

Matière : TRANSFERT DE CHALEUR 1

Niveau : 3^{ème} année Licence Energétique

Chapitre I : Généralités sur les transferts thermiques

I.1. Objectif de la matière : La thermique est la discipline qui permet de comprendre et de décrire le fonctionnement d'un grand nombre d'équipements industriels qui ont comme caractéristique commune de mettre en œuvre des **échanges d'énergie thermique (ou de chaleur)**.

Le **transfert de chaleur** est l'un des processus les plus courants d'échange d'énergie ; il intervient naturellement entre deux systèmes dès qu'existe entre eux une **différence de température** et cela quelque soit le milieu qui les sépare (même le vide). Par exemple, le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée suite à une différence de température entre les deux parties.

À la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température définis par la thermodynamique. La thermodynamique classique permet l'évaluation de la quantité de chaleur échangée pendant un processus subi par un système passant d'un état d'équilibre vers un autre état d'équilibre ; elle ne fournit pas d'une manière explicite (détaillée) des informations sur le mode par le quel est effectué le transfert de chaleur et sur la valeur concernant le **flux thermique**, et ce pour des conditions précisées.

La notion de chaleur est définie par la thermodynamique comme étant une grandeur de parcours représentant une forme transitoire d'énergie qui se propage à la suite d'une différence de température, soit :

- Entre deux parties d'un système quelconque,
- Entre le système et son environnement,
- Entre deux systèmes séparés par un milieu matériel ou non (vide).

L'étude des phénomènes thermiques qui accompagnent la propagation de la chaleur et le calcul des valeurs du flux thermique représente l'objectif fondamental du transfert thermique. Cette partie importante de la physique traite aussi la description des mécanismes des modes de propagation de chaleur conduisant à des relations établies soit théoriquement soit par voie expérimentale entre le flux thermique transféré, les paramètres caractéristiques du système (propriétés physiques, géométrie) et les conditions thermiques de son environnement.

Les transferts thermiques sont omni présents tant dans notre planète (fusion des glaciers, le réchauffement des eaux des océans, les cycles climatiques) que dans l'existence humaine sur terre exprimés par des gestes quotidiens de l'individu (réglage de température du corps humain, préparation de la nourriture, réalisation d'un microclimat dans un habitat) ou par des techniques très diversifiées (utilisation thermique de diverses origines, moteurs thermiques, échangeurs de chaleur, isolation thermique).

I.2. Modes fondamentaux de transfert thermique : Le transfert de chaleur est un processus complexe qui est réalisé par les trois modes fondamentaux : **conduction, convection et rayonnement**.

I.2.1 Conduction : La conduction représente le processus de propagation de la chaleur par le contact direct entre les particules d'un corps ou entre des corps ayant des **niveaux énergétiques thermiques** différents, et ce suite au mouvement de leurs particules élémentaires. C'est le cas du transfert thermique à travers les parois d'un mur, les conduites qui transportent des fluides chauds ou froids, etc.

I.2.2 Convection : Le phénomène de convection se réfère au transfert thermique qui a lieu dans les fluides (liquides ou gaz) en mouvement. La convection est le processus de transfert thermique déterminé par le mouvement des particules élémentaires d'un fluide entre les zones ayant des températures différentes ; ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides qui échangent de l'énergie (chaleur) et la quantité de mouvement (impulsion ou choc) entre elles. Compte tenu des forces qui produisent le mouvement du fluide, on a deux types de convection : **forcée et naturelle (ou libre)**.

Dans la convection forcée, le mouvement du fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (pompe, ventilateur, etc.) qui lui donne des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime du mouvement du fluide.

La convection naturelle a comme origine le mouvement produit par des différences de densité entre les particules chaudes et celles qui sont froides existant dans un fluide situé dans un champ de forces massiques (ou champ gravitationnel).

Des exemples typiques pour la convection sont : l'échauffement ou le refroidissement des fluides dans les échangeurs de chaleur, le refroidissement du café en soufflant au dessus de la tasse, le refroidissement d'une pièce après traitement thermique, etc.

I.2.3 Rayonnement : Le phénomène de rayonnement thermique constitue une forme particulière de transfert thermique dans la quelle le porteur d'énergie n'est pas représenté par des particules de substance mais par des ondes électromagnétiques ayant à l'origine l'agitation atomique à la surface d'un corps. Le mécanisme de rayonnement est créé par l'émission et l'absorption d'ondes porteuses d'énergie rayonnante et par la transformation de celle-ci en chaleur avec le changement d'état énergétique des corps qui la retiennent.

Les exemples typiques pour le rayonnement sont : le rayonnement solaire, la préparation de la nourriture sur un radiateur électrique, le chauffage des pièces métalliques dans des fours pour les soumettre à des traitements thermiques, le chauffage central d'un local par radiateur, etc.

I.3. Quelques notions fondamentales :

I.3.1 Température : La température représente ou exprime pratiquement **la qualité de chaud ou de froid** qu'on peut attribuer à un corps quelconque solide, liquide ou gazeux. Sur la voie expérimentale, on a constaté que si on met en contact un corps chaud et un corps froid : le premier va se refroidir tandis que le second va se chauffer jusqu'à l'égalisation de leurs températures. Autrement dit, ils arrivent à l'équilibre thermique. Donc, on peut aussi définir la température comme étant le paramètre qui montre si un système est en équilibre thermique avec un autre système.

Le principe Zéro de la thermodynamique, établi sur des bases expérimentales, s'énonce ainsi : si deux systèmes se trouvent chacun en équilibre thermique avec un troisième système, alors ils sont

en équilibre thermique entre eux. Ceci représente le point de départ pour la mesure de la température rendant possible la comparaison entre les températures de deux corps différents à l'aide d'un troisième (par exp. le thermomètre) sans mettre en contact les deux corps.

On recommande l'utilisation de l'échelle des températures absolues ayant le symbole (T) d'unité octroyée par le SI : le Kelvin [K], soit :

$$T [\text{K}] = 273,15 + T [^{\circ}\text{C}].$$

Aussi, l'unité Fahrenheit est utilisée : $T [^{\circ}\text{C}] = (5/9) (T [^{\circ}\text{F}] - 32)$.

I.3.2 Champ de température : Les observations pratiques ont abouti à la conclusion qu'à chaque point matériel d'un espace matériel on a une seule valeur pour la température. La multitude des valeurs pour tous les points matériels qui constituent un système s'appelle **champ de température ou distribution de température**.

Du point de vue mathématique, le champ de température est représenté par une fonction de coordonnées spatiales et le temps, soit :

$$T = T(x, y, z, t).$$

- Champ de température instationnaire ou transitoire,
- Champ de température stationnaire ou permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- Champ de température unidimensionnel : $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$, bidimensionnel : $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$.

I.3.3 Surface isotherme : Une surface isotherme représente le lieu géométrique des points matériels ayant la même température. Le point singulier représente un point de l'espace matériel ayant une température qu'on ne retrouve pas ailleurs.

I.3.4 Gradient de température : Dans un corps quelconque, la variation de température se produit dans des directions qui traversent les surfaces isothermes ; la différence de température la plus importante rapportée à l'unité de longueur est observée dans la direction normale à la surface isotherme. L'augmentation de la température dans cette direction est caractérisée par le gradient de température défini (en coordonnées cartésiennes) par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}.$$

I.3.5 Flux de chaleur (ou flux thermique) : Le flux thermique total représente la quantité chaleur transférée (Q) par une unité de temps (t), soit :

$$\Phi = \frac{Q}{t} [\text{W}].$$

On l'appelle aussi la puissance thermique (appareils et équipements thermiques).

I.3.6 Flux thermique surfacique : Le flux thermique surfacique ou la densité de flux (φ) à travers une surface (S) représente le flux thermique total rapporté à une unité de surface, soit :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} [\text{W} / \text{m}^2].$$

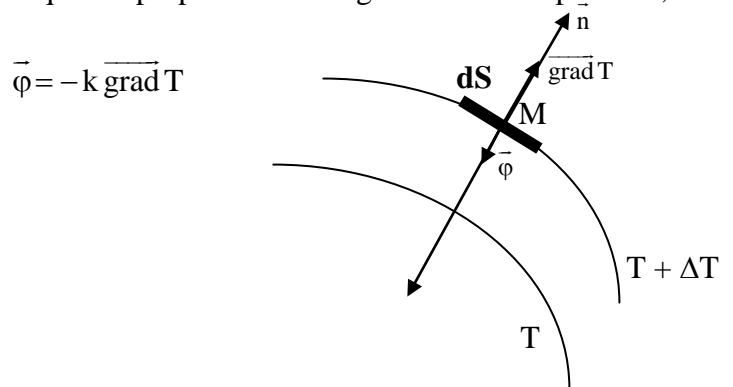
I.3.7 Différentes unités : Le tableau qui suit reporte quelques unités mécaniques et thermiques rencontrées.

Grandeur physique	Nom de l'unité	Notation	Valeur
Travail, quantité de chaleur	Joule	J	
	Calorie	cal	4,185 J
	Thermie	th	1000 kcal
Temps	Seconde ou heure	s ou h	1 h = 3600 s
Energie	Wattheure	Wh	3600 J 1 kWh = 0,86 th
Puissance, flux thermique	Watt	W	1 W = 0,86 kcal/h
Température	Kelvin ou Degré Celsius	K ou °C	
Capacité thermique, enthalpie, entropie	Joule par Kelvin	J/K	
Densité de flux thermique	Watt par mètre-carré	W/m ²	

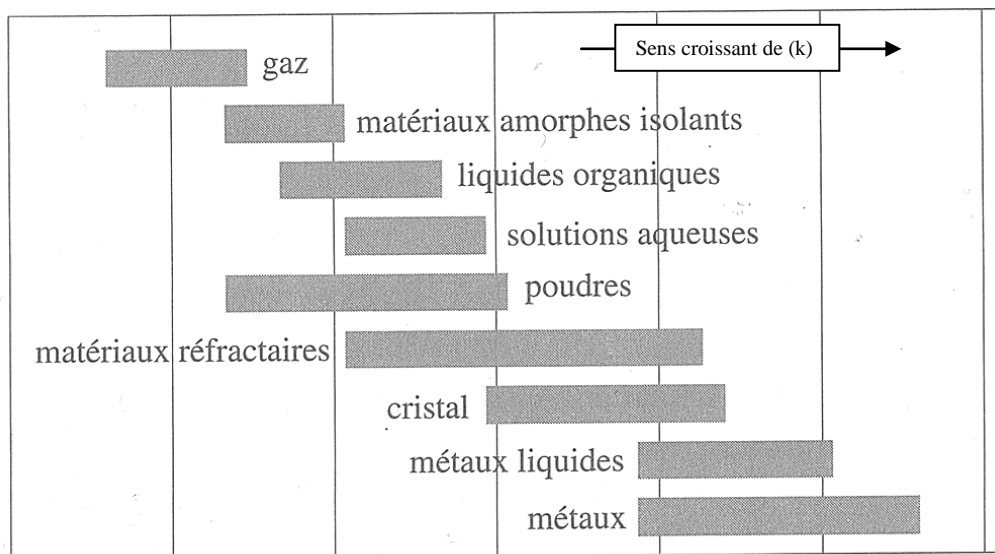
Chapitre II : Conduction thermique stationnaire

II.1. Concept de la conduction : Le transfert de la chaleur par conduction est associé aux mouvements de translation, de rotation et de vibrations des molécules et atomes constituant le milieu considéré (solide, fluide). Quand la température d'un corps croît, l'énergie cinétique des molécules et atomes le constituant croît en entraînant une augmentation du transfert de chaleur par conduction.

II.2. Loi de Fourier : En 1804, J. B. Biot propose un modèle mathématique décrivant le phénomène de conduction thermique ; en 1822, J. B. Fourier reprend l'analyse du phénomène et établit de manière expérimentale la loi fondamentale de la conduction qui depuis porte son nom. Elle s'énonce ainsi : le flux thermique surfacique est proportionnel au gradient de température, soit :



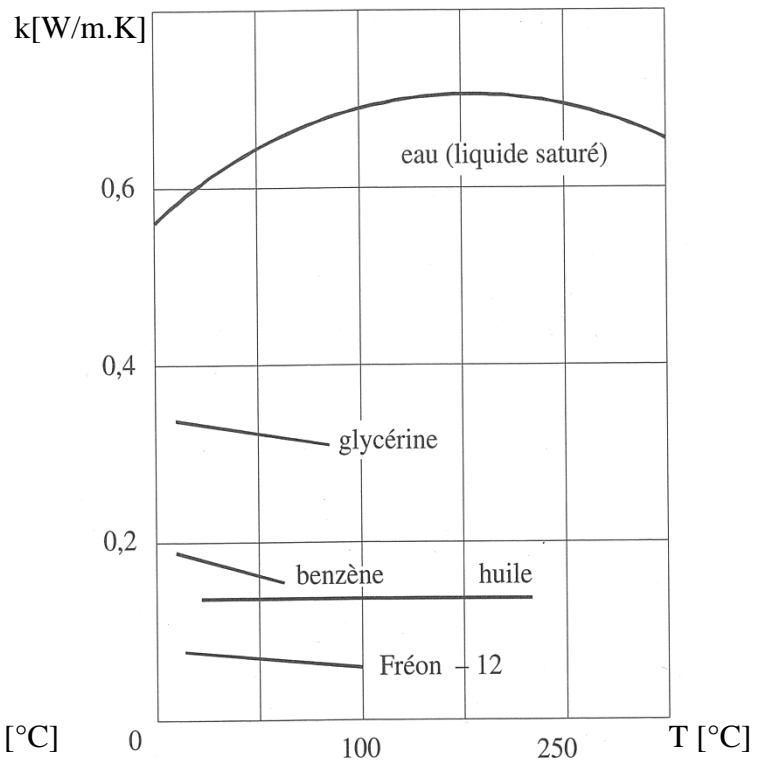
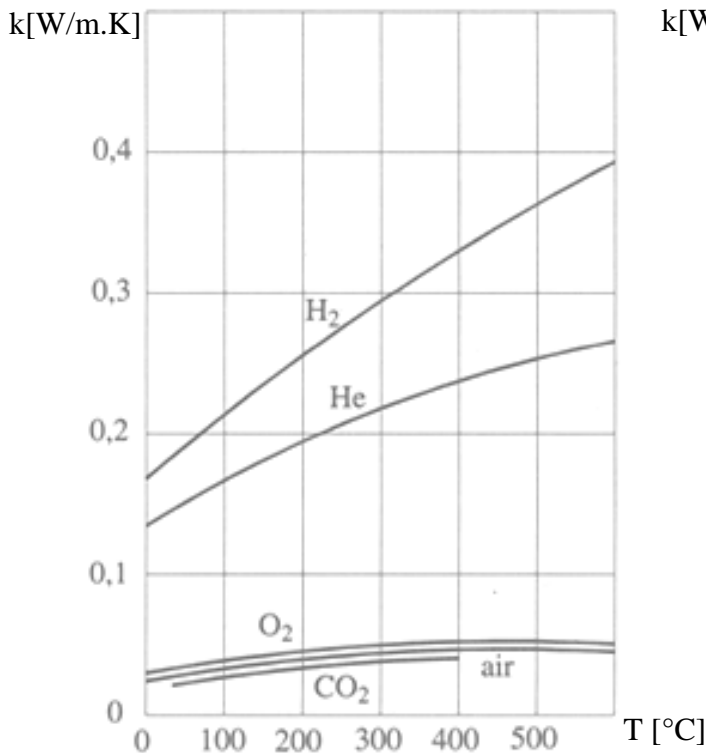
Par convention, le sens positif du flux thermique surfacique correspond à la direction décroissante des températures de manière à respecter le passage de la chaleur des parties plus chaudes vers les parties plus froides d'un corps. C'est la raison pour la quelle un signe (-) apparaît dans la formule. Le facteur de proportionnalité (k) est obtenu par voie expérimentale ; il constitue une propriété physique du corps. C'est un scalaire positif qui définit l'aptitude du corps à transmettre la chaleur, et il est appelé conductivité thermique [W/m.K]. Cette grandeur dépend d'une multitude de facteurs parmi lesquels on cite : la nature des matériaux, la température, la pression, l'humidité, etc.



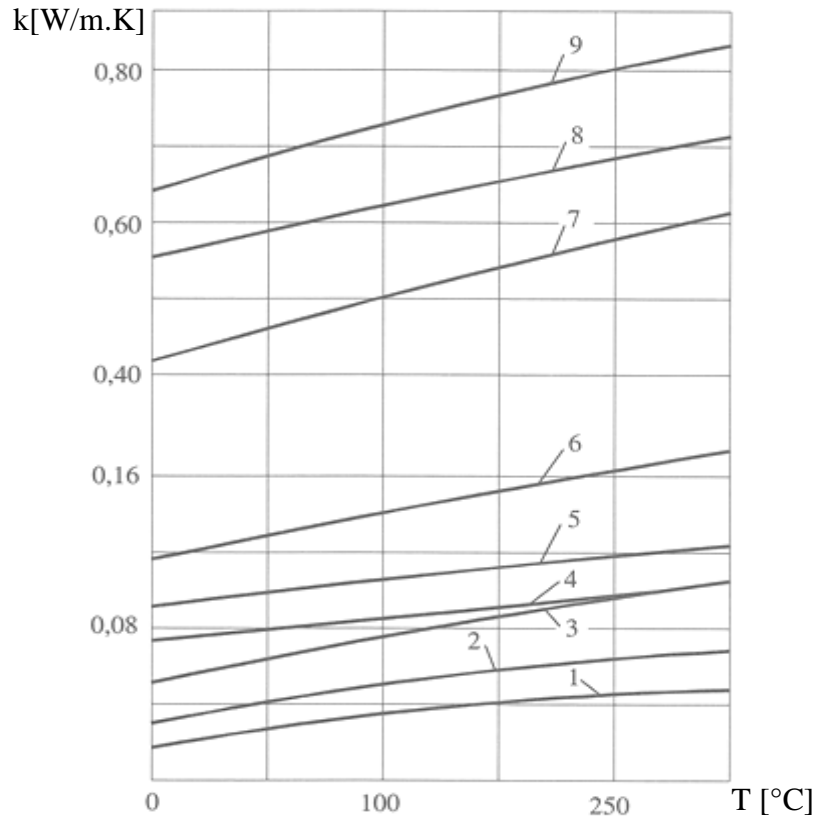
Ordre de grandeur de la conductivité thermique pour divers types de milieux.

Conductivité thermique de quelques matériaux
Valeurs à température ambiante

	Matériau	k (Wm ⁻¹ K ⁻¹)
Métaux et alliages	Argent	417
	Cuivre	380
	Aluminium	230
	Laiton	110-90
	Fer pur	72
	Acier	52
	Plomb	35
	Acier inoxydable	15
Matériaux de construction	Béton plein	1,75
	Béton vermiculite	0,31
	Béton cellulaire	0,24
	Briques réfractaires	0,11 à 0,61
	Plâtre	0,43
	Bois	0,15
	Liège compensé	0,1
	Verre	1,15
Liquides	Eau	0,56
	Alcool	0,13
Gaz	Air	0,02
	Vapeur d'eau	0,016
	Gaz carbonique	0,014
Isolants	Liège expansé	0,043
	Laine de verre	0,035
	Laine	0,035
	Amiante	0,15
	Amiante ciment	0,8
	Polyuréthane	0,03
	Polystyrène	0,04
	Polychlorure de vinyle	0,031

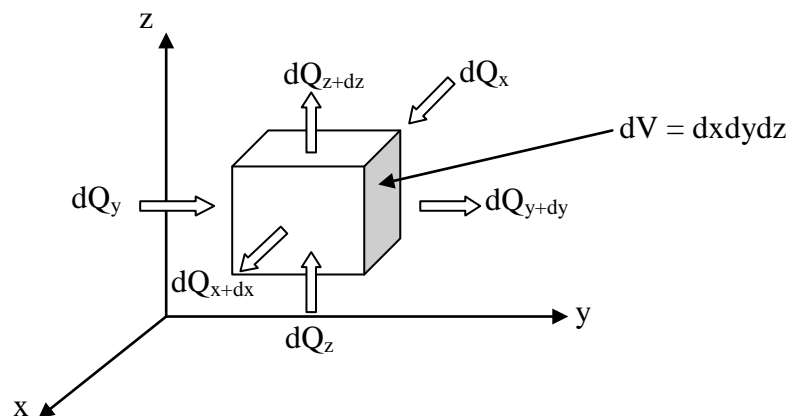


Variation de (k) avec la température pour certains gaz et liquides.



Variation de (k) avec la température pour des matériaux de construction et d'isolation.
 1- air, 2- laine minérale, 3- laine légère, 4- magnésite, 5- sovelite, 6- brique diatomite,
 7- brique rouge, 8- brique de béton, 9- brique de chamotte.

II.3. Equation différentielle de la conduction : On considère un volume infinitésimal (dV) et on effectue le bilan thermique relatif à ce volume pendant un temps (dt).



dQ_x , dQ_y et dQ_z sont les quantités de chaleur qui entrent dans le volume dV pendant le temps dt .
 dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} et dQ_{z+dz} sont les quantités de chaleur qui sortent du même volume.

On adopte les hypothèses simplificatrices suivantes :

- La structure du solide est homogène et isotrope.
- Les propriétés physiques (par exemple : la conductivité thermique) sont constantes.
- La déformation du volume élémentaire due à la variation de température est très petite.
- Les sources internes de chaleur sont distribuées d'une manière uniforme dans le volume.

La chaleur transférée par conduction dans le volume dV durant l'intervalle dt sur la direction x peut être écrite sous la forme suivante :

$$dQ_{cx} = (dQ_x - dQ_{x+dx}) = \varphi_x dydzdt - \varphi_{x+dx} dydzdt$$

$$\text{Or : } \varphi_{x+dx} = \varphi_x + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx \text{ (développement de 1^{er} ordre en série de Taylor)}$$

$$dQ_{cx} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx dy dz dt$$

La chaleur transférée par conduction dans le volume dV pendant dt est :

$$dQ_{cv} = -\left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

La quantité de chaleur élémentaire dQ_{si} produite par des sources internes de chaleur peut être exprimée selon :

$$dQ_{si} = \Sigma dx dy dz dt$$

La variation de l'énergie interne dans le volume élémentaire est donnée par :

$$dQ_{int} = C_p dm \frac{\partial T}{\partial t} dt = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt$$

C_p est la chaleur massique isobarique.

Le bilan thermique, selon la loi de conservation de l'énergie à ce volume qui préconise que la somme de la chaleur qui passe par ce volume par conduction dQ_{cv} et celle produite par les sources internes de chaleur dQ_{si} dans l'intervalle de temps dt est égale à la variation de l'énergie interne de la substance contenue dans le volume considéré, permet d'écrire :

$$-\left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right] + \Sigma = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En utilisant la loi de Fourier, l'équation différentielle de la conduction peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\Sigma}{\rho C_p} = a \Delta T + \frac{\Sigma}{\rho C_p}$$

Avec (a) est la diffusivité thermique : $a = \frac{k}{\rho C_p} [m^2 / s]$.

Compte tenu de la proportionnalité directe entre $\frac{\partial T}{\partial t}$ et (a), on peut dire que la vitesse de propagation de la chaleur sera d'autant plus grande que la valeur de (a) sera grande elle aussi.

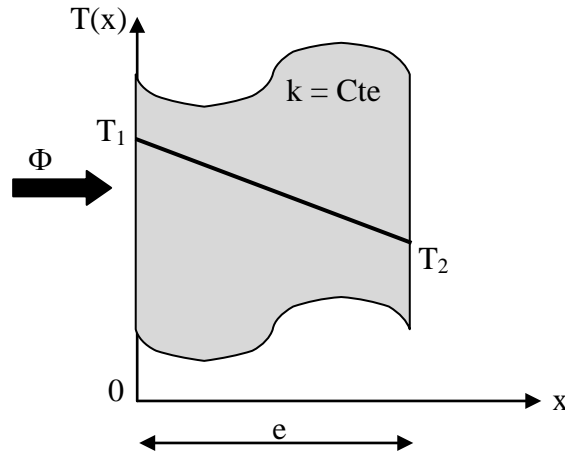
	Diffusivité $10^{-4} m^2 s^{-1}$	Conductivité $W m^{-1} K^{-1}$
Cuivre	1,1	380
Fer	0,16	72
Acier inoxydable	0,04	15
Aluminium	0,94	230
Béton	0,005	1,75
Verre	0,003	1,15
Eau	0,002	0,56
Air		0,02

Pour une conduction stationnaire, l'équation de la chaleur se simplifie à la forme suivante :

$$a \Delta T + \frac{\Sigma}{\rho C_p} = 0$$

II.4. Corps homogènes avec configurations géométriques simples (sans sources internes de chaleur) :

II.4.1. Mur simple à faces isothermes : Le mur est un milieu conducteur homogène limité par deux plans parallèles infinis isothermes.



Les sources de chaleur sont assumées inexistantes et le champ de température est unidimensionnel,

alors on peut écrire : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = c_1 x + c_2$.

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par l'écriture des conditions aux limites.

Si : $x = 0 ; T(0) = T_1$
 $x = e ; T(e) = T_2$

$$T(x) = c_1 x + c_2 = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1$$

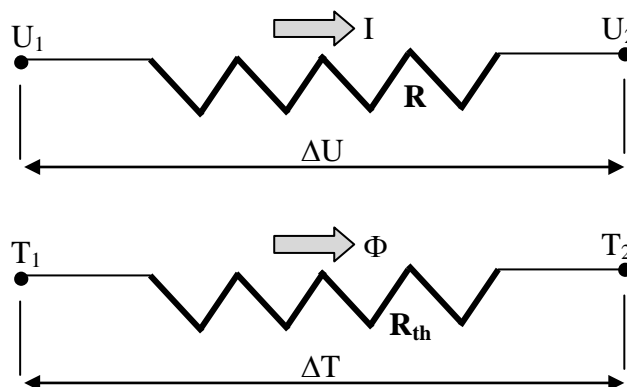
L'équation de Fourier pour un mur simple à faces isothermes peut être exprimée par :

$$\varphi = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \frac{dT(x)}{dx} = -k c_1 = -k \frac{T_2 - T_1}{e} = \frac{k}{e} (T_1 - T_2)$$

Si : $S_1 = S_2 = S$, on peut écrire :

$$\Phi = \varphi S = \frac{k}{e} S (T_1 - T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{e}{kS} \Phi$$

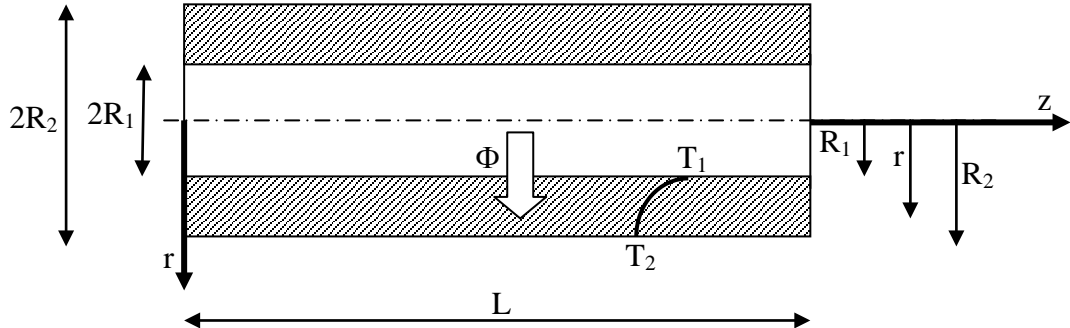
Par analogie électrique à la loi d'Ohm ($\Delta U = R I$), on peut faire la schématisation suivante :



$$R_{th} = \frac{e}{kS}$$

II.4.2. Cylindre creux à surfaces isothermes : L'équation de la conduction en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\Sigma}{\rho C_p}$$



On assume que le transfert se fait selon la direction (r) en régime stationnaire et sans sources internes de chaleur ; à cet effet, l'équation de la conduction se réduit à l'expression suivante :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Ceci implique que : $T(r) = c_1 \ln r + c_2$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par l'écriture des conditions aux limites.

$$\begin{aligned} \text{Si : } & r = R_1 ; T(R_1) = T_1 \\ & r = R_2 ; T(R_2) = T_2 \end{aligned}$$

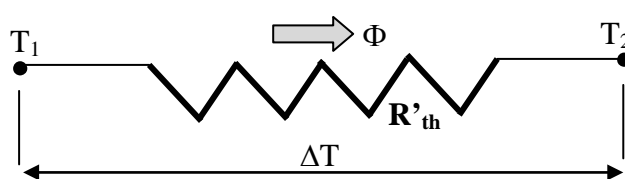
$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \ln r + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \ln R_1$$

L'équation de Fourier pour un cylindre creux à surfaces isothermes peut être exprimée par :

$$\varphi = -k \frac{\partial T}{\partial r} = -k \left(\frac{(T_1 - T_2) \frac{1}{r}}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \right) = \frac{k (T_1 - T_2)}{r \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} = \varphi(r)$$

Le flux thermique est donné selon l'équation qui suit :

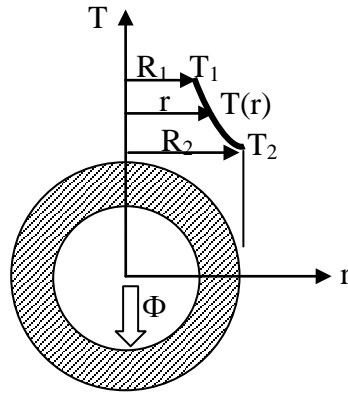
$$\Phi = \frac{k (T_1 - T_2)}{r \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} 2\pi r L = 2\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} L \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi k L} \Phi = R'_{th} \Phi$$



$$R'_{th} = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi k L}$$

II.4.3. Sphère creuse à surfaces isothermes : L'équation différentielle de la conduction en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{\Sigma}{\rho C_p}$$



On assume que le transfert se fait selon la direction (r) en régime stationnaire et sans sources internes de chaleur ; à cet effet, l'équation de la conduction se réduit à l'expression suivante :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

Ceci implique que : $T(r) = -c_1 \frac{1}{r} + c_2$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par l'écriture des conditions aux limites.

$$\begin{aligned} \text{Si : } & r = R_1 ; T(R_1) = T_1 \\ & r = R_2 ; T(R_2) = T_2 \end{aligned}$$

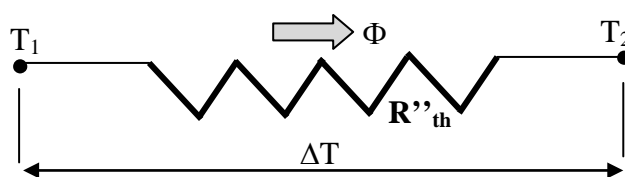
$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)$$

L'équation de Fourier pour une sphère creuse à surfaces isothermes peut être exprimée par :

$$\varphi = -k \frac{dT(r)}{dr} = \frac{k}{r^2} \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \varphi(r)$$

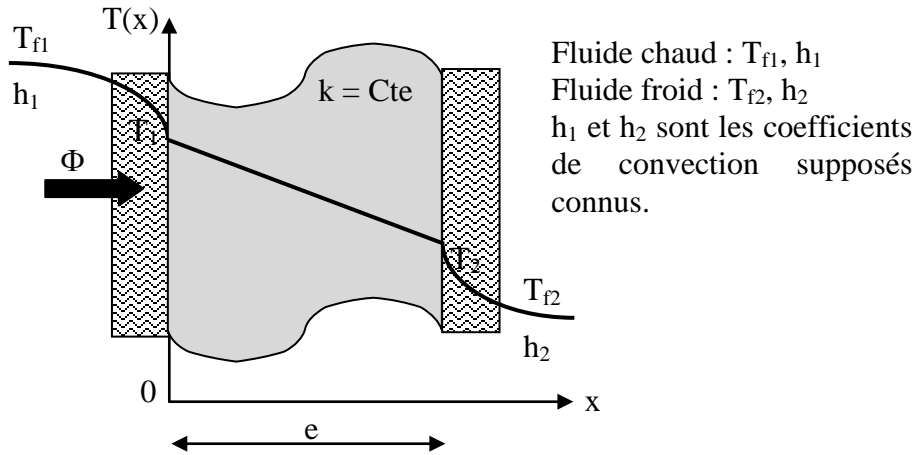
Le flux thermique est donné selon l'équation qui suit :

$$\Phi = \frac{k}{r^2} \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} 4\pi r^2 = 4\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{4\pi k} \Phi = R''_{th} \Phi$$



$$R''_{th} = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{4\pi k}$$

II.4.4. Mur simple à faces isothermes en contact avec deux fluides :



Le flux thermique surfacique transféré entre un fluide en mouvement et une surface solide en contact avec lui est donné par la loi de Newton :

$$\varphi = h(T_f - T_s)$$

La chute de température ($T_f - T_s$) a lieu dans une zone très étroite adjacente à la surface solide où se manifeste une modification essentielle du champ de température qui s'appelle couche limite thermique.

On peut aussi écrire :

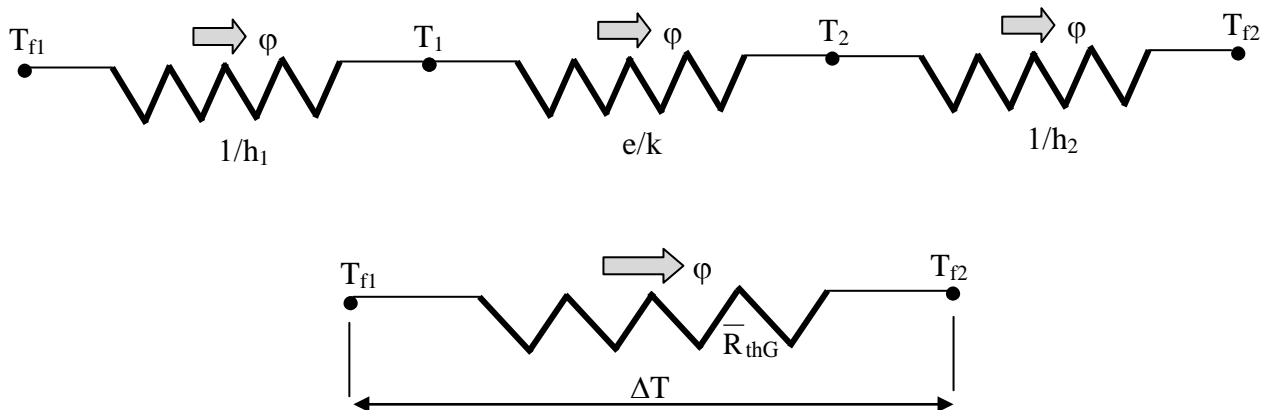
$$\varphi = \frac{T_f - T_s}{\frac{1}{h}} = \frac{T_f - T_s}{R_{ts}}$$

Cela représente la résistance imposée par la couche limite au passage de la chaleur qui s'appelle résistance thermique à la surface ou résistance thermique superficielle.

En régime stationnaire et en l'absence de sources internes de chaleur dans le mur, le flux thermique surfacique se conserve, c'est-à-dire le flux thermique surfacique cédé par le fluide chaud au mur, celui traversant le mur et celui reçu par le fluide froid sont égaux ; alors, on peut écrire :

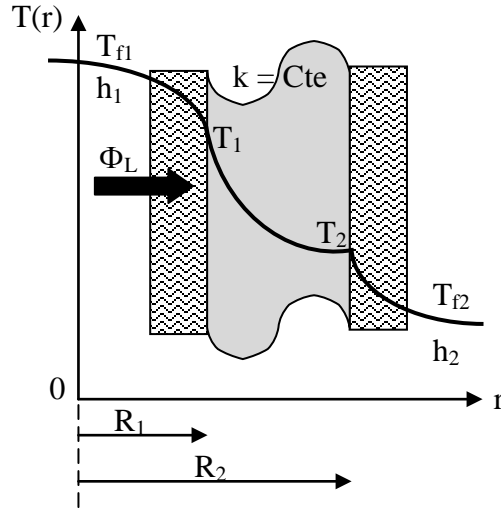
$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_1}{\frac{1}{h_1}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k}} = \frac{T_2 - T_{f2}}{\frac{1}{h_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{thG}} = \bar{h}_G (T_{f1} - T_{f2})$$

Où \bar{h}_G représente le coefficient global de transfert thermique, il caractérise l'intensité de transfert de la chaleur entre les deux fluides à travers un mur qui les sépare.



II.4.5. Cylindre creux à surfaces isothermes en contact avec deux fluides : Pour des raisons simplificatrices, nous considérons la densité linéique du flux thermique :

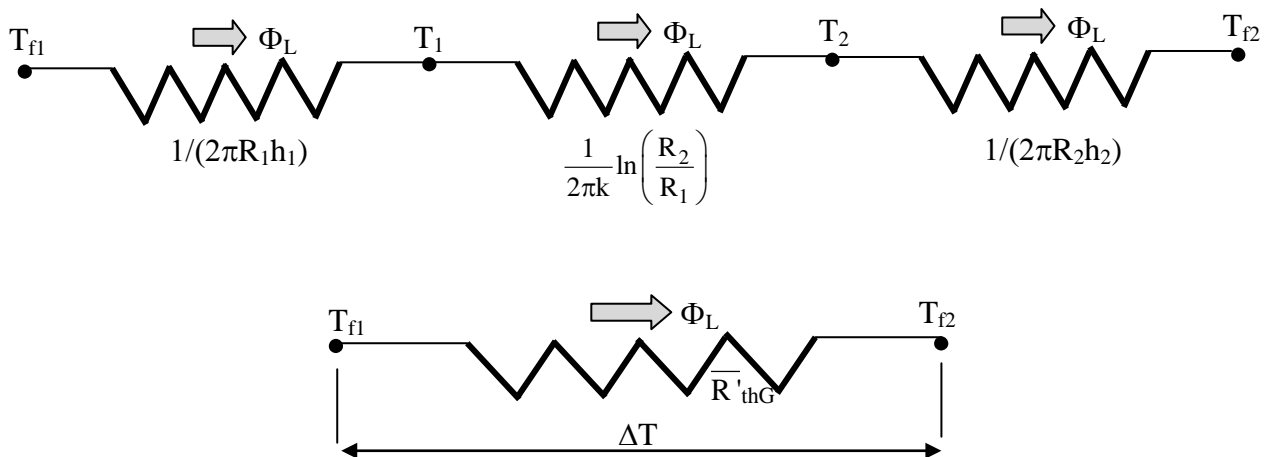
$$\Phi = 2\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} L \Rightarrow \Phi_L = \frac{\Phi}{L} = 2\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$



Comme la densité linéique du flux thermique est conservative, on peut écrire :

$$\Phi_L = h_1(T_{f1} - T_1)2\pi R_1 = 2\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = h_2(T_2 - T_{f2})2\pi R_2$$

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{2\pi R_1 h_1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{(T_2 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi R_2 h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi R_1 h_1} + \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi R_2 h_2}} \\ &= \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\pi d_1 h_1} + \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{\pi d_2 h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R'_{thG}} = \bar{h}'_G (T_{f1} - T_{f2}) \end{aligned}$$



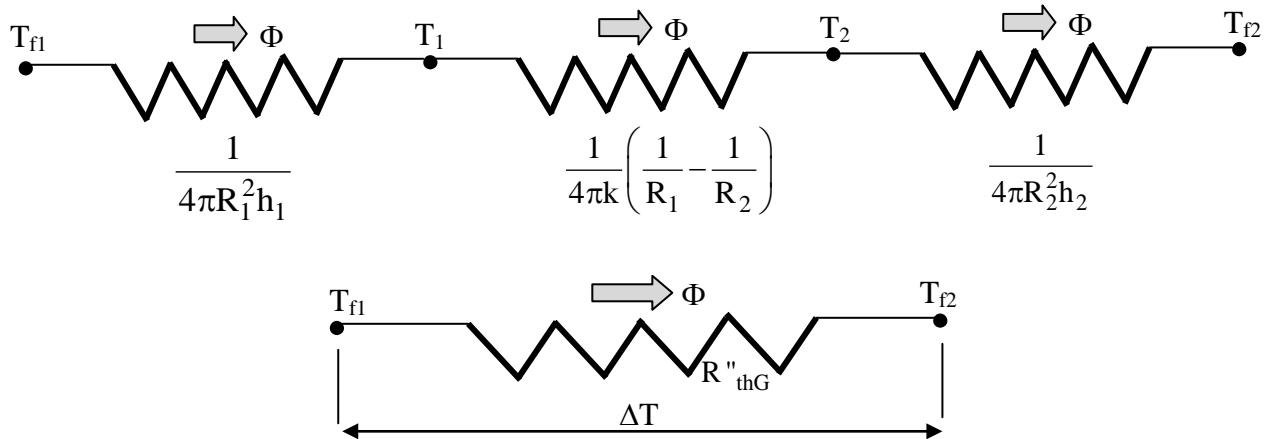
II.4.6. Sphère creuse à surfaces isothermes en contact avec deux fluides : Rappelons que le flux thermique par conduction est exprimé par :

$$\Phi = 4\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Comme le flux thermique est conservatif, on peut écrire :

$$\Phi = h_1(T_{f1} - T_1)4\pi R_1^2 = 4\pi k \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = h_2(T_2 - T_{f2})4\pi R_2^2$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{4\pi R_1^2 h_1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{(T_2 - T_{f2})}{\frac{1}{4\pi R_2^2 h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{4\pi R_1^2 h_1} + \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi R_2^2 h_2}} \\ &= \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\pi d_1^2 h_1} + \frac{1}{2\pi k} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\pi d_2^2 h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R''_{thG}} = h''_G (T_{f1} - T_{f2}) \end{aligned}$$



II.5. Cas où la conductivité thermique est une fonction de la température :

On admet dans la majorité des cas une dépendance linéaire entre la conductivité thermique et la température : $k = k_0(1 + \beta \cdot T)$.

k_0 : est la conductivité thermique du milieu à la température de 0 °C.

β : est le coefficient caractéristique du milieu (pour les métaux, il a usuellement une valeur négative).

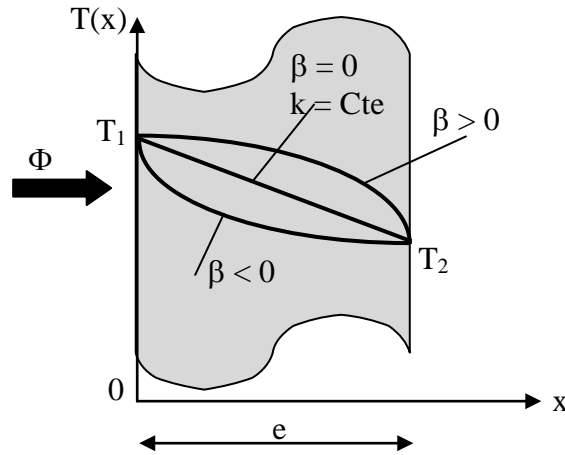
Le flux thermique surfacique pour un **mur simple**, sous les hypothèses d'un régime stationnaire, d'un champ de température unidimensionnel et sans sources internes de chaleur, peut être exprimé par :

$$\varphi = -k_0(1 + \beta \cdot T) \frac{dT}{dx}$$

En utilisant la séparation des variables et l'intégration entre les limites : $x = 0$ et $x = e$, on peut

écrire : $\varphi \int_0^e dx = \int_{T_1}^{T_2} -k_0(1 + \beta \cdot T) dT \Rightarrow \varphi = \frac{k_{moy}}{e} (T_1 - T_2)$

Avec : $k_{\text{moy}} = k_0(1 + \beta \cdot T_{\text{moy}}) = k_0 \left(1 + \beta \frac{T_1 + T_2}{2} \right)$



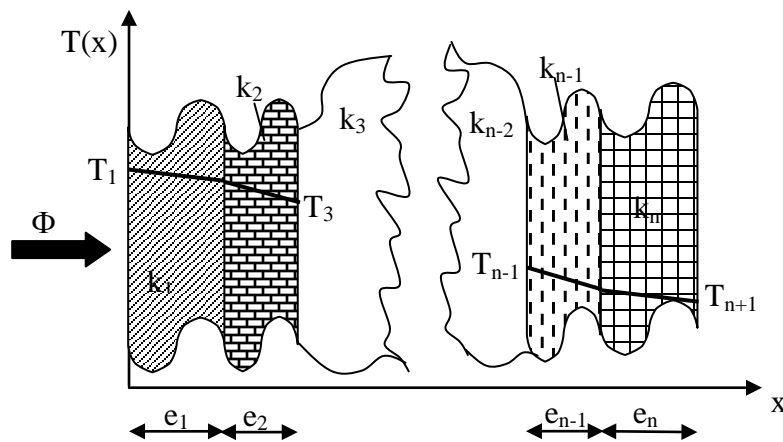
La variation de la température en fonction de x est donnée par : $T(x) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_1\right)^2 - \frac{2\phi}{\beta k_0} x}$.

De même, on peut aussi dégager les variations de la température selon la direction radiale pour les cas d'un cylindre creux et d'une sphère creuse.

II.6. Corps ayant des structures composées ou composites :

II.6.1. Cas d'un mur composite à faces isothermes :

Considérons un mur composé par (n) couches homogènes et isotropes (en contact parfait) d'épaisseurs respectives e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) et ayant les conductivités thermiques constantes k_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Les surfaces extrêmes ont respectivement les températures T_1 et T_{n+1} .



En régime stationnaire et en l'absence de sources internes de chaleur, le flux thermique surfacique qui traverse chaque couche du mur reste constant ; alors, on peut écrire :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{e_1/k_1} = \frac{T_2 - T_3}{e_2/k_2} = \dots = \frac{T_j - T_{j+1}}{e_j/k_j} = \dots = \frac{T_n - T_{n+1}}{e_n/k_n}$$

$$\phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{e_1/k_1 + \dots + e_j/k_j + \dots + e_n/k_n} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{j=1}^n \frac{e_j}{k_j}}$$

La valeur $\sum_{j=1}^n \frac{e_j}{k_j}$ est appelée la résistance thermique conductive totale du mur composé.

Le mur composite peut être assimilé à un mur simple ayant une épaisseur égale à la somme

des différentes épaisseurs des couches et une conductivité thermique équivalente exprimée selon l'égalité qui suit :

$$\frac{\sum_{j=1}^n e_j}{k_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{k_j} \Rightarrow k_{eq} = \frac{\sum_{j=1}^n e_j}{\sum_{j=1}^n \frac{e_j}{k_j}}$$

Si le mur est en contact avec deux fluides, le flux thermique surfacique est donné par l'expression qui suit :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{k_j} + \frac{1}{h_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{thT}} = \bar{h}_T (T_{f1} - T_{f2})$$

Où \bar{R}_{thT} est la résistance thermique totale du mur composite en contact avec deux fluides.

II.6.2. Cas d'un cylindre creux composite à surfaces isothermes :

Considérons un cylindre creux composé par (n) couches homogènes et isotropes (en contact parfait) de conductivités thermiques constantes k_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Les surfaces extrêmes ont les températures T_1 et T_{n+1} .

La densité linéique du flux thermique est donnée par :

$$\Phi_L = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi k_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \dots = \frac{(T_j - T_{j+1})}{\frac{1}{2\pi k_j} \ln\left(\frac{R_{j+1}}{R_j}\right)} = \dots = \frac{(T_n - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi k_n} \ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \ln\left(\frac{R_{j+1}}{R_j}\right)}$$

En introduisant la notion de conductivité thermique équivalente, on peut écrire :

$$\Phi_L = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \ln\left(\frac{R_{j+1}}{R_j}\right)} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi k_{eq}} \ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_1}\right)} \Rightarrow k_{eq} = \frac{\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_1}\right)}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \ln\left(\frac{R_{j+1}}{R_j}\right)}$$

Si le cylindre creux est en contact avec deux fluides, on peut écrire ce qui suit :

$$\Phi_L = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\pi d_1 h_1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \ln\left(\frac{d_{j+1}}{d_j}\right) + \frac{1}{\pi d_{n+1} h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R'_{thT}} = \bar{h}'_T (T_{f1} - T_{f2})$$

II.6.3. Cas d'une sphère creuse composite à surfaces isothermes :

Le flux thermique pour une sphère creuse composite peut être exprimé par l'équation qui suit :

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi k_1} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)} = \dots = \frac{(T_j - T_{j+1})}{\frac{1}{2\pi k_j} \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}}\right)} = \dots = \frac{(T_n - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi k_n} \left(\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}}\right)} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}}\right)}$$

En introduisant la notion de conductivité thermique équivalente, on peut écrire :

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}} \right)} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2\pi k_{eq}} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_{n+1}} \right)} \Rightarrow k_{eq} = \frac{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_{n+1}} \right)}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}} \right)}$$

Si la sphère creuse est en contact avec deux fluides, on peut écrire ce qui suit :

$$\Phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\pi d_1^2 h_1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}} \right) + \frac{1}{\pi d_2^2 h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R''_{thT}} = h''_T (T_{f1} - T_{f2})$$

II.7. Corps ayant une géométrie quelconque :

Il ya de nombreuses applications pratiques où les corps n'ont pas une géométrie régulière ; du point de vue du transfert thermique, on peut les traiter en les décomposant en structures aux quelles on attache des résistances thermiques tout en utilisant un schéma équivalent par analogie électrique.

II.8. Corps ayant des sources internes de chaleur :

Dans certaines applications pratiques, le transfert thermique a lieu dans les conditions d'existence de sources de chaleur à l'intérieur des corps. Des exemples, dans ce domaine, sont les réactions exothermes pendant la solidification des bétons dans leurs coffrages, la dissipation de la chaleur par effet Joule suite au passage du courant électrique dans un conducteur, la dissipation ou l'absorption de la chaleur pendant les réactions chimiques, etc.

Les sources internes de chaleur sont caractérisées par leur densité volumique $\Sigma(x, y, z, t)$; elles sont positives quand elles dégagent de la chaleur et négatives quand elles absorbent de la chaleur. La conduction stationnaire en présence de sources internes de chaleur est régie par l'équation de

$$\text{Poisson : } \Delta T + \frac{\Sigma}{k} = 0.$$

II.8.1. Cas d'un mur simple à surfaces isothermes :

Pour une source interne de chaleur uniformément distribuée (constante), l'équation différentielle de la conduction peut être écrite pour un champ unidimensionnel de la température en régime stationnaire comme suit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\Sigma}{k} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\Sigma}{k} x + c_1$$

$$T(x) = -\frac{\Sigma}{2k} x^2 + c_1 x + c_2$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées à partir des conditions aux limites ; soit :

$$\text{Si : } x = 0 ; T(0) = T_1$$

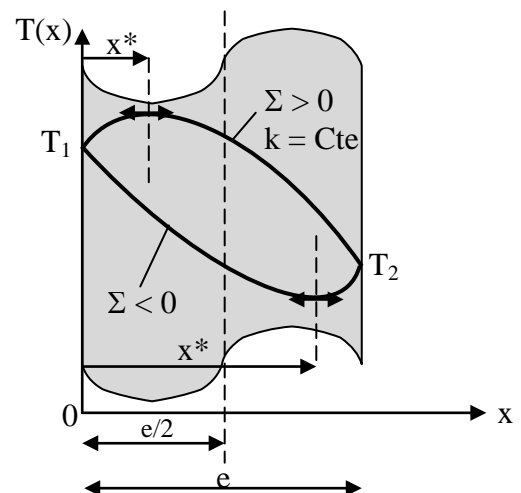
$$x = e ; T(e) = T_2$$

Ceci implique :

$$c_2 = T_1$$

$$c_1 = \frac{\Sigma \cdot e}{2k} - \frac{(T_1 - T_2)}{e}$$

$$T(x) = -\frac{\Sigma}{2k} x^2 + \left[\frac{\Sigma \cdot e}{2k} - \frac{(T_1 - T_2)}{e} \right] x + T_1$$



La recherche d'un point stationnaire permet d'écrire :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\Sigma}{k}x + \left[\frac{\Sigma \cdot e}{2k} - \frac{(T_1 - T_2)}{e} \right] = 0$$

$$x^* = \frac{k}{\Sigma} \left[\frac{\Sigma \cdot e}{2k} - \frac{(T_1 - T_2)}{e} \right] = \frac{e}{2} - \frac{k(T_1 - T_2)}{\Sigma \cdot e}$$

Selon le signe de Σ , $T(x)$ admet un extremum (maximum ou minimum) ; soit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\Sigma}{k}$$

- $\frac{d^2T}{dx^2} < 0$ si $\Sigma > 0$ (Maximum dans la première moitié du mur)
- $\frac{d^2T}{dx^2} > 0$ si $\Sigma < 0$ (Minimum dans la deuxième moitié du mur)

$$T_{extremum} = T(x^*) = -\frac{\Sigma}{2k} \left[\frac{e}{2} - \frac{k(T_1 - T_2)}{\Sigma \cdot e} \right]^2 + \left[\frac{\Sigma \cdot e}{2k} - \frac{(T_1 - T_2)}{e} \right] \left[\frac{e}{2} - \frac{k(T_1 - T_2)}{\Sigma \cdot e} \right] + T_1$$

La densité du flux thermique peut être exprimée selon :

$$\varphi = -k \frac{dT}{dx} = \Sigma x - k \left[\frac{\Sigma \cdot e}{2k} - \frac{(T_1 - T_2)}{e} \right] = \Sigma \left[x - \frac{e}{2} \right] + \frac{k(T_1 - T_2)}{e}$$

- $x = 0$ $\varphi(0) = \varphi_1 = -\Sigma \frac{e}{2} + \frac{k(T_1 - T_2)}{e}$
- $x = e/2$ $\varphi(e/2) = \frac{k(T_1 - T_2)}{e}$
- $x = e$ $\varphi(e) = \varphi_2 = \Sigma \frac{e}{2} + \frac{k(T_1 - T_2)}{e}$
- $x = x^* = \frac{e}{2} - \frac{k(T_1 - T_2)}{\Sigma \cdot e}$ $\frac{dT}{dx} = 0$ et $\varphi = 0$ (plan neutre)

Cas particulier : les températures extrêmes T_1 et T_2 sont égales :

- $x = 0$ $\varphi(0) = \varphi_1 = -\Sigma \frac{e}{2}$ (< 0 si $\Sigma > 0$)
- $x = e/2$ $\varphi(e/2) = 0$ (plan neutre)
- $x = e$ $\varphi(e) = \varphi_2 = \Sigma \frac{e}{2}$ (> 0 si $\Sigma > 0$)

Dans certaines applications pratiques, la température maximale est celle d'une des faces extrêmes du mur. Alors, cette dernière doit être confondue avec le plan neutre situé à $x = 0$ ou $x = e$; c'est le cas, par exemple, d'une plaque de cuisson électrique. Dans ce cas : $\varphi(0) = 0$.

$$\varphi(0) = -\Sigma \frac{e}{2} + \frac{k(T_1 - T_2)}{e} = 0$$

$$\Sigma = \frac{2k(T_1 - T_2)}{e^2}$$

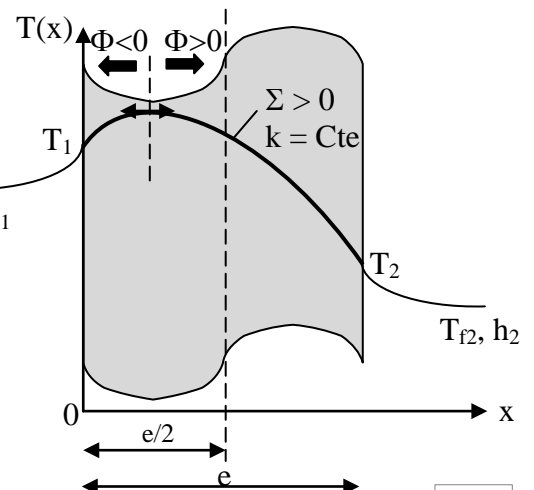
Ceci permet de calculer la puissance de la plaque de cuisson. Aussi, la surface $x = e$ doit être parfaitement isolée.

II.8.2. Mur simple en contact avec deux fluides :

On suppose que la source interne de chaleur est T_{f1} , h_1 positive.

$$\varphi(0) = -h_1(T_1 - T_{f1}) = -\Sigma \frac{e}{2} + \frac{k(T_1 - T_2)}{e}$$

$$\varphi(e) = h_2(T_2 - T_{f2}) = \Sigma \frac{e}{2} + \frac{k(T_1 - T_2)}{e}$$



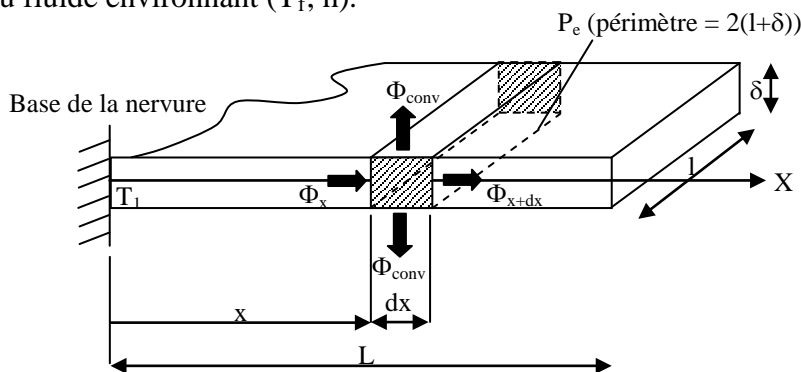
De ces deux équations, on trouve :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_{f1} + \frac{-(T_{f1} - T_{f2}) + \Sigma e \left(\frac{e}{2k} + \frac{1}{h_2} \right)}{h_1 \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right]} \\
 &= T_{f1} + \frac{-(T_{f1} - T_{f2}) + \Sigma e (\bar{R}_{thG 2})}{h_1 \bar{R}_{thG}} \\
 T_2 &= T_{f2} + \frac{(T_{f1} - T_{f2}) + \Sigma e \left(\frac{e}{2k} + \frac{1}{h_1} \right)}{h_2 \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right]} \\
 &= T_{f2} + \frac{(T_{f1} - T_{f2}) + \Sigma e (\bar{R}_{thG 1})}{h_2 \bar{R}_{thG}} \\
 T_1 - T_2 &= \frac{(T_{f1} - T_{f2}) + \frac{\Sigma e}{2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right)}{\frac{k}{e} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right]} = \frac{(T_{f1} - T_{f2}) + \frac{\Sigma e}{2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right)}{\frac{k}{e} \bar{R}_{thG}} \\
 x^* &= \frac{e}{2} - \frac{k(T_1 - T_2)}{\Sigma \cdot e} = \frac{e}{2} - \frac{\frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\Sigma} + \frac{e}{2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right)}{\left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right]} \\
 &= \frac{\frac{e}{2} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right] - \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\Sigma} - \frac{e}{2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right)}{\left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right]} \\
 &= \frac{e \left[\frac{e}{2k} + \frac{1}{h_2} \right] - \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\Sigma}}{\left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_2} \right]} = \frac{e \left[\frac{e}{2k} + \frac{1}{h_2} \right] - \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\Sigma}}{\bar{R}_{thG}} \\
 &= \frac{e[\bar{R}_{thG 2}] - \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\Sigma}}{\bar{R}_{thG}}
 \end{aligned}$$

II.9. Les ailettes :

Une ailette est élément bon conducteur de chaleur dont une dimension est grande devant les autres. Les applications pratiques utilisant des ailettes sont nombreuses (refroidissement de composants électroniques, échangeurs de chaleur, refroidissement d'un moteur, etc.)

On considère une nervure droite transférant la chaleur entre une surface plane ($L \times l \times \delta$) et son milieu fluide environnant (T_f, h).



Les hypothèses simplificatrices suivantes sont adoptées :

- Régime stationnaire,

- Pas de sources internes de chaleur,
- Conductivité thermique du matériau de l'ailette constante.

Effectuons un bilan thermique sur un élément de surface de longueur dx et d'abscisse x .

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_{conv}$$

$$\Phi_x = -k S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x$$

$$\Phi_{x+dx} = -k S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx} = -k S \left[\left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx \right] \quad (\text{Développement en série de Taylor})$$

$$\Phi_{conv} = h(P_e \cdot dx)[T(x) - T_f]$$

$$-k S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x = -k S \left[\left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx \right] + h(P_e \cdot dx)[T(x) - T_f]$$

$$k S \frac{d^2T(x)}{dx^2} - h P_e [T(x) - T_f] = 0 \quad \underline{\text{Equation différentielle de la nervure}}$$

On pose : $\omega^2 = \frac{h P_e}{k S}$ et $\theta = T(x) - T_f$

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - \omega^2\theta(x) = 0$$

C'est une équation différentielle du type Euler ; elle admet comme solution générale :

$$\theta(x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$$

c_1 et c_2 sont des constantes déterminées pour différentes situations particulières en imposant les conditions aux limites.

II.9.1. Ailette rectangulaire longue de section constante :

Pour une ailette longue, on émet l'hypothèse que : $T(x = L) = T_f$.

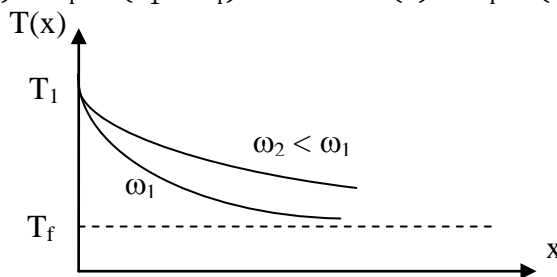
$$\begin{array}{ll} \text{Les conditions aux limites : } x = 0 & \theta(0) = T_1 - T_f \\ & x = L \quad \theta(0) = T_f - T_f = 0 \end{array}$$

De la deuxième condition aux limites ($x = L \Rightarrow x \rightarrow \infty$), on trouve : $c_1 = 0$.

$$\theta(x) = c_2 e^{-\omega x}$$

De la première condition aux limites ($x = 0$), on trouve : $c_2 = T_1 - T_f$.

$$T(x) - T_f = (T_1 - T_f) e^{-\omega x} \Rightarrow T(x) = T_f + (T_1 - T_f) e^{-\omega x}$$



Le flux thermique, transféré à travers la section S située à la distance x de la base de la nervure, est donné par :

$$\Phi_x = -k S \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_x = k S \omega (T_1 - T_f) e^{-\omega x}$$

Le flux est maximal à la base de la nervure ($x = 0$) : $\Phi_{Max} = k S \omega (T_1 - T_f)$.

II.9.2. Ailette courte et mince :

$$\text{Les conditions aux limites : } x = 0 \quad \theta(0) = T_1 - T_f$$

$$x = L \quad -k S \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Après développement, on trouve :

$$\frac{T(x) - T_f}{T_1 - T_f} = \frac{\cosh[\omega(L - x)]}{\cosh[\omega L]}$$

Le flux thermique est donné par :

$$\Phi_x = k S \omega (T_1 - T_f) \frac{\sinh[\omega(L - x)]}{\cosh[\omega L]}$$

Le flux est maximal à la base de la nervure ($x = 0$) : $\Phi_{Max} = k S \omega (T_1 - T_f) \tanh[\omega L]$.

II.9.3. Ailette courte et épaisse :

Les conditions aux limites : $x = 0$

$$\theta(0) = T_1 - T_f$$

$x = L$

$$-k S \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=L} = h S [T(x = L) - T_f]$$

Après développement, on trouve :

$$\frac{T(x) - T_f}{T_1 - T_f} = \frac{\cosh[\omega(L - x)] + \frac{h}{k\omega} \sinh[\omega(L - x)]}{\cosh[\omega L] + \frac{h}{k\omega} \sinh[\omega L]}$$

Le flux thermique est donné par :

$$\Phi_x = k S \omega (T_1 - T_f) \frac{\sinh[\omega(L - x)] + \frac{h}{k\omega} \cosh[\omega(L - x)]}{\cosh[\omega L] + \frac{h}{k\omega} \sinh[\omega L]}$$

Le flux est maximal à la base de la nervure ($x = 0$) : $\Phi_{Max} = k S \omega (T_1 - T_f) \frac{\tanh[\omega L] + \frac{h}{k\omega}}{1 + \frac{h}{k\omega} \tanh[\omega L]}$.

II.9.4. Efficacité d'une ailette :

La qualité d'une ailette est caractérisée par le rapport de sa performance effective à celle d'une ailette idéale de température uniforme égale à sa température de base ($k \rightarrow \infty$, pas de résistance thermique de conduction ; donc, pas de chute de température dans l'ailette).

Pour une ailette idéale : $\Phi_{id} = h P_e L (T_1 - T_f)$

L'efficacité ou le rendement est : $\eta = \frac{\Phi_{Max}}{\Phi_{id}}$

- Ailette rectangulaire longue : $\eta = \frac{1}{\omega L}$
- Ailette courte et mince : $\eta = \frac{\tanh(\omega L)}{\omega L}$
- Ailette courte et épaisse : $\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{\tanh[\omega L] + \frac{h}{k\omega}}{1 + \frac{h}{k\omega} \tanh[\omega L]}$.

Chapitre III : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

III.1. Convection naturelle (ou libre) :

Dans un champ de gravitation, toute différence de température dans un fluide modifie sa densité ; un mouvement se produit alors au sein du fluide du fait de la poussée d'Archimède. Ce mouvement de brassage, dans lequel les particules plus chaudes du fluide ont tendance à s'élever et les particules froides (denses) à descendre, s'appelle **convection**. Donc, le transfert thermique par convection représente le processus de transport effectué par le mouvement du fluide.

Le phénomène de convection naturelle a pour origine les variations de la masse volumique au sein du fluide liées aux variations de sa température. En effet, lorsque la masse volumique $\rho = \rho(T)$ admet des variations spatiales, la force de gravité sera motrice et engendre alors un écoulement de convection naturelle ou thermoconvection.

D'une façon simplifiée, l'objectif principal de l'étude du phénomène de la convection consiste essentiellement à :

- Développer des méthodes permettant l'évaluation du coefficient de convection (h).
- Etudier les différentes formules empiriques utilisées.

III.2. Formulation du problème de convection naturelle :

Dans les cas les plus courants de convection naturelle, les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles et les vitesses d'écoulement sont assez lentes. Alors, il est possible de considérer le fluide comme quasi-incompressible et les variations de la masse volumique sont négligés partout excepté dans la force de gravité (qui est à l'origine du phénomène). Avec ces hypothèses, la masse volumique peut être exprimée en fonction de la température par une loi linéaire comme suit : $\rho = \rho_f [1 - \bar{\beta}(T - T_f)]$.

Avec : $\bar{\beta} = -\frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=p_f}$ est le coefficient de dilation à pression constante.

Où ρ_f , T_f et p_f désignent respectivement la masse volumique, la température et la pression au cœur du fluide.

Le système d'équations régissant le phénomène de convection peut être exprimé par :

- Equation de conservation de la masse : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \right)$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$; Hyp. : Ecoulement stationnaire et fluide incompressible.

- Equations de conservation de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) :

$\rho_f \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}(p_f + \rho_f g z) + \rho_f g \bar{\beta}(T - T_f) \vec{k} + \mu \nabla^2 \vec{v}$; $\left(\frac{D}{Dt} \right)$: Dérivée particulaire)

$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}(p_f + \rho_f g z) + \rho_f g \bar{\beta}(T - T_f) \vec{k} + \mu \nabla^2 \vec{v}$ (3 équations)

- Equation de conservation de l'énergie : $\rho_f C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T)$

$\rho_f C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T)$; Hyp. : sans sources internes de chaleur, pas de dissipation visqueuse.

Remarque : L'adimensionnalisation de ces dernières équations permet d'établir des nombres sans dimensions (sans unités) caractéristiques du phénomène de convection. À cet effet, les variables adimensionnelles suivantes sont retenues :

$$\bar{x}^* = \frac{\bar{x}}{L_c}, \bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{V_0}, t^* = \frac{V_0 t}{L_c}, p^* = \frac{p_f + \rho_f g z}{\rho_f V_0^2}, \Theta = \frac{T - T_f}{T_p - T_f}$$

$$\bar{\nabla}^* = L_c \bar{\nabla}, \Delta^* = L_c^2 \Delta, \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{L_c}{V_0} \frac{\partial}{\partial t}$$

Ces variables remplacées dans les équations de Navier-Stokes donnent :

$$\left(\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \bar{v}^* \cdot \bar{\nabla}^* \bar{v}^* \right) = -\bar{\nabla}^* p^* + \text{Ri} \Theta \bar{k} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \bar{v}^*$$

À ce stade, nous avons défini deux nombres adimensionnels ; à savoir : les nombres de Richardson (Ri) et de Reynolds (Re) exprimés par :

$$\text{Ri} = \frac{g \bar{\beta} (T_p - T_f) L_c}{V_0^2} \quad \text{et} \quad \text{Re} = \frac{\rho_f V_0 L_c}{\mu} = \frac{V_0 L_c}{\nu}$$

✓ Le nombre de Richardson caractérise le rapport entre les forces d'Archimède $\rho_f g \bar{\beta} (T_p - T_f)$ et les forces d'inertie $\frac{\rho_f V_0^2}{L_c}$.

✓ Le nombre de Reynolds caractérise le rapport des effets d'inertie aux effets visqueux.

Rappelons que la force d'Archimède constitue le moteur de l'écoulement ; la vitesse à laquelle les forces d'Archimède et d'inertie sont du même ordre correspond à $\text{Ri} = 1$. Ainsi, la vitesse caractéristique de la convection naturelle est : $V_0 = \sqrt{g \bar{\beta} (T_p - T_f) L_c}$.

Si cette échelle de vitesse est introduite dans les équations de Navier-Stokes, on obtient :

$$\left(\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \bar{v}^* \cdot \bar{\nabla}^* \bar{v}^* \right) = -\bar{\nabla}^* p^* + \Theta \bar{k} + \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta^* \bar{v}^*$$

$$\text{Avec : } \text{Gr} = \left(\frac{V_0 L_c}{\nu} \right)^2 = \frac{g \bar{\beta} (T_p - T_f) L_c^3}{\nu^2}$$

✓ Ce dernier nombre adimensionnel est le nombre de Grashof qui caractérise le rapport des effets thermiques de convection aux effets visqueux.

Pour l'équation de conservation de l'énergie, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t^*} + \bar{v}^* \cdot \bar{\nabla}^* \Theta \right) = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta^* \Theta$$

$$\text{Avec : } \text{Pe} = \frac{V_0 L_c}{a} = \frac{V_0 L_c}{\nu} \frac{\nu}{a} = \sqrt{\text{Gr}} \text{Pr} \quad \left(\text{Avec : } a = \frac{k}{\rho C_p} \right)$$

(Pe) est le nombre de Peclet qui mesure l'importance des effets de convection par rapport aux effets de diffusion thermique. (Pr) est le nombre de Prandtl qui indique l'importance du mécanisme de dissipation visqueuse par rapport à la diffusion thermique ; il est exprimé par : $\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\rho_f C_p \nu}{k_f}$.

En convection naturelle, il est fréquent d'utiliser le nombre de Rayleigh exprimé par :

$$\text{Ra} = \text{Gr} \text{Pr}$$

III.3. Calcul du flux de chaleur en convection naturelle :

Le calcul du flux de chaleur transmis par convection naturelle s'effectue de la manière suivante :

1. calcul des nombres adimensionnels de Grashof (Gr) et de Prandtl (Pr) ;
2. suivant la valeur de Gr et de la configuration (géométrique), choisir une corrélation ;
3. calcul du nombre adimensionnel de Nusselt (Nu_L) par application de cette corrélation ;
4. calcul de $h = \frac{k_f Nu_L}{L_c}$ et de $\phi = h \cdot S \cdot (T_p - T_f)$.

CAS D'UNE PLAQUE PLANE VERTICALE :

Régime laminaire ($10^4 < Ra_L < 10^9$) :

$$Nu_L = A(Ra_L)^{1/4}$$

Pr	0.01	0.1	0.7	1	10	100	$+\infty$
A	0.240	0.385	0.515	0.534	0.620	0.653	0.67

Plus généralement :
$$A = \left[\frac{Pr}{(2.435 + 4.884 Pr^{1/2} + 4.953 Pr)} \right]^{1/4}$$

Régime turbulent ($Ra_L > 10^9$) :

- Selon Burmeister :

$$Nu_L = \frac{0.0248 Ra_L^{2/5} Pr^{1/15}}{(1 + 0.494 Pr^{2/3})^{2/5}}$$

- Selon Churchill et Chu :

$$Nu_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{(1 + (2.033 Pr)^{-9/16})^{8/27}} \right\}^2 \quad (10^{-1} < Ra_L < 10^{12})$$

Cette corrélation peut aussi être utilisée pour un régime d'écoulement laminaire.

- Selon Bayley :

$$Nu_L = 0.183 (Ra_L)^{0.31} \quad 2 \cdot 10^9 \leq Ra_L \leq 10^{15} \text{ et } Pr \approx 1$$

CAS DE CONFIGURATIONS LES PLUS UTILISÉES :

Régimes laminaire et turbulent :

Pour un fluide quelconque : $Nu_L = A(Ra_L)^m$

Pour le cas de l'air : $Nu_L = B(Gr)^m$ avec : $Pr \approx 0.7$

Géométrie	Ra _L	A	m	B	Obs.
Plans verticaux (L _c = hauteur)	Laminaire : 10 ⁴ – 10 ⁹	0.59	0.25	0.54	Gr est évalué sur L _c
Cylindres verticaux (L _c = longueur)	Turbulent : 10 ⁹ - 10 ¹³	0.10	0.33	0.09	
Cylindres horizontaux de diamètre D (L _c = D)	Laminaire : 10 ⁴ – 10 ⁹	0.53	0.25	0.48	Gr est évalué sur D
	Turbulent : 10 ⁹ - 10 ¹²	0.13	0.33	0.12	
Surfaces planes horizontales de cote (l) dans le sens de l'écoulement (L _c = l)	Laminaire : 10 ⁵ – 2.10 ⁷	0.54	0.25	0.49	Gr est évalué sur l
	Turbulent : 2.10 ⁷ – 3.10 ¹⁰	0.14	0.33	0.12	

1. Convection naturelle au dessus d'une plaque chaude ou en dessous d'une plaque froide horizontale :

$$Nu_L = A(Ra_L)^m$$

$$T_{ref} = T_f \text{ (pour le calcul de } \bar{\beta} \text{ concernant les gaz seulement)}$$

Avec : A=0.54 et m=0.25

pour 10⁵ < Ra_L < 2.10⁷ (régime laminaire)

A=0.14 et m=0.33

pour 2.10⁷ < Ra_L < 3.10¹⁰ (régime turbulent)

2. Convection naturelle au dessus d'une plaque froide ou en dessous d'une plaque chaude horizontale :

$$Nu_L = A(Ra_L)^m$$

$$T_{ref} = T_f \text{ (pour le calcul de } \bar{\beta} \text{ concernant les gaz seulement)}$$

Avec : A=0.27 et m=0.25

pour 3.10⁵ < Ra_L < 3.10¹⁰

3. Convection naturelle au dessus d'un cylindre horizontal chaud d'axe horizontal :

$$\sqrt{Nu_D} = 0.6 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left(1 + (0.559/Pr)^{9/16}\right)^{8/27}} \quad \text{pour } 10^{-5} < Ra_D < 10^{12}$$

4. Convection naturelle au dessus d'une sphère chaude :

$$Nu_D = 2 + A(Ra_D)^{1/4}$$

Avec : $A = \frac{0.589}{\left(1 + (0.469/Pr)^{9/16}\right)^{4/9}}$ pour Pr > 0.7 et Ra_D < 10¹¹

CHOIX DE LA TEMPÉRATURE DE RÉFÉRENCE :

Sauf indication contraire, la température de référence en convection naturelle est donnée par l'expression :

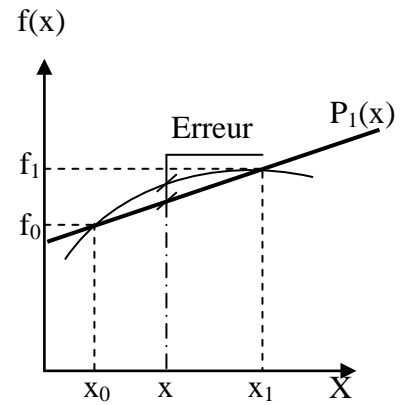
$$T_{ref} = \frac{(T_p + T_f)}{2}$$

Interpolation linéaire de Lagrange :

$$P_1(x) = L_0(x) \cdot f_0 + L_1(x) \cdot f_1$$

$$\text{Avec : } L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



D'une manière générale :

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) \cdot f_k = \sum_{k=0}^n \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} \cdot f_k$$

$$\text{Avec : } l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$$l_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

$$0 < k < n$$

$$l_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

CONVECTION FORCÉE

III.4. Calcul du flux de chaleur en convection forcée :

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue de la manière suivante :

1. calcul des nombres adimensionnels de Reynolds (Re) et de Prandtl (Pr) ;
2. suivant la valeur de Re et de la configuration (géométrique), choisir la corrélation ;
3. calcul de \bar{Nu} par application de cette corrélation ;
4. calcul de $\bar{h} = \frac{k_f \bar{Nu}}{L_c}$ et de $\phi = \bar{h} \cdot S \cdot (T_p - T_f)$.

1. Ecoulement le long d'une plaque plane :

* Pour le calcul du coefficient de transfert local :

- **Régime laminaire** : $Re_x \leq 5 \cdot 10^5$

$$Nu_x = 0,332 (Re_x)^{1/2} (Pr)^{1/3}$$

- **Régime turbulent** : $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$

$$Nu_x \approx 0,0296 (Re_x)^{4/5} (Pr)^{1/3}$$

* Pour le calcul du coefficient de transfert moyen ou global :

$$\bar{Nu}_L = \left\{ 0,664 (Re_{cr})^{1/2} + 0,037 \left[(Re_L)^{4/5} - (Re_{cr})^{4/5} \right] \right\} (Pr)^{1/3} \text{ avec } Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$$

- **Régime laminaire** : $Re_L \leq 5 \cdot 10^5$

$$\bar{Nu}_L = 0,664 (Re_L)^{1/2} (Pr)^{1/3}$$

- **Régime turbulent** : $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$

$$\bar{Nu}_L \approx 0,037 (Re_L)^{4/5} (Pr)^{1/3}$$

N. B. : $0.6 < Pr < 60$; les propriétés sont prises à la température T_{moy} .

2. Ecoulement autour d'un cylindre :

* **Cas d'un gaz** : Corrélation d'Hilpert : $\bar{Nu}_D = C (Re_D)^m (Pr)^{0,33}$

Re_D	C	m
$0.4 < Re_D < 4$	0,989	0,330
$4 < Re_D < 40$	0,911	0,385
$40 < Re_D < 4 \cdot 10^3$	0,683	0,466
$4 \cdot 10^3 < Re_D < 4 \cdot 10^4$	0,193	0,618
$4 \cdot 10^4 < Re_D < 4 \cdot 10^5$	0,027	0,805

* **Cas d'un liquide** : $\bar{Nu}_D = 1,11 C (Re_D)^m (Pr)^{0,33}$

Les valeurs de C et m sont prises du tableau ci-dessus.
Les propriétés du fluide sont déterminées à la température T_{moy} .

3. Ecoulement autour d'une sphère :

$$\bar{Nu}_D = 2 + \left[0,4 (Re_D)^{1/2} + 0,06 (Re_D)^{2/3} \right] (Pr)^{0,4} \left(\frac{\mu_f}{\mu_p} \right)^{1/4}$$

$$\text{Valable pour : } * 1 < \left(\frac{\mu_f}{\mu_p} \right) < 3,2$$

$$* 0,71 < Pr < 380$$

$$* 3,5 < Re_D < 7,6 \cdot 10^4$$

Les propriétés du fluide sont déterminées à T_f et μ_p à T_p .

4. Ecoulement à l'intérieur des tubes cylindriques :

- **Régime laminaire** : $Re_d \leq 2300$

* d : Diamètre intérieur du tube.

* μ_m, μ_p : Viscosités dynamiques définies à T_m et T_p ; T_m est la moyenne des températures à l'entrée et à la sortie du tube.

* L : Longueur du tube.

* Pour des tubes très longs ($L/d > 0,03 Re_d$:

$$\text{- si : } (Re_d) \cdot (Pr) \cdot (d/L) < 10 \Rightarrow \bar{Nu}_d = 3,66$$

$$\text{- si : } (Re_d) \cdot (Pr) \cdot (d/L) > 10 \Rightarrow \bar{Nu}_d = 1,6 \left[(Re) \cdot (Pr) \cdot (d/L) \right]^{1/3}$$

* Pour des tubes de longueur finie ($L/d < 0,03 Re_d$:

$$+ \text{Haussen} : \bar{Nu}_d = 3,66 + \frac{0,0668 \cdot [(Re_d) \cdot (Pr) \cdot (d/L)]}{1 + 0,04[(Re_d) \cdot (Pr) \cdot (d/L)]^{2/3}}$$

$$+ \text{Sieder et Tate} : \bar{Nu}_d = 1,86[(Re_d) \cdot (Pr) \cdot (d/L)]^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$$

Valable pour : * $0,48 < Pr < 16700$

$$* 0,0044 < \frac{\mu_m}{\mu_p} < 9,75$$

$$* [(Re_d) \cdot (Pr) \cdot (d/L)]^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} > 2$$

- **Régime turbulent** : $Re_d > 2300$

$$+ \text{Colburn} : \bar{Nu}_d = 0,023(Re_d)^{0,8}(Pr)^{1/3}$$

Valable pour : * $(L/d) > 60$

$$* 0,7 < Pr < 160$$

$$* Re_d > 10^4$$

$$+ \text{Sieder et Tate} : \bar{Nu}_d = 0,027(Re_d)^{0,8}(Pr)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$$

Valable pour : * $0,7 \leq Pr \leq 16700$ et $Re_d > 10^4$

$$+ \text{Dittus et Boelter} : \bar{Nu}_d = 0,023(Re_d)^{0,8}(Pr)^n$$

$n = 0,4$ pour un chauffage ($T_p > T_f$)

$n = 0,3$ pour un refroidissement ($T_p < T_f$)

Valable pour : * $(L/d) > 60$

$$* 0,7 \leq Pr \leq 120$$

$$* 2500 \leq Re_d \leq 1,24 \times 10^5$$

$$+ \text{Gnielinski} : \bar{Nu}_d = \frac{(C_f/8)(Re_d - 1000)(Pr)}{1 + 12,7(C_f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)} \left[1 + (d/L)^{2/3} \right]$$

$$\text{Avec : } C_f = (0,79 \ln Re_d - 1,64)^{-2}$$

Valable pour : * $(d/L) < 1$

$$* 0,5 < Pr < 2000$$

$$* Re_d < 5 \cdot 10^6$$

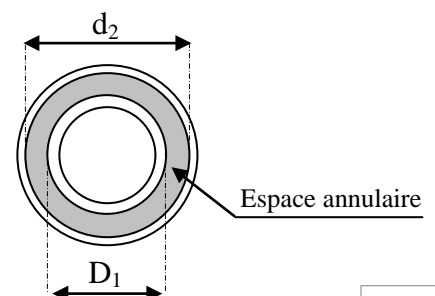
Les propriétés du fluide sont évaluées à la moyenne des températures entre l'entrée et la sortie du tube.

5. Ecoulement dans les espaces annulaires :

D_1 : Diamètre extérieur du tube intérieur

d_2 : Diamètre interne du tube extérieur

d_H : Diamètre hydraulique $d_H = d_2 - D_1$



$$\text{Re}_{d_H} = \frac{U_0 \cdot d_H}{\nu}$$

Pour une **section annulaire non circulaire**, on calcule un diamètre équivalent (ou un diamètre hydraulique) : $d_{eq} = \frac{4 \times \text{section mouillée}}{\text{périmètre de transfert}}$ puis on peut appliquer les différentes corrélations relatives à l'écoulement à l'intérieur des tubes cylindriques.

Chapitre III-BIS : ANALYSE DIMENSIONNELLE

1. Méthode de Rayleigh :

Cette méthode permet, dans des cas simples, de déterminer des lois physiques en utilisant seulement les équations aux dimensions.

Principe : Soit un phénomène physique quelconque pour lequel l'expérience permet d'établir qu'une grandeur dépendante (G) est fonction de variables indépendantes a_1, a_2, \dots, a_n . À cet effet, nous pouvons écrire :

$$G = \bar{K} \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$$

Avec \bar{K} est une constante expérimentale et α_i sont des exposants réels positifs ou négatifs.

La méthode comprend les phases applicables suivantes :

- 1- Faire l'inventaire des variables indépendantes influençant le phénomène étudié qui peut être représenté par une variable indépendante.

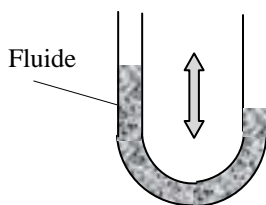
On considère alors trois critères de sélection des variables indépendantes :

- La géométrie : On utilise une ou des caractéristiques de dimension comme une longueur, une largeur, une hauteur ou un diamètre qui définissent la géométrie du système étudié.
- Les caractéristiques physico-chimiques dont l'influence est considérée a priori déterminante sur le phénomène étudié. Par exemple, pour un fluide en transfert de chaleur, ses caractéristiques sont : la masse volumique, la viscosité dynamique, la chaleur spécifique et la conductivité thermique.
- Les conditions opératoires : Il convient de prendre en considération des paramètres simples comme la vitesse du fluide par exemple.

À ces trois critères, on peut ajouter des constantes physiques universelles comme, par exemple, l'accélération de la pesanteur (g).

- 2- Ecrire les dimensions de cet ensemble de variables en utilisant le tableau des dimensions.
- 3- Combiner les variables : dépendante et indépendantes en une relation homogène en supposant qu'il s'agit d'un produit de termes élevés à la puissance.
- 4- Déterminer les puissances par la résolution d'un système d'équations défini suivant les dimensions des grandeurs.
- 5- Mettre en forme l'équation générale.

Exemple d'application : Déterminer la période d'oscillation d'un liquide dans un tube en U.



Nous considérons trois grandeurs physiques qui peuvent influencer le phénomène d'oscillation : la hauteur H de la colonne du fluide (m), la masse volumique ρ du fluide (kg/m^3) et l'accélération g de la pesanteur (m/s^2).

$$G = \text{Période} = \bar{K} \cdot H^{\alpha_1} \cdot \rho^{\alpha_2} \cdot g^{\alpha_3}$$

$$\begin{aligned} T &= \bar{K} \cdot L^{\alpha_1} \cdot (M^{\alpha_2} L^{-3\alpha_2}) \cdot (L^{\alpha_3} T^{-2\alpha_3}) \\ &= \bar{K} \cdot L^{\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3} \cdot M^{\alpha_2} \cdot (T^{-2\alpha_3}) \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \text{Pour L: } \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \text{Pour M: } \alpha_2 = 0 \\ \text{Pour T: } -2\alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = -1/2; \alpha_2 = 0; \alpha_1 = 1/2$$

$$\text{Période} = \bar{K} \cdot H^{1/2} \cdot g^{-1/2}$$

Par expérience, on trouve que : $\bar{K} = \pi\sqrt{2}$.

2. Méthode de Vaschy-Buckingham (Théorème π) :

Cette méthode est une généralisation de l'approche de Rayleigh. Dans l'analyse d'un phénomène physique comprenant (n) variables dont les dimensions sont définies à partir de (p) grandeurs fondamentales. Ainsi, on détermine (n-p) produits indépendants sans dimensions. Ces derniers peuvent être reliés par une fonction (F) de la forme : $F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$

La méthode comprend les phases applicables suivantes :

- 1- Faire l'inventaire des variables influençant le phénomène étudié.
- 2- Ecrire les dimensions de cet ensemble de variables.
- 3- Définir le nombre des grandeurs fondamentales.
- 4- Calculer le nombre de groupements sans dimensions.
- 5- Combiner en relation adimensionnelle une variable indépendante avec un produit de (p) grandeurs indépendantes.
- 6- Résoudre l'équation formulée en 5-, et déterminer les différents exposants.
- 7- Présenter explicitement chaque nombre sans dimensions.

N. B. : Les grandeurs fondamentales du Système International pour les problèmes thermiques sont la masse, la longueur, le temps et la température (M, L, T, θ).

Exemple d'application : Déterminer le coefficient (\bar{h}) de transfert de chaleur par convection forcée à l'intérieur d'une conduite de section circulaire.

Properties of water at pressure $p = 1$ bar

Liquid water τ

$^{\circ}\text{C}$	ρ kg/m^3	c_p kJ/kg K	$\bar{\beta}$ $10^{-3}/\text{K}$	k 10^{-3}W/K m	ν $10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$	α $10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$	Pr —
0	999.84	4.218	-0.0672	561.0	1.793	0.1330	13.48
5	999.97	4.203	0.0162	570.5	1.519	0.1358	11.19
10	999.70	4.192	0.0879	580.0	1.307	0.1384	9.443
15	999.10	4.185	0.1507	589.3	1.139	0.1409	8.082
20	998.21	4.181	0.2067	598.4	1.004	0.1434	7.001
25	997.05	4.179	0.2572	607.2	0.893	0.1457	6.128
30	995.65	4.177	0.3034	615.5	0.801	0.1480	5.414
35	994.03	4.177	0.3459	623.3	0.724	0.1501	4.823
40	992.22	4.177	0.3855	630.6	0.658	0.1521	4.328
45	990.21	4.178	0.4226	637.3	0.602	0.1540	3.909
50	988.04	4.180	0.4578	643.6	0.554	0.1558	3.553
55	985.69	4.182	0.4912	649.2	0.512	0.1575	3.248
60	983.20	4.184	0.5232	654.4	0.475	0.1591	2.983
65	980.55	4.187	0.5541	659.0	0.442	0.1605	2.754
70	977.77	4.190	0.5840	663.1	0.413	0.1619	2.553
75	974.84	4.193	0.6130	666.8	0.388	0.1631	2.376
80	971.79	4.197	0.6414	670.0	0.365	0.1643	2.221
85	968.61	4.201	0.6693	672.8	0.344	0.1653	2.082
90	965.31	4.206	0.6967	675.2	0.326	0.1663	1.959
95	961.89	4.211	0.7238	677.3	0.309	0.1672	1.849
99.63 ^a	958.61	4.216	0.7487	678.9	0.295	0.1680	1.757

^a Saturated state

Water vapour

$^{\circ}\text{C}$	ρ kg/m^3	c_p kJ/kg K	$\bar{\beta}$ $10^{-3}/\text{K}$	k 10^{-3}W/K m	ν $10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$	α $10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$	Pr —
100	0.5896	2.042	2.881	25.08	20.81	20.83	0.9990
150	0.5164	1.980	2.452	28.85	27.46	28.22	0.9733
200	0.4604	1.975	2.160	33.28	35.14	36.60	0.9600
250	0.4156	1.990	1.938	38.17	43.83	46.15	0.9497
300	0.3790	2.013	1.761	43.42	53.54	56.92	0.9406
350	0.3483	2.040	1.616	48.96	64.22	68.90	0.9321
400	0.3223	2.070	1.493	54.76	75.86	82.07	0.9243
450	0.2999	2.102	1.388	60.77	88.42	96.40	0.9172
500	0.2805	2.135	1.297	66.97	101.9	111.9	0.9107
600	0.2483	2.203	1.147	79.89	131.4	146.1	0.8993
700	0.2227	2.273	1.029	93.37	164.1	184.2	0.8899
800	0.2019	2.343	0.9327	107.3	199.9	226.8	0.8816
900	0.1847	2.412	0.8530	121.7	238.6	273.0	0.8739
1000	0.1702	2.478	0.7859	163.3	280.0	323.2	0.8665

Propriétés de l'air à la pression atmosphérique

$T(K)$	$\rho (kg / m^3)$	$\mu (kg / ms)$	$C_p (J / kgK)$	$k (W / mK)$
100	3,601	$0,69 \cdot 10^{-5}$	1027	0,0092
150	2,367	$1,03 \cdot 10^{-5}$	1010	0,0137
200	1,768	$1,33 \cdot 10^{-5}$	1006	0,0181
250	1,413	$1,60 \cdot 10^{-5}$	1005	0,0223
300	1,177	$1,85 \cdot 10^{-5}$	1006	0,0262
350	0,998	$2,08 \cdot 10^{-5}$	1009	0,0300
400	0,883	$2,29 \cdot 10^{-5}$	1014	0,0337
450	0,783	$2,48 \cdot 10^{-5}$	1021	0,0371
500	0,705	$2,67 \cdot 10^{-5}$	1030	0,0404
550	0,642	$2,85 \cdot 10^{-5}$	1039	0,0436
600	0,588	$3,02 \cdot 10^{-5}$	1055	0,0466
650	0,543	$3,18 \cdot 10^{-5}$	1063	0,0495
700	0,503	$3,33 \cdot 10^{-5}$	1075	0,0523
750	0,471	$3,48 \cdot 10^{-5}$	1086	0,0551
800	0,441	$3,63 \cdot 10^{-5}$	1098	0,0578
850	0,415	$3,77 \cdot 10^{-5}$	1110	0,0603
900	0,392	$3,90 \cdot 10^{-5}$	1121	0,0628
950	0,372	$4,02 \cdot 10^{-5}$	1132	0,0653
1000	0,352	$4,15 \cdot 10^{-5}$	1142	0,0675
1100	0,320	$4,40 \cdot 10^{-5}$	1161	0,0723
1200	0,295	$4,63 \cdot 10^{-5}$	1179	0,0763
1300	0,271	$4,85 \cdot 10^{-5}$	1197	0,0803
1400	0,251	$5,17 \cdot 10^{-5}$	1214	0,0841