



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN - TIARET-**  
ANNEXE SOUGUEUR

**MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES**

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : **PHYSIQUE**

Spécialité : **Physique Energétique & Energies Renouvelables**

Par : **YOUNES Naceur**

**THÈME**

Etude du comportement mécanique des nano-structure FGM en flexion statique, flambement et vibration libre en utilisant non local théorie

*Soutenue publiquement le : 04 / 07 /2019      devant le Jury composé de:*

BOUSMAHA Mohamed	M. C .B	Université de Tiaret	Président
KHAROUBI Bachir	M. C .B	Université de Tiaret	Examineur
RAKRAK Kaddour	M. C. B	Université de Tiaret	Encadreur
BENAHMED Abdelillah	Doctorat	Université de Tiaret	Co-Encadreur

**PROMOTION 2018 /2019**

# Dédicaces

*Je dédie ce travail à mes chers parents pour leurs*

*Compréhensions, leur amour et leurs sacrifices pour me voir réussir*

*A mes frères, à toute ma famille, mes très chers enfants Mohamed ali  
faiz , Fares radhouane , Loudjaine sarra .*

*Mes collègues et mes meilleurs amis.*

*A toutes les promotions sortantes 2018-2019 Master II PHYSIQUE*

*Et enfin à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

***YOUNES NACEUR***

# REMERCIEMENT

Avant tout, je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a aidé et m'a donné le courage de continuer mes études et réaliser ce modeste mémoire.

Je voudrais également exprimer mes plus forts remerciements à ma chère famille pour leur encouragement et leur amour...

Je tiens à remercier vivement tous les enseignants qui nous ont facilité la tâche et qui nous ont éclairé le chemin de réussite.

Je tiens à remercier mes encadreurs Dr : **RAKRAK KADDOUR** et Mr : **BENAHMED ABDELILLAH** de m'avoir aidé et orienter.

Je tiens également à remercier tous les membres du Jury [**Dr. BOUSMAHA Mohamed**] et [**Dr. KHAROUBI Bachir**] qui ont consacré leur temps pour examiner ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce travail.

# Sommaire

---

# Sommaire

**Dédicace**

**Remerciement**

**Sommaire**

**Liste des figures et des Tableau**

**Liste des symboles**

**Introduction générale**

## **Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)**

I.1	Introduction: .....	5
I.2	Définition des FGM : .....	6
I.3	Historique : .....	8
I.4	Les méthodes d'élaboration des FGM .....	10
I.5	Les types des matériaux fonctionnellement gradués : .....	18
	I.5.1 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM : .....	20
	I.5.2 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM : .....	21
	I.5.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM : .....	22
I.6	Domaines d'application .....	23
I.7	L'intérêt d'utilisation des FGM .....	25
I.8	Conclusion .....	26

## **Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres**

II.6.1	Introduction .....	27
II.6.2	Aperçu historique des théories des poutres .....	27
II.6.3	Le comportement des poutres composites .....	28
II.6.4	Les différents types de poutres .....	28
II.6.5	La modélisation des poutres .....	29
II.6.6	Résolution des problèmes d'élasticité .....	31
II.6.7	Approche en déplacement .....	31
II.6.8	Approche en contraintes .....	32
II.6.15	Choix d'une méthode de résolution .....	33
II.7	Théories des poutres selon la prise en compte du cisaillement : .....	33
II.7.1	La théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli): .....	33
II.7.2	La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre(Timoshenko) : .....	35
II.7.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) : .....	38
II.8	Théories des poutres selon la prise en compte de l'effet d'échelle : .....	41
II.8.1	La théorie locale d'élasticité : .....	41
II.8.2	La théorie non locale d'élasticité : .....	41
II.9	Conclusion.....	43

### **Chapitre III : Formulation mathématique**

III.1	Formulation théorique : .....	45
III.2	Matériaux fonctionnellement gradués : .....	45
III.3	Hypothèses de base : .....	46
III.4	Cinématique : .....	47
III.5	Relations constitutives : .....	47
III.6	Equations de mouvement : .....	48

III.7 La solution analytique pour la poutre nano-FGM simplement appuyé:.....50

### **Chapitre IV : Résultats et discussions**

IV.1 Caractéristiques des matériaux:.....52  
IV.2 Comparaison des études:.....52  
IV.3 Etude paramétrique : .....55  
IV.4 Conclusion.....**Error! Bookmark not defined.**

### **Conclusion Générale**

### **Référence bibliographique**

### **Résumé**

## Liste des figures

---



## Liste des figures

Fig. I 1.	Une vue de la microstructure des FGM.	02
Fig. I 2.	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]	03
Fig. I 3.	Différences structurelle entre les matériaux FGM et les composites traditionnels : Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c) [Yoshihisa 2004].	04
Fig. I 4.	Principe de la méthode de couplage en bande.	07
Fig. I 5.	Une vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux	09
Fig. I 6.	Principe de la méthode projection plasma.	10
Fig. I 7.	Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC /C FGM par le dépôt chimique en GM par le dépôt chimique en Phase vapeur (CVD)	12
Fig. I 8.	Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel	14
Fig. I 9.	La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre E-FGM.	17
Fig. I 10.	La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P -FGM	18
Fig. I 11.	La variation du module de Young d'une poutre S-FGM	19
Fig. II 1.	La cinématique de la théorie classique des poutres.	31
Fig. II 2.	Schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT).	33
Fig. II 3.	La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie de Timoshenko.	34
Fig. II 4.	Illustration de la cinématique de la poutre d'ordre élevé.	35
Fig. II 5.	La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé.	36
Fig. III 1	Schéma général de la poutre fonctionnement graduée	42

## Liste des tableaux

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	15
Tableau IV 1	Flèches non-dimensionnelle (w) de la poutre nano-FGM pour une charge uniformément répartie.	

Tableau IV 2 La charge critique du flambement non-dimensionnelle ( $\bar{N}$ ) de la poutre *nano-FGM*

Tableau IV 3 La fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) de la poutre *nano-FGM*

## Liste des symboles

---

# Liste des notations

FGM	Functionally graded material (matériau fonctionnellement Gradué)
E-FGM	FGM avec fonction exponentielle
P-FGM	FGM avec fonction polynomiale
S-FGM	FGM avec fonction sigmoïde
$E(z)$	Modules de Young effectifs
$h$	Hauteur de la poutre
$V(z)$	Fraction volumique de la matière constituante
$k$	Paramètre matériel
$E_1$	Module de Young du 1er matériau (fibre inférieur)
$E_2$	Module de Young du 2eme matériau (la fibre supérieur)
$V_1$	Fraction volumique du 1er matériau
$V_2$	Fraction volumique du 2eme matériau
$R_T$	Le rayon de la Terre
$R_B$	Le rayon d'un ballon de football
$R_f$	Le rayon d'un fullerène
$d$	Diamètre du nanotube
$a$	Longueur de la liaison C=C
$S$	Surface plane de la poutre
$G$	Centre de gravité de la poutre
$u(x, z)$	Déplacement dans la direction des "x"
$u_0(x)$	Déplacement de la ligne moyenne dans la direction des "x"
$w(x)$	Déplacement dans la direction des "z"

$w_0(x)$	Déplacement de la ligne moyenne dans la direction des "z"
$\gamma_{xz}$	Distorsion dans le plan xz
$\tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement dans le plan xz
$\varphi_y$	Rotation du au cisaillement
$\psi(z)$	Fonction de gauchissement
$b$	Largueur de la poutre
$L$	Longueur de la poutre
$q(x)$	Chargement transversal
$N_0$	Charge axiale
$P(z)$	Propriété matérielle de la poutre
$P_t$	Propriétés matérielles correspondantes aux surfaces Supérieures
$P_b$	Propriétés matérielles correspondantes aux surfaces Inférieures
$w_b$	La flèche : composante de flexion
$w_s$	La flèche : composante de cisaillement
$\sigma_z$	Contrainte normale dans la direction des "z"
$u_b$	Déplacement axial du à la flexion
$u_s$	Déplacement axial du au cisaillement
$\varepsilon$	Déformation axiale
$E$	Module de Young
$\mu$	Paramètre non local
$e_0$	Constante appropriée pour chaque matériau
$a$	Rapport entre la longueur caractéristique interne et celle des Caractéristiques externes
$N$	Effort normal interne
$M_b$	Moment de flexion résultant

$M_s$	moment de flexion du au cisaillement
$I_0, I_z$	inertie massique
$\rho$	masse volumique
A, B, D, E, F, H	composantes de la rigidité
$U_n, W_{bn}, W_{sn}$	paramétrés arbitraires constituant le champ de déplacement
$\omega$	fréquence propre
$Q_n$	coefficients de Fourier associés à la charge

# Introduction Générale

---

### *Introduction Générale*

Le développement des matériaux composites a ouvert la voie à l'association de propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une seule pièce. L'optimisation locale de ces propriétés en associant un matériau très dur à la surface d'un matériau tenace pose cependant des problèmes d'interface. La transition abrupte de composition peut entraîner localement des concentrations élevées de contraintes, et dans le cas des matériaux composites, il existe un risque de décollement des fibres de la matrice dans certaines conditions de chargement extrêmes.

Pour résoudre ce problème, une solution consiste à utiliser un matériau à gradient de propriétés (FGM) qui présente une transition progressive des propriétés recherchées grâce à un gradient de composition et de fraction volumétrique des matériaux. Les matériaux FGM offrent un changement progressif de composition et de propriétés en fonction de l'orientation spatiale à l'intérieur du matériau, ce qui les rend efficaces pour résoudre ce problème.

Parmi les différentes classes de matériaux composites, les matériaux FGM se distinguent par leur variation continue des propriétés d'une surface à l'autre. Ils offrent ainsi une transition en douceur des propriétés, permettant de minimiser les concentrations de contraintes et de prévenir le décollement des fibres.

En conclusion, l'utilisation de matériaux à gradient de propriétés tels que les matériaux FGM présente une solution efficace pour résoudre les problèmes d'interface et les risques de décollement dans les matériaux composites. Leur variation progressive des propriétés en fonction de l'orientation spatiale permet d'obtenir des performances améliorées et une meilleure résistance aux contraintes extrêmes.

La théorie de l'élasticité non locale d'Eringen [Eringen, 1972, 1983] a été développée par plusieurs auteurs en réponse aux limites de l'élasticité locale dans la gestion des problèmes élastiques présentant des singularités géométriques pointues, telles qu'une fissure pointue. Le modèle d'Eringen a été appliqué aux nano et micro-poutres d'Euler-Bernoulli par [Peddieson et al., 2003], [Sudak 2003] et [Amara et al. 2010] pour l'étude du flambement des barres en nanotubes, et utilisé par Pisano et al. [Pisano et Fuschi, 2003] pour l'étude de la traction des barres élastiques.



Reddy [Reddy 2007] a reformulé différentes théories non-locales des poutres, y compris les modèles d'Euler-Bernoulli, Timoshenko, Reddy [1984] et Levinson [1981], pour étudier la flexion statique, le flambement et la vibration libre. Adda Bedia et al. [Adda Bedia et al., 2015] ont étudié le flambement thermique des poutres en nanotubes de carbone à parois simples en forme de fauteuil incorporées dans une fondation élastique en proposant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement de premier ordre.

Après une introduction générale qui met en évidence l'importance de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (FGM) dans divers domaines, le premier chapitre de ce mémoire est consacré à une recherche bibliographique approfondie sur les FGM. Cette recherche examine les caractéristiques, les propriétés et les applications des matériaux à gradient de propriétés à travers des études antérieures.

Le deuxième chapitre aborde les généralités sur les théories des poutres. Il présente les concepts fondamentaux et les principes de base liés aux théories des poutres, y compris les différentes approches et modèles utilisés dans l'analyse des poutres.

Le troisième chapitre se concentre sur la formulation mathématique des problèmes liés aux poutres. Il expose les équations et les modèles mathématiques nécessaires pour décrire le comportement des poutres, ainsi que les conditions aux limites associées à ces modèles.

Le quatrième chapitre constitue la partie centrale de ce mémoire, où les résultats obtenus à partir des simulations numériques sont présentés et discutés. Les résultats numériques sont interprétés et analysés en relation avec les objectifs de l'étude, permettant de tirer des conclusions significatives.

Enfin, ce travail se termine par une conclusion générale qui résume les principaux résultats et contributions de l'étude menée sur les matériaux à gradient de propriétés, les théories des poutres et la formulation mathématique. Des perspectives et des recommandations pour de futures recherches dans ce domaine sont également abordées.

# **Chapitre I: Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)**

---

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

### Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

#### I.1 Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés, également connus sous le nom de FGM (Functionally Graded Materials), sont des matériaux dont les propriétés varient de manière continue sur une certaine distance. Ces matériaux sont conçus pour répondre à des exigences spécifiques en combinant différentes propriétés à travers une transition graduelle, offrant ainsi des performances améliorées par rapport aux matériaux homogènes traditionnels. La recherche sur les FGM a gagné en importance ces dernières décennies en raison de leur potentiel d'application dans de nombreux domaines, tels que l'ingénierie des matériaux, l'aérospatiale, l'énergie, la biomécanique, etc. Les FGM permettent de résoudre des problèmes couramment rencontrés dans les matériaux homogènes, tels que les discontinuités de propriétés aux interfaces, les contraintes de contraste, et les limites de performance.

Dans ce chapitre, nous présenterons une recherche bibliographique approfondie sur les matériaux à gradient de propriétés, en mettant l'accent sur les travaux les plus significatifs et les avancées récentes dans ce domaine. L'objectif est de fournir une vue d'ensemble complète des différents aspects de la recherche sur les FGM, y compris les méthodes de fabrication, les caractérisations expérimentales, les modélisations théoriques, ainsi que les applications potentielles. La recherche bibliographique sera menée en utilisant diverses sources d'informations, telles que les bases de données scientifiques, les revues spécialisées, les conférences, les thèses et les rapports techniques. Nous examinerons les travaux publiés dans les dernières décennies afin de suivre l'évolution des connaissances et des avancées dans ce domaine en plein essor.

Ce chapitre vise à fournir aux lecteurs une base solide de connaissances sur les matériaux à gradient de propriétés, en mettant en évidence les progrès réalisés et les défis à relever. Cette recherche bibliographique servira de point de départ pour les chapitres ultérieurs de cette thèse, qui exploreront plus en détail certains aspects spécifiques des FGM, tels que leur fabrication, leur caractérisation et leurs applications.

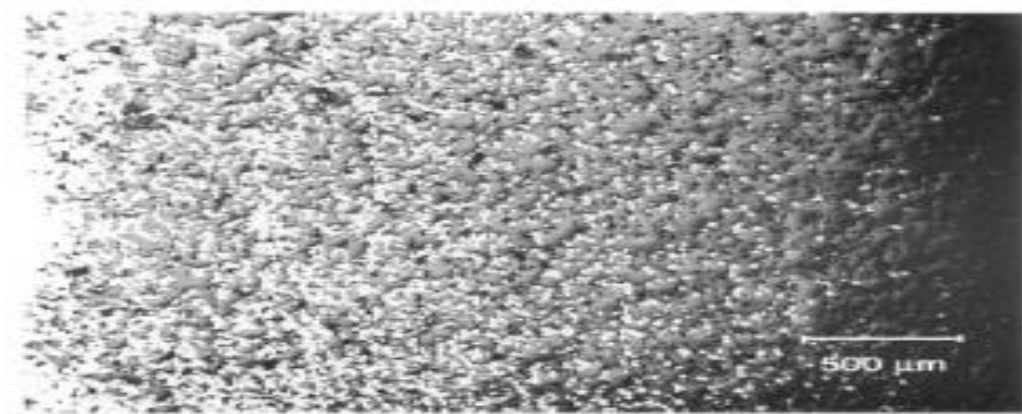
---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

### I.2 Définition des FGM :

Un matériau fonctionnellement gradué est un matériau composite qui a des propriétés mécaniques variables en suivant une fonction dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de la poutre, il est fabriqué en mélangeant les particules des phases de deux matières différentes, par exemple, métal et céramique. Autrement dit, un FGM est une classe des composites qui ont une variation continue des propriétés matérielles d'une surface à une autre. (William G.C, 2005).



*Figure I- 1 : Une vue de la microstructure des FGM.*

Par la suite, une poutre fonctionnellement graduée est définie comme une poutre dont les fractions volumiques de deux ou trois matériaux varient continuellement avec une fonction à travers une épaisseur (William G.C, 2005).

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une **transition continue** entre les deux faces. [Koizumi 1996]

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre ✱</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Figure I-2 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les Matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]**

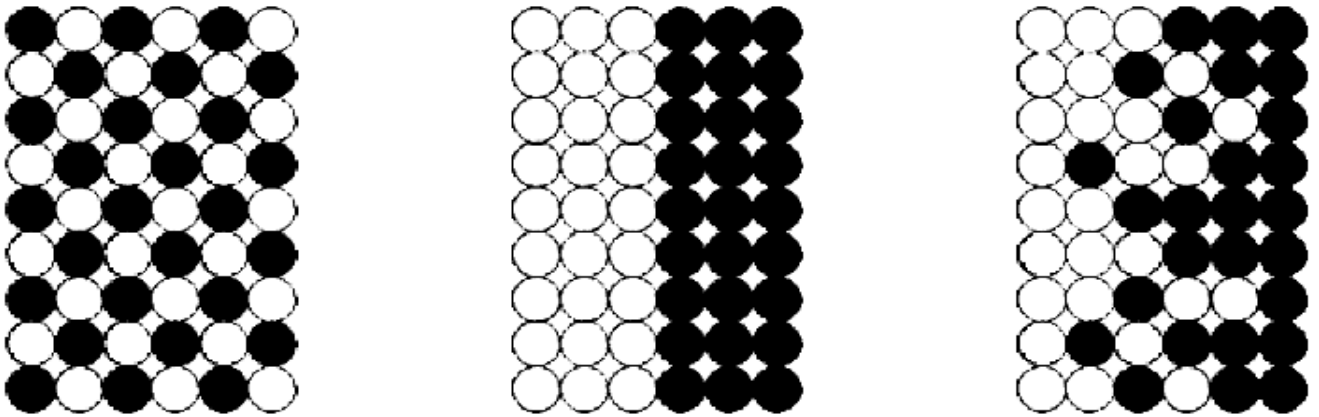
Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). [Ellen M. et al, 2001]

Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur le secteur de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face où le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément [Ellen M. et al, 2001], [Kyoungsoo Park et al. 2010], [Abdelkader Benachour et al., 2011].

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---



*Figure I-3 : Différences structurelle entre les matériaux FGM et les composites traditionnels : Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c) [Yoshihisa 2004].*

### I.3 Historique :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous. [Okamura (1991)]

À l'environ de **1984-1985**, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Ils discutaient la problématique de la résistance à de graves écarts de la température entre l'intérieur et l'extérieure et ils se confrontent à la réalité suivante : Ils n'existent pas de matériau unique supportable à une telle condition. A partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGM, ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifiques. Donc Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

Pour cela, ils ont opté pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température, quant à la surface intérieure (coté basse température), ils ont utilisé un matériau conducteur de la chaleur. [Okamura (1991)]

En **1987**, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire traitant ces FGM, et a partir de cette année leur études a pris de l'ampleur et fut utilisé par plusieurs autres chercheurs et différents laboratoires qui ont initié leur recherche en discutant sur : les méthodes de développement des FGM, la conception des matériaux, leurs production et leurs évolution.

A la fin de la première étape (**1987-1989**), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape (**1990-1991**), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc. [Okamura (1991)]

Enfin, les recherches dans ce domaine permettent de développer et d'améliorer nos connaissances sur tout sorte de comportement de ces nouveaux matériaux : thermique, dynamique, stabilité (flambement), etc.

### **I.4 Les méthodes d'élaboration des FGM**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux FGM. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation [Kieback 2003].

Dans ces dernières années, les travaux menés par les chercheurs ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnel à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradients évalués, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous,

### **I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)**

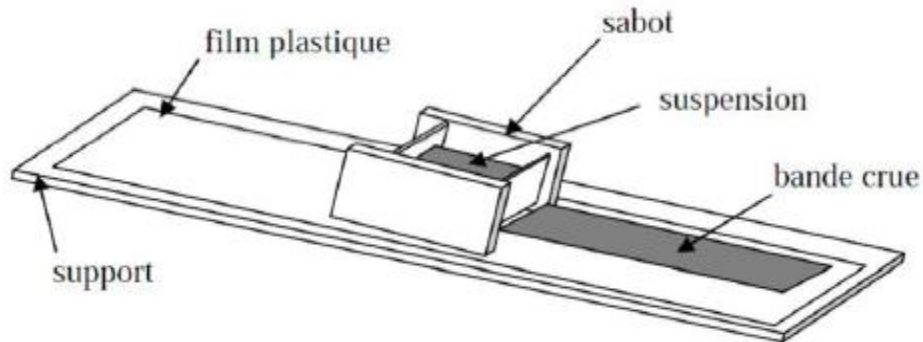
Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.4), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---



**Figure I- 4 : Principe de la méthode coulage en bande [Lostec1997]**

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour matériaux réaliser des composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo compression [Boch 1986].

### **I.5.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya1992]).
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

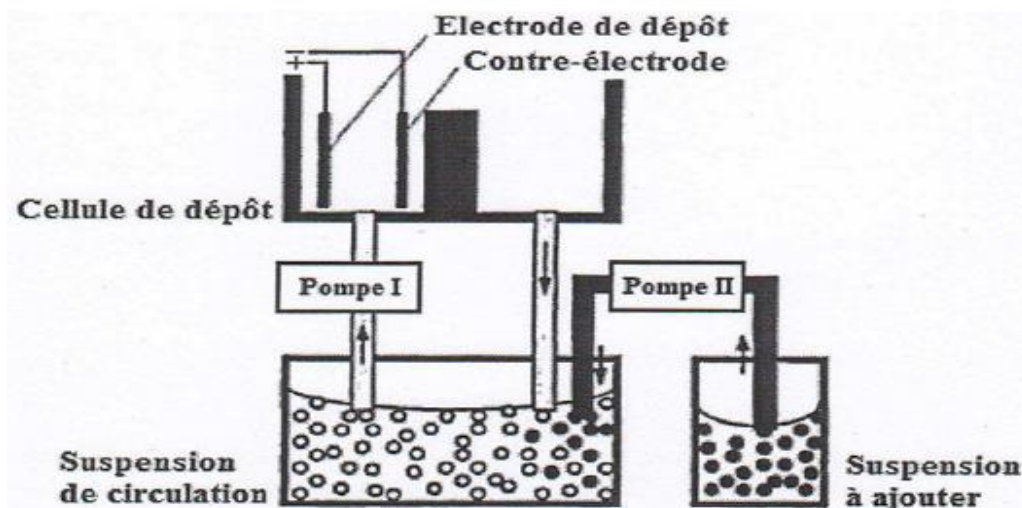
---

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### I.5.3 Dépôt par Electrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que son appel le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dès lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenu tels que le céramique-céramique  $ZrO_2/Al_2O_3$ , et le céramique-métal, WC/Co. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure I-5.



---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

*Figure I- 5: Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux*

### **I.5.4 Compaction Sèche Des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop 1993].

### **I.5.5 Projection plasma**

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100  $\mu\text{m}$ , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [Watrementz 2006]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure, à la corrosion ainsi que l'isolation thermique et électrique.

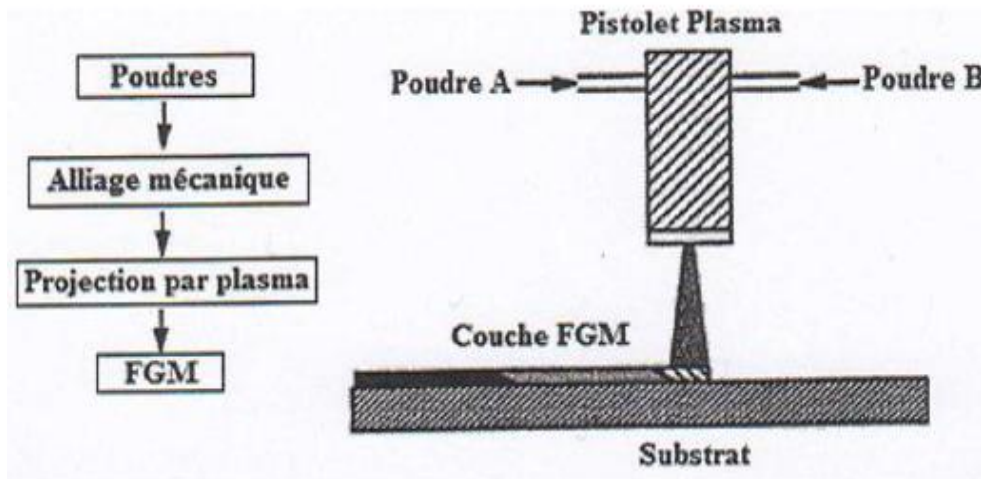
Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative [Omori et al 1998]. Ichikawa [Ichikawa 2000] a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le silicium (SiC) pour

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

former un matériau thermoélectrique transporteur concentration-gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I.6.



**Figure I- 6:** Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)

### I.5.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD est que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, qui n'exigent pas la fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons...etc. [Miyamoto 1999].

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets

---

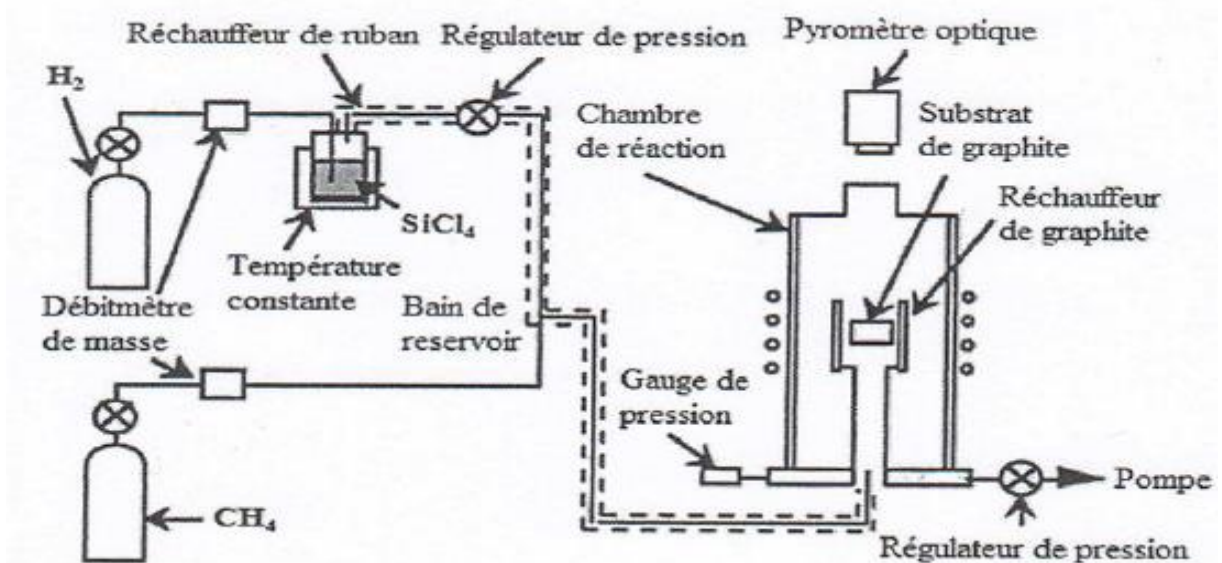
## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

Électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto 1999]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttria  $ZrO_2$ , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [Mévrel 2009].

### I.5.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la figure I.7, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrides, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto 1999].



**Figure I- 7 :** Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz ( $\text{CH}_4\text{-SiC}_{14}\text{-H}_2$ ) sont employés aux températures de dépôt entre 1400 °C et 1500 °C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

### I.5.8 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

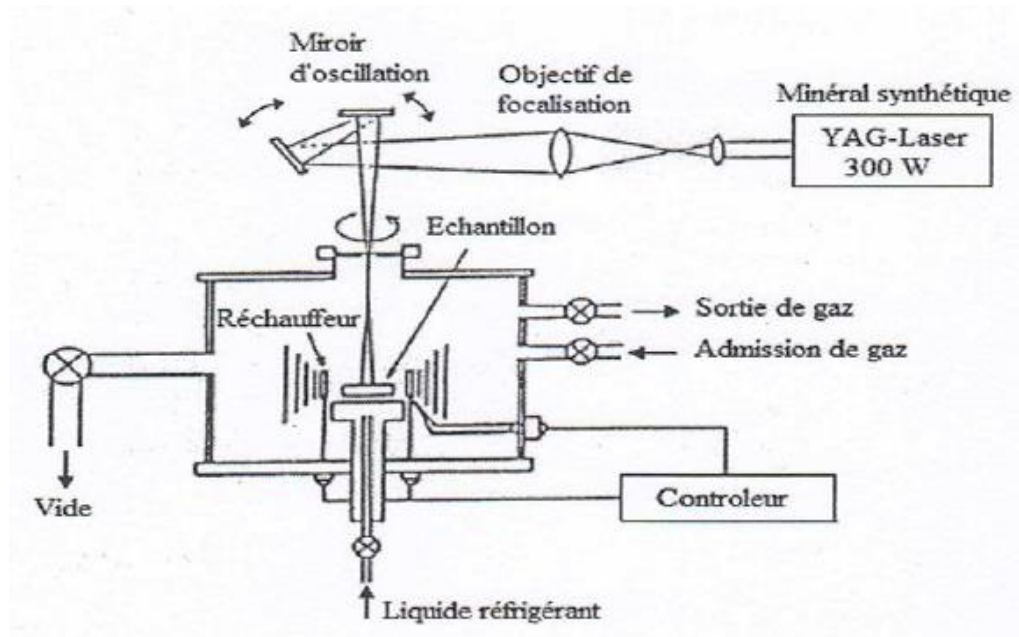
### I.5.9 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI, a utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure I.8, montre schématiquement la disposition du procédé utilisé. [Yuki et al, 1990].

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---



*Figure I- 8: Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel*

### I.5.10 Implantation ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdi 1997].

## I.5 Les types des matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux fonctionnellement gradués sont classés selon la fonction de changement des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur.

Concernant les matériaux utilisés dans les poutres FGM, on doit choisir au minimum deux matériaux afin de satisfaire le besoin du problème posé. Dans cette étude, les poutres doivent être caractérisées par une grande résistance thermique (plus de  $1000^{\circ}\text{C}$  à  $1700^{\circ}\text{C}$ ) et les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

*Tableau I- 1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.*

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"><li>✓ Bonne résistance thermique</li><li>✓ Bonne résistance à l'oxydation</li><li>✓ Faible conductivité thermique</li></ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique métal	<ul style="list-style-type: none"><li>✓ Élimination des problèmes de l'interface</li><li>✓ Relaxer les contraintes thermiques.</li></ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"><li>✓ Bonne résistance mécanique</li><li>✓ Conductivité thermique élevée</li><li>✓ Très bonne ténacité.</li></ul>

---

En partie résistante au champ thermique, les chercheurs utilisent généralement la céramique car elle se caractérise par un faible coefficient de dilatation thermique ainsi qu'une faible conduction thermique ; mais dans les environnements à haute température, c.à.d. à l'extérieur des milieux thermiques, les chercheurs utilisent du métal.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume.

Plusieurs modèles micromécaniques ont été développées au cours des dernières années pour estimer les propriétés efficaces de FGM biphasé. Le plus simple, et peut-être le plus commun, est la loi classique linéaire de mélanges qui suppose que les propriétés efficaces est la somme de chaque constituant de matériel et sa fraction de volume respective [Voigt W,1889].

Une autre méthode est la règle des mélanges modifiés [Tamura et al, 1973], ce qui est une formule empirique qui incorpore les effets d'interaction aux valeurs des contraintes et déformations liées à chaque phase. Fan et Miodownik ont proposé une loi généralisée des mélanges qui peuvent expliquer des variations de fraction de volume, la forme des grains et la distribution de la phase qui a été bien conforme à l'expérience [Fan Z, Tsakiroopoulos P, Miodownik AP, 1994].



---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

Toutefois, cette méthode nécessite un certain nombre de paramètres d'entrée, et en plus, elle est seulement appropriée pour déterminer l'efficacité de module Young ou l'efficacité des forces de rendement.

La plupart des chercheurs décrivent ces fractions en employant trois types de fonctions :

- 1- La fonction d'exponentielle E-FGM.
- 2- La fonction polynômiale P-FGM.
- 3- La fonction sigmoïde S-FGM.

### I.6.1 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

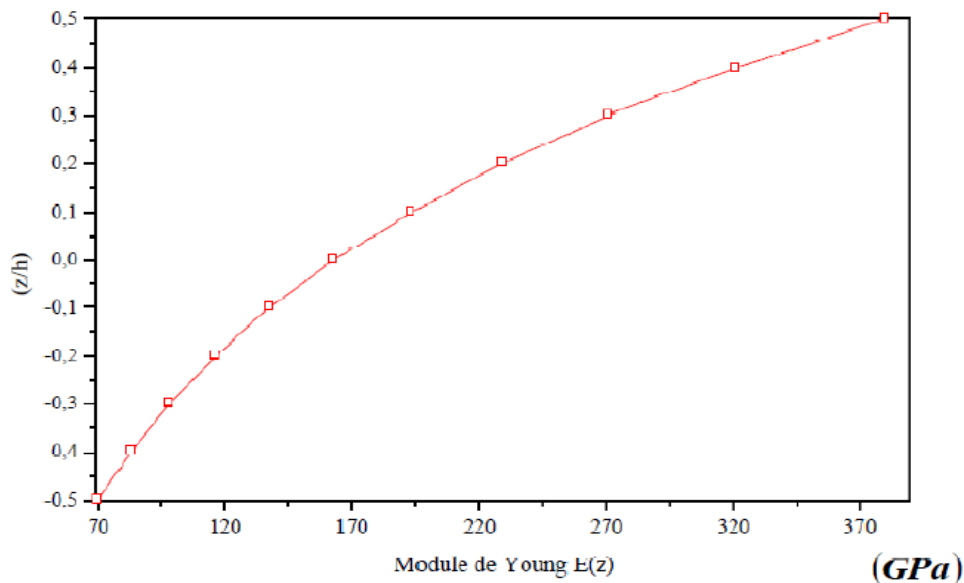
$$E(z) = E_0 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I-1-a})$$

Avec

$$B = t / h \ln(E_1 / E_2) \quad (\text{I-2-a})$$

$$E_0 = \sqrt{E_1 E_2} \quad (\text{I-2-b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure I-4.



## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

**Figure I- 9 La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre E-FGM.**

### I.6.2 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :

La fraction volumique des matériaux de type P-FGM est de la forme :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I- 3})$$

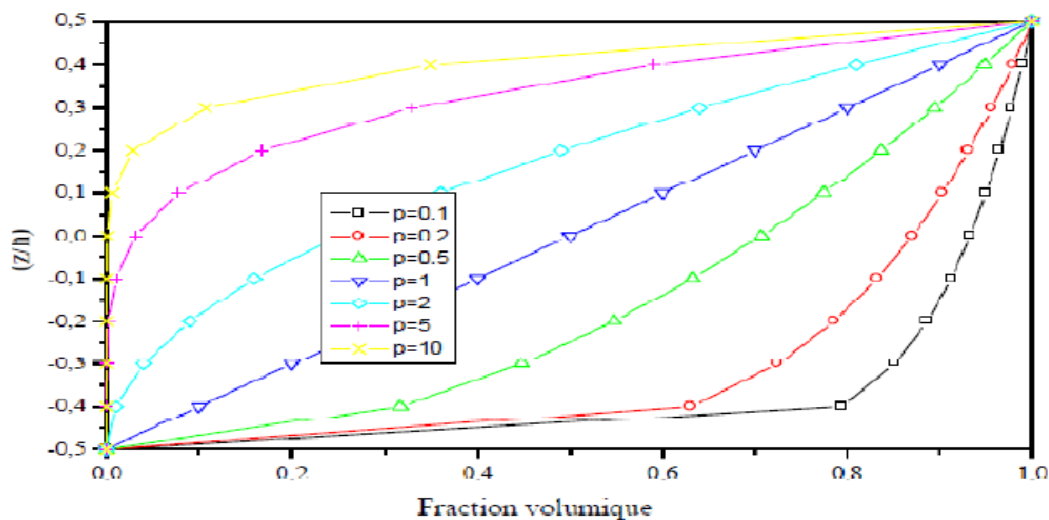
k : est un paramètre matériel.

h : est la hauteur de la poutre.

Après avoir définir la fraction volumique on peut représenter les propriétés matérielles de la poutre en utilisant la loi de mélange.

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \quad (\text{I- 4})$$

Où E1 et E2 sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure ( $z = -h / 2$ ) et de la surface inférieure ( $z = h / 2$ ) de la poutre FGM, la variation du moule de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I-5 (pour différent valeur de n)



**Figure I- 10 La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM.**

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

### I.6.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :

Pour le type S-FGM la fraction volumique prend une autre forme, en utilisant deux fonctions à travers l'épaisseur :

$$V_1(z) = 1/2 \left( \frac{h/2+z}{h/2} \right)^n \quad (\text{I- 5})$$

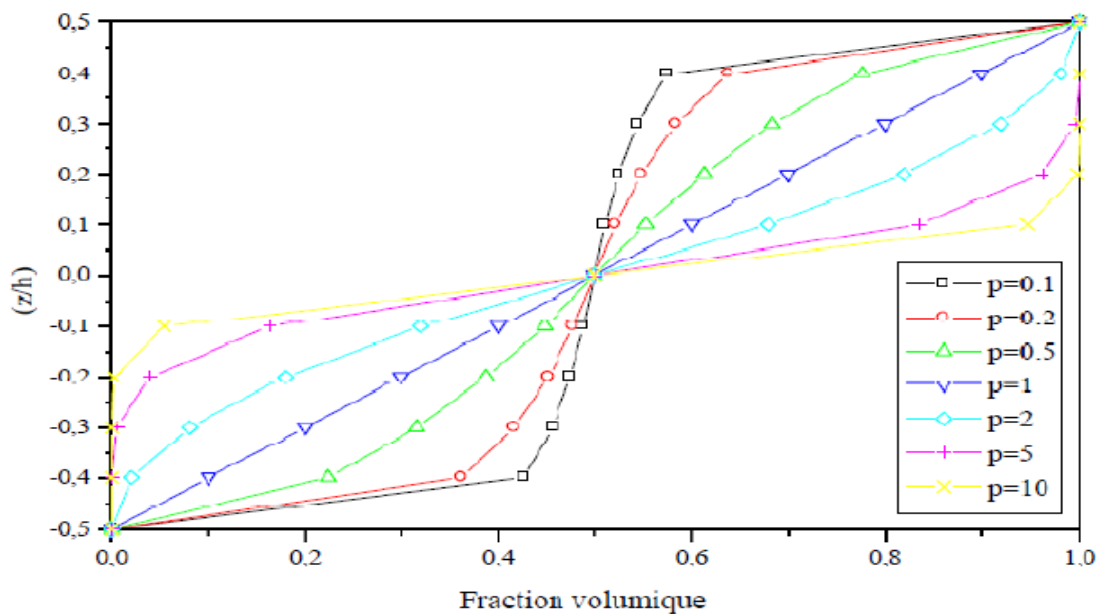
$$V_2(z) = 1 - 1/2 \left( \frac{h/2-z}{h/2} \right)^n \quad (\text{I- 6})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I- 7-a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_2 + [1 - V_2(z)]E_1 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I- 8-b})$$

La figure (I-6) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I-7-a) et (I-7-b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre SFGM).



**Figure I- 11 La variation du module de Young d'une poutre S-FGM.**

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

### I.6 Domaines d'application

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

#### I.7.1 Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Regardez deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau. À l'heure actuelle, il permet de produire le poids-léger, des matériaux solides et durables et est applicable à un large éventail de domaines tels que les matériaux de structure, le matériel de conversion d'énergie et d'autres. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. FGMs sont également applicables à un mur externe d'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

#### I.7.2 Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Un exemple a la forme d'outils. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu.. Une production à l'essai de l'outil industriel a été mené avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

---

## **Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)**

---

### **I.7.3 Optoélectronique**

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application de FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

### **I.7.4 Biomatériaux**

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, un nouveau matériau qui peut remplacer des os et des articulations et à une longue vie a été souhaité. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion, de compatibilité, mais aussi biologiques et son innocuité sont souhaitées. Les FGM technologie est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents.

Technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. L'un d'eux est, par exemple, une étude sur le renforcement de collagène structure en utilisant la technologie de classement.

### **I.7.5 D'autres**

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. FGM technologie est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et efficace de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faite de polymères fluorés ont été

---

## Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

---

développés. En outre, de nouvelles recherches mai également développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nanotechnologie de classification niveau.

### **I.7 L'intérêt d'utilisation des FGM**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM. Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures. [K.Nora,1889].

### **I.8 Conclusion**

Ce chapitre vise à fournir aux lecteurs une synthèse complète des travaux réalisés sur les matériaux fonctionnellement gradués, en les familiarisant avec l'historique, les propriétés matérielles efficaces et les différents domaines d'application des FGM. Cette synthèse servira de base pour les chapitres suivants, qui approfondiront certains aspects spécifiques des FGM, tels que leur fabrication, leur caractérisation et leurs applications avancées.

# **Chapitre II : Généralités sur les théories des**

---

## **poutres**

### Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

#### II.1 Introduction :

Les poutres sont des éléments structuraux couramment utilisés dans divers domaines de l'ingénierie, tels que la construction civile, l'aérospatiale, la mécanique, etc. Elles sont conçues pour supporter des charges et transmettre ces charges à des supports ou d'autres éléments de la structure. La modélisation et l'analyse des poutres sont donc d'une importance capitale pour garantir leur stabilité et leur fonctionnement optimal.

Les théories des poutres constituent un ensemble de concepts et de modèles mathématiques qui permettent de comprendre et de prédire le comportement des poutres soumises à diverses sollicitations. Ces théories fournissent des outils d'analyse pour évaluer les déformations, les contraintes, les réactions aux appuis, ainsi que d'autres paramètres importants.

Ce chapitre vise à présenter une introduction générale aux théories des poutres, en mettant l'accent sur les principaux concepts et les approches couramment utilisées. Nous examinerons les différentes théories existantes, telles que la théorie de Bernoulli-Euler, la théorie de Timoshenko, la théorie de la poutre de Vlasov, etc., en expliquant leurs fondements et leurs limites.

Nous aborderons également des sujets clés tels que les hypothèses de base, les déformations, les contraintes, les équations d'équilibre, ainsi que les méthodes de résolution des problèmes de poutres. Nous discuterons des applications pratiques des théories des poutres dans des domaines tels que la conception de structures, l'analyse de charge, la dynamique des poutres, etc.



### II.2 Aperçu historique des théories des poutres :

A la fin de XVI<sup>ème</sup> siècle, Galilée effectue les premiers essais connus de traction et de flexion, c'est pratiquement le premier pas dans la théorie des poutres, puis Hook énonce en 1678 la loi de proportionnalité entre les déformations et les contraintes tandis que Bernoulli étudie la flexion plane. A Varigno (1654-1722) on doit le polygone funiculaire, En 1773 Colomb donne une théorie satisfaisante de la flexion simple par l'application des équations d'équilibre interne, et Euler étudie la stabilité des pièces longues comprimées.

Ce n'est qu'à partir de 1823 que Navier établit un cours de résistance des matériaux. Ensuite Gulmann, Muller-Breslau, Mohr, Gastigliano, Ménabréa, Bresse, Clapeyron, Wilson-maney, Hardy Cross, Verechaguine, Bernard de Fontvialant établissent des relations et mettent au point des méthodes nouvelles permettant une systématisation des calculs.

Actuellement les recherches portent plus particulièrement sur : les théories mathématiques de l'élasticité, la photoélasticité, la plasticité, des matériaux nouveaux, obtenus par alliage ou par synthèse, font l'objet d'études poussées dans les domaines des hautes et basses températures et des efforts répétés.[Guy 1974].

### II.3 Le comportement des poutres composites :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple [Timoshenko 1970]. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

### II.4 Les différents types de poutres :

La poutre est l'élément structural essentiel, car elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. Les charges appliquées engendrent des forces et des moments internes dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

#### a. Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports ; un appui double et appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

#### b. Poutre console

C'est une poutre encastrée à une extrémité. Cette extrémité ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. Cette poutre est appelée aussi porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

#### c. Poutre avec poutre-à-faux

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutres isostatiques), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

#### d. Poutre continue

C'est une poutre sur plusieurs appuis, elle est statiquement indéterminée (hyperstatique), elle est traitée généralement par la méthode de trois moments (Clapyron).

#### e. Poutre à double encastrement

C'est une poutre encastrée sur les deux extrémités, elle est donc en équilibre hyperstatique, plusieurs méthodes sont disponibles pour son analyse, telles que la méthode des paramètres initiaux.

#### f. Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre bi-encastree sur les deux extremités ayant un ou plusieurs supports intermediaires. C'est donc une poutre en equilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que necessaire. Cependant, ces supports augmentent la capacite portante de la poutre mais les equations de la statique ne suffisent pas a l'analyser. Nous aurons donc recours a differentes methodes.

### II.5 Représentation mathématique des poutres :

On appelle poutre le solide engendré par une surface plane  $S$  lorsque son centre de gravité  $G$  décrit un arc de courbe  $\overline{G_1G_0}$ , le plan de  $S$  étant normal en  $G$  à cet arc.  $\overline{G_1G_0}$  est la ligne moyenne de la poutre, La section transversale, notée  $S$ , d'une poutre est définie comme la région géométrique qui représente la coupe transversale de la poutre. Le diamètre,  $D$ , de  $S$  correspond à la distance entre les deux points les plus éloignés de  $S$ . Cette définition peut s'appliquer à n'importe quel solide. Toutefois, pour spécifier la section d'une poutre, nous imposons deux conditions supplémentaires : [\[Serge LAROZE, 2005\]](#)

- Le diamètre  $D$  de chaque section droite  $S$  est faible devant la longueur  $L$  de la ligne moyenne  $\overline{G_1G_0}$ , ainsi que devant le rayon de courbure  $R$  et le rayon de torsion  $T$  de cette ligne moyenne en  $G$ .
- Si la section droite  $S$  est évolutive (non constante), ses variations (taille, forme, calage) en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  de  $G$  sur  $\overline{G_1G_0}$ , sont très lente.

Une poutre est considérée comme rectiligne lorsque sa ligne moyenne forme un segment de droite. Si, en plus, sa section  $S$  reste constante (avec des dimensions, une forme et un alignement constants), on la qualifie de poutre prismatique (ou cylindrique). Une poutre qui n'est pas rectiligne est appelée poutre courbe, qu'elle soit plane ou hélicoïdale.

Un anneau est une poutre dont la ligne moyenne forme une courbe fermée. Dans ce cas, les sections droites initiale et finale, qui se confondent, peuvent être choisies arbitrairement.

---

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

---

Le terme "tube" est utilisé pour désigner une poutre creuse, qu'elle ait une ou plusieurs cavités.

Une poutre mince est caractérisée par une section droite  $S$  constituée d'une ou plusieurs bandes dont la largeur est négligeable par rapport au diamètre  $D$  de  $S$ . Une fibre longitudinale est un tube infiniment délié engendré par un élément  $dS$  de  $S$  quand  $G$  décrit  $\overline{G_1G_0}$ .

Les théories des poutres permettent d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée des efforts et des déplacements, lorsque la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible. Il s'agit de présenter les différentes théories concernant les poutres. Les hypothèses suivantes sont les principales hypothèses partagées par ces différentes théories :

- L'axe de la poutre,  $x$ , est droit.
- La poutre se déforme dans le plan  $x - z$ , qui est le plan principal d'inertie.
- La poutre transmet des efforts normaux en direction  $x$ , des cisaillements en direction  $z$  et des moments autour de l'axe  $y$ .

La formulation d'une théorie des poutres consiste à adapter le processus utilisé pour les milieux continus à un milieu courbe en décrivant le champ de déplacement des points constituant la poutre. Les étapes successives du traitement impliquent donc la définition d'une cinématique, l'application des équations d'équilibre et l'introduction des lois de comportement. À partir de là, on peut obtenir des relations globales entre les forces, les couples, les déformations et les angles de rotation des sections de la poutre.

Dans le cas d'une poutre homogène et isotrope, la composante de cisaillement de la déformation est directement liée à l'élanement de la poutre ( $L/h$ ).

La précision de la modélisation pour chaque théorie dépend en grande partie des hypothèses proposées ainsi que la cinématique de chacune.

### II.6 Résoudre les problèmes d'élasticité

---

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

---

Deux approches existent pour la résolution du problème d'élasticité, selon que la recherche de la solution est faite en choisissant le champ de déplacement ou le champ de contrainte comme inconnue principale.

### II.6.1 Approche en déplacement :

Cette méthode repose sur le choix du champ de déplacement comme principale inconnue. En pratique, une certaine forme de ce champ est proposée, puis toutes les équations du problème sont vérifiées.

Le champ de déplacement doit satisfaire les conditions aux limites en termes de déplacement, et il est facile de calculer les déformations en dérivant ce champ, puis les contraintes en utilisant la loi de comportement. Ainsi, il est possible d'étudier si les équations d'équilibre et les conditions aux limites relatives aux contraintes sont satisfaites.

Dans le cas d'un domaine homogène, il est plus pratique d'exprimer directement les équations d'équilibre en fonction du champ de déplacement. Ces équations sont obtenues en substituant la relation entre les déformations et les déplacements dans la loi de comportement, puis en insérant cette expression dans les équations d'équilibre. Le processus de résolution avec la méthode en déplacement est :

- Postuler un champ de déplacement ;
- Vérifier les conditions aux limites sur les déplacements ;
- Vérifier les équations de Lamé-Navier ;
- Vérifier les conditions aux limites sur les contraintes ;
- Conclure grâce à l'unicité.

### II.6.2 Approche en contraintes :

La deuxième méthode de résolution consiste à rechercher directement les contraintes. Le champ de contrainte doit satisfaire les conditions aux limites relatives aux contraintes ainsi que les équations d'équilibre. Si tel est le cas, il est toujours possible d'associer à ce champ un champ de déformation  $\varepsilon$  en utilisant la loi de comportement inverse.

---

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

---

Cependant, il n'est pas garanti que ce champ de contrainte corresponde à un champ de déformation. Il est nécessaire de vérifier s'il existe un champ de déplacement tel que  $\varepsilon$  soit dérivé de ce champ de déplacement, c'est-à-dire que  $\varepsilon$  satisfait les conditions d'intégrabilité, également appelées conditions de compatibilité des déformations.

En pratique, lors d'une approche basée sur les contraintes, ces équations sont exprimées en fonction des contraintes. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser la loi de comportement.

Mais les équations obtenues sont difficiles à exploiter, c'est pourquoi elles sont combinées avec les équations d'équilibre, pour donner finalement les équations de Beltrami-Michell.

Le processus de résolution avec la méthode en contrainte est donc :

- Postuler un champ de contrainte ;
- Vérifier les conditions aux limites sur les contraintes ;
- Vérifier les équations d'équilibre ;
- Vérifier les équations de Beltrami-Michell ;
- Intégrer les déformations et obtenir le champ de déplacement ;
- vérifier les conditions aux limites sur les déplacements ;
- Conclure grâce à l'unicité.

### II.6.3 Choix d'une méthode de résolution :

Pour un problème d'élasticité linéaire admettant une solution analytique, le choix d'une méthode de résolution doit être guidé par l'intuition qui incite à faire des hypothèses sur la forme des déplacements ou des contraintes. Cependant, comme toute solution doit satisfaire les conditions aux limites du problème, l'inconnue sur laquelle les conditions aux limites sont les plus nombreuses est en général privilégiée.

La proposition d'un candidat à la solution d'un problème est alors une étape délicate, et il faut exploiter toutes les informations disponibles. En particulier, les propriétés géométriques des données du problème (géométrie du système, chargement volumique, loi

de comportement et conditions aux limites) doivent être utilisées. Elles peuvent en effet conduire à la recherche d'une solution indépendante d'une ou plusieurs variables d'espace, ou vérifiant des propriétés de symétrie. Enfin, signalons que lorsque les deux méthodes de résolution sont utilisables, la méthode des déplacements sera préférée, car moins lourde au niveau des calculs que la méthode des contraintes (l'intégration des déformations est assez fastidieuse) [Patrice Cartraud, 2011].

### II.7 Théories des poutres qui tiennent compte du cisaillement

La construction d'une théorie de poutre nécessite l'introduction de certaines hypothèses, qui sont des simplifications acceptables de la réalité. La prise en compte ou non du cisaillement est influencée par plusieurs théories de la littérature. Les trois plus courantes sont mentionnées ci-dessous.

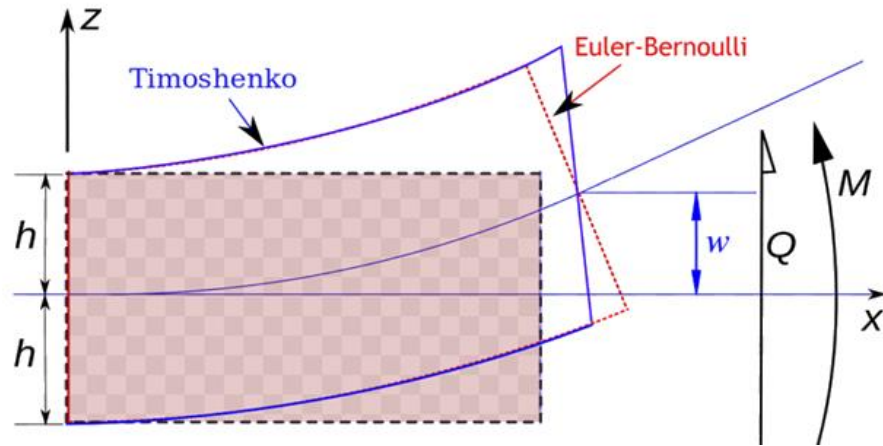
#### II.7.1 La théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli):

La théorie classique des poutres (CBT - classical beam theory) repose sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, qui stipulent qu'une section plane et normale au plan moyen de la poutre reste normale et perpendiculaire après déformation (voir Figure II 1).

De plus, en supposant que les normales ne subissent pas de changements de longueur et en tenant compte de la petitesse des déformations, cela implique que tous les points de la même section transversale ont des déplacements transversaux similaires. En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement peut se donner par :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad (\text{II-1})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{II-2})$$



**Figure II- 1 :** La description cinématique dans la théorie classique des poutres.

Ce champ se décompose en deux parties :

- Le déplacement axial de la membrane  $u_0(x)$
- Le déplacement axial dû à la flexion  $z \frac{\partial w(x)}{\partial x}$
- Le déplacement transversal  $w(x, z)$

Avec  $u_0$  : est le déplacement de la fibre moyenne et  $\frac{\partial w(x)}{\partial x}$  est la rotation due à la flexion et  $w_0(x)$  est le déplacement transversal de la fibre moyenne.

Sous ces considérations, les sections droites de la poutre ne subissent aucun glissement, en effet :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-3})$$

Qui en résulte une contrainte nulle de cisaillement :

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \cdot G = 0 \quad (\text{II.-4})$$

Avec  $G$  : le module de cisaillement transverse.

Donc on résume que le cisaillement est négligeable par cette théorie. Ce modèle donne des bons résultats pour les poutres élancées, mais il n'est pas valable pour les poutres courtes.

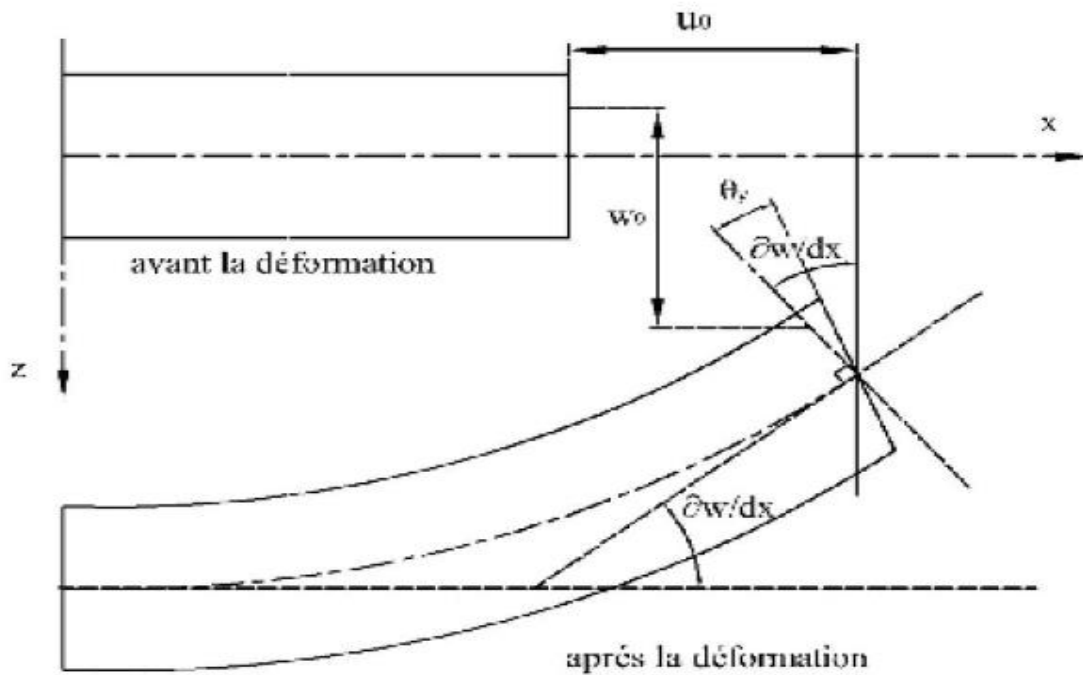


### II.7.2 Théorie de déformation de premier ordre en cisaillement (Timoshenko) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peut être utilisée comme référence dans [Reissner, 1945 ; Mindlin, 1951] qui a mené au modèle de plaque de [Reissner-Mindlin, Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger 1959], [Reddy 1997, 1999].

En tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) a prolongé la théorie classique des poutres. L'hypothèse fondamentale implique une représentation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est considéré comme un milieu curviligne. Le champ de déplacement du milieu continu est ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" définie reste plane mais non perpendiculaire. En un point quelconque du milieu curviligne, il est donc possible de résumer la solution du problème par la connaissance de trois composantes de déplacement (selon  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), et de trois rotations (de type flexion autour de  $y$  et  $z$ , et de type torsion autour de  $x$ ). Pour le cas d'une poutre plane chargée dans son plan, il ne subsiste que trois inconnues, deux translations de la ligne moyenne (respectivement  $U(s)$  et  $V(s)$  selon  $x$  et  $z$  à l'abscisse  $s$ ), et une rotation (angle  $\theta(s)$ , caractérisant la flexion autour de  $y$ ). Le champ de déplacement pour un point  $M(x, z)$  quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w}{\partial x} + z \phi_y \quad (\text{II-5})$$



**Figure II- 2 :** Schéma La théorie des poutres de Timoshenko (FSDT).

Ce champ se constitue en trois parties :

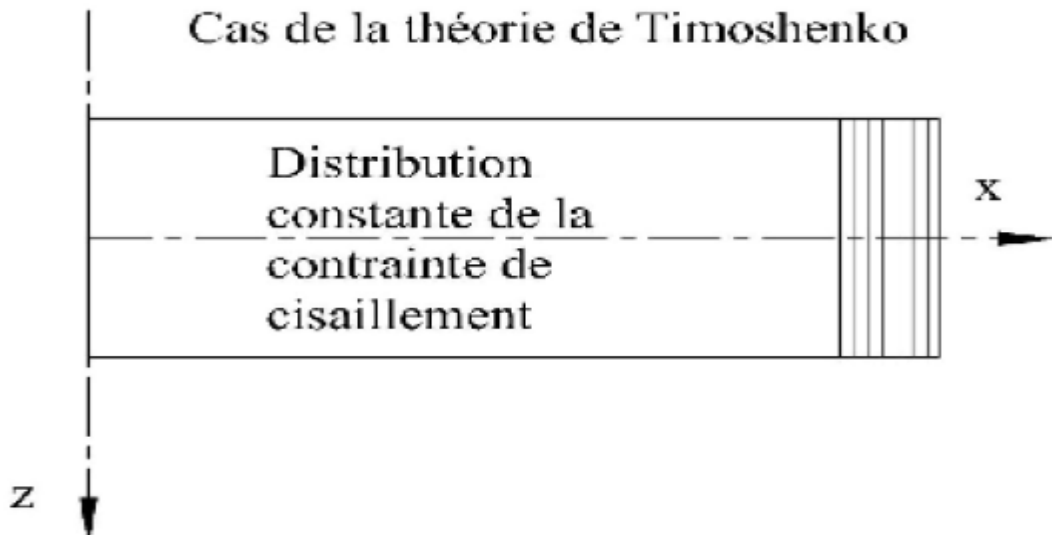
- Le déplacement axial de la membrane  $u_0(x)$
- Le déplacement axial dû à la flexion  $z \frac{\partial w}{\partial x}$
- Le déplacement dû au cisaillement  $z\phi_y$  où  $\phi_y$  est la rotation due au cisaillement.

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_y = \phi_y \quad (\text{II-6})$$

$$\tau_{xy} = \gamma \cdot G \neq 0 \quad (\text{II-7})$$

Donc, cette théorie a corrigé le défaut de la théorie classique qui ne tient pas compte du cisaillement transverse, mais au même temps ces contraintes sont constantes à travers l'épaisseur, ce qui ne représente pas la réalité. Pour cela, les chercheurs ont trouvé des coefficients correcteurs pour régler ce problème.



*Figure II- 3 : La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie de Timoshenko.*

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse du 1er ordre et celle d'ordre supérieur [Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006 ; Davoodinik, 2005; Ugural, 1981]. Un calcul plus exact trouvé dans la référence [Shyang-Ho et Yen-Ling ,2006; Nowinski, 1978 ; Zhong et Yu, 2007 ; Chabraborty et al, 2003].

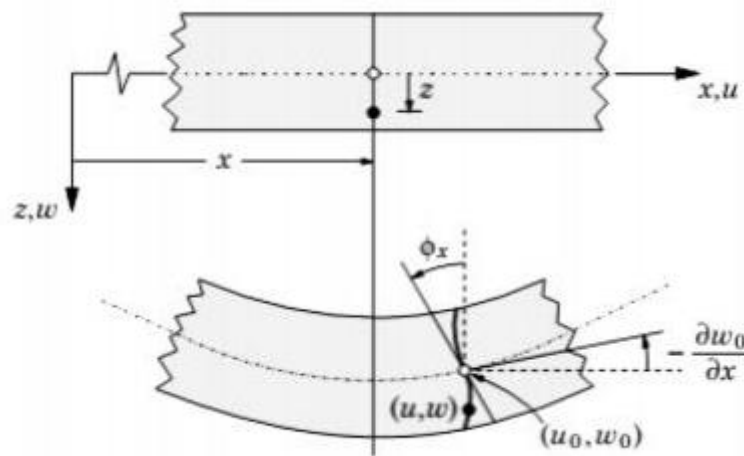
D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### **II.7.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :**

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur, contrairement à la théorie classique et à celle de Timoshenko, qui acceptent la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur. En conséquence, les effets de la déformation transversale normale et/ou de cisaillement sont pris en compte. Ces modèles ne nécessitent pas d'éléments de correction. De tels modèles peuvent être trouvés dans

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

[Hildebrand et al , 1949 ; Naghdi, 1957 ; Reissner, 1975 ; Reddy , 1984 ; Kant et Swaminathan , 2002].



**Figure II- 4 :** Illustration de la cinématique de la poutre d'ordre élevé.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{x} + \psi(z) \varphi_y(x) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

On trouve les mêmes parties : le déplacement de la membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial du au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction  $\psi(z)$  qu'on l'appelle « fonction de gauchissement » ou « fonction de forme ». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle « le gauchissement », donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la poutre. La fonction de gauchissement doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieurs et inférieurs de la poutre.

---

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

---

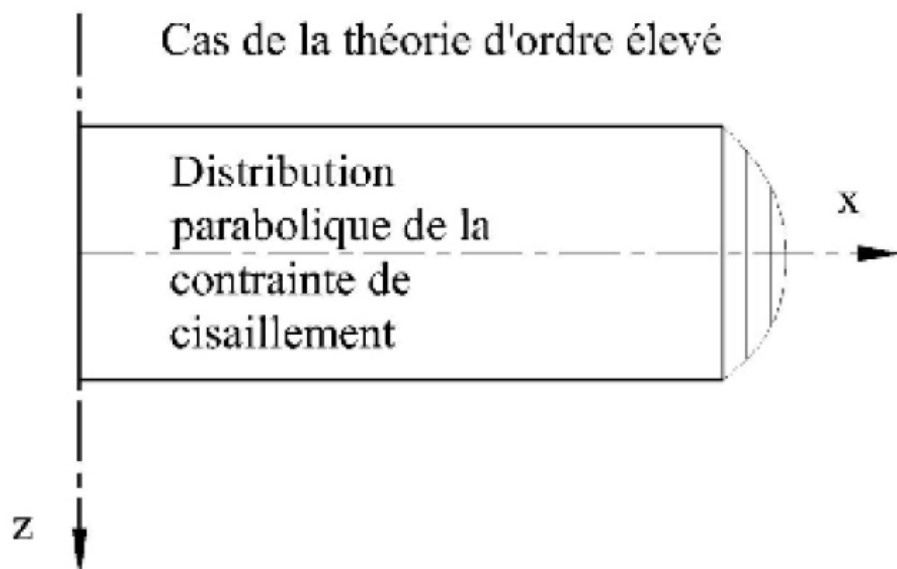
En effet, les déplacements de la théorie classique des poutres (CBT) sont obtenus en prenant  $\psi(z)$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue en mettant  $\psi(z) = z$ .

Plusieurs modèles de fonctions de forme ont été proposés par plusieurs auteurs, chacune d'elle donne des résultats comparable et très proche.

Les déplacements de théorie cubique de déformation de cisaillement (FSDT) de Reddy [Reddy, 1997 et 1999] sont donnés par :

$$\psi(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II-9})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.



**Figure II- 5 :** La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

---

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

---

Touratier [Touratier, 1991] a proposé le modèle sinusoïdal (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II-10})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear déformation plate theory ESDPT) développée par Karama [Karama et al. 2003] est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II-11})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear déformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane [Ait Atmane et al. 2010] est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]^z} - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II-12})$$

On peut décortiquer le déplacement transversal  $w(x)$  en deux parties :  $w_s(x)$  pour la flexion (bending) et  $w_b(x)$  pour le cisaillement (shear), le champ de déplacement peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ w(x, z) &= w_b(x) + w_s(x) \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

### II.8 Théories des poutres prenant en compte l'effet d'échelle :

Le domaine macroscopique et le domaine micro/nanoscopique diffèrent dans la modélisation des structures. L'effet d'échelle, qui a un impact significatif sur le comportement de ces structures à l'échelle micro et nanométrique, est la principale différence.

#### II.8.1 La théorie locale d'élasticité :

Ces théories sont celles qui existaient avant le début de l'ère de la miniaturisation des objets. Ces théories ne prennent pas en compte l'effet d'échelle dans leurs hypothèses et négligent ainsi les forces entre atomes. Elles sont applicables dans le cas des structures de grande taille, mais sont incapables d'étudier les structures à l'échelle micro ou nanométrique .

#### II.8.2 La théorie non locale d'élasticité :

Ces dernières années, l'importance croissante des micro et nanotechnologies a mis en évidence la nécessité de disposer de modèles mathématiques capables de prendre en compte les effets des structures à petite échelle. Il s'est avéré que les modèles classiques de poutres ne sont pas adéquats pour modéliser de tels systèmes. En conséquence, les chercheurs ont opté pour une nouvelle théorie dite "non-locale" qui permet de résoudre ce problème. [[Giacchino Alotta et al., 2014](#)].

Dans le cas dynamique, il y aura un raisonnement semblable  $T/\tau$  où  $T$  est le temps caractéristique externe (par exemple, l'échelle de temps des charges appliquées) et  $\tau$  est le temps caractéristique interne (par exemple, l'échelle de temps de la transmission du signal d'une molécule à une autre). Les théories classiques ne fonctionnent pas lorsque  $T/\tau$  est égal à 1, ce qui signifie que nous avons toujours besoin d'une théorie non locale.

Les théories de l'élasticité non locale se concentrent sur la physique des matériaux où le comportement d'un point matériel est influencé par l'état de tous les points du corps. La théorie non locale généralise la théorie classique du champ à deux points : (i) la validité globale de la loi de bilan énergétique pour l'ensemble du corps, et (ii) la description de

l'état du corps à un point matériel à l'aide de fonctionnels de réponse. Cela signifie qu'il est nécessaire de connaître les variables indépendantes à tous les points du corps pour décrire l'état du corps à chaque point. La terminologie utilisée dans la théorie de l'élasticité non locale doit être comprise dans ce contexte.

Eringen a été le premier à proposer l'élasticité non locale pour expliquer l'effet de l'échelle dans l'élasticité, en considérant que l'effort en un point de référence peut être considéré comme une fonction du champ de contrainte à chaque point dans le domaine. Ainsi, la taille interne peut être prise en compte dans les équations constitutives simplement en tant que paramètre matériel. [A. Cemal Eringen, 2002].

### II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré la modélisation des poutres et les différentes théories de l'élasticité utilisées dans ce domaine. Ces théories peuvent être divisées en deux catégories en fonction de deux critères. Tout d'abord, en ce qui concerne la prise en compte du cisaillement, nous avons identifié trois théories principales dans la littérature : la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timoshenko et la théorie d'ordre élevé.

Le deuxième critère concerne la prise en compte de l'effet d'échelle. Nous avons distingué deux théories : la théorie locale et la théorie non locale. La théorie locale considère les structures à l'échelle macro et ne tient pas compte des effets liés à la taille réduite. En revanche, la théorie non locale reconnaît l'importance de l'effet d'échelle et permet de modéliser les structures à l'échelle micro et nanométrique.

En conclusion, ce chapitre met en évidence l'existence de différentes théories d'élasticité pour la modélisation des poutres. Il est important de choisir la théorie appropriée en fonction des caractéristiques spécifiques de la structure étudiée, telles que la présence ou l'absence de cisaillement et l'échelle à laquelle elle se situe. L'effet d'échelle devient de plus en plus crucial dans le domaine des micro et nanotechnologies, où les structures de petite taille présentent des comportements différents de ceux des structures macroscopiques. La théorie non locale offre une approche prometteuse pour étudier ces



---

## Chapitre II : Généralités sur les théories des poutres

---

effets d'échelle et peut jouer un rôle essentiel dans l'analyse des applications liées à la nanotechnologie.

## Chapitre III : Formulation mathématique

### III.1 Introduction :

La nanopoutre, également connue sous le nom de poutre à l'échelle nanométrique, se réfère à une structure allongée et mince dont la dimension caractéristique est de l'ordre du nanomètre. Sa taille réduite lui confère des caractéristiques mécaniques particulières, telles qu'une grande résistance, une grande flexibilité et une faible inertie. Pour comprendre et modéliser le comportement mécanique des nanopoutres, il est essentiel de formuler une description mathématique précise et appropriée.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la formulation mathématique de la nanopoutre, en mettant l'accent sur les principes fondamentaux et les équations clés qui régissent son comportement mécanique. Nous explorerons les concepts de base tels que la théorie de l'élasticité linéaire, la déformation, la contrainte et les équations différentielles qui décrivent le mouvement d'une nanopoutre soumise à des charges externes.

### III.2 Élaboration théorique :

La formulation théorique de la nano-poutre fonctionnellement graduée est basée sur des hypothèses cinématiques et physiques. Le champ de déplacement assumé détermine les formes des équations différentielles et des conditions aux limites. à l'aide du concept de travail virtuel La région (voire la figure III-1) est occupée par la poutre en question.[B.abdelillah et al.]

$$0 \leq x \leq L \quad , \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{(III-1)}$$

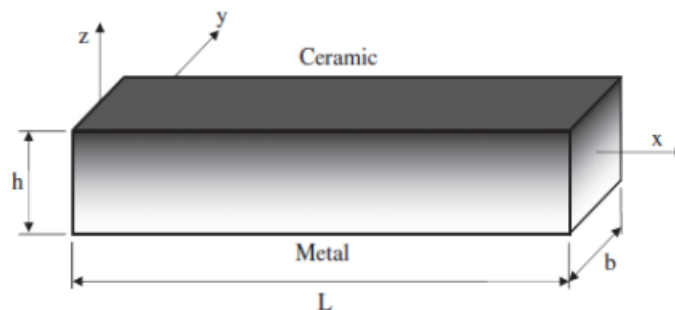


Figure III- 1 : Géométrie de la poutre FGM.

Les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  la dimension longitudinale  $L$ , la dimension transversale  $b$  et la hauteur  $h$  totale de la nano-poutre sont représentées par les variables où. Une force de compression  $N_0$  agit le long de l'axe de la nano-poutre, tandis qu'une charge uniforme  $q(x)$  est appliquée transversalement.

Selon une loi de puissance, les propriétés matérielles fonctionnellement graduées d'une nano-poutre, telles que le module de Young ( $E$ ), le coefficient de Poisson, le module d'élasticité transversale et la densité massique, varient continuellement à travers l'épaisseur de la poutre. [El Meiche et al., 2011; Eltahir et al., 2012; Larbi Chaht et al., 2015; Tounsi et al., 2013a; Boudierba et al., 2013; Houari et al., 2013; Saidi et al., 2013; Ould Larbi et al., 2013; Belabed et al., 2014; Bousahla et al., 2014; Hebali et al., 2014; Bourada et al., 2015; Hamidi et al., 2015] , qui peut être décrit par :

$$P(z) = (P_t - P_b) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_b \quad (\text{III-4})$$

où  $P_t$  et  $P_b$  Les propriétés matérielles associées aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre sont représentées respectivement par des valeurs positives. Ces valeurs déterminent le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur.

### III.3 Prémisses fondamentales :

Les hypothèses suivantes sont utilisées pour déterminer le champ de déplacement de la théorie suggérée :

(i) Les déplacements sont minimales par rapport à l'épaisseur du nano-poutre FG, ce qui entraîne des déformations infinitésimales.

(ii) Tous les points d'une section ont le même déplacement transversal car les normales de la fibre moyenne ne changent pas de longueur.

(iii) La rotation transversale :

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{III-5})$$

(iv) La contrainte transversale  $\sigma_z$  est négligeable en comparaison par la contrainte dans le plan  $\sigma_x$

(v) Trois éléments composent le déplacement  $u$  dans la direction de : le déplacement de la membrane, la flexion et le cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{III.6})$$

La théorie classique des poutres suppose que la partie de flexion est similaire au déplacement. Ainsi, l'expression de  $u_b$  peut-être données par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{III.7})$$

En combinaison avec  $w_s$ , la composante de cisaillement  $u_s$  provoque une variation de cisaillement sinusoïdale et une contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la nano-poutre, de sorte que la contrainte de cisaillement est nulle aux niveaux des faces supérieure et inférieure de la nano-poutre. Par conséquent, l'expression peut être définie comme suit : [Benachour et al, 2011 ; Zidi et al, 2014] :

$$u_s = \sinh(z)e^{-2z^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.8})$$

#### III.4 Cinématique et équations constitutives :

Selon les hypothèses susmentionnées, le champ de déplacement peut être défini de la manière suivante en combinant les éléments (III-5) et (III-8):

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \sinh(z)e^{-2z^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.9.a})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{III.9.b})$$

Le champ de déformation s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \quad \text{et} \quad \gamma_{xz} = g(z)\gamma_{xz}^s \quad (\text{III-10})$$

Le comportement des matériaux au niveau macrométrique diffère de celui des matériaux à l'échelle nanométrique. Eringen a été le premier à considérer l'élasticité non locale [Eringen, 1972, 1983]. Il a supposé que les déformations de tous les points de la structure dépendent de la déformation d'un point référentiel. Les relations constitutives non-locales suivantes ont été proposées par Eringen [Eringen, 1972, 1983] sous la forme différentielle suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_x - \mu \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} &= E \varepsilon_x \\ \tau_x - \mu \frac{d^2 \tau_x}{dx^2} &= G \gamma_{xz}\end{aligned}\tag{III.11}$$

Où  $\mu = (e_0 \alpha)^2$  est le paramètre non-local,  $e_0$  est une constante qui s'applique à tous les matériaux et est le rapport entre la longueur des caractéristiques internes et les longueurs des caractéristiques externes. En général, une estimation du produit est prise.  $e_0 \alpha < 2.0$  pour les nanotubes en carbone [Wang, 2005; Benzair et al., 2008; Heireche et al., 2008abc; Tounsi et al., 2008; Benzair et al., 2008; Zidour et al., 2012; Tounsi et al., 2013bcd; Berrabah et al., 2013; Boumia et al., 2014; Zidour et al., 2014; Semmah et al., 2014; Baghdadi et al., 2014; Benguediab et al., 2014].

### III.5 Équations de mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme [Reddy, 2002].

$$\delta \int (U + V - K) dt\tag{III.12}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dA dx - \int_0^L \int_A \rho [\ddot{u}_0 \delta u_0 + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dA dx - \\ \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx - \int_0^L N_0 \frac{d(w_b + w_s)}{dx} \frac{d \delta (w_b + w_s)}{dx} dx = 0\end{aligned}\tag{III.13}$$

En collectant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$ , et  $\delta w_s$  de l'équation (III-13), les équations de mouvement sont :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0$$

(III-14)

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q - N_0 \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} \quad (\text{III-14b})$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} - N_0 \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III-14c})$$

Où  $N, M_b, M_s$  et  $Q$  sont les efforts internes résultants, défini comme :

$$(N, M_b, M_s) = \int_A (1, z, f) \sigma_x dA \quad \text{et} \quad Q = \int_A g \tau_{xz} dA$$

Et sont les inerties massiques définis comme :

$$(I_0, I_2) = \int_A (1, z^2) \rho(z) dA \quad (\text{III-15})$$

Si l'on ne prend pas en compte l'effet de cisaillement ( $w_s = 0$ ), les équations d'équilibre Eq. (III-14) sont similaires à celles découvertes par la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli.

En substituant Eq. (III-10) dans Eq. (III-12) et les résultats ultérieurs dans Eq. (III-15), il en résulte les efforts internes :

$$\begin{aligned} N - \mu \frac{d^2 N}{dx^2} &= A \frac{du_0}{dx} - B \frac{d^2 w_b}{dx^2} - B_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ M_b - \mu \frac{d^2 M_b}{dx^2} &= B \frac{du_0}{dx} - D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - D_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ M_s - \mu \frac{d^2 M_s}{dx^2} &= B \frac{du_0}{dx} - D \frac{d^2 w_b}{dx^2} - H_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ Q - \mu \frac{d^2 Q}{dx^2} &= A_s \frac{dw_s}{dx} \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

Où les composantes de la rigidité sont données par :

$$\begin{aligned}
 \{A, B, D, \bar{E}, F, H\} &= \int_A \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\} E(z) dA \\
 B_s &= -\frac{1}{4} B + \frac{5}{3h^2} \bar{E} \\
 D_s &= -\frac{1}{4} D + \frac{5}{3h^2} F \\
 H_s &= \frac{1}{16} D - \frac{5}{6h^2} F + \frac{25}{9h^4} H \\
 \{A_{55}, D_{55}, F_{55}\} &= \int_A \{1, z^2, z^4\} G(z) dA \\
 A_s &= \frac{25}{16} A_{55} - \frac{25}{2h^2} D_{55} + \frac{25}{h^4} F_{55}
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

En substituant Eq. (III-17) dans Eq. (III-14), les équations non-locales de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(u_0, w_b, w_s)$  comme suit :

$$A \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B \frac{d^3 w_b}{dx^3} = I_0 (\ddot{u}_0 - \mu \frac{d^2 \ddot{u}_0}{dx^2}) \tag{III.18}$$

$$\begin{aligned}
 B \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} - N_0 \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} - \mu \frac{d^4(w_b + w_s)}{dx^4} \right) \\
 = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) - I_2 \left( \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_b}{dx^4} \right)
 \end{aligned} \tag{III.18b}$$

$$\begin{aligned}
 B_s \frac{d^3 u_0}{dx^3} - D_s \frac{d^4 w_b}{dx^4} - H_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} - N_0 \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} - \mu \frac{d^4(w_b + w_s)}{dx^4} \right) \\
 = I_0 \left( (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \mu \frac{d^2(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{dx^2} \right) - \frac{I_2}{84} \left( \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} - \mu \frac{d^4 \ddot{w}_s}{dx^4} \right)
 \end{aligned}$$

Les équations de mouvement de la théorie locales peuvent être obtenues à partir de Eq.(III-18) en mettant le paramètre non-locale  $\mu$  égale à zéro.

### III.6 Solution analytique pour la Nanopoutre à gradient fonctionnel simplement appuyée :

Les équations de mouvement pour la flexion statique, le flambement et la vibration libre sont résolues analytiquement. La solution analytique pour la poutre nano-FGM simplement appuyée est déterminée à l'aide de la solution de Navier. La solution se transforme en :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} X \begin{Bmatrix} U_n \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_{bn} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_{sn} \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Où  $U_n, W_{bn}$ , et  $W_{sn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au mode propre  $n$ , et  $\alpha = n\pi/L$ . Le chargement transversal  $q(x)$  est aussi écrit sous forme de série de Fourier :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \alpha x, Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx \quad (\text{III.20})$$

Le coefficient de Fourier  $Q_n$  associés à certains chargement typique sont donné par :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} \quad n=1,3,5 \quad \text{Pour le chargement uniforme} \quad (\text{III.21})$$

Substituant les expressions de  $u_0, w_b, w_s$ , et  $q$  de Eqs. (III-19) et (III-20) dans Eq. (III-18), les solutions analytiques peuvent être du système suivant :

$$\left( \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} - \bar{P} & S_{23} - \bar{P} \\ S_{13} & S_{23} - \bar{P} & S_{33} - \bar{P} \end{pmatrix} - \lambda \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda Q_n \\ \lambda Q_n \end{Bmatrix}$$

Où :

$$S_{11} = A\alpha^2, S_{12} = -B\alpha^3, S_{13} = -B_s\alpha^3, S_{22} = D\alpha^4, S_{23} = D_s\alpha^4, S_{33} = H_s\alpha^4 + A_s\alpha^2,$$

$$m_{11} = m_{23} = I_0, m_{22} = I_0 + I_2\alpha^2, m_{33} = I_0 + \frac{I_2}{84}\alpha^2, \bar{P} = \lambda N_0\alpha^2, \lambda = 1 + \mu\alpha^2$$



## **Chapitre IV: Résultats et Discussion**

---

### Chapitre IV : Résultats et discussions

#### IV.1 Introduction :

Nous présenterons les résultats de notre étude sur la formulation mathématique de la nano-poutre dans ce chapitre. Nous passerons en revue les solutions analytiques et les résultats numériques qui découlent des modèles et des équations précédemment présentés. De plus, nous entamerons une discussion approfondie sur les résultats obtenus et leurs implications pour la conception et l'utilisation des nano-poutres.

#### IV.2 Propriétés des matériaux :

Il y a deux parties distinctes à cette section. La première est de comparer le modèle proposé à ceux qui ont été publiés auparavant. Les effets des paramètres non locaux, de l'indice matériel  $k$  et du rapport de longueur  $L$  à épaisseur  $h$  sur la flexion statique, le flambement et la vibration libre de la poutre nano S-FGM sont décrits dans la deuxième section.

Dans ce qui suit, deux types de poutres nano-FGM sont étudiées. La première a les caractéristiques suivantes :

$$E_t = 0,25TPa , E_b = 1TPa \text{ et } \nu_t = \nu_b = 0,3 \text{ [Amin ZEMRI et al., 2015].}$$

$$\bar{w} = 100w \frac{E_t}{q_0 L^4} \quad \text{Pour le chargement uniforme.}$$

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_t A}{E_t I}} \quad \text{Pour la fréquence.}$$

$$\bar{N} = N_{cr} \frac{L^2}{E_t I} \quad \text{La charge critique de flambement.}$$

#### IV.3 Validation :

Pour valider la précision de la solution proposée dans cette étude, nous avons réalisé plusieurs comparaisons entre nos résultats et ceux disponibles dans la littérature.

Les flèches maximales non dimensionnelles  $\bar{w}$  d'une poutre sont représentées dans le tableau (IV-1). Simplement appuyé et chargé uniformément. Les termes des séries (III-18) et (III-19) ont été utilisés pour déterminer les valeurs obtenues. On constate que  $e_{0a} = 0$  correspond à la théorie locale. Les résultats ont été comparés aux résultats rapportés par

[Amin ZEMRI et al., 2015]. Basé sur la théorie non locale d'ordre élevé et pour une série de valeurs du paramètre non local ( $e_0a$ ), de l'indice matériel ( $k$ ) et du rapport longueur/épaisseur ( $L/H$ ). Il est évident que les résultats obtenus par la théorie actuelle concordent parfaitement avec ceux calculés par la théorie précédente [Amin ZEMRI et al., 2015]. Les valeurs des flèches observées dans la nano-poutre sont influencées par deux facteurs clés : le paramètre non-local et l'indice matériel. Plus précisément, les valeurs des flèches sont proportionnelles au paramètre non-local, ce qui signifie que plus le paramètre non-local est élevé, plus les déformations observées seront importantes. D'autre part, les valeurs des flèches sont inversement proportionnelles à l'indice matériel. Cela indique que plus l'indice matériel est élevé, plus les déformations seront réduites. En ce qui concerne les charges critiques de flambement, les résultats obtenus et présentés dans le tableau (IV-2) ont été comparés avec des études antérieures menées par [Amin ZEMRI et al., 2015 et Abdelillah BENAHMED et al., 2019]. Les résultats montrent un accord significatif entre les différentes études. Une interprétation des résultats révèle que la charge critique de flambement est directement proportionnelle à l'indice matériel. Ainsi, une augmentation de l'indice matériel conduit à une augmentation de la charge critique nécessaire pour provoquer le flambement de la nano-poutre. D'autre part, la charge critique de flambement est inversement proportionnelle au paramètre non-local ( $e_0a$ ). Cela signifie que plus le paramètre non-local est élevé, plus la charge critique nécessaire pour provoquer le flambement sera réduite.

Ces observations soulignent l'importance des paramètres non-locaux et des indices matériels dans le comportement mécanique des nano-poutres. Comprendre ces relations permet d'optimiser la conception des nano-poutres en ajustant ces paramètres pour obtenir les performances mécaniques souhaitées.

**Tableau IV.1** : Les déformations sans dimension ( $w$ ) de la nano-poutre à gradient fonctionnel sous une charge uniformément répartie peuvent être reformulées de la manière suivante.

## Chapitre IV : Résultats et Discussions

Nonlocal parameter, $e_0a$ (nm)											
l/h	k	0		0.5		1		1.5		2	
		Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent
10	0	5,3383	5.3380	5,4659	5.4656	5,8487	5.8484	6,4867	6.4864	7,3799	7.3795
	0.3	3,2181	3.2180	3,2951	3.2949	3,5258	3.5257	3,9104	3.9102	4,4488	4.4487
	1	2,4194	2.4193	2,4773	2.4771	2,6509	2.6507	2,9401	2.9400	3,3452	3.3450
	3	1,9234	1.9233	1,9694	1.9693	2,1074	2.1073	2,3375	2.3373	2,6595	2.6594
	10	1,579	1.5790	1,6168	1.6167	1,7301	1.7300	1,9189	1.9188	2,1831	2.1831
30	0	5,2228	5.2227	5,2367	5.2367	5,2785	5.2784	5,3481	5.3480	5,4455	5.4455
	0.3	3,1475	3.1475	3,1559	3.1559	3,1811	3.1810	3,223	3.2230	3,2818	3.2818
	1	2,3732	2.3732	2,3795	2.3795	2,3985	2.3985	2,4302	2.4302	2,4744	2.4744
	3	1,8892	1.8892	1,8943	1.8943	1,9094	1.9093	1,9346	1.9346	1,9698	1.9698
	10	1,5488	1.5488	1,5529	1.5529	1,5653	1.5653	1,586	1.5860	1,6149	1.6148
100	0	5,2096	5.2096	5,2109	5.2109	5,2146	5.2146	5,2209	5.2209	5,2296	5.2296
	0.3	3,1395	3.1395	3,1403	3.1402	3,1425	3.1425	3,1463	3.1463	3,1515	3.1515
	1	2,36794	2.3679	2,3685	2.3685	2,3702	2.3702	2,3731	2.3731	2,377	2.3770
	3	1,8854	1.8854	1,8858	1.8858	1,8872	1.8872	1,8894	1.8894	1,8926	1.8926
	10	1,5454	1.5454	1,5458	1.5457	1,5469	1.5469	1,5487	1.5487	1,5487	1.5513

D'après le tableau, on peut remarquer que la fréquence fondamentale non-dimensionnelle diminue à mesure que le paramètre non-local et l'indice matériel augmentent. En général, l'effet de la déformation de cisaillement et du paramètre non-local  $e_0a$  est d'accentuer la flèche et de réduire la charge critique de flambement, ainsi que la fréquence propre de la poutre. En diminuant l'indice matériel, à la fois la flèche et la fréquence propre augmentent, contrairement à la charge critique de flambement. Cette observation s'explique par le fait que l'augmentation de l'indice matériel entraîne une augmentation de la rigidité de la poutre nano FGM. Le tableau montre que le paramètre non local et l'indice matériel augmentent tandis que la fréquence fondamentale non dimensionnelle diminue. En général, la déformation de cisaillement et le paramètre non local  $e_0a$  accentuent la flèche, réduisent la charge critique de flambement et augmentent la fréquence propre de la poutre. Contrairement à la charge critique de flambement, la flèche et la fréquence propre augmentent en diminuant l'indice matériel. La rigidité de la poutre

## Chapitre IV : Résultats et Discussions

nano FGM augmente à mesure que l'indice matériel augmente, ce qui explique cette observation. En résumé, les résultats indiquent que les valeurs du paramètre non-local, de l'indice matériel, de la déformation de cisaillement et de la charge critique de flambement ont un impact significatif sur les propriétés vibratoires et mécaniques de la poutre nano FGM. Ces observations peuvent être utiles pour comprendre le comportement de ce type de structure et pour guider la conception de matériaux et de structures plus résistantes et plus stables.

**Tableau IV.2** : La charge de flambement non-dimensionnelle critique ( $N$ ) de la nano-poutre à gradient fonctionnel (nano-FGM) peut être reformulée de la manière suivante.

		Nonlocal parameter, $e_0 a$ (nm)									
l/h	k	0			0.5		1.5		2		
		Zemri et al.(2015)	Benahmed Et al.(2019)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Benahmed et al.(2019)	Présent
10	0	2,4057	2.4056	2.4058	2,3478	2.3479	1.9685	1.9687	1.7248	1.7248	1.7249
	0.3	3,9906	3.9911	3.9907	3,8945	3.8946	3.2654	3.2656	2.8611	2.8614	2.8612
	1	5,3084	5.3084	5.3087	5,1806	5.1809	4.3438	4.3440	3.8059	3.8059	3.8061
	3	6,6776	6.6779	6.6781	6,5168	6.5173	5.4642	5.4646	4.7876	4.7877	4.7879
	10	8,1337	8.1342	8.1339	7,9378	7.9380	6.6557	6.6559	5.8315	5.8319	5.8316
30	0	2,4604	2.4603	2.4604	2,4537	2.4537	2.4011	2.4012	2.3570	2.3569	2.3570
	0.3	4,0826	4.0826	4.0826	4,0714	4.0714	3.9843	3.9843	3.9110	3.9110	3.9110
	1	5,4147	5.4146	5.4147	5,3999	5.3999	5.2843	5.2843	5.1872	5.1871	5.1872
	3	6,8018	6.8018	6.8018	6,7832	6.7832	6.6380	6.6380	6.5160	6.5159	6.5160
	10	8,2968	8.2968	8.2968	8,2741	8.2741	8.0970	8.0970	7.9481	7.9482	7.9482
100	0	2,4668	2.4667	2.4668	2,4662	2.4661	2.4613	2.4613	2.4571	2.4570	2.4571
	0.3	4,0933	4.0933	4.0933	4,0923	4.0923	4.0842	4.0843	4.0772	4.0772	4.0772
	1	5,4271	5.4270	5.4271	5,4257	5.4257	5.4150	5.4150	5.4057	5.4057	5.4057
	3	6,8162	6.8161	6.8162	6,8145	6.8145	6.8011	6.8011	6.7894	6.7893	6.7894
	10	8,3158	8.3157	8.3158	8,3137	8.3137	8.2973	8.2973	8.2831	8.2830	8.2831

## Chapitre IV : Résultats et Discussions

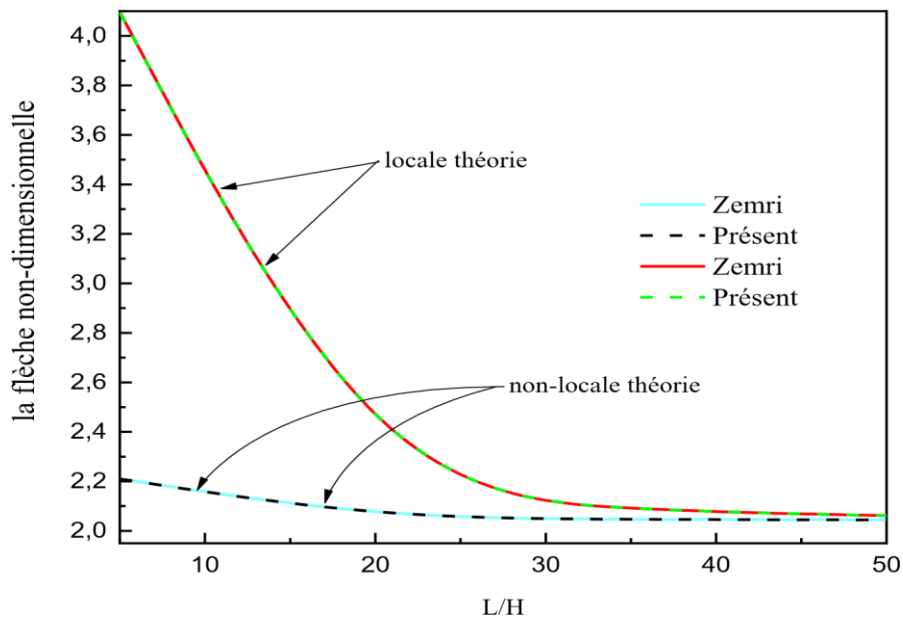
**Tableau IV.3 : Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $w$ ) de la poutre nano FGM**

		Nonlocal parameter, $e_0a$ (nm)									
l/h	k	0		0.5		1		1.5		2	
		Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent	Zemri et al.(2015)	Présent
10	0	9.7075	9.7079	9.5899	9.5902	9.2612	9.2615	8.7813	8.7815	8,2197	8.2199
	0.3	8.1709	8.1711	8.0719	8.0711	7.7952	7.7944	7.3913	7.9306	6,9185	6,9178
	1	6.8814	6.8852	6.7981	6.8018	6.5451	6.5687	6.2249	6.2283	5,8267	5.8299
	3	6.0755	6.0781	6.0019	6.0045	5.7962	5.7987	5.4959	5.4982	5.1443	5.1466
	10	5.5768	5.5776	5.5092	5.5100	5.3204	5.3211	5.0447	5.04546	4.7221	4.7227
30	0	9.8511	9.8511	9.8376	9.8376	9.7975	9.7975	9.7318	9.7318	9.6419	9.6419
	0.3	8.2902	8.2902	8.2788	8.2788	8.2451	8.2451	8.1898	8.1897	8.1141	8.1145
	1	6.9832	6.9837	6.9737	6.9741	6.9452	6.9457	6.8987	6.8991	6.8349	6.8354
	3	6.1712	6.1714	6.1627	6.1630	6.1376	6.1379	6.0964	6.09673	6.0401	6.0404
	10	5.6855	5.6656	5.6578	5.6579	5.6347	5.6348	5.5969	5.5970	5.5452	5.5453
100	0	9.8679	9.8679	9.8667	9.8667	9.8631	9.8631	9.8570	9.8570	9.8485	9.8485
	0.3	8.3042	8.3043	8.3032	8.3031	8.3001	8,3002	8.2950	8,2951	8.2878	8.2878
	1	6.9952	6.9952	6.9943	6.9944	6.9917	6.9918	6.9874	6.9875	6.9814	6.9815
	3	6.1824	6.1824	6.1817	6.1817	6.1794	6.1794	6.1756	6.1756	6.1703	6.1703
	10	5.6759	5.6760	5.6752	5.6753	5.7632	5.6731	5.6697	5.6697	5.6648	5.6648

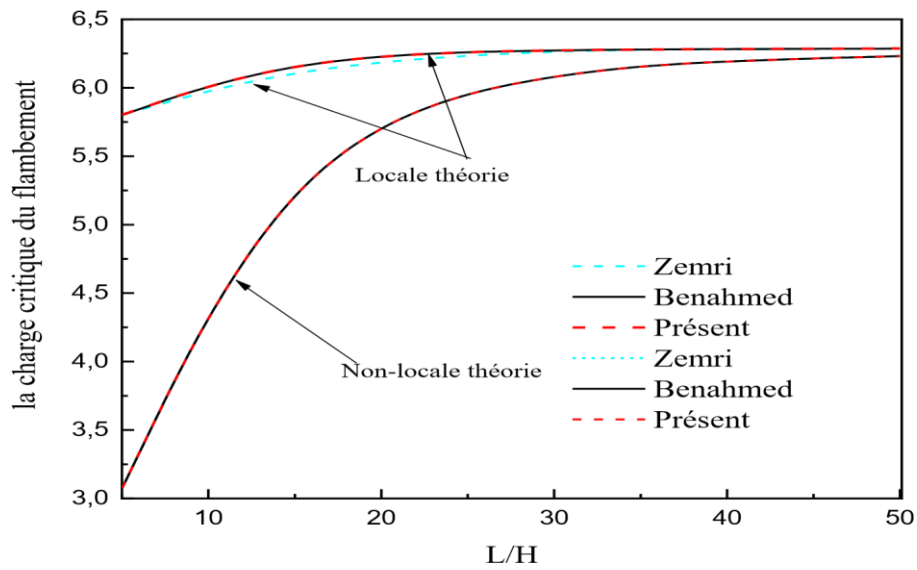
### IV.4 Résultats et discussions :

L'étude se concentre sur la flexion et le flambement des poutres, en utilisant les propriétés matérielles proposées par [Zemri et al., 2015]. Cependant, l'attention est également portée sur la réponse dynamique en utilisant les mêmes propriétés. Pour les cas locaux et non locaux, les valeurs de  $e_0a$  sont prises respectivement à 0 et 1 nm. L'indice matériel est maintenu constant à  $k=2$ . Les résultats présentés montrent que les déformations prédites par la théorie non locale sont plus importantes que celles obtenues

par la théorie locale. En revanche, la solution non locale pour le flambement et la fréquence propre est plus petite que celle prédite par la théorie locale. Ce constat suggère que le paramètre non local rend la poutre nano plus souple. De plus, il est observé que l'effet d'échelle est plus significatif pour de faibles rapports longueur/épaisseur. En d'autres termes, lorsque la poutre est plus élancée, les effets d'échelle sur la flexion, la charge critique de flambement et la fréquence propre diminuent. Cela signifie que les effets d'échelle ne sont pas évidents dans le comportement de flexion statique, de flambement et de vibration libre pour les nano-poutres élancées, mais ils doivent être pris en compte pour les nano-poutres courtes. En résumé, cette étude met en évidence l'influence du paramètre non local sur les déformations et la réponse dynamique des poutres nano FGM. De plus, elle souligne l'importance de considérer les effets d'échelle en fonction du rapport longueur/épaisseur de la poutre. Ces résultats contribuent à une meilleure compréhension du comportement mécanique des poutres nano FGM et sont pertinents pour la conception et l'optimisation de ces structures dans diverses applications.



**Figure IV- 1 :** La flèche non-dimensionnelle  $w$  d'une charge uniforme avec  $k=2$  et  $e_0a=1.5nm$  est influencée par l'effet de la proportion  $L/H$ .



**Figure IV- 2.** Le rapport longueur/épaisseur a un effet sur la charge critique de flambement ( $N$ ) avec  $k=2$  et  $e_0a=1.5nm$ .

La théorie non locale des poutres nano-FGM est utilisée pour étudier l'impact des paramètres non locaux sur la flexion, le flambement et la vibration libre, comme illustré dans les figures (IV-5) et (IV-7). Le matériel indice reste constant à  $k=1$ . Les résultats de ces figures montrent que les réponses de la poutre sont non linéaires avec le paramètre non local. La flexion, le flambement et la vibration libre des poutres nano-FGM sont significativement affectées par l'effet d'échelle, représenté par le paramètre non local  $e_0a$ , en particulier pour des valeurs relativement élevées du rapport longueur/épaisseur.

Ces résultats soulignent l'importance de considérer le paramètre non local dans l'analyse des poutres nano-FGM car il a un impact significatif sur leur comportement mécanique. De plus, l'effet d'échelle joue un rôle important, soulignant l'importance du rapport longueur/épaisseur pour déterminer les propriétés de flexion, de flambement et de vibration libre des poutres nano- poutre de FGM.



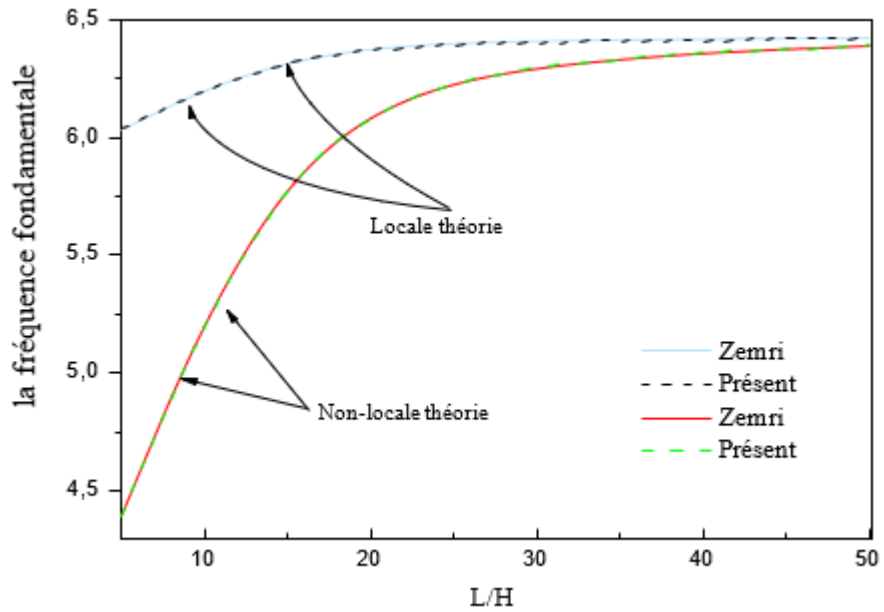


Figure IV- 3. Le rapport longueur/épaisseur a un effet sur la fréquence fondamentale non-locale avec  $k=2$  et  $e_0a=1.5nm$

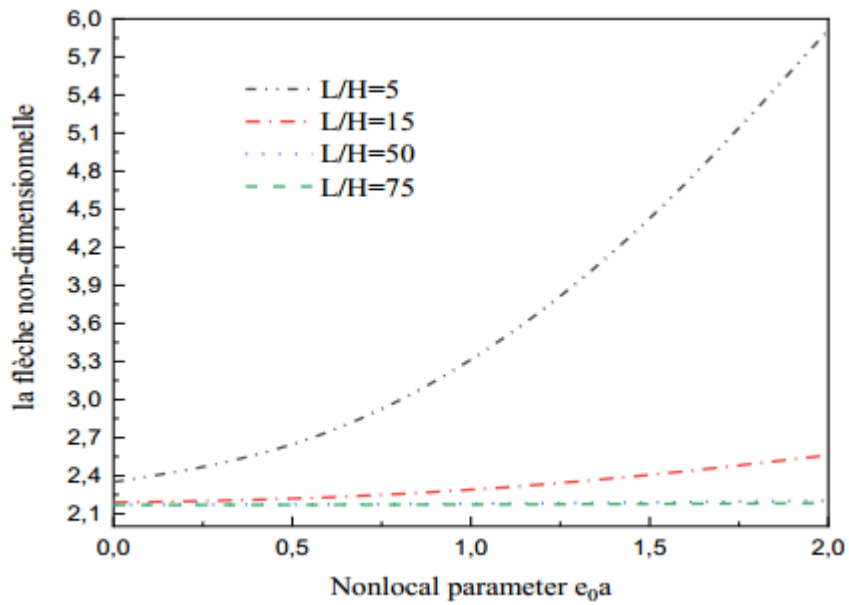


Figure IV- 4. Le paramètre non-local influence la flèche non-dimensionnelle pour une charge uniforme avec  $k=1.5$ .

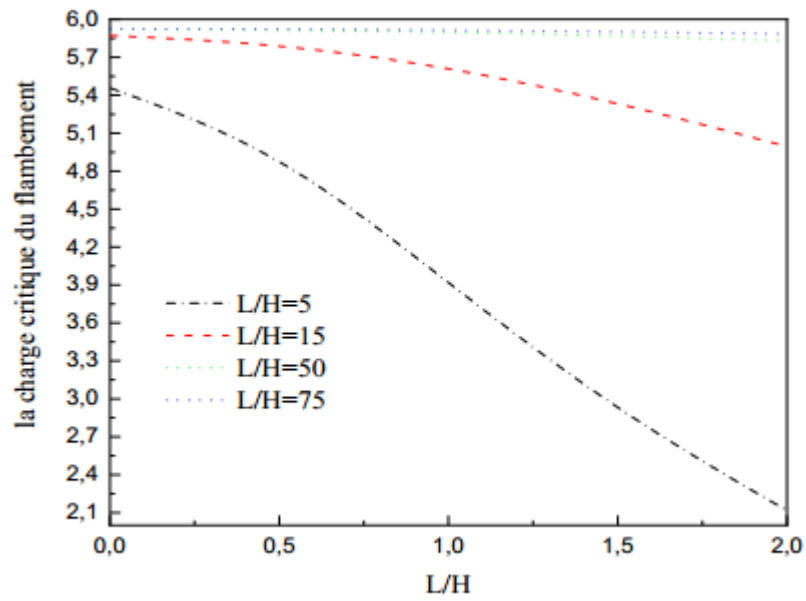


Figure IV- 5. Le paramètre non-local influence la charge critique de flambement ( $N$ ) pour  $k=1$ .

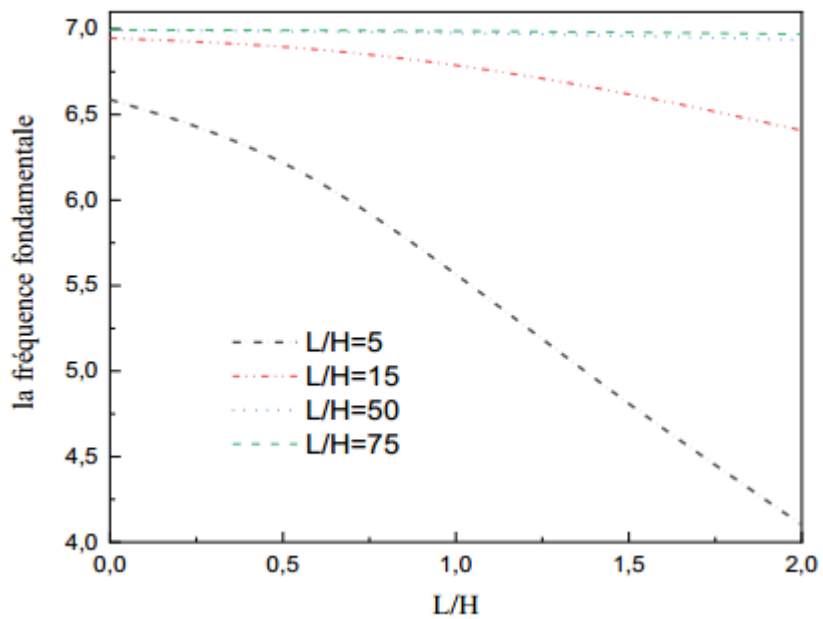
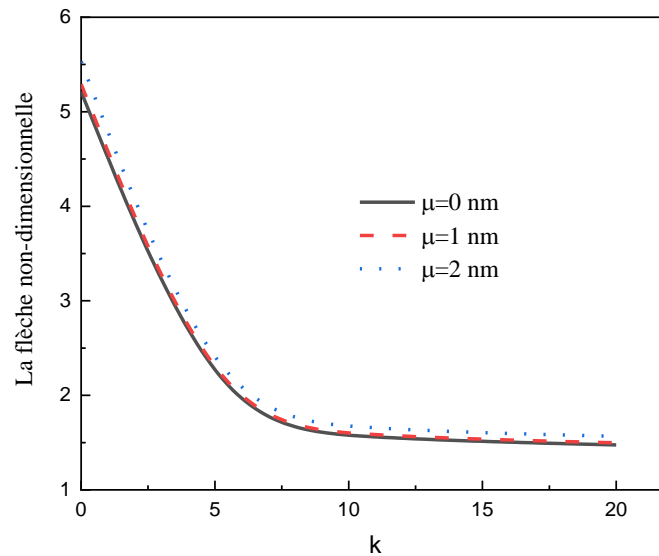
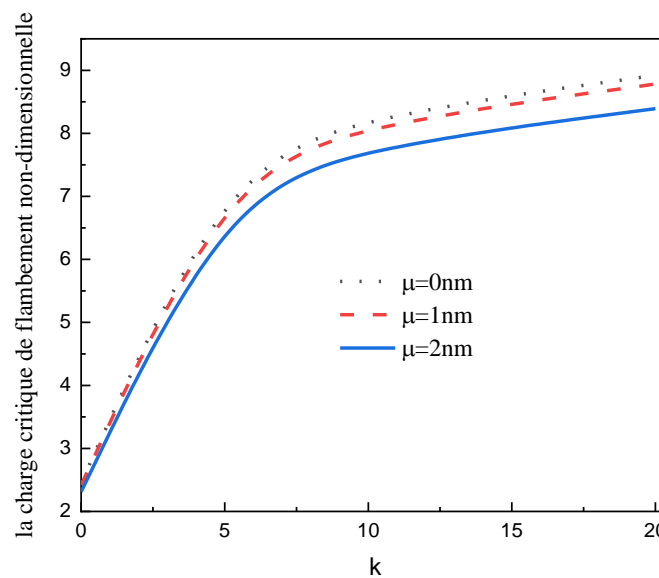


Figure IV- 6. Le paramètre non-local a un effet sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle avec  $k=1.5$ .



*Figure IV- 7. La flèche non-dimensionnelle ( $w$ ) pour une charge uniforme avec  $l/h=25$  est influencée par l'indice de matériau.*

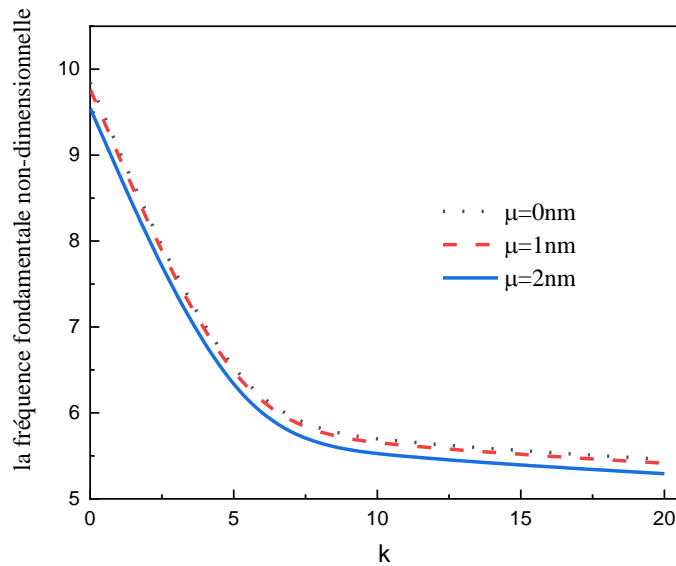


*Figure IV- 8. L'indice de matériau a un effet sur la charge critique de flambement non-dimensionnelle ( $N$ ) pour  $l/h=25$ .*

L'impact de l'indice matériel sur la flexion statique, le flambement et les vibrations libres des poutres nano FGM est illustré dans les figures (IV-8) et (IV-9) pour différentes

valeurs de paramètres non locaux, où  $L/h = 25$ . On peut observer que les déformations dues à la flexion et les fréquences propres diminuent, tandis que la charge critique de flambement augmente lorsque l'indice matériel augmente. Cette observation a également été confirmée par les données présentées dans les tableaux (IV-1) à (IV-3), car une augmentation de l'indice matériel conduit à une diminution de la rigidité de la poutre nano FGM. Lorsque l'indice matériel des poutres nano FGM augmente. Cela entraîne une diminution de leur rigidité. Cela signifie que la capacité des poutres à résister aux déformations dues à la flexion est réduite. Les flèches causées par la flexion, c'est-à-dire les déformations en forme de courbure, deviennent plus prononcées à mesure que l'indice matériel augmente. En outre, les fréquences propres des poutres nano FGM diminuent également avec une augmentation de l'indice matériel. Les fréquences propres correspondent aux modes de vibration naturels de la poutre. Une diminution de ces fréquences signifie que la poutre devient plus souple et plus sensible aux vibrations. Cela peut avoir des conséquences importantes dans des domaines tels que la conception de structures où des vibrations indésirables peuvent entraîner des défaillances ou une détérioration prématurée. Cependant, malgré ces effets négatifs sur la flexion et les vibrations, l'augmentation de l'indice matériel a un avantage sur le flambement des poutres nano FGM. La charge critique de flambement, c'est-à-dire la charge maximale qu'une poutre peut supporter avant de flamber, augmente lorsque l'indice matériel est élevé. Cela indique une amélioration de la capacité de la poutre à résister aux charges de compression.

L'augmentation de l'indice matériel dans les poutres nano FGM a un impact significatif sur leur comportement mécanique. Bien qu'elle réduise la rigidité, ce qui entraîne des déformations accrues lors de la flexion et des fréquences propres plus basses, elle améliore la résistance au flambement. Ces observations soulignent l'importance de prendre en compte l'indice matériel lors de la conception et de l'analyse de telles structures pour optimiser leurs performances mécaniques.



**Figure IV- 9.** L'indice de matériau a un effet sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle.

### IV.5 Conclusion :

Ces résultats mettent en évidence les avantages de l'application de la théorie non-locale dans l'analyse du comportement mécanique de la poutre. L'utilisation de cette approche permet d'observer une remarquable souplesse dans la réponse de la poutre, avec des effets significatifs sur différents aspects du système. Tout d'abord, la théorie non-locale conduit à une réduction de la charge de flambement. En introduisant le paramètre non-local, qui prend en compte les interactions à longue distance entre les éléments constitutifs de la poutre, on observe une diminution de la charge critique à laquelle la poutre fléchit ou se déforme de manière instable. Cela indique que la présence de phénomènes non-locaux entraîne une diminution de la résistance à la déformation globale de la poutre. En outre, la théorie non-locale conduit également à une réduction de la fréquence propre de la poutre. La fréquence propre représente la fréquence naturelle à laquelle la poutre vibre lorsqu'elle est excitée. L'introduction du paramètre non-local entraîne une modification des caractéristiques vibratoires de la poutre, réduisant ainsi sa fréquence propre. Cela peut avoir des implications dans les applications nécessitant une certaine rigidité ou stabilité de la poutre.

Enfin, la théorie non-locale induit une augmentation de la déformation de flexion de la poutre, souvent mesurée par la flèche. La flèche représente le déplacement vertical maximal d'un point sur la poutre par rapport à sa position d'équilibre. L'incorporation du paramètre non-local dans les équations du mouvement conduit à une augmentation de la déformation de flexion, ce qui peut avoir des conséquences sur la capacité de charge et la performance globale de la poutre. Il est également intéressant de noter que ces résultats dépendent également des paramètres matériels et du rapport longueur/épaisseur de la poutre. Des variations de ces paramètres peuvent avoir un impact significatif sur les effets observés. Par conséquent, une analyse approfondie de ces paramètres est nécessaire pour comprendre pleinement le comportement mécanique de la poutre nano FGM dans le cadre de la théorie non-locale.

# Conclusion Générale

---

---

# Conclusion Générale

---

## Conclusion Générale

Les analyses de la flexion et du flambement des FGM nano poutres dépendantes de la taille ont été étudiée sur la base d'une théorie sinusoïdale non locale de déformation de cisaillement y a compris l'effet d'étirement selon l'épaisseur des poutres.

Le présent modèle est capable de capturer à petite échelle, déformation de cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur des nano-poutres, et en outre satisfait les conditions aux limites d'annulation des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la nano-poutre sans exiger un facteur de correction de cisaillement.

Sur la base de la relation constitutive différentielle non locale d'Eringen, les équations de gouvernance non locales sont calculées en utilisant le principe de l'énergie potentielle totale minimale.

Les calculs montrent que l'inclusion de l'effet de la petite échelle ainsi que l'effet d'étirement d'épaisseur augmente la rigidité de la nano-poutre et, par conséquent, conduit à une réduction des déformations et une augmentation correspondante des charges de flambement.

Par conséquent, l'effet de la petite échelle ainsi que l'effet d'étirement d'épaisseur devraient être prises en compte dans l'analyse du comportement mécanique des nanostructures. En outre, on constate que, le profil de distribution de matériau peut être manipulé pour sélectionner une flèche spécifique de la conception et de la charge de flambement.

Les présents calculs fourniront aussi un repère solide pour la vérification des éléments finis et autres simulations numériques des mécaniques des nano-poutres FGM.



## *Référence bibliographique*

[Abdelkader Benachour et al., 2011] Abdelkader Benachour, Hassaine Daouadji Tahar, Hassen Ait Atmane, Abdelouahed Tounsi et Meftah Sid Ahmed (2011), A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, Composites: Part B 42 1386–1394

[Abdi 1997] Abdizadeh, H, Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex : « Composites Laminaires Tri-Couches à Base D’Alumine », Thèse de Doctorat d’Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l’Université Claude Bernard Lyon France, 212p.

[BELKORISSAT et al., 2015] BELKORISSAT, Ismahene, HOUARI, Mohammed Sid Ahmed, TOUNSI, Abdelouahed, et al. On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model. Steel Compos. Struct, 2015, vol. 18, no 4, p. 1063-1081.

[Benahmed, A et al., 2015] Benahmed, A., Fahsi, B., Benzair, A., Zidour, M., Bourada, F., & Tounsi, A. (2019). Critical buckling of functionally graded nanoscale beam with porosities using nonlocal higher-order shear deformation. Structural Engineering and Mechanics, 69(4), 457-466.

[BENYOUCEF, Samir, A et al., 2010] BENYOUCEF, Samir, MECHAB, Ismail, TOUNSI, Abdelouahed, et al. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. Mechanics of Composite Materials, 2010, vol. 46, no 4, p. 425-434

[ALOTTA, A et al., 2015] ALOTTA, Gioacchino, FAILLA, Giuseppe, et ZINGALES, Massimiliano. Finite element method for a nonlocal Timoshenko beam model. Finite Elements in Analysis and Design, 2014, vol. 89, p. 77-92

[Bishop 1993] A Bioshop., C. Y. Lin., M. Navaratnam., R.D Rawlings., H. B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, Journal of Materials Science Letters ; 12 (19) : 1516-18, 1993.

---

## *Référence bibliographique*

---

[**Boch 1986**] Boch. P Chartier. Huttepain. M Tapa casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated composites, 1986.

[**Debard, Y et al., 2015**] Debard, Y. (2011). Mécanique, thermique et éléments finis. mars, 2006, 31.

[**Ellen M. et al, 2001**] Ellen M. Carrillo-Heian, R. Douglas Carpenter, Glaucio H. Paulino, Jeffery C. Gibeling, and Zuhair A. Munir (2001), Dense Layered Molybdenum Disilicide–Silicon.

[**El Khoury et al., 2011**] El Khoury, E., Messenger, T., & Cartraud, P. (2011). DERIVATION OF THE YOUNG'S AND SHEAR MODULI OF SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES THROUGH A COMPUTATIONAL HOMOGENIZATION APPROACH. International Journal for Multiscale Computational Engineering, 9(1)

[**ERINGEN., 2002**] ERINGEN, A. Cemal. Nonlocal continuum field theories. Springer Science & Business Media, 2002

[**Fan Z, Tsakirooulos P, Miodownik AP, 1994**] Fan Z, Tsakirooulos P, Miodownik AP, 1994, A generalized law of mixtures, Journal of Materials Science 29:141-150.

[**HACHEMI, Houari et al., 2015**] HACHEMI, Houari. Proposition de nouvelle forme de théorie de déformation de cisaillement pour l'analyse de réponse des structures. Diss. 2018.

[**HEBALI, Habib**] HEBALI, Habib, TOUNSI, Abdelouahed, HOUARI, Mohammed Sid Ahmed, et al. New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. Journal of Engineering Mechanics, 2014, vol. 140, no 2, p. 374-383

[**Ichikawa 2000**] Ichikawa K. (Ed), Functionally graded materials in the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts, 2000, 264 p., Hardcover.

[ **Moya1992** ] J. S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R.MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, Materials Letters ; 14 (5-6) : 333-35, 1992.

---

## *Référence bibliographique*

---

[Liu, F et al., 1999] Liu, F. L., & Liew, K. M. (1999). Differential quadrature element method for static analysis of Reissner–Mindlin polar plates. *International Journal of Solids and Structures*, 36(33), 5101-5123

[Karama, M et al., 2015] Karama, M., K. S. Afaq, and S. Mistou. "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity." *International Journal of solids and structures* 40.6 (2003): 1525-1546.

[Kieback 2003] KIEBACK B., NEUBRAND A., Riedel H. «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105

[K.Nora,1889] K.Nora, "étude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par une plaque en matériaux composite", mémoire de master d'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.

[Koizumi 1996] Koizumi, M. The concept of FGM. *Ceram Trans Funct Grad Mater*, 34, 3–10 (1993).

[Kyoungsoo Park et al. 2010] Kyoungsoo Park, Glaucio H. Paulino, Jeffery Roesler (2010), Cohesive fracture model for functionally graded fiber reinforced concrete, *Cement and Concrete Research* 40 956–965

[Lostec1997] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, 1996.

[MAHMOUDI, Abdelkader et al., 2018] MAHMOUDI, Abdelkader, et al. Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM. 2018. Thèse de doctorat

[Mévrel 2009] Mévrel R., Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine, Département Matériaux Métalliques et Procédés, *PlastOx* 2007 (2009), 255-264.

[Miyamoto 1999] Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G., *Functionally graded materials: design, processing and applications*, Materials Technology Series, Vol. 5-1999.

---

## *Référence bibliographique*

---

[Omori et al 1998] Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T., J. Jpn. Inst. Met, 62 (1998) 986-991.

[PANTAZOPOULOU, S. J et al., 1995] PANTAZOPOULOU, S. J. et DING, Y. Collocation in finite element analysis of constrained problems. Canadian Journal of Civil Engineering, 1995, vol. 22, no 1, p. 1-14.....P32

[REDDY, J. N et al., 1999] REDDY, J. N., WANG, C. M., et KITIPORNCHAI, S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. European Journal of Mechanics-A/Solids, 1999, vol. 18, no 2, p. 185-199

[RAHIMI, G. H et al., 2008] RAHIMI, G. H. et DAVOUDINIK, A. R. Thermal behavior analysis of the functionally graded Timoshenko's beam. 2008

[RICHARD 1974] RICHARD, Guy. Noblesse d'affaires au XVIIIe siècle. A. Colin, 1974

[Takahashi 1990] Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai-Japan, 1990, 129-34.

[Tamura et al, 1973] Tamura I, Tomota Y, Ozawa M, 1973, Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strength, Proceedings of the 3rd International Conference on Strength of Metals and Alloys (Institute of Metals, and Iron and Steel Institute, London 1973) 1:611-615.

[TIMOSHENKO, S. P et al., 1970] TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, James N., et ABRAMSON, H. Norman. Theory of elasticity. Journal of Applied Mechanics, 1970, vol. 37, p. 888

[Voigt W,1889] Voigt W, 1889, Über die Beziehung Zwischen den Beiden Elasticitäts-Constanten Isotroper Körper, Annalen der Physik and Chemie 38573-587

[Watremetz 2006] Watremetz B., Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules

---

## *Référence bibliographique*

---

d'injection de polymères, Thèse de doctorat, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.

**[Wang, C. M et al., 2008]** Wang, C. M., Kitipornchai, S., Lim, C. W., & Eisenberger, M. (2008). Beam bending solutions based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 134(6), 475-481

**[William G.C, 2005]**

William G. Cooley, Captain, USAF, 2005, application of functionally graded materials in aircraft structures

**[Yoshihisa 2004]**

Yoshihisa Uchida (2004), Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39- 51-B, Vol. 39-B

**[Yuki et al, 1991]**

Yuki M., Murayama T., Irisawa T., Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai-Japan, 1991, 203-208.

**[Zemri, A et al., 2015]** Zemri, A., Houari, M. S. A., Bousahla, A. A., & Tounsi, A. (2015). A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory. *Structural engineering and mechanics*, 54(4), 693-710.

## Résumé

Dans ce travail, on présente la théorie nonlocale de cisaillement des nano-poutres fonctionnellement graduées, pour la flexion, le flambement et la vibration libre en utilisant les relations constitutives différentielles d'Eringen. À cette fin, en utilisant la théorie développée, on prend en compte la variation d'ordre supérieur de la contrainte de cisaillement transverse à travers la profondeur du faisceau nanométrique. On suppose que les propriétés matérielles du nanobeam FG varient dans le sens de l'épaisseur. Les équations du mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont présentées pour un nanobeam FG avec des porosités simplement supporté. La validité de cette théorie est étudiée en comparant certains des résultats actuels avec d'autres théories d'ordre supérieur rapportées dans la littérature, l'influence du paramètre du matériau, la fraction volumique de la porosité et le taux d'épaisseur sur le comportement mécanique du faisceau P-FGM sont représentés. par des exemples numériques.

**Mots clés :** Nano-poutre ; La théorie d'élasticité non locale ; Flexion ; Flambement ; Vibration ; Matériaux à gradient fonctionnelle.

## المخلص

في هذا العمل ، نقدم نظرية القص غير المحلية للحزم النانوية المتدرجة وظيفيًا ، من أجل الانحناء ، والتواء ، والاهتزاز الحر باستخدام العلاقات التأسيسية التفاضلية لإرينجن. تحقيقًا لهذه الغاية ، باستخدام النظرية المتقدمة ، نأخذ في الاعتبار التباين العالي في إجهاد القص العرضي عبر عمق الحزمة النانوية. من المفترض أن تختلف الخواص المادية لشعاع nano-poutre FG في اتجاه السمك. تستمد معادلات الحركة من مبدأ هاميلتون. يتم تقديم الحلول التحليلية لمجموعة nano-poutre FG المدعومة ببساطة. تتم دراسة صحة هذه النظرية من خلال مقارنة بعض النتائج الحالية مع نظريات أخرى ذات ترتيب عالي تم الإبلاغ عنها في الأدبيات ، وتأثير المعلمة المادية ، وكسر الحجم ، ونسبة السمك على السلوك الميكانيكي للحزمة. يتم تمثيل P-FGM. من خلال الأمثلة العددية. **كلمات مفتاحية:** Nano-poutre؛ نظرية المرونة غير المحلية؛ الانحناء. التواء. الاهتزاز. مواد التدرج الوظيفي.

## Abstract

In this work, we present the nonlocal shear theory of functionally graduated nano-beams, for bending, buckling and free vibration using Eringen's differential constitutive relations. To this end, using the developed theory, we take into account the higher order variation of the transverse shear stress across the depth of the nanoscale beam. It is assumed that the material properties of nanobeam FG vary in thickness direction. The equations of motion are derived from the Hamilton principle. Analytical solutions are presented for a nanobeam FG with simply supported porosities. The validity of this theory is studied by comparing some of the current results with other higher order theories reported in the literature, the influence of the material parameter, the volume fraction and the thickness ratio on the mechanical behavior of the beam. P-FGM are represented. by numerical examples.

**Keywords:** Nano-beam; Non-local elasticity theory; Bending; Buckling; Vibration; Functional gradient materials.