui en résultent Aucune interface FGM forte n'existe, par exemple :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple Unimétal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Élimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les sur faces libres, des coins, des racines de fissures, etc. [Miyamoto Y., Kaysser W., Rabin, B., Kawasaki].

I.7.2. Inconvénients des FGM :

Un obstacle majeur à une adoption plus large des MGF est leur fabrication compliquée par des inadéquations de différentes propriétés telles que la température Fusion, affinité différente pour divers autres éléments, taille des particules, Morphologie etc. Un exemple typique est un mélange de métaux avec une température de fusion (T_1) et des céramiques à température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, cela Le couple est généralement ($T_1 \ll T_2$). Alors, si la température de fabrication est autour de (T_1), La céramique reste non fondue et la structure finale contient des particules de céramique Ne fusionne pas dans la matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente Haute porosité et faible adhérence entre les différents composants et son application Généralement limité. Cependant, pour des applications spéciales, il existe de très Dur (carbure) dans une matrice solide peut être souhaitable.

I.8. Domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés FGM:

Le FGM est existé un large intervalle des domaines d'application :

I.8.1. Aérospatiale:

Les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les

roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales. [S. BRAIRI, 2018/2019].



Figure I.7 : Application dans le domaine aérospatial

I.8.2. Médecine :

Implants, peau artificielle, le scanner IRM des tubes cryogéniques,[A.SAID, 2016].

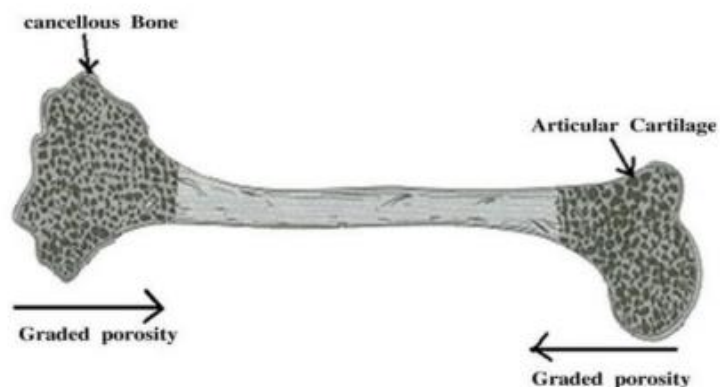


Figure I.8 : Variation graduelle dans l'os humain [A.SAID, 2016]

I.8.3. Défense:

Les FGM sont appliqués dans la défense telle que les gilets pare-balles et les plaques d'armure ainsi que les véhicules blindés. [S. BRAIRI, 2019]



Figure I.9 : Utilisation dans l'industrie de la défense [S. BRAIRI, 2019]

I.8.4. Marine:

Les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression.

I.8.5. Génie civil :

Ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

I.8.6. Chimique :

L'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

I.8.7. L'énergie nucléaire :

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

I.8.8. Électronique :

Semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

I.8.9. Optique :

Fibres optiques, lentilles.

I.8.10. Conversion d'énergie :

Générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible



Figure I.10 : Utilisation dans l'industrie d'énergie [S. BRAIRI, 2019]

I.8.11. Industrie automobile :

Les matériaux FGM sont utilisés dans l'industrie automobile, à cause du coût élevé de création dans les parties nécessaires de l'automobile les applications présentes à savoir: corps de voiture, les volants, les amortisseurs.

I.8.12. Équipements sportifs :

Les matériaux FGM sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

I.9. Les méthodes de fabrication du matériau à gradient de propriétés:

La fabrication des matériaux à gradient de performance a été développée par Mortensen et Hirai et peut être divisée en Établissement et transformation de la structure "hiérarchique" dans

l'espace non homogène Matériaux ou structures en blocs "fusionnés». Il existe de nombreux processus impliqués dans la formulation d'une FGM. Dans le traitement des matériaux de précurseur, la structure FGM est réalisée couche par couche en commençant par une répartition appropriée dans laquelle les gradients sont régulièrement fabriqués dans l'espace, tandis que dans le transport de masse, les gradients à l'intérieur d'un composant dépendent des phénomènes de transport naturels, tels que la conduction thermique, la diffusion de espèces atomiques et écoulement de fluide. Basé sur la voie de traitement différentes méthodes de fabrication sont disponibles [a. HOUARI, 2019]

Les matériaux à gradient de propriétés sont ordinairement sous forme de revêtement de surface, il existe une large gamme de fabrication de dépôts de surface en fonction de l'exigence de service du processus, la Figure I.11 illustre quelques procédés de fabrication des FGM. [M.ELLALI, 2019].

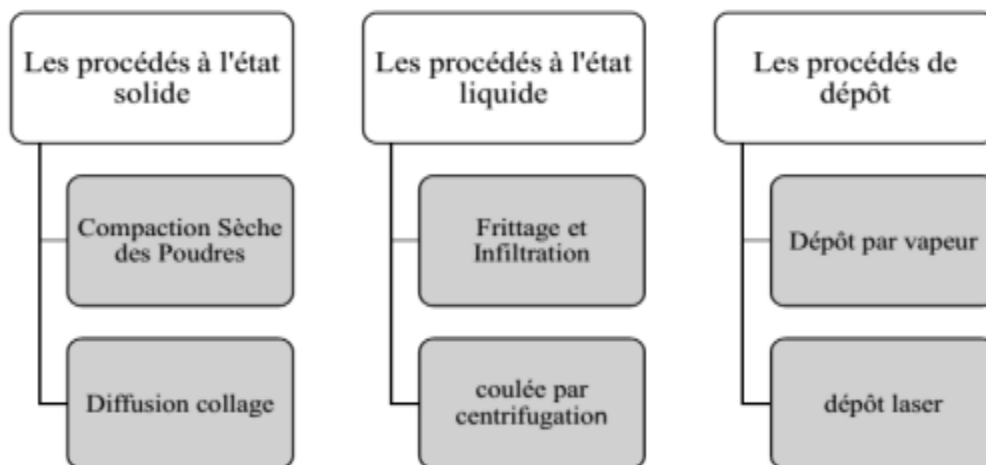


Figure I.11 : Méthodes de fabrication de FGM [M.ELLALI, 2019].

Un certain nombre de documents de recherche ont été publiés jusqu'à ce jour sur les techniques de traitement des FGM donnant de nouvelles méthodes de fabrication des FGM.

I.9.1. Les procède à l'état solide:

I.9.1.1. Compaction Sèche des Poudres:

Dans Cette technique consiste à répandre successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Généralement par une pression

isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes.[M.ELLALI, 2019].

I.9.1.2. Diffusion collage:

Ce processus suppose la réalisation des structures graduées par l'injection des plaques métalliques de différentes quantités et épaisseur avec la modification de fraction volumique de la phase de céramique continue par diffusion de collage à des températures très haute [M.ELLALI,2019].

I.9.2. Les procédés à l'état liquide:

I.9.2.1. Frittage et Infiltration:

Cette technique appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres Généralement est composée de deux étapes à la production d'un composite à gradient de fonction constitué de deux matériaux dont les températures de fusion sont plus différentes. L'étape initiale est d'établir une matrice frittée du matériau à température élevée de fusion avec un gradient de porosité. La deuxième étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.[M.ELLALI, 2019].

I.9.2.2. Coulée par centrifugation (centrifugat casting):

La procédé consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure I.12) [A.SAID, 2016].

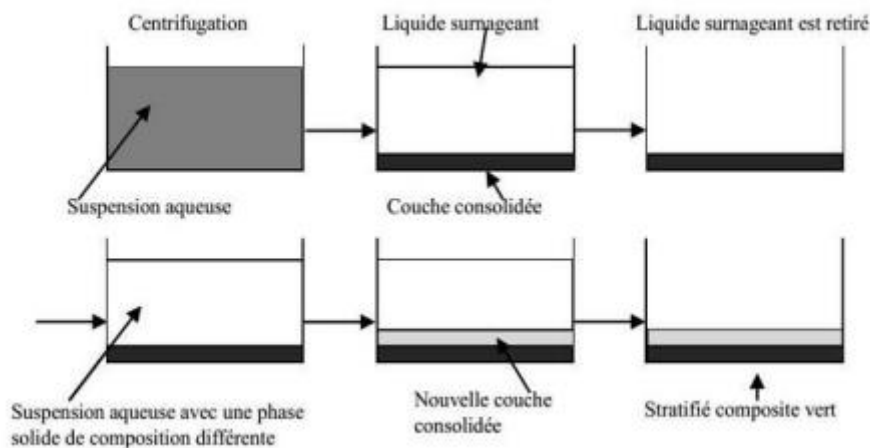


Figure I.12 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [A.SAID, 2016]

1.9.3. Processus de dépôt :

1.9.3.1. Dépôt physique en phase vapeur :

La technique de dépôt physique en phase vapeur (PVD) à base de gaz fait partie essentielle dans la fabrication des FGM minces en raison de ses énormes avantages tels que la production des films minces très purs avec une structure graduée, peut créer une grande variété de composés. La méthode PVD est l'une des méthodes, du dépôt de métal de base aux alliages et respectueux de l'environnement par rapport à d'autres techniques. [a.HOUARI, 2019].

1.9.3.2. Dépôts laser:

Le laser forme un bassin de métal sur le substrat dans lequel on injecte de poudre métallique. la poudre injectée fusible sur les substrats comme le laser balaie la partie, laissant un cordon de matériel déposé. Le matériel est déposé seulement lorsque le laser frappe la surface. Depuis le laser peut être positionné avec précision, il est facile de déposer du matériel sélectivement réduisant le temps d'usinage autrement requise dans les opérations de traitement ultérieur. [M.ELLALI, 2019].

Conclusion : Dans ce chapitre nous avons exposé un brève aperçu sur matériaux fonctionnellement gradués qui représentent une évolution rapide en sciences et en ingénieries avec de plus grandes applications pratiques. D'où une vue sur définition et concept, l'historique et leurs méthodes de fabrication, Les nécessités de recherche dans un nouveau domaine sont particulièrement riches et variées, les FGM promettent des potentiels importants qui expliquent l'obligation des efforts importants.

CHAPITRE II :
Les différentes Théories des plaques

II.1. Introduction :

Les composites multicouches ont un comportement complexe et difficulté à comprendre les problèmes liés à la modélisation des structures de forte anisotropie. Ainsi, la modélisation de structures composites hétérogènes FGM "poutre, plaque, coque, etc." a toujours été un sujet qui mérite d'être discuté besoin d'une théorie qui puisse décrire son comportement statique et dynamique sophistiqué et précis.

En fait, les structures fonctionnellement graduée ont besoin d'une théorie qui décrit bien la distribution des contraintes de cisaillement à travers leur épaisseur, notamment à l'interface. Beaucoup de chercheurs ont étudié le comportement statique dynamique des plaques à gradient fonctionnel (FGM) et ont proposé plusieurs théories des plaques.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.2.1. Approche monocouche équivalente :

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) :

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur.[Reissner 1961].

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. II.1). [Kirchhoff. 1850]

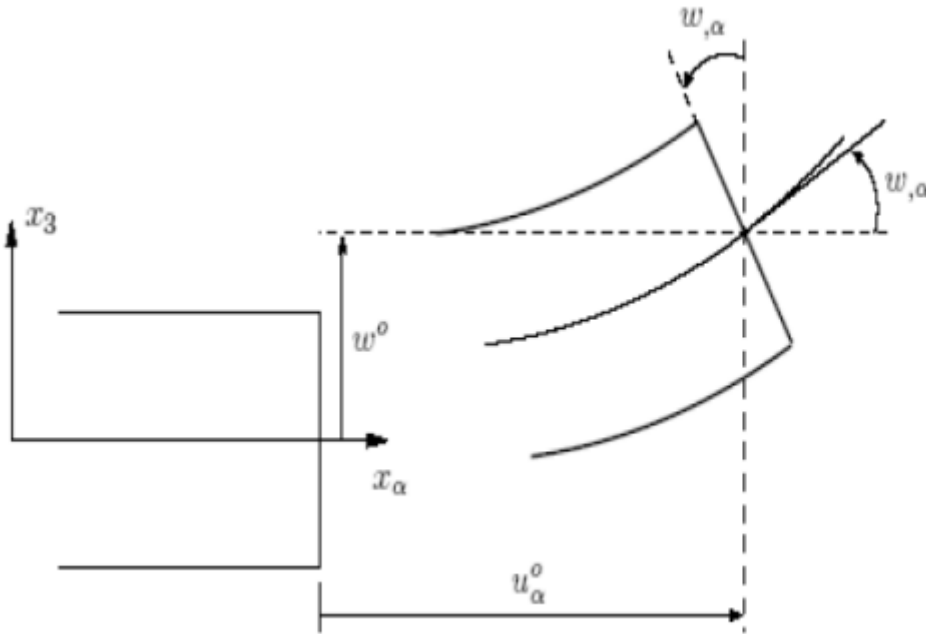


Figure II.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha}(x_1, x_2) & , \alpha = 1,2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$zw_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) :

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure. II.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

$\phi_{,\alpha}$: La rotation de la normale au plan moyen autour des axes α x,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

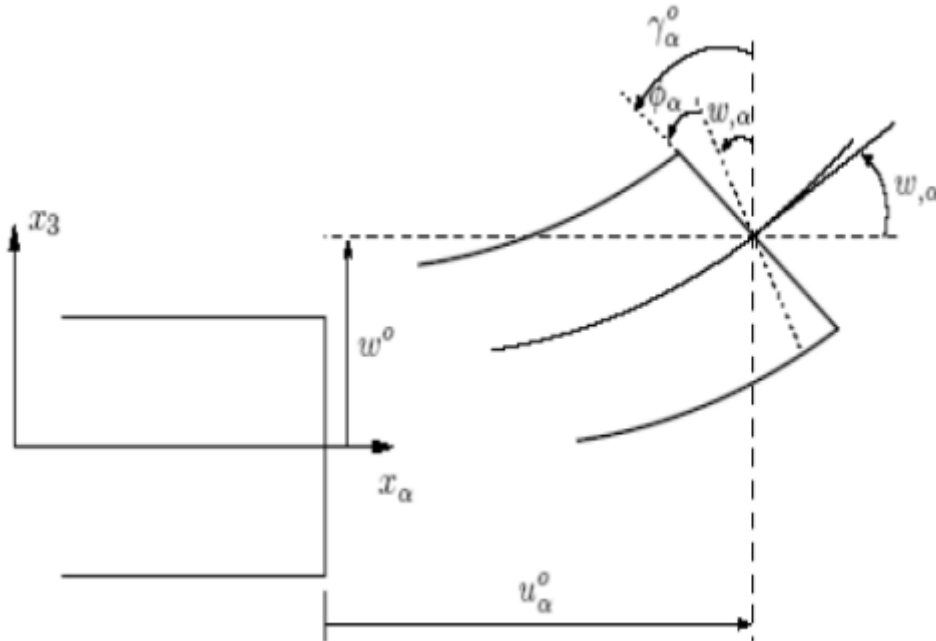


Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels.

Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique [Whitney 1973].

La Figure. II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques

stratifiés ou au niveau de l'interface il y a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

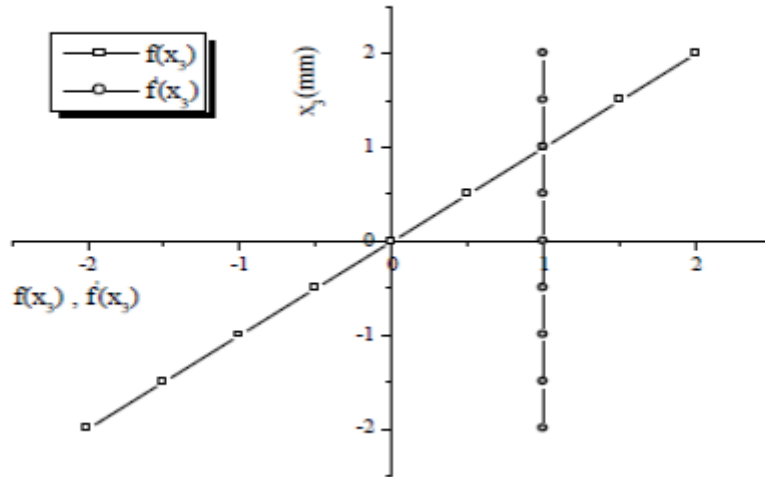


Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4), La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme [Liberscu1967]. :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)} + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \tag{II.3}$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour $j = 2,3,4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_i^{0(1)} = 0, \phi_i^{0(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (II.4)$$

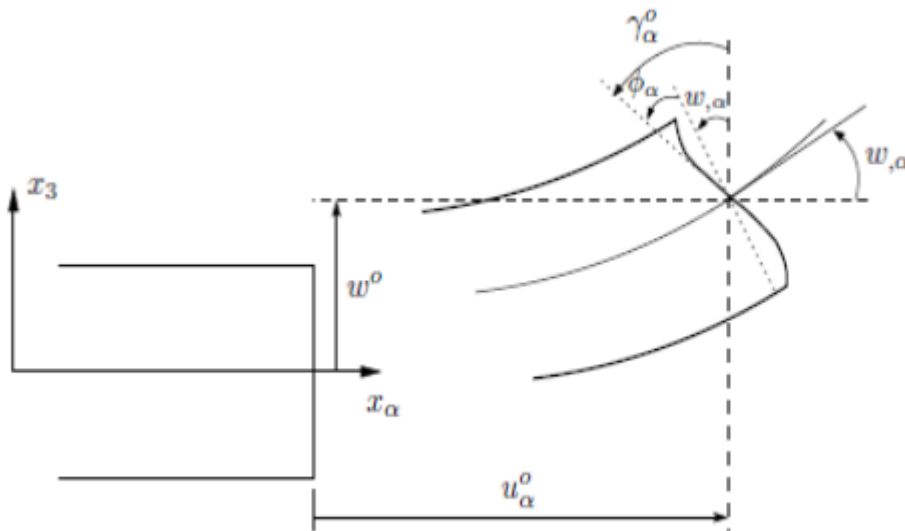


Figure.II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'ambartsumyan avec :[Ambartsumyan 1969]

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (II.5)$$

- L'approche de Reissner:[Reissner 1945]

$$f(z) = \frac{4}{5} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.6)$$

- L'approche de Reddy avec :[Reddy 1987]

$$f(z) = \frac{4}{5} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.7)$$

Dans le modèle de, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. [Reddy 1987]

- L'approche de Touratier avec : [Touratier 1991]

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{2} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots\right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près).

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Récemment, Afaq et al. propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. [Reddy 1984] ; [Afaq 2003]

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" ne permet qu'un développement en puissances impaires. [Touratier].

- L'approche de Aydogdu avec : [Aydogdu 2005]

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas.

Des matériaux FGM cette approche parait très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

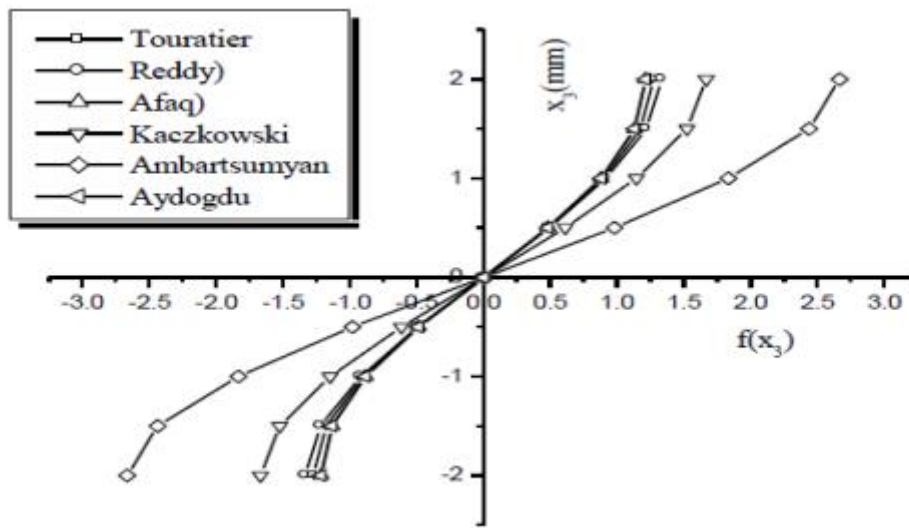


Figure. II.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

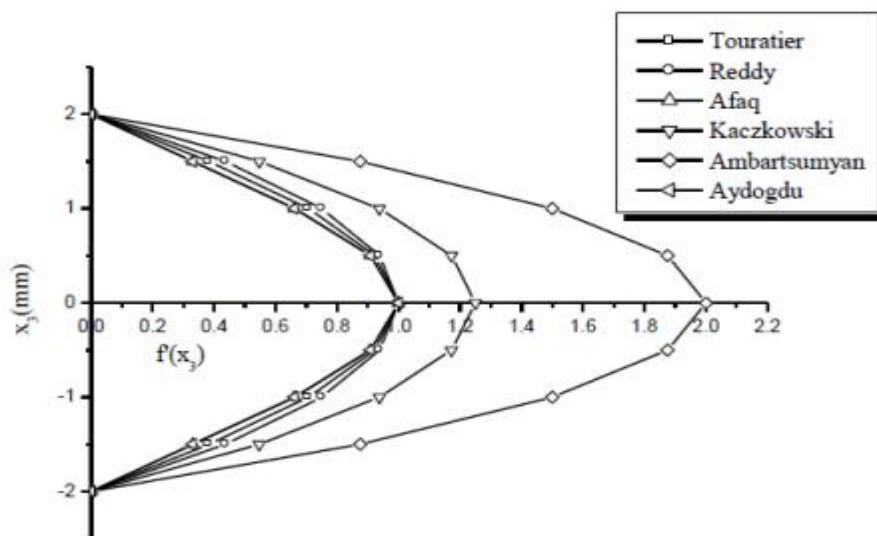


Figure. II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

En fonction des Figures. **II.5** et **II.6** on remarque que les deux approches d'ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II. 2. 2. Approche par couche :

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels.

Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.[Afaq. 2003] ; [Reddy 1984]

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zig ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures **II.7** et **II. 8**).

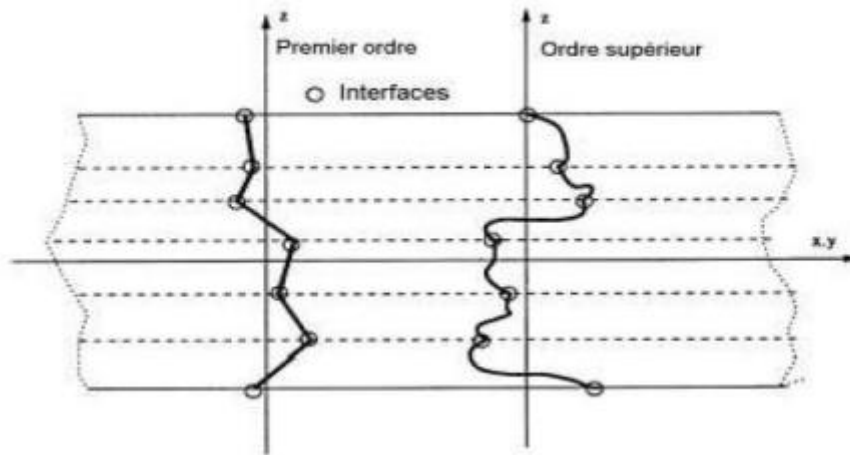


Figure. II.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique [Nguyen.2004].

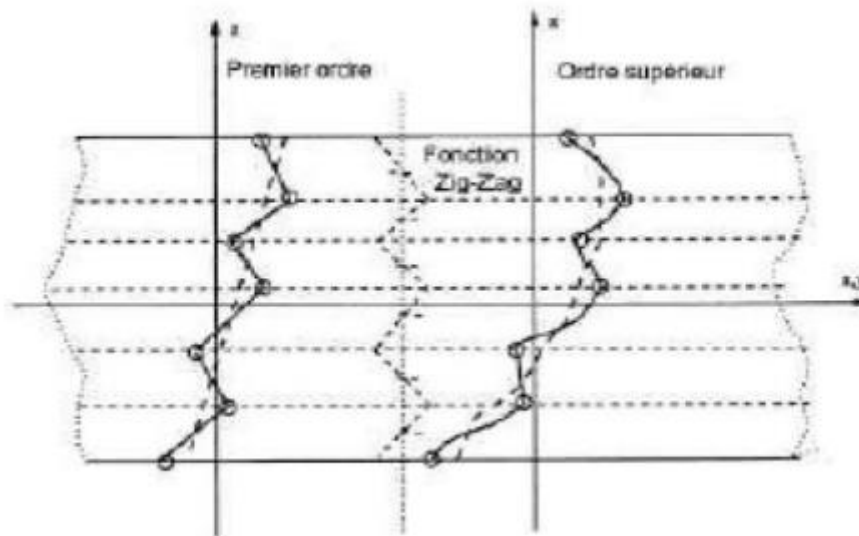


Figure II. 8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [Nguyen.2004].

II.3. Conclusion : Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques et les approches à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Chapitre III :

**Effet de forme de distribution de la porosité
sur le Flexion et la vibration des plaques
P.FGM**

III.1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites qui ont une variation continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, et éliminent ainsi la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés. Le matériau FGM constitué d'un mélange de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique.

Au stade de la production des matériaux à gradient de propriétés, des micro-vides et des porosités peuvent apparaître en raison d'erreurs de production ou d'erreurs techniques. Avec la porosité, le comportement mécanique des matériaux à gradation fonctionnelle change considérablement. Ainsi, l'effet de la porosité sur les matériaux à gradation fonctionnelle est un problème important et doit être étudié afin de concevoir ces composites en toute sécurité.

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de l'effet de la forme de distribution de la porosité sur la flexion et la vibration des plaques en matériaux à gradient de propriétés type P.FGM simplement appuyées, en utilisant une simple théorie 2D à quatre variables qui tient en considération la déformation du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque.

III.2. Description du problème et équation de base :

III.2.1. Configuration géométrique :

Cette plaque est composée d'un matériau isotrope dont les Propriétés matérielles varient doucement dans la direction z (épaisseur) uniquement. Nous supposons que la composition varie de la surface inférieure à la surface supérieure, c'est-à-dire que la surface inférieure ($z = -h/2$) de la plaque est riche en métal tandis que la surface supérieure ($z = +h/2$) est riche en céramique. Le système de coordonnées $(x ; y ; z)$ $x [0, a]y[0, b]z[-h/2, +h/2]$ comme le montre la figure III.1.

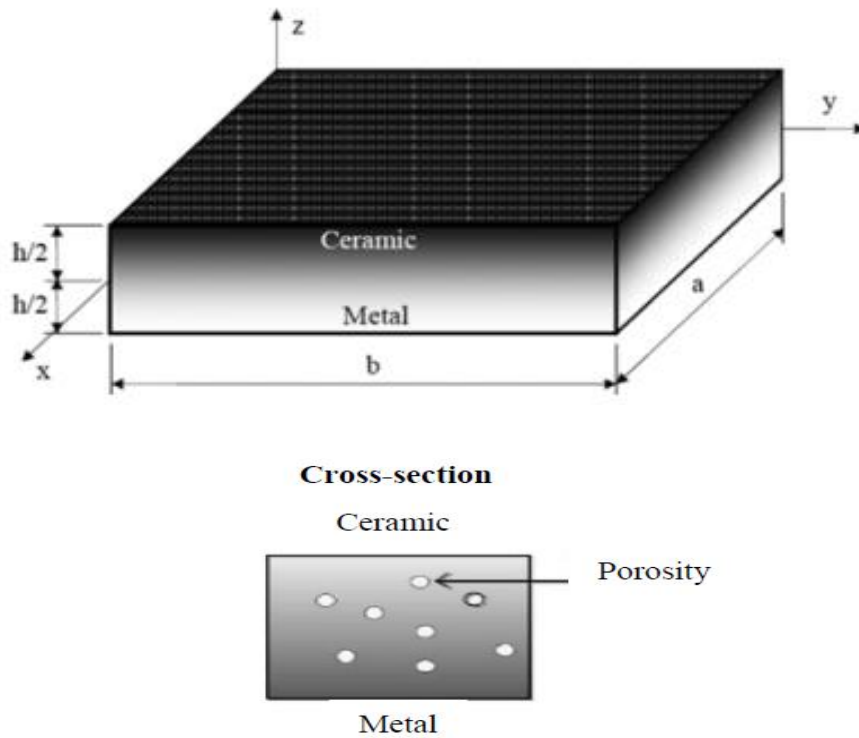


Figure III.1 : Géométrie de la plaque FGM rectangulaire et coordonnées.

Dans cette étude, nous considérons une plaque FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité α ($\alpha \ll 1$) avec une forme de distribution différente entre le métal et la céramique. La règle de mélange

$$P(z) = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.1})$$

La loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est supposée être la suivante

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.2})$$

Alors La règle de mélange modifiée devient

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c - P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.3})$$

Où

k : est l'indice de loi de puissance qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

La plaque FGM devient un faisceau entièrement céramique lorsque k est fixé à zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de k .

Les propriétés mécaniques de la plaque FGM telles que le module d'Young E et la densité de masse ρ de la FGM imparfaite peuvent être écrites comme des fonctions de la coordonnée d'épaisseur z (surfaces centrales), comme suit :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c - E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (\rho_c - \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4b})$$

Les propriétés des matériaux d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque la fraction volumique de porosité est fixée à zéro. En raison des faibles variations du coefficient de Poisson, il est supposé constant. Plusieurs distributions de porosité ont été étudiées dans le présent travail, telles que «O», «V» et «X» (tableau III.1).

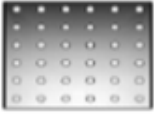


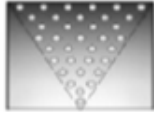
Formes de distribution de la porosité	Expression du module d'élasticité	Schema
Forme homogène	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2}$	
Forme "O"	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2 \frac{ z }{h}\right)$	
Forme "X"	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(2 \frac{z}{h}\right)$	
Forme "V"	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)$	

Tableau III.1 : Différentes formes de distribution de la porosité

III.2.2. Cinématique et équations constitutive:

III.2.2.1. Champs de déplacement:

Le champ de déplacement proposé pour l'étude de la flexion et de la vibration des plaques FGM en utilisant la présente théorie de cisaillement peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement ; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement. Il convient de noter que, contrairement à la FSDT, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction du cisaillement.

La fonction de forme $f(z)$ est donnée comme suit :

$$f(z) = z - \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad (\text{III.6})$$

III.2.2.2. Champs de déformation :

- Les équations de déformation-déplacement en tout point du système de la plaque sont définies comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8a})$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.8b})$$

III.2.2.3. Relations constitutives :

- Le mélange de deux phases matérielles des plaques FGM est le métal et la céramique comme le montre la figure (III.1)
- Les composantes des contraintes sont déterminées en utilisant les relations d'élasticité contraintes-déformation « loi de comportement élastique linéaire »

$$\{\sigma_{ij}\} = [Q_{ij}] \{\varepsilon_{ij}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.9)$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FG peuvent être écrites comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.10a)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{Bmatrix} \quad (III.10b)$$

Où

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy})$ et $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes de contrainte et de déformations, respectivement, Q_{ij} sont des Constans de rigidité définis comme suit

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (III.11)$$

III.2.2.4. Equations de mouvement :

- Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (III.12)$$

Avec :

δU : La variation de l'énergie de déformation de la plaque

δV : la variation de l'énergiepotentiel du au chargement extérieur

- La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_v \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{2}} \int_A \delta \epsilon_{ij} dz. dA \\ \delta U &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \tau_{xz} \delta \epsilon_{xz} + \tau_{yz} \delta \epsilon_{yz} + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy}) dz. dA \end{aligned} \quad (III.13)$$

En remplaçant l'équations (III.6) et (III.7) dans l'équation (III.9) et en intégrant par parties suivant l'épaisseur de la plaque, l'équation (III.9) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ -M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \\ + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \end{array} \right\} dA \quad (\text{III.14})$$

Les contraintes résultantes N, M et S sont définies par :

$$(M_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz (i = x, y, xy) \quad (\text{III.15a})$$

Et

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III.15b})$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \\ & - I_1 (\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0) \\ & - I_2 (\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0) \\ & + J_1 (\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y}) + K_2 (\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y}) \\ & + J_2 (\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x}) + K_2 (\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y}) \} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où la convention de l'indice de point indique la différenciation par rapport à la variable temporelle t $\rho(z)$ est la densité de masse donnée par l'Eq. (4b) ; et (I_i, J_i, K_i) sont des inerties de masse exprimées par

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz (J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.17a})$$

La variation du travail effectué peut être exprimée comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta W dA \quad (\text{III.17b})$$

En substituant les Eqs. (12), (14) et (16) à l'Eq. (11), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
 \delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
 \delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
 \delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q \\
 &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

En substituant l'Eq. (7) à l'Eq. (9) et les résultats ultérieurs à l'Eq. (13), on obtient les résultantes des contraintes en termes de déformations sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K^b \\ K^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \tag{III.19}$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \tag{III.20a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, K^b = \{K_x^b, K_y^b, K_{xy}^b\}^t, K^s = \{K_x^s, K_y^s, K_{xy}^s\}^t$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{III.20b}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{III.21c}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \tag{III.20d}$$

Où :

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, \dots$, etc., sont les constantes de la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ \frac{1-v}{2} \end{Bmatrix} dz \tag{III.21a}$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S) \quad (\text{III.21b})$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S = \sum_n^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.21c})$$

Les équations d'équilibres peuvent être déduites de l'équation (III.10) en intégrant par égale à $\delta \theta \delta w_s$, δw_b et δv , δU_0 , δ parties les gradients de déplacement et en mettant les coefficient zéro

$$\delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0,$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\delta s: \frac{\partial^2 M^2 x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M^2 xy}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M y^2}{\partial y^2}.$$

La variation de l'énergie potentiel est exprimé par :

$$\delta v = -q \int_A \delta w(x, y, z) dA \quad \delta v = -q \int_A \delta w_0 dA \quad (\text{III.23})$$

En introduisant l'équation (18) dans l'équation (17), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s), et les équations appropriées prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ & - B_{22}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\ & B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{22}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
 & + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + j_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
 \end{aligned} \tag{III.24}$$

III.2.3. Solutions analytiques des plaques rectangulaires simplement soutenues:

La méthode de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont écrites comme produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \tag{III.25}$$

U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} Et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée au (m,n)ième mode propre, et $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$.

- La charge transversal q est également développées en série sinusoïdale double-fourrier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \tag{III.26}$$

- Pour le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons :

$$m=n=1 \text{ et } q_{11} = q_0 \tag{III.27}$$

où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

- Pour analyse de la flexion:

$$[R]\{\Delta\} = \{q\} \tag{III.28}$$

- Pour l'analyse de vibration :

$$([R] - \omega_2 [G])\{\Delta\} = 0 \tag{III.29}$$

$$\text{Où } \{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\} \text{ t} \quad , \quad \{q\} = \{0, 0, -q, 0\} \text{ t}$$

- [R] et [G] se réfère à la rigidité en flexion et la matrice de masse ω étant la fréquence de vibration correspondante.

$$[R]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix}, [G]=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Pour lesquels :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = A_{11} + \lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ S_{12} = \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ S_{13} = \lambda(B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2) \\ S_{14} = \lambda(B_{11}^S\lambda^2 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S)\mu^2) \\ S_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ S_{23} = -\mu((B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2) \\ S_{24} = -\mu((B_{12}^S + 2B_{66}^S)\lambda^2 + B_{66}^S\mu^2) \\ S_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ S_{34} = D_{11}^S\lambda^4 + 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^S\mu^4 \\ S_{44} = H_{11}^S\lambda^4 + 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^S\mu^4 + A_{55}^S\lambda^2 + A_{55}^S\lambda^2 \\ m_{11} = m_{22} = I_1 \\ m_{33} = I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{34} = I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{44} = I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2) \end{array} \right. \quad (\text{III.31})$$

Conclusion : Dans ce chapitre l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM par une théorie qui assure la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement, l'effet de la forme de distribution de la porosité sera introduit tout en se basant sur un champ de déplacement a quatre variables, Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton et la méthode de Navier est proposé pour résoudre les équations de mouvement de la plaque FGM simplement appuyée. Les résultats obtenus par la présente théorie seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre IV :

Validation et comparaison des résultats

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre on expose les résultats de l'analyse du comportement en flexion et vibration des plaques composites en matériaux à gradient de propriétés types P-FGM obtenus en se basant sur la théorie de cisaillement hyperbolique des plaques développé dans le chapitre précédent. La théorie proposée contient quatre inconnues et quatre équations d'équilibre. Prenant en considération la porosité qui peut se produire à l'intérieur des matériaux en cours de leur fabrication. L'effet de la forme de distribution de la porosité est également étudié.

Une étude paramétrique pour montrer l'influence de différentes formes et fractions de porosité sur le comportement en flexion et vibration des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM) simplement appuyées.

IV.2. Propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée :

Dans cette recherche nous allons étudier le comportement en flexion et en vibration d'une plaque FGM simplement appuyé soumise à une charge sinusoïdale « q ». La surface inférieure de la plaques FGM est riche en métal (aluminium, Al), où les propriétés matériau varient graduellement suivant l'épaisseur jusqu'à atteindre la face supérieure de la plaque qui est entièrement en céramique (alumine, Al_2O_3). Zirconia (ZrO_2).

Les propriétés matérielles de la plaque FGM étudiée sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau IV.1: Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés.

Matériaux	Métal(Aluminium, Al)	Céramique (Alumina, Al_2O_3)	Céramique (Zirconia , ZrO_2)
Module de Young (GPa)	70	380	200
Coefficient de poisson	0.3	0.3	0.3

Les résultats numériques sont présentés sous forme des grandeurs adimensionnelles comme suit :

<p>(l'analyse de flexion) 1 La flèche maximale adimensionnelle</p>	$\bar{W} = 10 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$
<p>2 Le déplacement adimensionnel suivant x</p>	$\bar{U} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, \frac{-h}{4} \right)$
<p>3 Le déplacement adimensionnel suivant y</p>	$\bar{V} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} v \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{-h}{6} \right)$
<p>4 Les contraintes normales</p>	$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{hq_0} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$ $\bar{\sigma}_y = \frac{h}{hq_0} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} \right)$
<p>5 Les contraintes de cisaillement transversales.</p>	$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right)$ $\bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6} \right)$ $\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xy} \left(0, 0, -\frac{h}{3} \right)$
<p>1(l'analyse dynamique) La fréquence de vibration adimensionnelle.</p>	$\bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right)$

Tableau IV.2: Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondants.

IV.3. Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres :

IV.3.1. Analyse de flexion :

Cette partie du mémoire est consacrée à la validation de la présente étude, où les présents résultats sont comparés avec celles issues de la littérature dans les tableaux.

Pour l'analyse statique, la plaque est soumise à une charge transversale sinusoïdale donnée par :

$$q(x, y) = q_{11} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

Les propriétés de la plaque poreuse en matériau FGM changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance P-FGM. Les surfaces inférieures et supérieures de la plaque FGM sont riches de métal et de céramique respectivement. Afin de prouver la validité de la

présente théorie de cisaillement proposé, les résultats ont été obtenus pour les plaques rectangulaires poreuse en matériau FGM et comparés avec ceux déjà existants dans la littérature tels que : La théorie de déformation de cisaillement généralisée développée par Zenkour (Zenkour 2006), la théorie de déformation de cisaillement (HSDT) développée par Dharan (Dharan et al.2010), et les résultats obtenus par le modèle de Reddy basé sur la théorie d'ordre élevé HSDT (Reddy 2000). Les résultats sont reportés dans le tableau IV.3 et IV.4.

Tableau IV.3:Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les déplacements sans dimension d'une plaque carrée FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

K	Model	α	\bar{U}	\bar{V}	\bar{W}
Ceramique	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.21805	0.14493	0.29423
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	0.23090	0.15390	0.29600
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.21805	0.14493	0.29423
	Present	$\alpha = 0$	0.21815	0.14488	0.29604
		$\alpha = 0.1$	0.23188	0.15400	0.3146
		$\alpha = 0.2$	0.24746	0.16434	0.3358
0.2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.2818	0.1985	0.33672
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	-	-	-
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.28172	0.19820	0.33767
	Present	$\alpha = 0$	0.30479	0.21538	0.3598
		$\alpha = 0.1$	0.33201	0.23552	0.3882
		$\alpha = 0.2$	0.36453	0.25971	0.4216
0.5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.42135	0.31096	0.44387
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	-	-	-
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.42131	0.31034	0.44407
	Present	$\alpha = 0$	0.43858	0.32549	0.45369
		$\alpha = 0.1$	0.49627	0.37088	0.50253
		$\alpha = 0.2$	0.57114	0.43023	0.56405
1	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.64258	0.49673	0.59059
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	0.6626	0.5093	0.5889
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.64137	0.49438	0.58895
	Present	$\alpha = 0$	0.64111	0.49408	0.58893
		$\alpha = 0.1$	0.77156	0.60064	0.68317
		$\alpha = 0.2$	0.96747	0.76193	0.81923
2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.9022	0.71613	0.76697
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	0.92810	0.73110	0.75730
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.89858	0.71035	0.75747
	Present	$\alpha = 0$	0.89793	0.70967	0.75733
		$\alpha = 0.1$	0.89793	0.94886	0.94196
		$\alpha = 0.2$	1.73521	1.41394	1.28004

5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	1.06786	0.84942	0.94325
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	1.11580	0.87920	0.91180
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	1.06297	0.84129	0.90951
	Present	$\alpha = 0$	1.06620	0.84398	0.91171
		$\alpha = 0.1$	1.52546	1.23282	1.19970
		$\alpha = 0.2$	2.70312	2.24280	1.87542
métal	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	1.18373	0.78677	1.59724
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	1.25340	0.83560	1.6070
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	1.18373	0.78677	1.59724
	Present	$\alpha = 0$	0.21815	0.14488	0.29604
		$\alpha = 0.1$	0.23188	0.15400	0.31467
		$\alpha = 0.2$	0.24746	0.16434	0.33581

Tableau IV.4 : Effets de l'exposant de la fraction volumique sur les contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).

K	Model	formes	α	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Céramique	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)		$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	GSDT (Zenkour 2006)		$\alpha = 0$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2462	0.2132
	HSDT (Reddy 2000)		$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Present	homogéné	$\alpha = 0$	1.99550	1.312104	0.7065	0.2461	0.2131
			$\alpha = 0.1$	1.99550	1.31210	0.7065	0.2461	0.2131
			$\alpha = 0.2$	1.99550	1.31210	0.7065	0.2461	0.2131
		Forme O	$\alpha = 0$	1.99550	1.31210	0.7065	0.2461	0.2131
			$\alpha = 0.1$	2.02585	1.30529	0.7028	0.2413	0.2133
			$\alpha = 0.2$	2.05716	1.29826	0.6990	0.2360	0.2135
		Forme X	$\alpha = 0$	1.9955	1.31210	0.7056	0.2461	0.2131
			$\alpha = 0.1$	1.9162	1.29929	0.7134	0.2461	0.2089
			$\alpha = 0.2$	1.8364	1.28638	0.7203	0.2461	0.2047
	Forme Y	$\alpha = 0$	1.99550	1.31210	0.7065	0.2461	0.2131	
		$\alpha = 0.1$	1.95470	1.30550	0.7100	0.2461	0.2087	
		$\alpha = 0.2$	1.91124	1.29848	0.7138	0.2461	0.2087	
1	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)		$\alpha = 0$	3.07011	1.48935	0.61395	0.22705	0.23919
	GSDT (Zenkour 2006)		$\alpha = 0$	3.087	1.4894	0.611	0.2462	0.2622
	HSDT (Reddy 2000)		$\alpha = 0$	3.08501	1.4898	0.61111	0.23817	0.19071
	Present	homogéné	$\alpha = 0$	3.08699	1.48942	0.6110	0.2461	0.2621
			$\alpha = 0.1$	3.26350	1.51833	0.5954	0.2461	0.2675
			$\alpha = 0.2$	3.51912	1.56029	0.5728	0.2461	0.2743
			F o	$\alpha = 0$	3.08699	1.48942	0.6110	0.2461

2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	Forme X	$\alpha = 0.1$	3.16496	1.47284	0.6049	0.2376	0.2659	
			$\alpha = 0.2$	3.24780	1.45383	0.5988	0.2277	0.2702	
		Forme Y	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	3.0869	1.48942	0.6110	0.2461	0.2479
				$\alpha = 0.1$	2.8841	1.45628	0.6049	0.2461	0.2550
			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0$	3.08699	1.48942	0.6110	0.2461	0.2621
				$\alpha = 0.1$	3.05184	1.48367	0.6141	0.2461	0.2609
	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0$	3.01374	1.47744	0.6174	0.2461	0.2596		
		$\alpha = 0$	3.58089	1.3968	0.54947	0.22705	0.22719		
	GSDT (Zenkour 2006)	Forme O	$\alpha = 0$	3.6094	1.3954	0.5441	0.2265	0.2763	
			$\alpha = 0$	3.60664	1.39575	0.54434	0.22568	0.1807	
	HSDT (Reddy 2000)	homog éne	$\alpha = 0$	3.60936	1.39541	0.5440	0.2265	0.2763	
			$\alpha = 0.1$	3.96917	1.41014	0.5071	0.2229	0.2862	
Present	homog éne	$\alpha = 0.2$	4.61764	1.43540	0.4402	0.2176	0.2993		
		Forme O	$\alpha = 0$	3.0869	1.39541	0.5440	0.2265	0.2763	
			$\alpha = 0.1$	3.1649	1.36266	0.5345	0.2122	0.2835	
	$\alpha = 0.2$		3.2478	1.32233	0.5246	0.1947	0.2925		
	Forme X	$\alpha = 0$	3.6093	1.39541	0.5440	0.2265	0.2763		
		$\alpha = 0.1$	3.3260	1.36280	0.5706	0.2267	0.2666		
		$\alpha = 0.2$	3.0953	1.33527	0.5919	0.2270	0.2569		
	Forme Y	$\alpha = 0$	3.60936	1.39541	0.5440	0.2265	0.2763		
		$\alpha = 0.1$	3.59136	1.38273	0.5445	0.2250	0.2758		
		$\alpha = 0.2$	3.57171	1.36865	0.5450	0.2234	0.2752		
	5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	Forme O	$\alpha = 0$	4.19547	1.1087	0.57811	0.21792	0.21813
				$\alpha = 0$	4.2488	1.1029	0.5755	0.2017	0.2429
$\alpha = 0$				4.24293	1.10539	0.57368	0.21609	0.17307	
GSDT (Zenkour 2006)		homog éne	$\alpha = 0$	4.24882	1.10294	0.5754	0.2016	0.2428	
			$\alpha = 0.1$	4.75070	1.03808	0.5510	0.1886	0.2523	
			$\alpha = 0.2$	5.79206	0.88615	0.5047	0.1640	0.2695	
HSDT (Reddy 2000)		Forme O	$\alpha = 0$	4.24882	1.10294	0.5754	0.2016	0.2428	
			$\alpha = 0.1$	4.38557	1.04251	0.5711	0.1727	0.2507	
			$\alpha = 0.2$	4.53170	0.96350	0.5692	0.1302	0.2627	
Present		Forme X	$\alpha = 0$	4.2488	1.10294	0.5754	0.2016	0.2428	
			$\alpha = 0.1$	3.9624	1.08483	0.5954	0.2019	0.2267	
			$\alpha = 0.2$	3.7540	1.06541	0.6103	0.2019	0.2103	
	Forme Y	$\alpha = 0$	4.24882	1.10294	0.5754	0.2016	0.2428		
		$\alpha = 0.1$	4.27503	1.06832	0.5775	0.1962	0.2379		
		$\alpha = 0.2$	4.30730	1.02879	0.5796	0.1891	0.2315		
ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	Forme O	$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778		
		$\alpha = 0$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2462	0.2132		
		$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051		
	Present	homog éne	$\alpha = 0$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2461	0.2131	
			$\alpha = 0.1$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2461	0.2131	
			$\alpha = 0.2$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2461	0.2131	
GSDT (Zenkour 2006)	F o	$\alpha = 0$	1.5899	1.7571	0.9461	0.3831	0.2212		
		$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051		

			$\alpha = 0.1$	1.5899	1.7571	0.9461	0.3831	0.2212
			$\alpha = 0.2$	1.5899	1.7571	0.9461	0.3831	0.2212
		Forme X	$\alpha = 0$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2461	0.2131
			$\alpha = 0.1$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2461	0.2131
			$\alpha = 0.2$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2461	0.2131
		Forme V	$\alpha = 0$	1.9955	1.6380	0.5310	0.2461	0.2842
			$\alpha = 0.1$	1.9955	1.6380	0.5310	0.2461	0.2842
			$\alpha = 0.2$	1.9955	1.6380	0.5310	0.2461	0.2842

Ces tableaux présentent les résultats numériques adimensionnels des déplacements et des contraintes des plaques poreuses avec la distribution des formes suivant : « H » homogène et « O », « V », « X » respectivement. Ces tableaux montrent aussi l'effet de la fraction de volume k ou l'indice matériel et le paramètre de la fraction de porosité α sur les contraintes et les déplacements d'une plaque carrée en FGM avec un rapport. D'après les $a/h=10$ résultats présentés dans ces deux tableaux, on constate ce qui suit :

- Un bon accord entre les résultats de la présente théorie de cisaillement proposé et ceux de la littérature quand la plaque est parfaite ($\alpha=0$)
- Pour l'effet de l'indice de la fraction de volume k , On peut observer que lorsque la plaque devient de plus en plus métallique (k augmente), la flèche W et la contrainte normale σ_x augmentent mais la contrainte normale σ_y diminue.
- Il est très intéressant de noter que les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que celle d'une plaque entièrement en métal. Cela est dû au fait que dans ces deux cas, la plaque est entièrement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité
- En introduisant la fraction volumique de porosité α , on constate que l'augmentation de ce paramètre conduit à une augmentation de la flèche, déplacements et contraintes adimensionnelles ce qui montre que la porosité a une influence significative sur les déplacements et les contraintes des plaques FGM.

La figure **IV.1** montre l'effet du rapport (a/b) et de la forme de la distribution de porosité sur la flèche transversal adimensionnel \bar{W} des plaques FGM.

À partir de cette figure on remarque que la flèche adimensionnelle diminue en augmentant le rapport (a/b) de la plaque. La flèche pour une plaque avec le modèle de distribution de porosité uniforme H est la plus élevée devant les autres modèles de plaques FGM imparfaites. Les valeurs les plus élevées de, tandis que les plus faibles correspondent à la forme de distribution de porosité en X. La forme de distribution de porosité en V et en O donne à peu près les mêmes valeurs de la flèche adimensionnelle. Un autre résultat de la figure IV.1 montre que la différence entre les distributions de porosité diminue de manière significative en augmentant le rapport de la plaque (a/b)

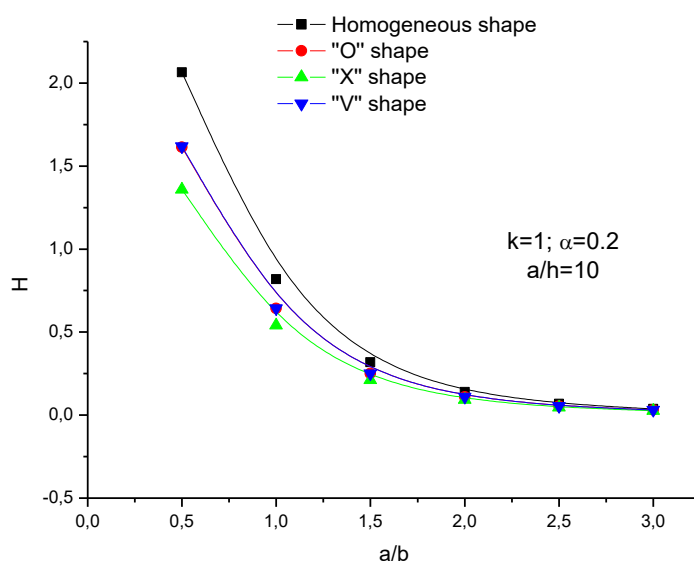


Figure IV.1: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnel en fonction du rapport (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ ($k=1$; $\alpha=0.2$).

la figure IV.2 nous présente l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnel d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ pour différente valeur du rapport (a/h). Il est à noter que l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche est très significatif en augmentant le rapport a/h (lorsque la plaque devient plus mince). La forme distribution de porosité en V et O donne à peu près les mêmes valeurs de la flèche adimensionnelle.

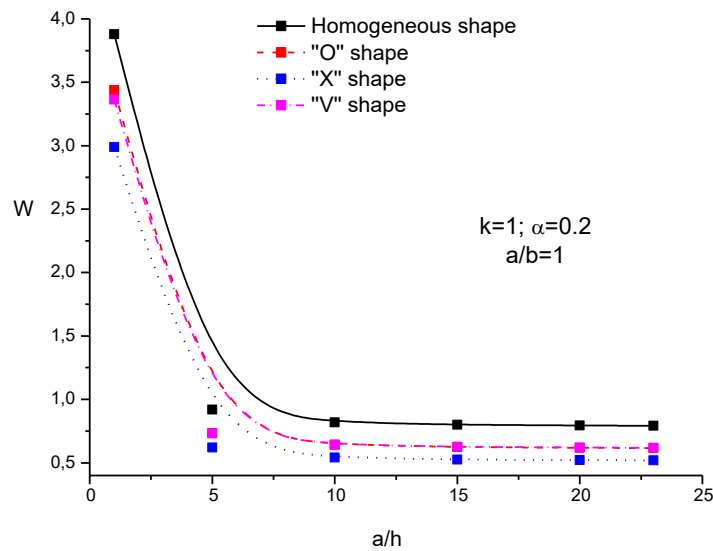


Figure IV.2: Effet de la forme de la distribution de porosité sur les déflexions sans dimensionne fonction du rapport coté épaisseur (a/h) d'une plaque carrée ($k = 1; \alpha = 0,2$).

La variation du coefficient de porosité α sur la flèche adimensionnel est illustrée sur la figure IV.3. Le coefficient de porosité α a un effet important sur les la flèche principalement pour la forme de distribution de porosité homogène H où l'augmentation du coefficient de porosité augmente le déplacement transversal W . Avec l'augmentation de ce paramètre de porosité, la différence entre les distributions de porosité augmente considérablement.

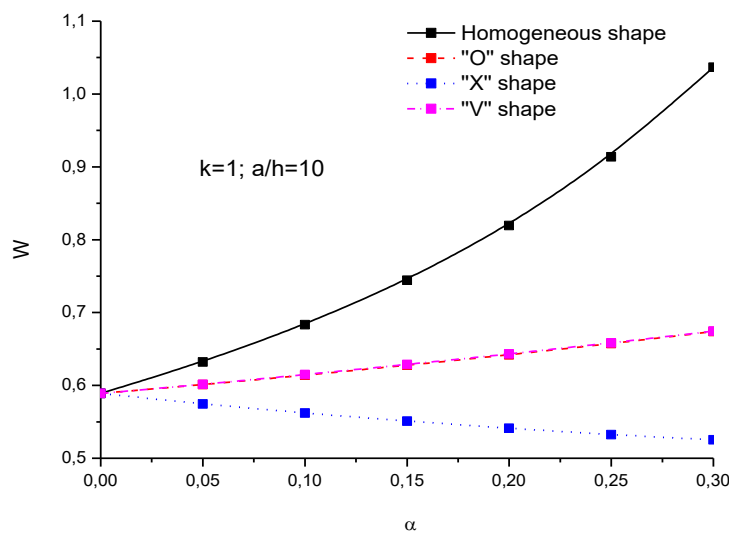


Figure IV.3 : Effet du coefficient de porosité sur la déflexion centrale de la plaque carrée en FGM ($k = 1$).

Les figures IV.4 et IV.5 montrent l'influence de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale avec un coefficient de porosité $\alpha=0.2$, d'après ces figures, il est clair que la contrainte longitudinale est maximale pour la forme de distribution de porosité homogène H et elle est minimale pour la forme de distribution de porosité en X.

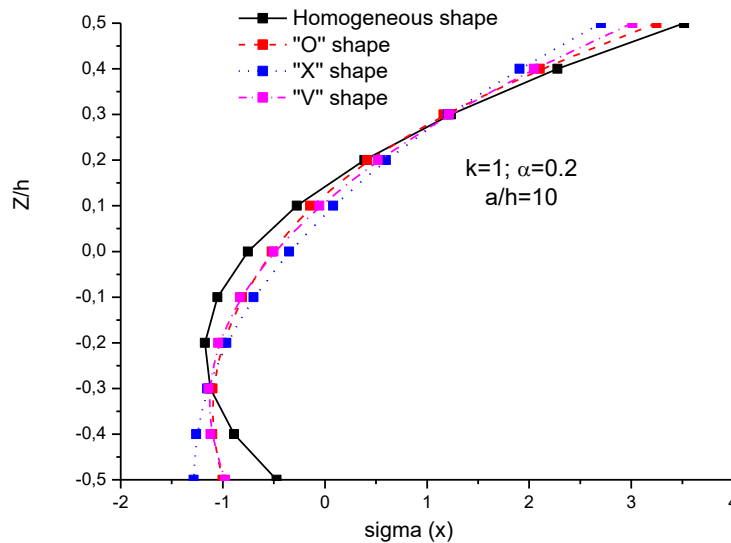


Figure IV.4 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale $xx\sigma$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a / h = 10$; $\alpha=0.2$).

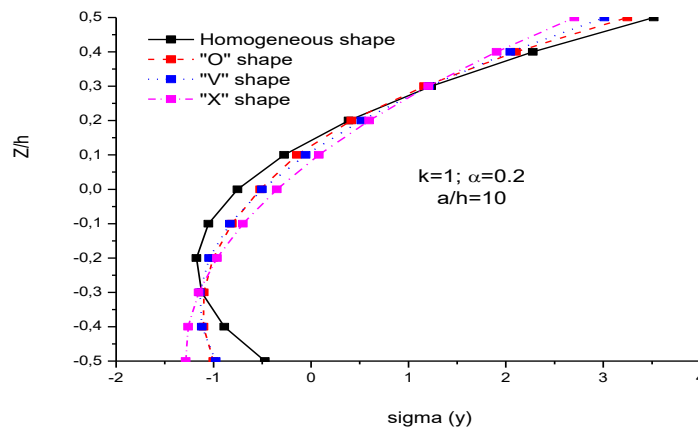


Figure IV.5 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a / h = 10$; $\alpha=0.2$).

Les figures IV.6 à IV.7 montrent l'influence de la forme de distribution de la porosité sur les contraintes de cisaillement avec un coefficient de porosité $\alpha=0.2$. Il est clair que les distributions ne sont pas paraboliques. De plus, la contrainte de cisaillement est maximale pour la forme de distribution de porosité en H et elle est minimale pour la forme de distribution de la porosité en X.

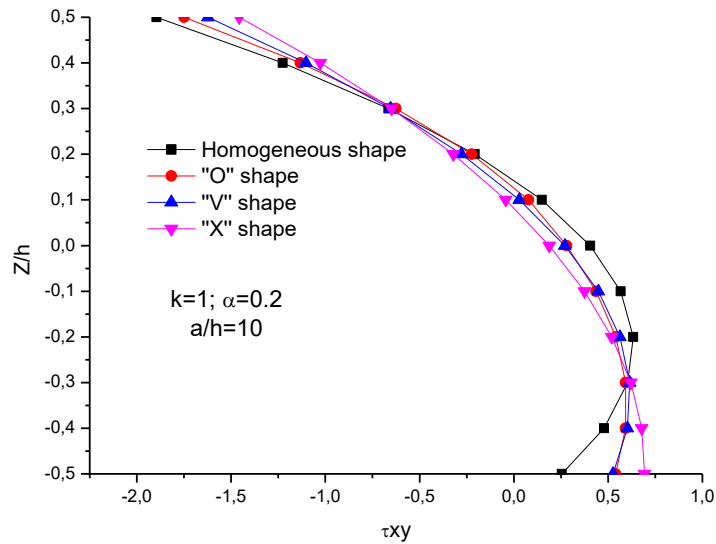


Figure IV.6: Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a / h = 10$; $\alpha=0.2$)

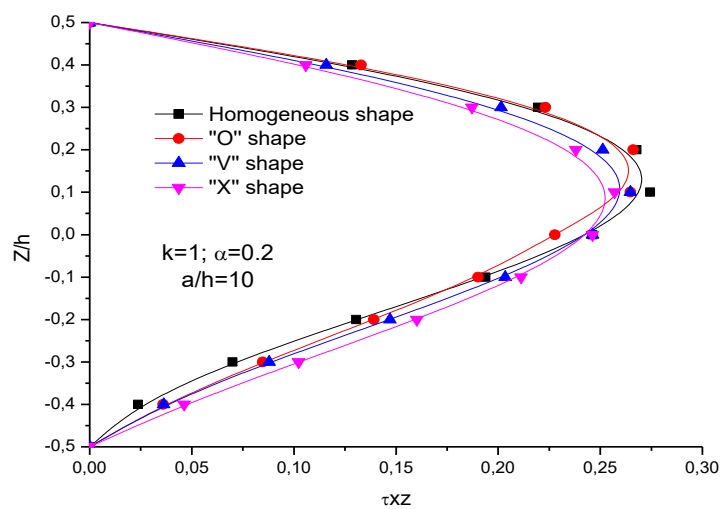


Figure IV.7 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement à τ_{xz} travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a / h = 10$; $\alpha=0.2$)

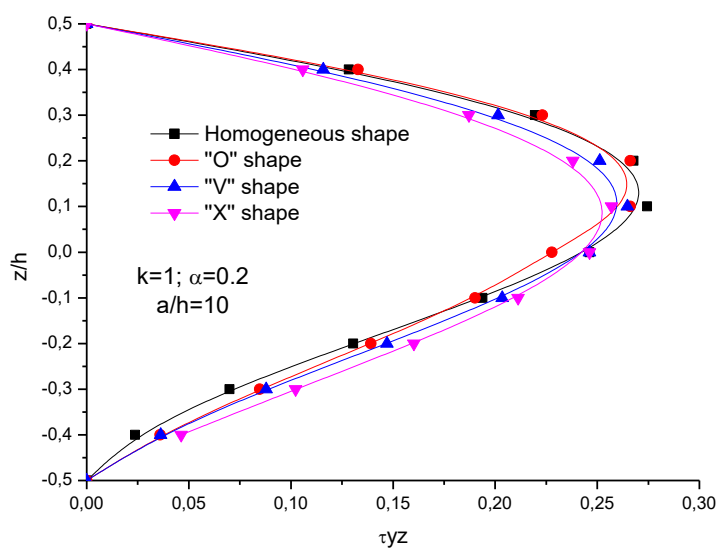


Figure IV.8: Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$; $\alpha = 0.2$).

IV.4. Analyse dynamique :

La précision de la présente théorie proposée est également étudiée par l'analyse de la vibration libre des plaques poreuses en matériau FGM. Quatre formes de distribution de la porosité à l'intérieur du matériau sont considérées à savoir :

- Distribution de porosité de forme Homogène H.
- Distribution de porosité de forme O.
- Distribution de porosité de forme X.
- Distribution de porosité de forme V.

Les propriétés des matériaux utilisés dans la présente étude sont :

Métal (Aluminium, Al) $E_m = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho_m = 2702 \text{ Kg/m}^3$.

Céramique (Zirconia, ZrO₂): $E_c = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 5700 \text{ Kg/m}^3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes des fréquences fondamentales naturelles adimensionnelles :

$$\bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right)$$

Afin de valider la présente théorie proposée, une étude comparative a plusieurs paramètres variés est réalisée.

le tableau IV.5 présente la fréquence propre pour le mode de vibration fondamental (n =m =1) avec différent rapport a/h de la plaque obtenus à partir de la présente théorie de cisaillement et comparés à ceux obtenus par les résultats de la théorie de déformation de cisaillement (ZSDT) développée par Dharan (Dharan et al.2010), le modèle de Reddy basé sur la théorie d'ordre élevé HSDT (Reddy 2000), et la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre HSDT développé par Trung et al. 2008.

A partir des résultats trouvés dans ce tableau, On constate un bon accord entre les résultats de la présente théorie avec les autres théories existantes dans la littérature quand la plaque est parfaite(α=0). En introduisant le paramètre de la fraction volumique de porosité(α), on peut constater que l'augmentation de ce facteur conduit à une augmentation de la fréquence propre de vibration ce qui montre que la porosité a une influence significative sur la fréquence des plaques poreuse en FGM.

Tableau IV.5:la fréquence fondamentale de la plaque Al/ZrO2 pour différentes valeurs du rapport a/ h

a/h	Theory	Formes	α	$\bar{\omega}$	
5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)		α = 0	5.6554	
	HSDT (Reddy 2000)		α = 0	5.6914	
	HSDT2 (Trung, 2008)		α = 0	5.7123	
	Present	Homogène	α = 0	5.6780	
			α = 0.1	5.9342	
			α = 0.2	6.2283	
			Forme O	α = 0	5.6780
				α = 0.1	5.7882
				α = 0.2	5.9034
			Forme X	α = 0	5.6780
				α = 0.1	5.6780
				α = 0.2	5.6780
		Forme V	α = 0	5.6780	
			α = 0.1	5.8019	
			α = 0.2	5.9342	
	ZSDT		α = 0	6.18	
	HSDT (Reddy 2000)		α = 0	6.1863	

10	HSDT2 (Trung, 2008)		$\alpha = 0$	6.1932
	Present	Homogène	$\alpha = 0$	6.1814
			$\alpha = 0.1$	6.4986
			$\alpha = 0.2$	6.8701
		Forme O	$\alpha = 0$	6.1814
			$\alpha = 0.1$	6.3293
			$\alpha = 0.2$	6.4878
		Forme X	$\alpha = 0$	6.1814
			$\alpha = 0.1$	6.1814
			$\alpha = 0.2$	6.1814
	Forme V	$\alpha = 0$	6.1814	
		$\alpha = 0.1$	6.3340	
$\alpha = 0.2$		6.4986		
20	ZSDT		$\alpha = 0$	6.3359
	HSDT (Reddy 2000)		$\alpha = 0$	6.3371
	HSDT2 (Trung, 2008)		$\alpha = 0$	6.339
	Present	Homogène	$\alpha = 0$	6.3357
			$\alpha = 0.1$	6.6737
			$\alpha = 0.2$	7.0724
		Forme O	$\alpha = 0$	6.3357
			$\alpha = 0.1$	6.4969
			$\alpha = 0.2$	6.6708
		Forme X	$\alpha = 0$	6.3357
			$\alpha = 0.1$	6.3357
			$\alpha = 0.2$	6.3357
Forme V	$\alpha = 0$	6.3357		
	$\alpha = 0.1$	6.4982		
	$\alpha = 0.2$	6.6737		

Dans la figure IV.9, la relation entre le rapport (a/h) de la plaque et la fréquence fondamentale est présentée pour différents modèles de porosité avec un indice matériel $k = 2$ et un coefficient de porosité α est égal 0.2. On remarque sur cette figure que la différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation du rapport (a/h). Avec des valeurs plus élevées de (a/h) de la plaque, les distributions de porosité jouent un rôle important sur le comportement de vibration libre des plaques poreuses en FGM. La forme de distribution de la porosité homogène H donne les plus grandes valeurs de la fréquence fondamentale. Le modèle de porosité V et O donne presque les mêmes valeurs de fréquence de vibration. De plus, le résultat du modèle de porosité X donne les valeurs les plus basses de la fréquence fondamentale. La raison de cette situation est que le vide empile plus dans la distribution de porosité X, et donc la rigidité des plaques est la plus faible dans le modèle de porosité X. En conséquence, le modèle de porosité X donne la fréquence fondamentale la plus basse contrairement aux autres modèles de porosité.

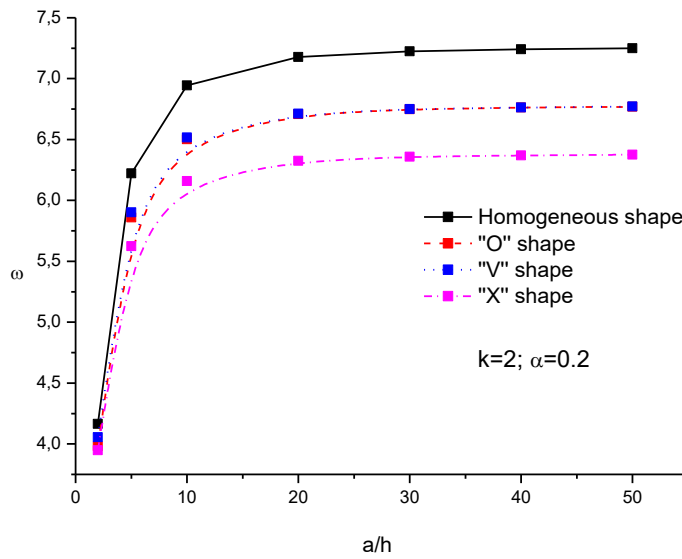


Figure IV.9 : Effet de la forme de la distribution de porosité sur la fréquence fondamentale adimensionnel ω en fonction du rapport par rapport (a/h) d'une plaque carrée en FGM ($k=2$).

La figure **IV.10** montre les effets du coefficient de porosité α sur la fréquence fondamentale adimensionnel pour $k=2$ et $a/h=10$. Comme le montre la figure IV.10, l'augmentation du coefficient de porosité α permet d'augmenter considérablement la différence entre les modèles de porosité et les résultats des modèles de porosité V et O sont très proches.

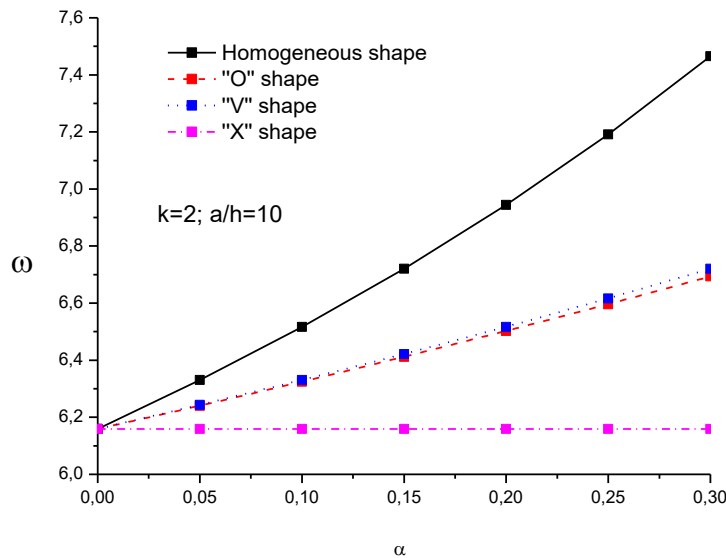


Figure IV.10: Effet du coefficient de porosité α sur la fréquence fondamentale adimensionnel ω de la plaque FGM ($k = 2$)

IV.5. Conclusion : Dans ce chapitre, on a présenté les résultats de l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques poreuses en matériau FGM. L'étude s'est basée sur l'effet de la forme de distribution de la porosité sur la flexion et la vibration libre de la plaque FGM en utilisant la théorie de cisaillement hyperbolique à quatre variables. Quatre formes de porosité sont utilisées. La méthode Navier est utilisée pour résoudre le problème. Les effets du coefficient de porosité, des modèles de porosité, du paramètre de distribution de la FGM, du rapport entre le côté et l'épaisseur sur la flexion et la vibration libre des plaques de FGM sont étudiés. Les résultats numériques montrent que le rapport entre les côtés et l'épaisseur a une grande influence sur les effets de la porosité pour les plaques FGM. On peut également conclure que la forme de distribution de la porosité a un effet significatif sur les déflexions des plaques FGM ainsi que sur les contraintes normales et de cisaillement développées dans la plaque.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif de notre travail de recherche était d'étudier le comportement de flexion et de vibration des plaques en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » en faisant introduire les différentes formes et fraction de porosité.

En premier lieu Nous avons présenté une méthode analytique qui se base sur un champ de déplacement à quatre inconnus, cette théorie de cisaillement d'ordre élevé prend en considération la distribution parabolique des contraintes de cisaillement dans la plaque en matériaux à gradient de propriétés.

En second lieu, des résultats numériques sont présentés dans le dernier chapitre sous forme de tableaux et de graphes qui représentent la variation des déplacements et des contraintes sous différents paramètres et les conclusions tirées de cette étude sont les suivantes :

-Les résultats obtenus par la présente théorie de cisaillement sont presque identiques avec ceux trouvés à partir des théories de déformation de cisaillement disponibles dans la littérature.

-La flèche augmente avec l'augmentation de l'indice matériel k .

-La flèche, les contraintes normales et tangentielles dépendent des géométries de la plaque et de l'indice matériel k .

-La flèche adimensionnel diminué en augmentant le rapport (a/b) de la plaque.

-La flèche pour une plaque avec le modèle de distribution de porosité uniforme H est la plus élevée par rapport aux autres modèles de plaques FGM imparfaites.

-La forme de distribution de porosité en X donne la plus faible flèche adimensionnel

- La forme de distribution de porosité en V et en O donne à peu près les mêmes valeurs de la flèche adimensionnelle.

La contrainte normale est maximale pour la forme distribution de porosité homogène H , et elle est minimale pour la forme de distribution de porosité en X .

-Les fréquences de vibration, la différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation du rapport (a/h) .

-La forme de distribution de la porosité homogène H donne les plus grandes valeurs de la fréquence fondamentale.

Le modèle de porosité V et O donne presque les mêmes valeurs de fréquence de vibration. Le résultat du modèle de porosité X donne les valeurs les plus basses de la fréquence fondamentale.

En conclusion, on peut dire que la précision et l'efficacité de la présente théorie de cisaillement a été bien démontrée pour l'étude de flexion et vibration des plaques en matériaux à gradient de propriétés avec différentes formes de porosité.

Référence bibliographique

[A. HOUARI, 2021], Endommagement dans les plaques entaillées en FGM, Sidi bel abbes, 2021.

[A.SAID, 2016], Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil, Sidi Bel Abbes, 2016.

[Afaq 2003], Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches, In Comptes-rendus des 13emes Journées Nationales sur les Composites, 289-292. Strasbourg, March 2003.

[Aydogdu 2005], Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, International Journal of Mechanical Sciences 47, 1740–1755, 2005.

[I. BELKORISSAT], Etude de la réponse dynamique des plaques FGM avec la prise en compte de l'effet d'échelle, Sidi Bel Abbes , 2015.

[Kirchhoff.1850] ,Uber das gleichgewicht und die bewegungeinerelastischenscheibe. Journal fur reine und angewandteMathematik, 40, 51, 88, 1850.

[Koizumi.1992]. The concept of FGM. Ceramic transaction, functionally graded materials 34, 3–10, 1992.

[L. Hadji,2012] ,« contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM »,thés de doctorat de l'université Djilali liabes de sidi bel Abbes ,2012.

[Liberescu 1967].On the theory of anisotropic elastic shell and plates.Int J Solids Structures, 3, 53, 68, 1967.

[MELLALI, 2019], Analyse du flambement thermique des matériaux FGM piézoélectriques, Ain T'émouchent, 2019..

[Miyamoto Y.] . Kaysser W., Rabin, B., Kawasaki, A Ford, R.G. Functionally graded.1993.

[Nguyen.2004].Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

[**Nora Kassimi**,]«étude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par une plaque en matériaux composites» mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.

[**R.MEKSI, 2019**], investigation sur les différents comportements mécaniques des structures en matériaux composites avancés, Sidi Bel Abbes, 2019.

[**Reddy 1987**], A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plate. Commun. Appl. Numer. Methods, 3, 173,180, 1987.

[**Reissner1961**]Reissner, E., &Stavsky, Y., Bending and stretching of certain types of hetero-geneous anisotropic elastic plate. J. appl.mech., 28, 402,408, 1961.

[**RK.BOUAFIA, 2017**], Etude du comportement physique des nanostructures pour les matériaux gradués (F.G.M), Sidi Bel Abbes, 2017.

[**S. BRAIRI, 2019**], analyse de la dégradation des structures FGM renforcées par FRP précontraints, université aboubekrbelkaid-Tlemcen, 2018/2019.

[**Touratier**], An efficient standard plate theory. EngngSci, vol. 29(8), 901-916, 1991.

[**Whitney 1973**]. Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads J. Applied Mechanics, 40, 302-304, 1973.

[**Yashihisa 15**], Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39- 51-B, Vol. 39-B, Mar., 2004.

(**Ambartsumyan 1969**)Ambartsumyan. S.A. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.

(**Reissner 1945**)] E. Reissner, «The Effect of Transverse Shear Deformations on the Bending of Elastic Plates,» n° 112: A69-A77., 1945.

[**Reddy 1984**].Reddy.J.N.A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.