

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Ibn Khaldoun -Tiaret**

**Faculté des sciences appliquées**

**Département de Génie Civil**

*Polycopié de*

**Mécanique des structures**

**Notes de Cours**

**Enseignant : BENYAMINA Abdelrahmane Bekaddour**

Mai 2020

## Table des matières

<b>I.</b>	<b>INTRODUCTION SUR L'ANALYSE DES STRUCTURES.....</b>	<b>I-1</b>
I.1	CALCUL DES DEFORMATIONS DES STRUCTURES ELASTIQUES.....	I-1
I.2	HYPOTHESES.....	I-1
I.2.1	<i>Hypothèse sur le matériau.....</i>	<i>I-2</i>
I.2.2	<i>Hypothèse de la théorie des poutres.....</i>	<i>I-2</i>
I.3	STRUCTURES COMPOSEES.....	I-3
I.3.1	<i>Calcul de degré d'hyperstaticité par la méthode théorique.....</i>	<i>I-4</i>
I.3.2	<i>Calcul des réactions dans les structures composées.....</i>	<i>I-5</i>
I.3.2.1	Méthode d'isolation des corps.....	I-5
I.3.2.2	La méthode mixte.....	I-6
I.3.2.3	Exemple d'une structure en poutre composée.....	I-7
I.3.2.4	Exemple d'un portique avec dénivelée.....	I-10
I.3.2.5	Exemple d'un portique encastré.....	I-11
I.4	EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE D'UN TRONÇON DE POUTRE :.....	I-13
I.5	DIAGRAMMES DES EFFORTS INTERNES :.....	I-14
I.5.1	<i>Diagrammes des efforts internes dans les portiques :.....</i>	<i>I-15</i>
I.5.1.1	Exemple des tracés de la poutre composée.....	I-16
I.5.1.2	Exemple des tracés d'un portique avec dénivelée.....	I-18
<b>II.</b>	<b>DEFORMATION DES STRUCTURES ELASTIQUES.....</b>	<b>II-1</b>
II.1	DEFORMATION DUE A LA FLEXION D'UNE POUTRE.....	II-1
II.2	EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE.....	II-1
II.3	CALCUL DES FLECHES ET ROTATIONS.....	II-3
II.3.1	<i>POUTRES SOLLICITÉES PAR UNE FORCE CONCENTRÉE.....</i>	<i>II-3</i>
II.3.1.1	Poutre en porte-à-faux avec charge concentrée à l'extrémité libre.....	II-3
II.3.1.2	Poutre sur deux appuis avec force concentrée en un point quelconque.....	II-4
II.3.1.3	Poutre sur deux appuis avec force concentrée à mi distance des appuis.....	II-5
II.3.2	<i>POUTRES SOLLICITÉES PAR UNE CHARGE RÉPARTIE CONSTANTE.....</i>	<i>II-6</i>
II.3.2.1	Poutre en porte-à-faux.....	II-6
II.3.3	<i>POUTRES SOLLICITÉES PAR UN COUPLE.....</i>	<i>II-7</i>
II.3.3.1	Poutre en porte-à-faux.....	II-8
II.3.3.2	Poutre sur deux appuis articulés.....	II-8
II.4	SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS.....	II-9
II.4.1	<i>PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS.....</i>	<i>II-10</i>
II.4.1.1	Application du principe de superposition.....	II-10
II.5	METHODE DES PARAMETRES INITIAUX (MACULAY'S METHOD).....	II-11
II.5.1	<i>Déplacements des poutres en flexion.....</i>	<i>II-11</i>
II.5.2	<i>Principes de la méthode des paramètres initiaux.....</i>	<i>II-12</i>

II.6	THEOREME DE CLAPEYRON .....	II-17
II.6.1	<i>Travail d'une force</i> .....	II-17
II.6.2	<i>Théorie de Potentiel Interne</i> .....	II-18
II.6.3	<i>Enoncé du théorème de Clapeyron:</i> .....	II-25
II.7	THEOREME DE CASTIGLIANO .....	II-26
II.7.1	<i>Applications de Théorème de Castigliano pour calcul des déplacements :</i> .....	II-26
II.7.1.1	Déplacement au droit d'une force (ou couple) extérieure : .....	II-26
II.7.1.2	Déplacement dans une section S quelconque .....	II-28
II.8	THEOREME DE MENABREA OU DE L'ENERGIE MINIMALE .....	II-29
II.8.1	<i>Applications de Théorème de Ménabréa pour calcul de réactions hyperstatiques de liaison :</i> .....	II-30
II.8.1.1	Poutres hyperstatiques de degré 1: .....	II-30
II.9	FORMULE DE MAXWELL-MOHR .....	II-31
II.9.1	<i>Cas des systèmes à plan moyen chargés dans leur plan</i> .....	II-31
II.9.2	<i>Principe de calcul :</i> .....	II-32
II.9.3	<i>Cas des pièces droites à âme pleine</i> .....	II-32
II.9.4	<i>Calcul des intégrales de Mohr (par une méthode simplifiée)</i> .....	II-32
II.10	PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS .....	II-33
II.11	THEOREME DE LA FORCE UNITE .....	II-34
II.11.1	<i>Cas des matériaux élastique linéaires :</i> .....	II-35
II.11.2	<i>Calcul des déplacements :</i> .....	II-35
II.12	THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI .....	II-36
II.12.1	<i>Calcul de déplacements par le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti</i> .....	II-37
<b>III.</b>	<b>CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES PAR LA METHODE DES FORCES :</b> .....	<b>III-1</b>
III.1	INTRODUCTION .....	III-1
III.2	LIAISONS SURABONDANTES ET DEGRE D'HYPERSATICITE .....	III-1
III.2.1	<i>Systèmes en treillis instables</i> .....	III-3
III.2.2	<i>Hypersaticité des portiques</i> .....	III-4
III.3	PRINCIPE DE LA METHODE DES FORCES .....	III-5
III.3.1	<i>Exemple d'une poutre hyperstatique de premier degré</i> .....	III-5
III.3.2	<i>Signification du paramètre de proportionnalité <math>\delta_{11}</math> :</i> .....	III-6
III.3.3	<i>Schémas des étapes de calcul</i> .....	III-6
III.3.4	<i>Problème de signes :</i> .....	III-7
III.4	PROCEDURES DE RESOLUTION DE LA METHODE DES FORCES: .....	III-8
III.5	EQUATIONS GENERALE DE LA METHODE DES FORCES : .....	III-8
III.6	EXEMPLE DE POUTRE CONTINUE SUR TROIS APPUIS RIGIDES : .....	III-10
III.6.1	<i>Esquisse de la déformée</i> .....	III-11
III.6.2	<i>Mise en évidence des inconnues</i> .....	III-11
III.6.3	<i>Structure de référence <math>S_0</math></i> .....	III-12

III.6.4	Condition de compatibilité cinématique .....	III-12
III.6.5	Coefficient $D_{10}$ .....	III-12
III.6.6	Coefficient $f_{11}$ .....	III-14
III.6.7	Résolution de l'équation de compatibilité cinématique.....	III-15
III.6.8	Tracé des diagrammes des efforts internes .....	III-16
III.6.8.1	Efforts tranchants.....	III-16
III.6.8.2	Moments de flexion .....	III-16
III.7	EXEMPLE D'UN PORTIQUE A APPUIS ENCASTRES.....	III-18
III.8	CAS DE VARIATION DES TEMPERATURES : .....	III-23
III.9	CAS DE DEPLACEMENTS DES APPUIS : .....	III-24
<b>IV.</b>	<b>CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS : .....</b>	<b>IV-1</b>
IV.1	INTRODUCTION : .....	IV-1
IV.2	DEPLACEMENTS INCONNUES ET DEGRE D'INDETERMINATION CINEMATIQUE .....	IV-1
IV.2.1	Degré d'indétermination cinématique d'une structure ( $m$ ) : .....	IV-2
IV.2.2	Inconnues de la méthode des déplacements (calcul théorique du ddl) .....	IV-3
IV.2.3	Classes des structures (calcul intuitive du ddl) : .....	IV-4
IV.2.3.1	Structures à nœuds fixes ou à nœuds non déplaçables : .....	IV-4
IV.2.3.2	Structures à nœuds déplaçables : .....	IV-6
IV.3	PRINCIPE DE LA METHODE DES DEPLACEMENTS : .....	IV-8
IV.3.1	Les étapes d'analyse par la méthode des déplacements : .....	IV-8
IV.4	AVANTAGE DE LA METHODE DES DEPLACEMENTS : .....	IV-11
IV.5	EXEMPLE DE POUTRE CINEMATIQUEMENT INDETERMINEE DE PREMIER DEGRE .....	IV-13
IV.5.1	Principe de résolution du problème : .....	IV-15
IV.5.2	Mise en évidence des inconnues.....	IV-16
IV.5.3	Structure primaire.....	IV-16
IV.5.4	Condition d'équilibre.....	IV-17
IV.5.5	Coefficient $R_{1p}$ .....	IV-17
IV.5.6	Coefficient $k_{11}$ .....	IV-18
IV.5.7	Résolution de l'équation d'équilibre.....	IV-20
IV.5.8	Tracé du diagramme de moment de flexion .....	IV-20
IV.5.9	Signes et sens positif.....	IV-22
IV.5.10	Synthèse des procédures.....	IV-22
IV.6	RELATIONS FORCE-DEPLACEMENT DANS LES BARRES HYPERSTATIQUES .....	IV-23
IV.7	EXEMPLE DE PORTIQUE A NŒUDS DEPLAÇABLES (DDL=3) : .....	IV-28
IV.7.1	Composition des diagrammes en utilisant les relations force-déplacement : .....	IV-28
IV.7.2	Calcul d'équilibre des nœuds .....	IV-31
<b>V.</b>	<b>CALCUL DES POUTRES CONTINUES SUR APPUIS ELASTIQUES .....</b>	<b>V-1</b>



V.1	INTRODUCTION.....	V-1
V.2	POUTRE CONTINUE SUR TROIS APPUIS L'APPUI INTERMEDIAIRE EST ELASTIQUE : .....	V-1
V.3	POUTRE CONTINUE SUR APPUIS RIGIDES : .....	V-8
V.3.1	<i>Equation de trois moments de Clapeyron</i> .....	V-9
V.3.1.1	Termes ou Facteurs de charge .....	V-12
V.3.1.2	Poutre continue aux rigidités des barres non constantes .....	V-13
V.3.2	<i>Poutre continue sur appuis rigides avec dénivèlements:</i> .....	V-14
V.3.3	<i>Exemple d'application de l'équation des trois moments</i> .....	V-15
V.4	POUTRE CONTINUE SUR APPUIS ELASTIQUES PONCTUELS .....	V-17
V.4.1	<i>Expressions des sollicitations et actions de liaison</i> .....	V-18
V.4.2	<i>Equation des cinq moments</i> .....	V-19
V.4.3	<i>Exemple d'application de l'équation des cinq moments</i> .....	V-22
<b>VI.</b>	<b>ARCS PLANS CHARGES DANS LEURS PLAN .....</b>	<b>VI-1</b>
VI.1	INTRODUCTION.....	VI-1
VI.2	TERMINOLOGIE D'UN PONT EN ARC.....	VI-1
VI.3	POUSSEE DE L'ARC : .....	VI-2
VI.4	ARC ISOSTATIQUE A TROIS ARTICULATIONS .....	VI-3
VI.4.1	<i>Arc parabolique symétrique à trois articulations</i> .....	VI-3
VI.4.2	<i>Arc parabolique asymétrique à trois articulations</i> .....	VI-5
VI.4.3	<i>Calcul des forces axiales et de cisaillement radial</i> .....	VI-6
VI.4.3.1	Exemple VI.1.....	VI-8
VI.4.4	<i>Arc isostatique circulaire et arc en segment</i> : .....	VI-10
VI.4.4.1	Calcul de l'angle de tangence pour les arcs en segments.....	VI-11
VI.4.4.2	Exemple VI.2.....	VI-12
VI.4.5	<i>Arc funiculaire</i> : .....	VI-14
VI.5	ARCS HYPERSTATIQUES.....	VI-15
VI.6	ARCS ARTICULES AUX NAISSANCES (BI-ARTICULE) .....	VI-15
VI.6.1	<i>Calcul sous charges fixes</i> .....	VI-15
VI.7	ARCS AVEC TIRANTS.....	VI-16
VI.8	ARCS ENCASTRES AUX NAISSANCES .....	VI-18
VI.8.1	<i>Calcul sous l'action des charges fixes</i> .....	VI-18
VI.9	ARCS CIRCULAIRES SOUS PRESSION RADIALE.....	VI-20

## ***Présentation***

Le nombre impressionnant d'ouvrages de toutes sortes (palais, monuments, ponts et viaducs etc.) construit durant l'histoire de l'homme ont marqué la grandeur des civilisations, avant même la naissance de l'industrie, de technologie et de calculs. L'histoire ne révèle pas le cout de ces ouvrages ni la durée de vie car la sécurité et l'économie n'étaient pas les préoccupations de l'époque. Le besoin de disposer d'ouvrages très grands, plus légers et plus résistants et la conjonction de ces facteurs conduisit l'homme à inventer une nouvelle approche pour rechercher et employer des matériaux afin d'assurer leur résistance aux actions extérieures.

C'est ainsi il fit naître la résistance des matériaux, avec l'apparition d'idées sur la flexion des poutres émises par Léonard de Vinci (1452-1519) et surtout Galileo Galilée (1554-1642).

Dans le domaine des systèmes structurels, l'analyse a été étudiée par divers chercheurs dans le passé, qui ont fait un bref historique des progrès réalisés dans ce domaine.

En 1857, Benoît Paul Emile Clapeyron présentait à l'Académie française sa "théorie des trois moments" pour l'analyse des poutres continues, et de la même façon que Bertot avait publiée il y a deux ans, dans les Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France, mais sans avoir de brevet. On peut dire qu'à partir de ce moment commence le développement d'une véritable "Théorie des structures"[1-3].

En 1854, l'ingénieur français Jacques Antoine Charles Bresse publie son livre "*Recherches Analytiques sur la Flexion et la Résistance de Pièces Courbées*" dans lequel il présente des méthodes pratiques pour l'analyse des poutres courbes et arcs [1]. En 1867 a été introduite par l'Allemand Emil Winkler (1835-1888), la "ligne d'influence". Il a également apporté des contributions importantes à la Résistance des matériaux, en particulier dans la théorie de la flexion des poutres courbes, flexion des poutres, reposant sur un milieu élastique [1-3].

James Clerk Maxwell (1830-1879), de l'Université de Cambridge, a publié ce que

l'on pourrait appeler la première méthode systématique d'analyse de structures statiquement indéterminées, basée sur l'égalité de l'énergie interne de déformation d'une structure chargée et du travail externe effectué par les charges appliquées, égalité qui avait été établie par Clapeyron. Dans son analyse présentée dans le Théorème des Déformations Réciproques, qui par sa brièveté et son manque d'illustration, n'était pas apprécié à l'époque. Dans une autre publication, il a présenté plus tard son diagramme des forces internes aux fermes, qui combinent en une seule figure tous les polygones de forces. Le diagramme a été étendu par Cremona, par ce qui est connu comme le diagramme de Maxwell-Crémona [1-4]. L'Italien Betti a publié en 1872 une forme généralisée du théorème de Maxwell, connue sous le nom de théorème réciproque de Maxwell-Betti [1-4].

L'Allemand Otto Mohr (1835-1918) a apporté une grande contribution à la théorie des structures. Il a développé la méthode de détermination des déformations dans les poutres, connue sous le nom de méthode des charges élastiques ou de poutre conjuguée. Il a également présenté une dérivation plus simple et plus étendue de la méthode générale de Maxwell pour l'analyse des structures indéterminées, en utilisant les principes du travail virtuel. Il a apporté des contributions à l'analyse graphique des déformations des poutres, complétée par le diagramme de Williot, connu sous le nom de diagramme de Mohr-Williot d'une grande utilité pratique. Il a également obtenu son célèbre cercle de Mohr pour la représentation graphique des contraintes dans un état de contrainte bi axiale [1-3].

Alberto Castigliano (1847-1884) a introduit en 1873 le principe du travail minimum, qui avait été précédemment suggéré par Menabrea, et est connu comme le Premier Théorème de Castigliano. Plus tard, il a présenté le second Théorème Castigliano, pour trouver des déformations, comme corollaire du premier. En 1879, son célèbre livre publié à Paris " Théorème de l'Equilibre de Systèmes Elastiques et ses Applications", remarquable par son originalité et très important dans le développement de l'analyse des structures statiquement indéterminées.

Heinrich Müller-Breslau (1851-1925), a publié en 1886 une méthode de base pour l'analyse des structures indéterminées, mais qui était essentiellement une variation de celles présentées par Maxwell et Mohr. Il a donné une grande importance au théorème de Maxwell sur les déformations réciproques dans l'évaluation du déplacement. Il a découvert que la "ligne d'influence" pour la réaction ou la force interne d'une structure était, à une certaine échelle, la résistance élastique produit par une action similaire à cette réaction, ou force interne. Connue sous le nom de théorème de Müller-Breslau, il est à la base d'autres méthodes indirectes d'analyse structurelle utilisant des modèles.

Hardy Cross (1885-1959) professeur à l'Université de l'Illinois, a publié en 1930 sa célèbre méthode de distribution des moments, dont on peut dire qu'elle a révolutionné l'analyse des structures en béton armé par des cadres continus et peut être considérée comme l'une des plus grandes contributions à l'analyse des structures indéterminées. Cette méthode d'approximations successives évite de résoudre des systèmes d'équations, comme le présentent les méthodes de Mohr et Maxwell. Cette méthode a perdu de sa popularité avec la disponibilité des ordinateurs, avec lesquels la résolution des systèmes d'équations n'est plus un problème. Les concepts généraux de la méthode ont ensuite été étendus dans l'étude sur l'écoulement des conduites. Plus tard, les méthodes de Kani et Takabeya, également de type itératif et aujourd'hui inutilisées, sont devenues plus populaires [1-3].

Au début des années 50, Turner, Clough, Martin et Topp présentent ce que l'on peut appeler le début de l'application aux structures des méthodes matricielles de rigidité, qui ont gagné en popularité aujourd'hui. Par la suite, on développe les méthodes des éléments finis, qui ont permis l'analyse systématique d'un grand nombre de structures et d'obtenir les forces et les déformations dans des systèmes complexes tels que les barrages en béton utilisés dans les centrales hydroélectriques. Parmi ses promoteurs, on peut citer : Clough, Wilson, Zienkiewics et Gallagher [4].

L'analyse structurelle est l'étude de structures telles que les systèmes discrets. La théorie des structures est essentiellement basée sur les bases de la mécanique avec laquelle sont formulés les différents éléments structurels. Les lois ou règles qui

définissent l'équilibre et la continuité d'une structure peuvent être exprimées de différentes façons, notamment les équations différentielles partielles, les équations différentielles ordinaires qui définissent un membre ou les théories diverses des poutres, ou simplement, les équations algébriques pour une structure discrète.

Dans la conception des structures en acier, en béton armé et précontraint, l'étude de l'analyse structurelle est une étape cruciale de la conception, car les forces axiales, les forces de cisaillement et les moments sont ceux qui régissent la conception des cadres rigides et, dans le cas des poutres, uniquement les forces et les moments de cisaillement, et les dommages causés par ces effets peuvent devenir prédominants parmi les différentes demandes à considérer pour votre conception.

Le comportement d'un élément de construction ne dépend pas seulement des lois fondamentales de la statique, tel l'équilibre des forces, mais aussi des propriétés physiques caractérisant les matériaux avec lesquelles il est construit. Ces propriétés traduisent la façon dont la matière résiste et se déforme face à diverses sollicitations (traction, flexion...), appliquées dans diverses conditions (vite, lentement, à froid, à chaud...). La détermination expérimentale et la connaissance détaillée des propriétés relèvent de la mécanique des matériaux.

La mécanique des structures se contente essentiellement d'utiliser, sous forme de lois, les résultats provenant de l'expérimentation des matériaux en laboratoire. En fait, cette science est une théorie technique des corps déformables qui s'applique aux structures surtout, par opposition à la théorie mathématique de la mécanique des solides et, plus généralement, des milieux continus.

Au lieu du raisonnement mathématique rigoureux complexe, la mécanique des structures admet des hypothèses simplificatrices, raisonnables vérifiées par l'expérience ou issues de la théorie exacte, grâce auxquelles on peut résoudre efficacement, avec un degré d'approximation suffisant, quantité de problèmes d'un grand intérêt pratique. La mécanique des structures est l'intérêt étonnant pour presque toutes les branches de la profession d'ingénieur.

La mécanique des structures, appelée aussi analyse ou calcul des structures, a pour objet l'étude de l'équilibre et de la stabilité des constructions, au sens le plus large du terme, et des éléments qui les constituent, sous l'effet statique des actions extérieures. Dans le but de résoudre un problème de vérification ou de dimensionnement des structures par rapport à des grandeurs fixées à l'avance.

Le présent polycopié est un support de **cours de Mécanique Des Structures**, inspiré de cours présentés aux étudiants de système LMD (Licence, Master, Doctorat) de première année Master, filière de Génie Civil dans l'université d'Ibn-Khaldoun de Tiaret en Algérie, il s'inscrit dans le cadre du programme actuel. Il s'agit d'un support pédagogique qui porte un aspect d'apprentissage progressif des sujets traités, ce cours est subdivisé en six chapitres : une introduction sur l'analyse de structures dans le premier chapitre, les déformations élastiques avec calcul des rotations et des flèches sont traités dans le deuxième chapitre, ensuite les deux méthodes d'analyse structurelle ; la méthode des forces dans le troisième chapitre et la méthode des déplacements (avec la mise en relief du caractère itérative et matriciel des deux méthodes). L'avant dernier chapitre intitulé poutres continues sur appuis élastiques ponctuels et en fin le sixième chapitre des structures en arcs plans chargés dans leur plans.

## I. Introduction sur l'analyse des structures

### I.1 Calcul des déformations des structures élastiques

Sous l'action des charges toute structure subit des déformations qui sont la conséquence de la déformabilité des matériaux utilisés. La structure passe ainsi de sa position initiale, non déformée, à une autre, d'équilibre, toute proche de la première, qu'on appelle position déformée.

Savoir déterminer les déformations en n'importe quel point d'une structure présente pour l'ingénieur un intérêt tant théorique que pratique ;

L'intérêt théorique est motivé par la possibilité que donne "analyse des déformations pour résoudre les structures hyperstatiques, (On rappelle qu'une structure hyperstatique est celle pour laquelle les équations d'équilibre établies par la mécanique théorique, pour les systèmes de corps, ne suffisent pas à déterminer les forces de liaisons extérieures ni les efforts dans toutes les sections).

L'intérêt pratique est justifié par le fait que la conception raisonnable d'un élément de construction ne peut pas se borner à exiger de celui-ci qu'il remplisse la seule, condition de résistance c.-à-d. que les contraintes dans les sections les plus dangereuses ne dépassent pas une certaine limite prévue. Dans beaucoup des cas, les conditions de bon fonctionnement imposent que les déformations ne dépassent pas, elles aussi, une certaine limite imposée par des normes.

### I.2 Hypothèses

Les savants dans la physique du problème, développent les théories qui sont les plus appropriées pour résoudre certains types de structures et qui s'avèrent plus utiles pour les calculs pratiques. Toutefois, dans chaque nouvelle théorie sont faites des hypothèses sur la façon dont le système se comporte ou l'élément. Par conséquent, nous devons toujours être conscients de ces hypothèses lors de l'évaluation des résultats, fruit des théories qui s'appliquent ou se développent [5-7].

Dans le calcul des déformations on suppose que les matériaux respectent toutes

les hypothèses de la résistance des matériaux, à savoir :

### ***1.2.1 Hypothèse sur le matériau***

A)- ***linéarité entre les efforts et les déformations*** (loi de Hooke): Suite à de nombreux essais, il est possible de mettre en évidence un comportement élastique linéaire durant la première phase de l'essai. Cette phase permet de relier la contrainte avec la déformation de manière linéaire.

B)- ***milieu continu*** : En restant dans le domaine macroscopique, il est supposé que le matériau occupe totalement son volume. Il est dit qu'il y a continuité de la matière.

C)- ***milieu isotrope*** : L'isotropie est la particularité d'un matériau à avoir un comportement identique quelle que soit la direction considérée.

D)- ***milieu parfaitement élastique*** : Un matériau est considéré comme élastique lorsqu'il retrouve sa forme après avoir été soumis à un cycle quelconque de charge/décharge et qu'il ne dissipe aucune énergie lors de ce cycle.

### ***1.2.2 Hypothèse de la théorie des poutres***

A')- ***planéité des sections planes après la déformation*** (hypothèse de Bernoulli) : Les sections normales à la fibre moyenne restent planes et normales à la fibre moyenne au cours du processus de déformation.

B')- ***distribution identique des efforts pour des systèmes de forces équivalents*** (principe de St-Venant): Si un corps est sollicité par un système de forces statiquement équivalentes, c'est-à-dire par des forces dont le vecteur et le moment principal sont égaux, et que d'autre part la zone d'application des charges soit peu étendue, par rapport aux dimensions du corps, les tensions dans les sections suffisamment éloignées de la zone d'application des forces dépendent peu de la manière dont la charge est appliquée. L'une des conséquences à ce principe est que les calculs de la RDM s'appliquent uniquement dans une zone suffisamment éloignée des appuis et du chargement : en général il suffit de se situer à une distance égale à la hauteur.



C')- *petites déformations* : Lors de l'application des forces extérieures, les déformations sont supposées petites par comparaison avec les dimensions du solide déformé. En effet, cela permet de négliger la modification de la position des forces extérieures et des appuis. Ainsi, il est possible d'écrire les équations de la théorie statique sur le cas non déformé pour un corps déformable.

*Parmi ces hypothèses les deux suivantes ont une importance particulière*

– *Linéarité entre les efforts et les déformations*, qui permettent l'application du principe de la superposition des effets ; "En tout point d'une poutre, les effets élastiques (déplacements, déformations et contraintes) de toute combinaison linéaire d'actions sont combinaisons linéaires des effets élastiques élémentaires dus à chaque action considérée isolément".

– *Déformations faibles*, par rapport aux dimensions des barres de la structure "qui permet d'écrire les équations d'équilibre de la structure déformée en utilisant le schéma de la structure non déformée, sans faire pour cela des grosses erreurs".

### **I.3 Structures composées**

Pour les structures planes il existe seulement trois genres de liaisons ; l'appui simple, l'articulation et l'encastrement. Généralement, à l'aide de ces trois genres d'appui, on peut concevoir des structures isostatiques ou hyperstatiques simples (ex. poutre sur deux appuis) ou composées de poutres, de portiques ou de treillis.

Dans les structures composées on trouve deux ou plusieurs corps liés entre eux et avec la base d'appuis (le terrain) par l'intermédiaire d'un nombre de liaisons qui est toujours trois fois le nombre de corps (parce que pour fixer un corps dans le plan on a besoin de trois liaisons). Au minimum un des corps présente trois liaisons avec la base d'appuis et s'appelle « corps porteur », il constitue le support pour les autres corps, « corps portés », qui se reposent sur celui-ci et sur la base d'appuis, Figure I.1.

Les poutres à plusieurs travées constituées avec un nombre suffisant de rotules pour qu'elles deviennent statiquement déterminées sont des poutres composées.

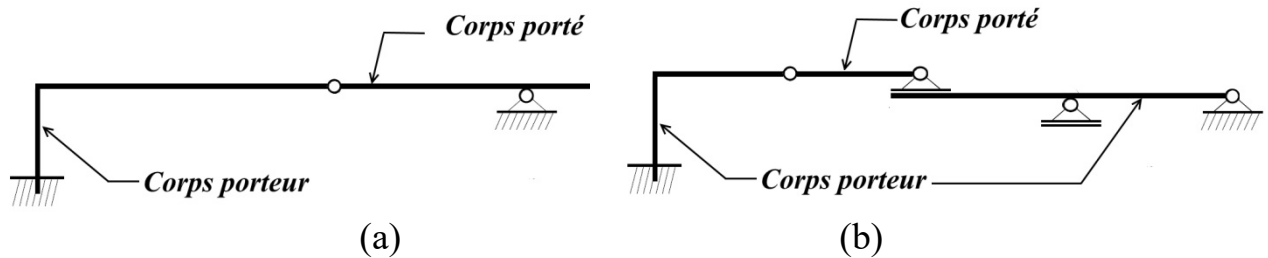


Figure I.1.(a) Structure composée de deux ou (b) plusieurs corps liés entre eux.

### I.3.1 Calcul de degré d'hyperstaticité par la méthode théorique

La stabilité est une condition préalable essentielle pour qu'une structure puisse supporter des chargements, et donc convenir à être analysée. L'analyse d'une structure est basée sur la résolution des forces inconnues (ou des déplacements) en utilisant quelques équations. C'est essentiellement la comparaison des équations et des inconnues qui détermine la stabilité d'un système structural, cette comparaison est formulée par un nombre  $h$  appelé degré d'hyperstaticité.

La détermination statique d'une structure (calculée par  $h$ ) est un concept étroitement lié à sa stabilité. Une fois que la stabilité de structure est vérifiée, il est important de déterminer si elle demeure dans l'équilibre ; c.-à-d. elle peut être analysée par les concepts seuls de la statique. Il y a des différences importantes entre les structures qui sont soluble par les équations seules de la statique (structures isostatiques,  $h = 0$ ) et ceux qui exigent des équations complémentaires, habituellement de la cinématique (structures hyperstatiques,  $h > 0$ ).

Un système mécanique comprenant un nombre  $b$  de barres possède  $3 \times b$  degrés de liberté dans le plan, c.-à-d. trois (3) paramètres géométriques indépendants par barres. Si  $r$  représente le nombre de réactions d'appuis, c.-à-d. de composantes de réactions inconnues aux différents points d'appuis, alors, le nombre totale d'inconnues est de  $(3 \times b + r)$ .








Les barres constituant une structure sont liées entre eux à différents points par un nombre de jonctions  $j$  que ce soit rigides ou articulées, ces jonctions correspondent au  $3 \times j$  équations d'équilibres statiques. Si  $k$  représente le nombre de liaisons

internes indépendantes entre barres (Tableau I.1), alors, le nombre totale d'équations d'équilibre est de  $(3 \times j + k)$ . On appelle degré d'hypersatécité, la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations disponible, soit:

$$h = (3 \times b + r) - (3 \times j + k) \quad (I.1)$$

Pour un nombre  $s$  de corps concourants en une articulation,  $k = (s - 1)$ , Tableau I.1.

**Tableau I.1 : calcul du nombre de liaisons internes indépendantes entre barres**

Condition d'articulation							
$s$	2	2	2	2	3	4	
$k$	1	1	1	1	2	3	

### I.3.2 Calcul des réactions dans les structures composées

Pour le calcul des réactions des structures composées, on a deux possibilités : ou bien la méthode d'isolation des corps, ou bien méthode mixte.

#### I.3.2.1 Méthode d'isolation des corps

La méthode d'isolation des corps sert à calculer toutes les inconnues d'une structure, elle consiste à décomposer la structure en corps (porteurs et portés) et analyser leur équilibre séparément en utilisant les principes de la statique. Pour qu'un corps devient en équilibre statique il devrait satisfaire les trois équations d'équilibre – ces équations sont appliquées aux points d'appuis qui délimitent le corps en terme de rotation ( $\sum M_z = 0$ ) et sur la totalité du corps en terme de forces ( $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ ) – c-à-d le nombre d'équations d'équilibre fournis pour un corps est trois (3).

La méthode d'isolation des corps est expliquée dans l'exemple suivant (§I.3.2.3).

#### a. Les étapes de calcul :

- 1) La caractérisation géométrique et statique du système de corps.
- 2) On divise le système en corps composants.
- 3) Les forces extérieures et intérieures qui agissent sur chaque corps sont représentées
- 4) On écrit les équations d'équilibre pour chaque corps (3 équations en plan).

- 5) On doit résoudre le système des équations pour déterminer les inconnues.
- 6) La vérification des résultats : se fait en écrivant toutes les équations qui ne se retrouvent pas parmi les équations d'équilibre utilisées.

**b. REMARQUES :**

- Au commencement on a choisit arbitrairement un sens pour les réactions et pour les forces intérieures de liaison. Si les inconnues ont une valeur positive le sens choisit est correct, si les inconnues sont négatives on doit refaire la figure et représenter ces réactions avec leur sens correct.
- L'avantage de la méthode est de permettre le calcul de toutes les forces de liaison extérieures et intérieures inconnues du problème.
- Le désavantage de la méthode est le grand nombre des équations et des inconnues qu'on doit déterminer.

### **I.3.2.2 La méthode mixte**

La méthode mixte sert à calculer les réactions d'une structure, elle consiste à écrire les trois (03) équations d'équilibre pour l'ensemble et, supplémentairement, des conditions de moments fléchissant nul pour toutes les articulations intermédiaires.

Cette méthode donne la possibilité de déterminer seulement les réactions dans les liaisons extérieures en éliminant les calculs des forces intérieures et elle permet de réduire sensiblement le nombre des inconnues donc le nombre des équations.

La méthode mixte est expliquée dans l'exemple suivant (§I.3.2.3).

**a. Les étapes de calcul :**

- 1) La caractérisation géométrique et statique du système de corps.
- 2) Le schéma des forces (seulement les forces extérieures – données et réactions)
- 3) Application des équations d'équilibre statique.
- 4) On doit résoudre le système d'équations pour déterminer les inconnues.
- 5) La vérification des résultats : se fait en écrivant toutes les équations qui ne se

retrouvent pas parmi les équations d'équilibre utilisées.

### I.3.2.3 Exemple d'une structure en poutre composée

Soit la poutre constituée de trois barres droites et donnée dans la Figure I.2.a :

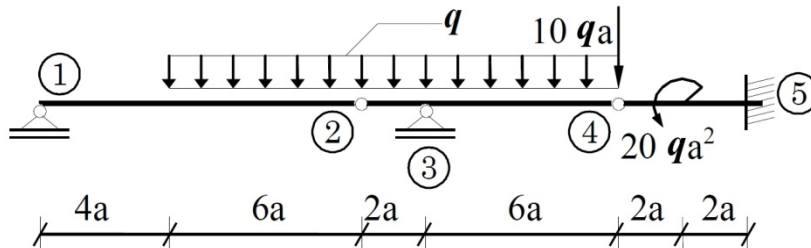


Figure I.2.a Poutre composée de trois barres droites

a. calcul des réactions en utilisant la méthode d'isolations des corps :

1- Vérification de degré d'hyperstaticité de la structure:

(Hyperstaticité = nombre d'inconnues – nombre d'Equations) ;  $H_E = N_T - E_T$

La structure est composée par 3 barres droites liées par 2 articulations ② et ④ :

- Chaque appui simple est caractérisé par une (1) inconnue :

les appuis ① et ③ sont des appuis simples  $\rightarrow N_{1,3} = 2 \times 1 = 2$

- Chaque articulation est caractérisée par deux (2) inconnues :

les appuis ② et ④ sont des articulations  $\rightarrow N_{2,4} = 2 \times 2 = 4$

- Chaque encastrement ou nœud rigide est caractérisé par trois (3) inconnues :

l'appui ⑤ est un encastrement  $\rightarrow N_5 = 1 \times 3 = 3$

Alors, le nombre total d'inconnues est  $\rightarrow N_T = \sum N_i = 2 + 4 + 3 = 9$

- Chaque barre isolée nous donne trois (3) équations d'équilibre, les barres sont :

barre (I) : entre ①–②, barre (II) : entre ②–③–④

et barre (III) : entre ④–⑤. Alors :  $E_T = 3 \times 3 = 9$

Alors l'hyperstaticité du système est de :  $H_E = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$  système isostatique.

2- Calcul des réactions : En appliquant la méthode d'isolation des corps,

Le schéma de forces est donné dans la (Fig. I.2.b)

- La structure est composée par trois barres droites :

La barre ①–② est portée à droite ;

La barre ②–③–④ est porteuse à gauche et portée à droite ;

La barre ④–⑤ est le corps porteur.

- En appliquant la méthode d'isolation des corps toutes les forces de liaisons (extérieures et intérieures) sont mises en évidence.
- Pour chaque corps on va écrit trois équations d'équilibre :

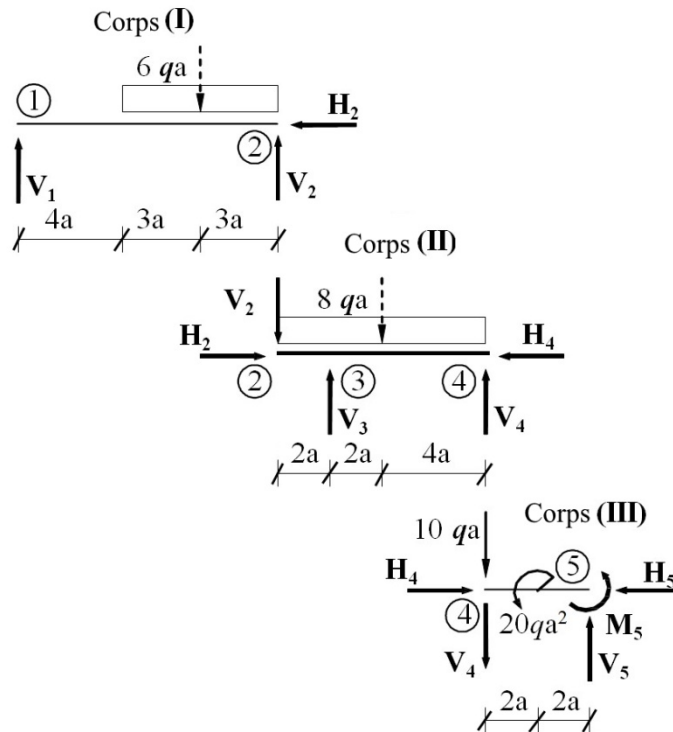


Figure I.2.b isolation des corps d'une poutre composée

**Corps (I):**

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H_2 = 0 \\ \sum M_{/1} = 0 & \Rightarrow (V_2 \times 10a) - (6qa) \times (4a + 3a) = 0 \Rightarrow V_2 = 4,2 \, qa \\ \sum M_{/2} = 0 & \Rightarrow (-V_1 \times 10a) + (6qa \times 3a) = 0 \Rightarrow V_1 = 1,8 \, qa \end{aligned}$$

---

vérification :  $\sum F_y = 0 \Rightarrow 1,8 \, qa - 6 \, qa + 4,2 \, qa = 0$

**Corps (II) :**

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H_2 - H_4 = 0 \Rightarrow H_4 = 0 \\ \sum M_{/3} = 0 & \Rightarrow (4,2qa \times 2a) + (V_4 \times 6a) - (8qa \times 2a) = 0 \Rightarrow V_4 = 1,27 \, qa \\ \sum M_{/4} = 0 & \Rightarrow (4,2qa \times 8a) - (V_3 \times 6a) + (8qa \times 4a) = 0 \Rightarrow V_3 = 10,93 \, qa \end{aligned}$$

---

vérification :  $\sum F_y = 0 \Rightarrow -4,2 \, qa + 10,93 \, qa - 8 \, qa + 1,27 \, qa = 0$

**Corps (III) :**

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H_5 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow -10 \, qa - 1,27 \, qa + V_5 = 0 \Rightarrow V_5 = 11,27 \, qa \\ \sum M_{/5} = 0 & \Rightarrow (10qa \times 4a) + (1,27qa \times 4a) + 20 \, qa^2 + M_5 = 0 \Rightarrow M_5 = -65,08 \, qa^2 \end{aligned}$$

---

vérification :  $\sum M_{/4} = 20 \, qa^2 + (11,27qa \times 4a) - 65,08 \, qa^2 = 0$

**b. calcul des réactions en utilisant la méthode mixte :**

1- Le schéma de forces comprend seulement les forces extérieures actives et liaisons (réactions), fig. I.2.c :

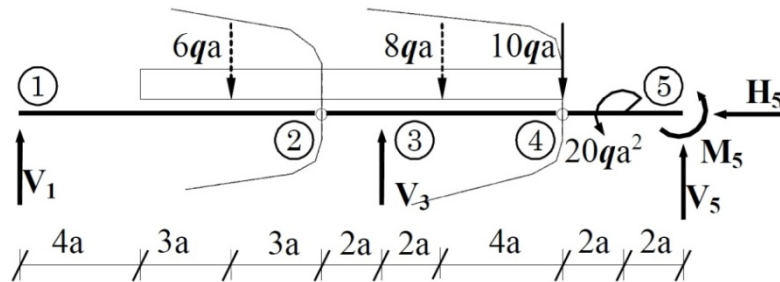


Figure I.2.c Application de la Méthode mixte pour une poutre composée

2- Pour calculer les réactions on commence avec les parties portées : ①–② et ②–③–④

Le théorème de l'équilibre statique des parties (coté gauche de ② et coté gauche de ④):

$$\begin{aligned} \sum M^{gh}/_2 = 0 &\Rightarrow (V_1 \times 10a) - (6qa \times 3a) = 0 &\Rightarrow V_1 = 1,80 qa \\ \sum M^{gh}/_4 = 0 &\Rightarrow (1,80qa \times 18a) - (6qa \times 11a) + (V_3 \times 6a) - (8qa \times 4a) = 0 &\Rightarrow V_3 = 10,93 qa \end{aligned}$$

3- Une fois les réactions sur les parties portées connues, il est possible de déterminer les réactions sur la partie porteuse : ④–⑤

Le théorème de l'équilibre statique des parties (coté droit de ④) :

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_5 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 1,80qa + 10,93qa - 6qa - 8qa - 10qa + V_5 = 0 \Rightarrow V_5 = 11,27 qa \\ \sum M^{dr}/_4 = 0 &\Rightarrow (20 qa^2) + (11,27qa \times 4a) + M_5 = 0 \Rightarrow M_5 = -65,1 qa^2 \end{aligned}$$

vérification :  $\sum M^{dr}/_{1/2} = 0$

$$\Rightarrow (10,93qa \times 2a) - (8qa \times 4a) - (10qa \times 8a) + 20qa^2 + (11,27qa \times 12a) - 65,1qa^2 = 0$$

**Vérification :** L'équation de vérification doit être une équation de type moment parce qu'une inconnue  $M_5$  est de type moment.

Les résultats de calcul des réactions sont donnés dans la figure (Fig. I.2.d) :

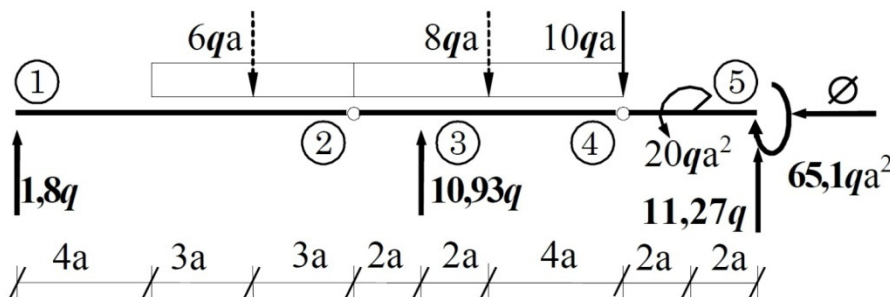


Figure I.2.d Résultats de la Méthode mixte pour une poutre composée

**I.3.2.4 Exemple d'un portique avec dénivelée**

Soit le portique constitué de deux parties avec dénivelée, donné dans la Figure I.3.a:

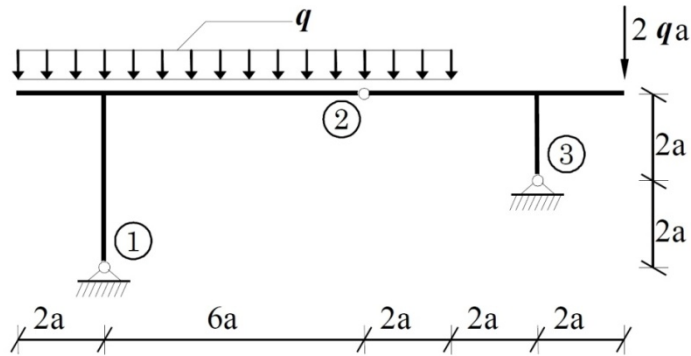


Figure I.3.a. Application de la Méthode mixte pour un portique avec dénivelée

**a. Calcul de l'hypersaticité par la méthode théorique :**

Vérification de degré d'hypersaticité de la structure,

(Hypersaticité = nombre d'inconnues – nombre d'Equations) :

$$h = (3 \times b + r) - (3 \times j + k)$$

$b=4$  : Le nombre de barres, les consols ne seront pas inclus puisque ils sont en équilibre.

$r=2+2=4$  : Le nombre de réactions d'appuis.

$j=5$  : Le nombre de jonction, quelque soit le type de nœud.

$k=1$  : La condition des articulations égale au (nombre de barres en occurrence – 1),

$$\Rightarrow h = (3 \times 4 + 4) - (3 \times 5 + 1) = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \text{La structure est isostatique.}$$

**b. Calcul des réactions par la méthode mixte :**

1- Le schéma de forces comprend seulement les forces extérieures actives et liaisons (réactions), Figure I.3.b :

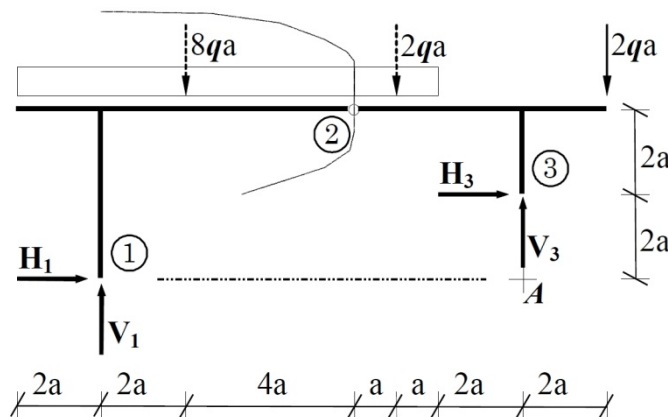


Figure I.3.b. Application de la Méthode mixte pour un portique avec dénivelée

2- Pour calculer les réactions on commence avec la première partie: ②–③

Le théorème de l'équilibre statique des parties (autour de ① et coté **droit** de ②):



$$\begin{cases} \sum M/1 = 0 \\ \sum M^{dr}/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (V_3 \times 10a) - (H_3 \times 2a) - (8qa \times 2a) - (2qa \times 7a) - (2qa \times 12a) = 0 \\ (V_3 \times 4a) + (H_3 \times 2a) - (2qa \times a) - (2qa \times 6a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_3 = 4,875qa \\ H_3 = -2,714qa \end{cases}$$

3- On passe à la deuxième partie: ①-②

Le théorème de l'équilibre statique (autour de l'intersection A et coté gauche de ②):

$$\begin{aligned} \sum M/A = 0 &\Rightarrow (V_1 \times 10a) - (2,714q \times 2a) - (8qa \times 8a) \\ &\quad - (2qa \times 3a) + (2qa \times 2a) = 0 \Rightarrow V_1 = 7,143qa \\ \sum M^{gh}/2 = 0 &\Rightarrow -(H_1 \times 4a) + (7,143qa \times 6a) - (8qa \times 4a) = 0 \Rightarrow H_1 = 2,714qa \end{aligned}$$

---

vérification :  $\sum Fy = 0 \Rightarrow 7,143qa + 4,875qa - 8qa - 2qa - 2qa = 0$

Les résultats de calcul des réactions sont donnés dans Figure I.3.c :

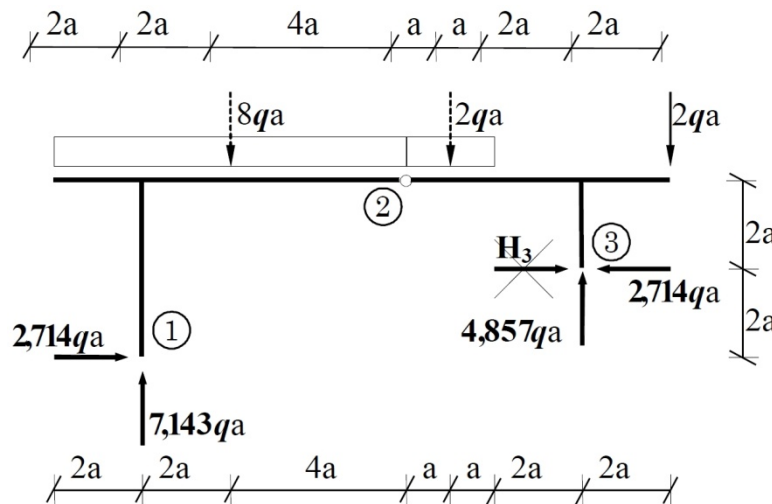


Figure I.3.c Résultats de la Méthode mixte pour un portique avec dénivelée

### I.3.2.5 Exemple d'un portique encasturé

Soit la structure de la Figure I.4.a, composée par un portique encasturé porteur et un portique à trois articulations porté.

a. Calcul de l'hypersaticité par la méthode théorique :

Vérification de degré d'hypersaticité de la structure :  $h = (3 \times b + r) - (3 \times j + k)$

$b=4$  : Le nombre de barres.

$r=2+3=5$  : Le nombre de réactions d'appuis.

$j=5$  : Le nombre de jonction, quelque soit le type de nœud.

$k=1+1=2$  : La condition d'articulations égale au (nombre de barres en occurrence -1),

$\Rightarrow h = (3 \times 4 + 5) - (3 \times 5 + 2) = 17 - 17 = 0 \Rightarrow$  La structure est isostatique.

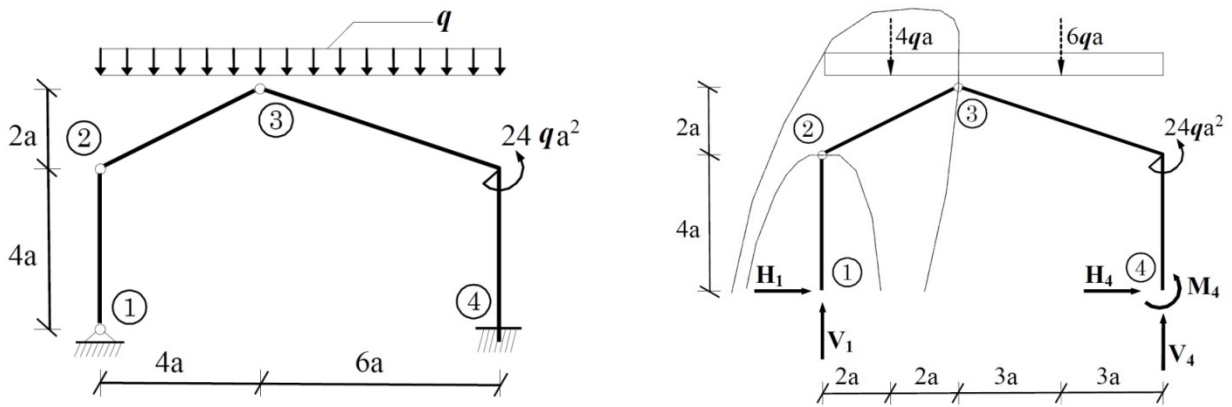


Figure I.4.a-b. Application de la Méthode mixte pour un portique encastré

**b. Calcul des réactions par la méthode mixte :**

- 1- Le schéma de forces comprend seulement les forces extérieures actives et liaisons (réactions), Figure I.4.b :
- 2- Pour calculer les réactions on commence avec la partie : ①–②–③  
Le théorème de l'équilibre statique des parties (coté **gauche** de ② et coté **gauche** de ③):

$$\begin{aligned} \sum M_{2}^{gh}/2 = 0 &\Rightarrow (H_1 \times 4a) = 0 &&\Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum M_{3}^{gh}/3 = 0 &\Rightarrow -(V_1 \times 4a) + (4qa \times 2a) = 0 &&\Rightarrow V_1 = 2qa \end{aligned}$$

- 3- Une fois les réactions sur les parties portées connues, il est possible de déterminer les réactions sur la partie porteuse : ③–④

Le théorème de l'équilibre statique (coté **gauche** de ④ et coté **droit** de ③):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &&&\Rightarrow H_4 = 0 \\ \sum M_{4} = 0 &\Rightarrow M_4 + 24qa^2 + (6qa \times 3a) + (4qa \times 8a) - (2qa \times 10a) = 0 &&\Rightarrow M_4 = -54qa^2 \\ \sum M_{3}^{dr} = 0 &\Rightarrow (V_4 \times 6a) - 54qa^2 + 24qa^2 - (6qa \times 3a) = 0 &&\Rightarrow V_4 = 8qa \end{aligned}$$

---

vérification :  $\sum F_y = 0 \Rightarrow 2qa + 8qa - 4qa - 6qa = 0$

Les résultats de calcul des réactions sont donnés dans Figure I.4.c :

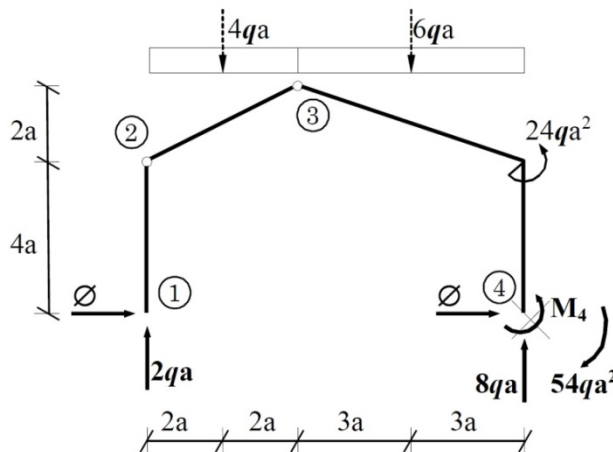


Figure I.4.c. Résultats de la Méthode mixte pour un portique encastré

**I.4 Equations différentielles d'équilibre d'un tronçon de poutre :**

Soit une poutre soumise à deux chargements répartis axial et transversal, Figure I.5.a. En étudiant ces chargements pour un élément de poutre de longueur  $dx$ , Figure I.5.b, il est possible de calculer l'équilibre de cet élément, et donc, de déterminer la relation entre l'effort normal et le chargement axial «  $n$  » et la relation entre l'effort tranchant et le chargement transversal «  $q$  ». Il vient selon la Figure I.5.b:

$$-N_x + n \cdot dx + (N_x + dN_x) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dN_x}{dx} = -n} \tag{I.1.a}$$

L'effort tranchant et le chargement transversal. Il vient selon la Figure I.5.b:

$$T_y - q \cdot dx - (T_y + dT_y) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT_y}{dx} = -q} \tag{I.1.b}$$

En calculant le moment au centre de gravité de la section  $\Omega$ , il vient:

$$-M_z - (T_y + dT_y) \cdot dx - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + (M_z + dM_z) = 0 \tag{I.1.c}$$

En négligeant les termes infiniment petits du second ordre, il apparaît:

$$\frac{dM_z}{dx} = T_y \tag{I.1.d}$$

Si la dernière équation (II.1.d) est dérivée par rapport à  $x$ , alors :

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = -q \tag{I.1.e}$$

Les équations (I.1.a), (I.1.b), (I.1.d) et (I.1.e) sont les relations de dépendances différentielles en flexion.

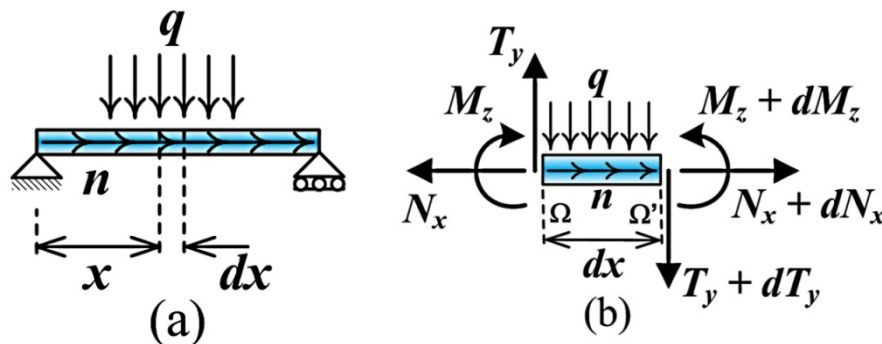


Figure I.5. Equilibre d'un élément de poutre de longueur  $dx$

## I.5 Diagrammes des efforts internes :

Les efforts ou forces internes dans une poutre sont des intégrales (une réduction) des contraintes agissant au centre de la section transversale de la poutre. Lorsque la poutre est soumise à une charge dans le plan, nous avons deux forces internes ; axiale et transversale et un moment. Leurs positions positives sont indiquées sur la figure I.6.

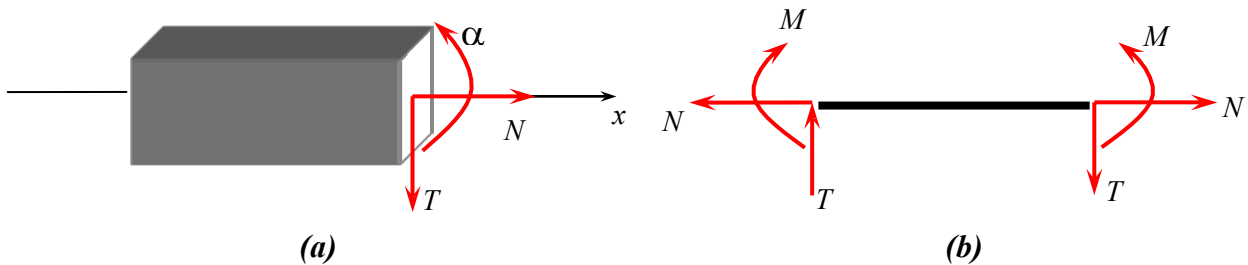


Figure I.6. (a). Sens positif des efforts, (b). Dans les deux cotés.

Au point d'action de force, le diagramme du moment fléchissant a un sommet et le diagramme d'effort tranchant a un saut;

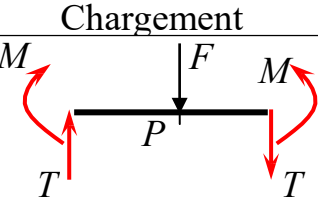
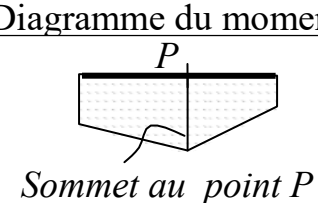
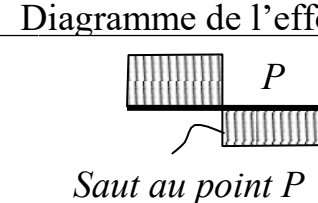
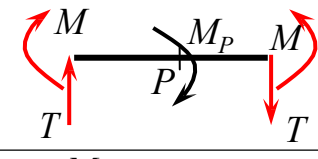
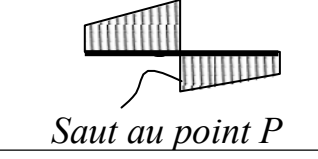
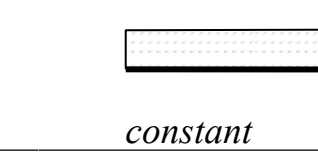
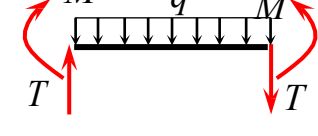
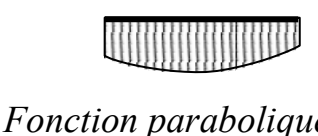
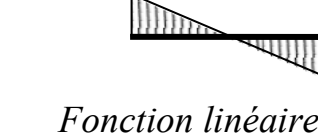
Si une section de la poutre n'est pas chargée, le diagramme du moment fléchissant est linéaire et le diagramme l'effort tranchant est constant;

Si une partie de la poutre est soumise à une charge répartie, le diagramme du moment fléchissant est parabolique du second degré et le diagramme de l'effort tranchant est linéaire;

Et pour dessiner les diagrammes on a admis les conventions suivantes :

- 1- Les valeurs positives pour l'effort tranchant seront indiquées en dessus de la ligne de référence tandis que les valeurs négatives, en dessous.
- 2- Les valeurs positives pour le moment fléchissant seront indiquées en dessous de la ligne de référence tandis que les valeurs négatives en dessus.
- 3- Pour l'effort normal N, la convention est la même que l'effort tranchant T.
- 4- Les diagrammes seront hachurés avec des lignes normales à la ligne de référence et contiendront les signes à l'intérieur d'un petit cercle.
- 5- Si on respecte les règles indiquées ci-dessus, alors les hachures des diagrammes de moment fléchissant se trouveront toujours de coté tendu de la poutre.

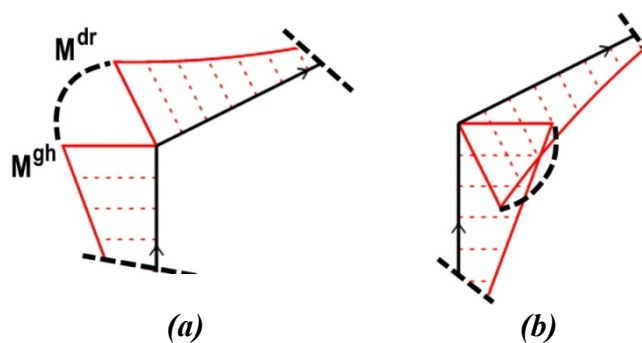
**Tableau I.2 : Quelques règles de tracé des efforts**

Chargement	Diagramme du moment	Diagramme de l'effort
	 <p>Sommet au point P</p>	 <p>Saut au point P</p>
	 <p>Saut au point P</p>	 <p>constant</p>
	 <p>Fonction parabolique</p>	 <p>Fonction linéaire</p>

**I.5.1 Diagrammes des efforts internes dans les portiques :**

Dans les portiques on trouve plusieurs barres liés entre eux par l'intermédiaire d'un nombre de nœuds rigides et avec la base d'appuis (le terrain) par des liaisons comme appuis simples, articulations et encastremets.

Pour le calcul des valeurs nécessaires aux dessins des diagrammes (M, T et N), on doit d'abord fixer un sens de parcours pour chaque barre comprise dans la structure (une petite flèche, dans Fig. I-7, I-8 et I-9). Par la suite on considérera chaque barre séparément et on calculera la variation des efforts, en tenant en compte le sens de parcours en dessous et de droite à gauche en respectant les conventions citées précédemment.



**Figure I.7. (a). Rabattement extérieur (b). Rabattement intérieur du moment.**

Toutefois il faut mentionner que dans les nœuds convergents deux ou plusieurs barres. Dans le cas où il y a seulement deux barres, pour que le nœud puisse se trouver

en équilibre, il faut que le moment se trouvant sur la barre de gauche soit le même avec celui se trouvant sur la barre de droite (Fig. I.8.a). Dans ce cas on doit que l'ordonnée sera « rabattue » (à l'aide d'un segment de cercle, Figure I.7.a). Pour cette opération il y a seulement deux cas : ou bien sur une barre le moment est à l'extérieur et alors pour l'autre barre il sera aussi à l'extérieur (Fig. I.7.a), ou bien les deux moments dans les deux barres sont à l'intérieur (Fig. I.7.b).

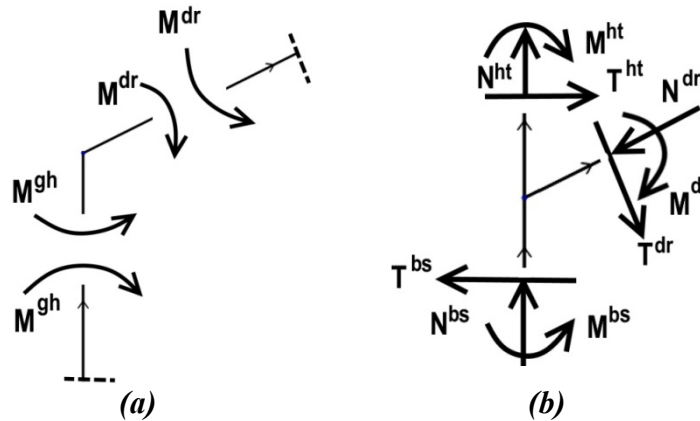


Figure I.8. L'équilibre de nœud (a). à deux barres (b). à plusieurs barres.

Pour le cas des nœuds ayant plusieurs barres encastrees, à la fin des calculs on doit séparer le nœud et vérifier s'il est en équilibre. Par exemple pour le nœud indiqué dans la Figure I.8.b, l'équilibre suppose que les trois suivantes conditions soient à la fois accomplies:

$$\begin{cases} \sum Fx_i = T^{ht} - T^{bs} - N^{dr} \cdot \cos \alpha + T^{dr} \cdot \sin \alpha = 0 \\ \sum Fy_i = N^{bs} - N^{ht} - T^{dr} \cdot \cos \alpha + N^{dr} \cdot \sin \alpha = 0 \\ \sum Mn_i = M^{ht} - M^{dr} - M^{bs} = 0 \end{cases}$$

### I.5.1.1 Exemple des tracés de la poutre composée

On reprend l'exemple de la poutre composée du (§ I.3.2.3), de la (figure I.9.a) :

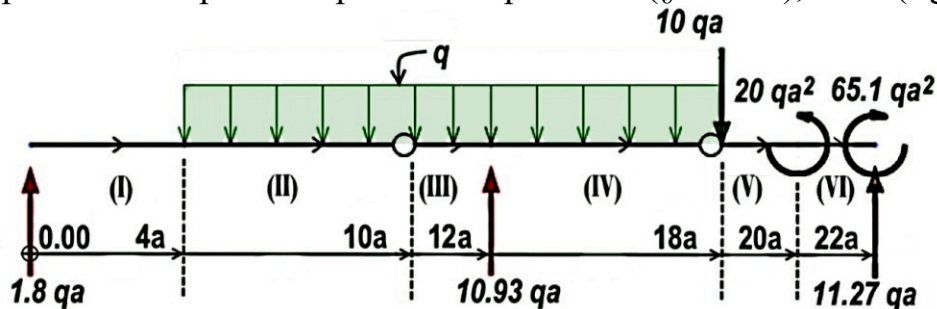


Figure I.9.a poutre composée à plusieurs trançons

**a. Expressions des efforts internes  $T(x)$  et  $M(x)$ :****1)  $T(x)$ , pour le premier tronçon (I):**soit ( $0 \leq x \leq 4a$ ):  $T(x) = V_1 = 1,8 qa$ Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :Pour:  $x = 0.0 \rightarrow T(0) = 1,8 qa$ Pour:  $x = 4a \rightarrow T(4a) = 1,8 qa$ **2)  $T(x)$ , pour le deuxième tronçon (II):**soit ( $4a \leq x \leq 10a$ ):

$$T(x) = 1,8 qa - q.(x - 4a)$$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :Pour:  $x = 4a \rightarrow T(4a) = 1,8 qa$ Pour:  $x = 10a \rightarrow T(10a) = -4,2 qa$ **3)  $T(x)$ , pour le troisième tronçon (III):**soit ( $10a \leq x \leq 12a$ ):

$$T(x) = 1,8 qa - q.(x - 4a)$$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :Pour:  $x = 10a \rightarrow T(10a) = -4,2 qa$ Pour:  $x = 12a \rightarrow T(12a) = -6,2 qa$ **4)  $T(x)$ , pour le quatrième tronçon (IV):**soit ( $12a \leq x \leq 18a$ ):

$$T(x) = 1,8 qa - q.(x - 4a) + 10,93 qa$$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :Pour:  $x = 12a \rightarrow T(12a) = 4,73 qa$ Pour:  $x = 18a \rightarrow T(18a) = -1,27 qa$ **5)  $T(x)$ , pour le cinquième tronçon (V):**soit ( $18a \leq x \leq 20a$ ):

$$T(x) = -11,27 qa$$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :Pour:  $x = 18a \rightarrow T(18a) = -11,27 qa$ Pour:  $x = 20a \rightarrow T(20a) = -11,27 qa$ **6)  $T(x)$ , pour le sixième tronçon (VI):**soit ( $20a \leq x \leq 22a$ ):

$$T(x) = -11,27 qa$$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :Pour:  $x = 20a \rightarrow T(20a) = -11,27 qa$ Pour:  $x = 22a \rightarrow T(22a) = -11,27 qa$ **1)  $M(x)$ , pour le premier tronçon (I):**soit ( $0 \leq x \leq 4a$ ):  $M(x) = V_1.x = 1,8 qa.x$ Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :Pour:  $x = 0.0 \rightarrow M(0) = 0$ Pour:  $x = 4a \rightarrow M(4a) = 7,2 qa^2$ **2)  $M(x)$ , pour le deuxième tronçon (II):**soit ( $4a \leq x \leq 10a$ ):  $M(x) = 1,8 qa.x - q.\frac{(x - 4a)^2}{2}$ Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :Pour:  $x = 4a \rightarrow M(4a) = 7,2 qa^2$ Pour:  $x = 10a \rightarrow M(10a) = 0$ **3)  $M(x)$ , pour le troisième tronçon (III):**soit ( $10a \leq x \leq 12a$ ):  $M(x) = 1,8 qa.x - q.\frac{(x - 4a)^2}{2}$ Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :Pour:  $x = 10a \rightarrow M(10a) = 0$ Pour:  $x = 12a \rightarrow M(12a) = -10,40 qa^2$ **4)  $M(x)$ , pour le quatrième tronçon (IV):**soit ( $12a \leq x \leq 18a$ ):

$$M(x) = 1,8 qa.x - q.\frac{(x - 4a)^2}{2} + 10,93 qa.(x - 12a)$$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :Pour:  $x = 12a \rightarrow M(12a) = -10,40 qa^2$ Pour:  $x = 18a \rightarrow M(18a) = 0$ **5)  $M(x)$ , pour le cinquième tronçon (V):**soit ( $18a \leq x \leq 20a$ ):

$$M(x) = 1,8 qa.x - q.\frac{(x - 4a)^2}{2} + 10,93 qa.(x - 12a) - 10 qa.(x - 18a)$$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :Pour:  $x = 18a \rightarrow M(18a) = 0$ Pour:  $x = 20a \rightarrow M(20a) = -22,53 qa^2$ **6)  $M(x)$ , pour le sixième tronçon (VI):**soit ( $20a \leq x \leq 22a$ ):

$$M(x) = 1,8 qa.x - q.\frac{(x - 4a)^2}{2} - 20 qa^2 + 10,93 qa.(x - 12a) - 10 qa.(x - 18a)$$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :Pour:  $x = 20a \rightarrow M(20a) = -42,53 qa^2$ Pour:  $x = 22a \rightarrow M(22a) = -65,07 qa^2$



**b. Diagrammes des efforts internes :**

Les Diagrammes des efforts sont donnés dans la figure (fig. I.1.e) :

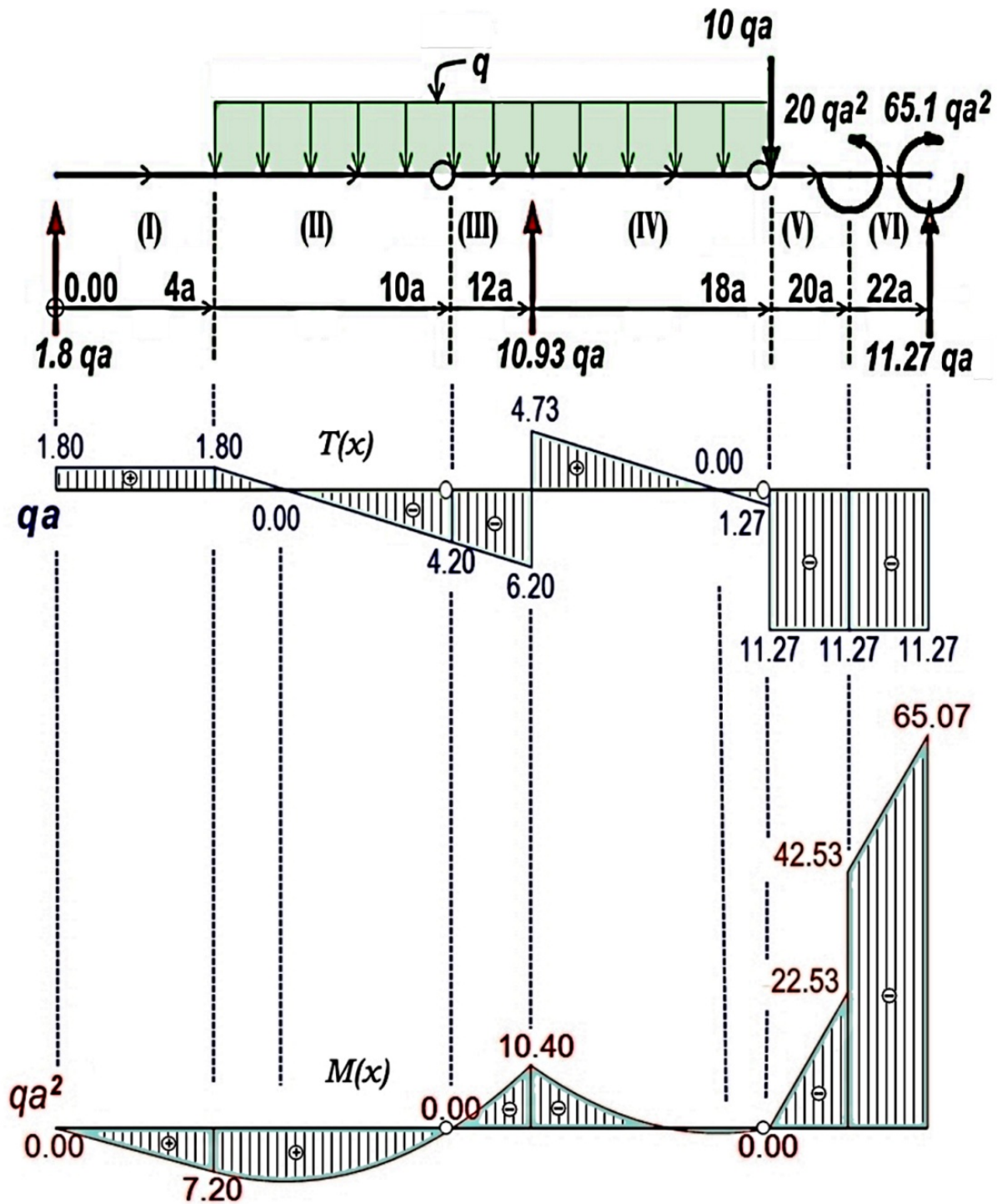


Figure I.1.f Diagrammes des efforts pour une poutre composée

**I.5.1.2 Exemple des tracés d'un portique avec dénivelée**

On reprend l'exemple de la poutre composée du (§ I.3.2.4), de la (figure I.9.a) :



**c. Expressions des efforts internes  $N(x)$  et  $T(x)$ , Figure I.2.d :**

**1)  $N(x)$ , pour le premier tronçon (I):**

soit ( $0 \leq x \leq 4a$ ):  $N(x) = -7,143 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 0.0 \rightarrow N(0) = -7,143 qa$

Pour:  $x = 4a \rightarrow N(4a) = -7,143 qa$

**2)  $N(x)$ , pour le deuxième tronçon (II):**

soit ( $0.0 \leq x \leq 2a$ ):  $N(x) = 0$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 0 \rightarrow N(0) = 0$

Pour:  $x = 2a \rightarrow N(2a) = 0$

**3)  $N(x)$ , pour le troisième tronçon (III):**

soit ( $2a \leq x \leq 8a$ ):  $N(x) = -2,714 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 2a \rightarrow N(2a) = -2,714 qa$

Pour:  $x = 8a \rightarrow N(8a) = -2,714 qa$

**4)  $N(x)$ , pour le quatrième tronçon (IV):**

soit ( $8a \leq x \leq 10a$ ):  $N(x) = -2,714 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 8a \rightarrow N(8a) = -2,714 qa$

Pour:  $x = 10a \rightarrow N(10a) = -2,714 qa$

**5)  $N(x)$ , pour le cinquième tronçon (V):**

soit ( $10a \leq x \leq 12a$ ):  $N(x) = -2,714 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 10a \rightarrow N(10a) = -2,714 qa$

Pour:  $x = 12a \rightarrow N(12a) = -2,714 qa$

**6)  $N(x)$ , pour le sixième tronçon (VI):**

soit ( $12a \leq x \leq 14a$ ):  $N(x) = 0$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 12a \rightarrow N(12a) = 0$

Pour:  $x = 14a \rightarrow N(14a) = 0$

**7)  $N(x)$ , pour le septième tronçon (VII):**

soit ( $0 \leq x \leq 2a$ ):

$N(x) = 10 qa - 7,143 qa = 4,857 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $N(x)$ :

Pour:  $x = 0 \rightarrow N(0) = 4,857 qa$

Pour:  $x = 2a \rightarrow N(2a) = 4,857 qa$

**1)  $T(x)$ , pour le premier tronçon (I):**

soit ( $0 \leq x \leq 4a$ ):  $T(x) = -2,714 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 0.0 \rightarrow T(0) = -2,714 qa$

Pour:  $x = 4a \rightarrow T(4a) = -2,714 qa$

**2)  $T(x)$ , pour le deuxième tronçon (II):**

soit ( $0 \leq x \leq 2a$ ):  $T(x) = -q.x$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 0 \rightarrow T(0) = 0$

Pour:  $x = 2a \rightarrow T(2a) = -2 qa$

**3)  $T(x)$ , pour le troisième tronçon (III):**

soit ( $2a \leq x \leq 8a$ ):  $T(x) = -qx + 7,143 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 2a \rightarrow T(2a) = +5,143 qa$

Pour:  $x = 8a \rightarrow T(8a) = -0,857 qa$

**4)  $T(x)$ , pour le quatrième tronçon (IV):**

soit ( $8a \leq x \leq 10a$ ):  $T(x) = -qx + 7,143 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 8a \rightarrow T(8a) = -0,857 qa$

Pour:  $x = 10a \rightarrow T(10a) = -2,857 qa$

**5)  $T(x)$ , pour le cinquième tronçon (V):**

soit ( $10a \leq x \leq 12a$ ):  $T(x) = -2,857 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 10a \rightarrow T(10a) = -2,857 qa$

Pour:  $x = 12a \rightarrow T(12a) = -2,857 qa$

**6)  $T(x)$ , pour le sixième tronçon (VI):**

soit ( $12a \leq x \leq 14a$ ):

$T(x) = (-2,857 + 4,857) qa = 2 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 12a \rightarrow T(12a) = 2 qa$

Pour:  $x = 14a \rightarrow T(14a) = 2 qa$

**7)  $T(x)$ , pour le septième tronçon (VII):**

pour ( $0a \leq x \leq 2a$ ):  $T(x) = -2,714 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $T(x)$ :

Pour:  $x = 0a \rightarrow T(0a) = -2,714 qa$

Pour:  $x = 2a \rightarrow T(2a) = -2,714 qa$

**d. Expressions des efforts internes  $M(x)$ , Figure I.9.d :**

**1)  $M(x)$ , pour le premier tronçon (I):**

soit  $(0 \leq x \leq 4a)$ :  $M(x) = -2,714 qa \cdot x$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 0.0 \rightarrow M(0) = 0$

Pour:  $x = 4a \rightarrow M(4a) = -10,856 qa^2$

**2)  $M(x)$ , pour le deuxième tronçon (II):**

soit  $(0 \leq x \leq 2a)$ :  $M(x) = -q x^2 / 2$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 0 \rightarrow M(0) = 0$

Pour:  $x = 2a \rightarrow M(2a) = -2 qa^2$

**3)  $M(x)$ , pour le troisième tronçon (III):**

soit  $(2a \leq x \leq 8a)$ :

$M(x) = -q \frac{x^2}{2} - 3,713 qa - 14,286$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 2a \rightarrow M(2a) = -12,856 qa^2$

Pour:  $x = 8a \rightarrow M(8a) = 0$

**4)  $M(x)$ , pour le quatrième tronçon (IV):**

soit  $(4a \leq x \leq 6a)$  ;

$M(x) = -5,428 qa^2 + 2,857 qa \cdot x - 9,714$   
 $- q(x-4)^2 / 2$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 4a \rightarrow M(4a) = -3.713 qa^2$

Pour:  $x = 6a \rightarrow M(6a) = 0$

**5)  $M(x)$ , pour le cinquième tronçon (V):**

soit  $(2a \leq x \leq 4a)$  ;

$M(x) = -5,428 qa^2 + 2,857 qa \cdot x - 9,714 qa$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 10a \rightarrow M(10a) = -9,428 qa^2$

Pour:  $x = 12a \rightarrow M(12a) = -3.713 qa^2$

**6)  $M(x)$ , pour le sixième tronçon (VI):**

soit  $(0 \leq x \leq 2a)$  ;  $M(x) = -2 qa \cdot x$

Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 0 \rightarrow M(0) = -2 qa^2$

Pour:  $x = 14a \rightarrow M(2a) = -2 qa^2$

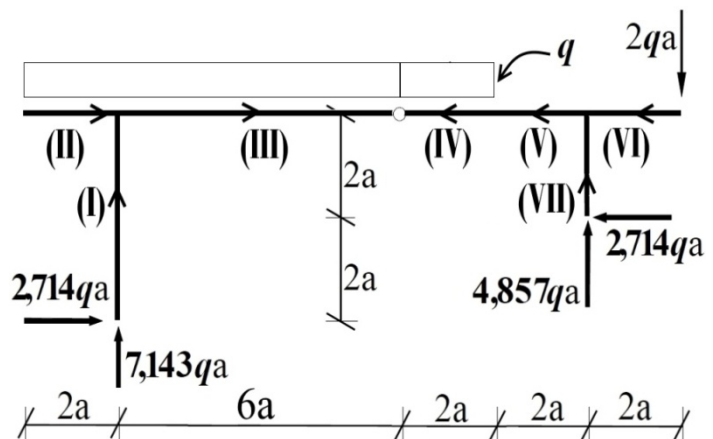
**7)  $M(x)$ , pour le septième tronçon (VII):**

pour  $(0a \leq x \leq 2a)$  ;  $M(x) = -2,714 qa \cdot x$

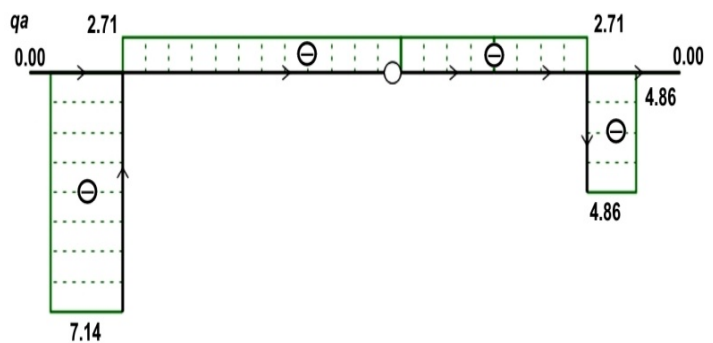
Et pour le tracé du diagramme de  $M(x)$ :

Pour:  $x = 0 \rightarrow M(0) = 0$

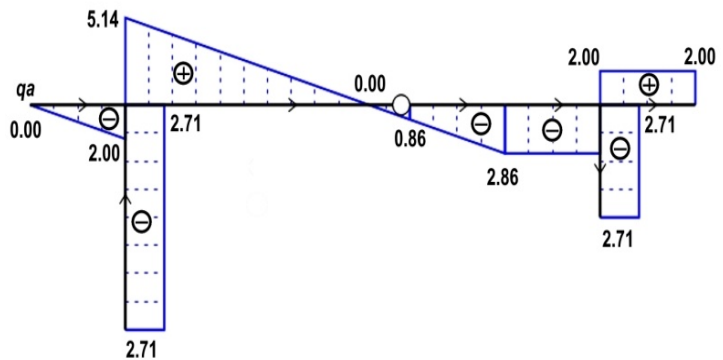
Pour:  $x = 2a \rightarrow M(2a) = -5,428 qa^2$



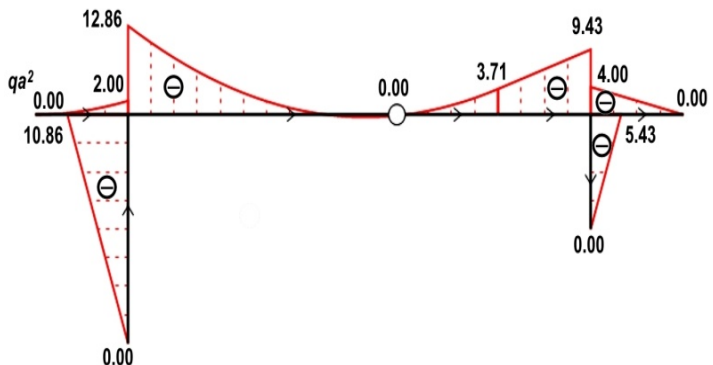
a. Schéma Statique (de chargement)



b. Diagramme de  $T(x)$



c. Diagramme de  $N(x)$



d. Diagramme de  $M(x)$

Fig. I.9.a-d. Diagrammes de  $N(x)$ ,  $T(x)$  et  $M(x)$ .

## II. Déformation des structures élastiques

### II.1 Déformation due à la flexion d'une poutre

La recherche de la déformée d'une poutre primitivement rectiligne à section constante ou variable, sollicitée principalement en flexion, constitue un des problèmes fondamentaux de la résistance des matériaux. La fibre moyenne de la poutre, fléchit et subit une déformation sans variation de longueur.

Les déformations dues au cisaillement sont habituellement très faibles et négligeables vis à vis des déformations de flexion. Après déformation, la ligne moyenne de la poutre est une courbe plane dans le cas d'un problème dans le plan, une courbe spatiale dans le cas de la flexion déviée ou quelconque.

### II.2 Equation différentielle de la ligne élastique

Soit un élément de la poutre de longueur  $dx$  en flexion pure, Figure II.1.a, c'est-à-dire avec un effort tranchant  $T_{xy}$  nul, d'après la relation de dépendance différentielle éq. (I.1.d), le moment de flexion  $M_f$  est constant.

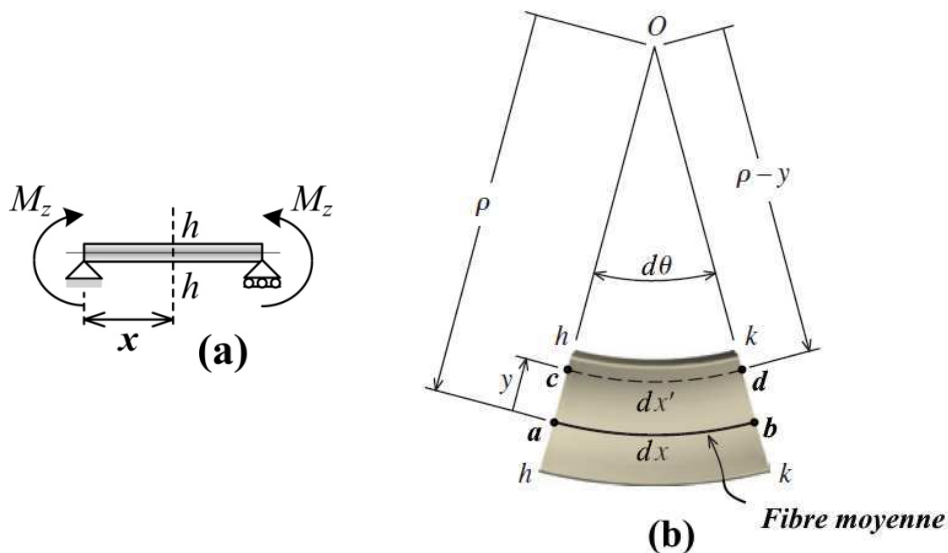


Figure II.1. Déformation en flexion et rayon de courbure

Selon la Figure II.1.b, il est possible de calculer l'allongement de la fibre [cd]. Comme l'angle  $d\theta$  est infiniment petit, la courbe [cd] peut se déterminer avec la formule  $(\rho - y)d\theta$ . La longueur initiale étant  $dx = \rho \cdot d\theta$ , soit l'allongement suivant:

$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (II.2.a)$$

Avec la loi de Hooke (Hyp. A), il vient la relation de la contrainte en fonction de la distance par rapport à la fibre moyenne et du rayon de courbure :

$$\sigma = -E \frac{y}{\rho} \quad (II.2.b)$$

Le terme  $\frac{1}{\rho}$  qui représente l'inverse du rayon de courbure, se nomme la courbure ( $\chi$ ).

En remplaçant la dernière équation (II.2.b) dans l'équation de principe d'équivalence qui donne le moment de flexion, alors:

$$M_f = - \int_{\Omega} \sigma \cdot y \cdot d\Omega = - \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y^2 \cdot d\Omega = - \frac{E \cdot I_z}{\rho} \quad (II.2.c)$$

Il apparait la relation entre le moment fléchissant et la courbure:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = - \frac{M_f}{EI_z} \quad (II.2.d)$$

Pour une courbe plane donnée sous la forme  $y = f(x)$ , le rayon de courbure en un point quelconque peut se calculer en fonction de ses dérivées première et seconde par :

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (II.3.a)$$

La dérivée première  $y'$  reste toujours très petite dans les poutres déformées, primitivement rectilignes, et le terme  $y'^2$  peut être négligé vis à vis de 1. Le rayon de courbure vaut donc approximativement  $\rho = 1/y''$ .

En partant de la convention de signe adoptée pour le moment fléchissant, les fibres situées du côté des  $y$  positifs sont tendues et la pente de la déformée diminue en fonction de l'abscisse  $x$ . La dérivée seconde est donc négative.

L'équation différentielle de la ligne élastique s'écrit :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_f}{EI_z} \quad (II.3.b)$$

L'équation différentielle de second ordre se résout par double intégration :

$$y' = \tan \theta = \int - \frac{M_f}{EI_z} \cdot dx + C_1 \quad (II.4)$$

$$y = \int y' \cdot dx = \int \left( \int - \frac{M_f}{EI_z} \cdot dx + C_1 \right) \cdot dx + C_2 \quad (II.5)$$

Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  sont à déterminer à partir des conditions d'appui ou de continuité de la poutre. Le moment fléchissant  $M_f$  et éventuellement le moment quadratique de surface  $I_z$  de la section doivent s'exprimer en fonction de l'abscisse  $x$ . Chaque nouvelle expression du tronçon crée une équation différentielle de second ordre contenant chaque fois deux constantes d'intégration.

## II.3 Calcul des flèches et Rotations

### II.3.1 POUTRES SOLLICITÉES PAR UNE FORCE CONCENTRÉE

Montrons le principe de calcul de la ligne déformée pour deux cas de charge concentrée sur une poutre en porte-à-faux et sur une poutre sur deux appuis, la section transversale de la poutre restant constante.

#### II.3.1.1 Poutre en porte-à-faux avec charge concentrée à l'extrémité libre

La force concentrée  $F$  est appliquée verticalement vers le bas, dans le sens de l'axe  $Cy$  positif, Fig. II.1 à gauche. Le moment fléchissant vaut :  $M_f = -xF$ , les fibres tendues sont dessus, L'équation différentielle s'écrit :  $y'' = xF/(EI_z)$ . Les conditions particulières sont : déformation angulaire et déformation linéaire nulles au droit de l'encastrement pour  $x = l$ . Intégrons cette équation différentielle :

$$y' = \frac{M_f}{EI_z} \int x \, dx = \frac{F x^2}{2EI_z} + C_1 \text{ avec } C_1 = -\frac{F l^2}{2EI_z}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{F l^2}{2EI_z} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 1 \right]$$

$$y = \frac{F}{2EI_z} \int (x^2 - l^2) \, dx = \frac{F}{2EI_z} \left( \frac{x^3}{3} - l^2 x \right) + C_2$$

$$\text{Avec : } C_2 = \frac{F.l^3}{3EI_z} \text{ ,}$$

$$\text{D'ou : } y = \frac{F.l^3}{3EI_z} \left[ 1 - 1.5x + 0.5 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (\text{II.6})$$

**Cas particulier:** Pour  $x = 0$ , la déformation linéaire est maximale et la déformation angulaire minimale, compte tenu du signe adopté. Ces deux grandeurs valent :

$$\tan \varphi_{x=0} \approx \varphi_{x=0} = -\frac{F l^2}{2 E I_z} \quad \text{Et} \quad y_{\max} = f = \frac{F l^3}{3 E I_z} \quad (\text{II.7})$$

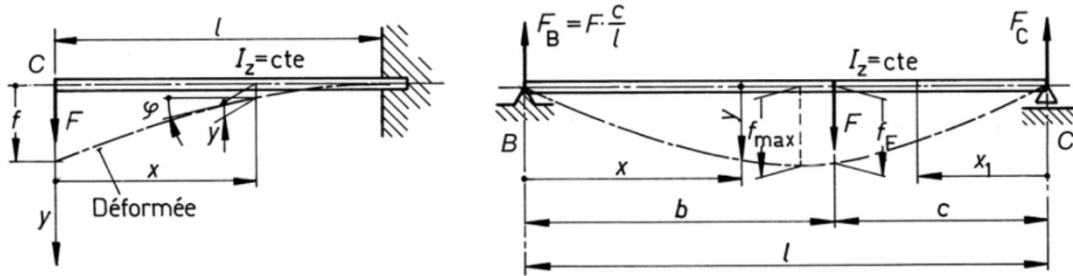


Fig. II.1 Poutres rectilignes sollicitées par une force concentrée

La déformation maximale ou flèche est désignée le plus souvent par  $f$ .

### II.3.1.2 Poutre sur deux appuis avec force concentrée en un point quelconque

La force concentrée  $F$  est appliqué à l'abscisse  $x = b$ , Fig. II.1.b à droite. Cette force défini deux tronçons : entre  $x = 0$  et  $x = b$ , entre  $x = b$  et  $x = l$ . Le moment fléchissant pour  $x$  compris entre  $0$  et  $b$  vaut :  $M_{f1} = x F_B = x F c/l$ . Le moment fléchissant sur le second tronçon s'écrit :  $M_{f2} = x F c/l - F(x-b)$ . Soient  $C_1$  et  $C_2$  les deux constantes d'intégration dans le premier tronçon:

$$y' = \frac{M_f}{EI_z} \int x dx = \frac{-F.c/l}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (\text{II.8})$$

Aucune valeur de l'angle n'est connue.

$$y = \frac{-F.c/l}{EI_z} \int \frac{x^2}{2} + \int C_1 dx = \frac{-F.c/l}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (\text{II.9})$$

Comme la déformation linéaire est nulle pour  $x = 0$ , alors la constante  $C_2 = 0$ .

Soit  $C_3$  et  $C_4$  les constantes dans le second tronçon, écrivons les intégrations dans le second tronçon:

$$y' = \frac{-M_f}{EI_z} \int x dx = \frac{-F.c/l}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2} + F \frac{(x-b)^2}{2EI_z} + C_3 \quad \text{et} \quad y = \frac{-F.c/l}{EI_z} \int \frac{x^2}{2} + \frac{F}{EI_z} \int \frac{(x-b)^2}{2} dx + \int C_3 dx + C_4$$

La constante d'intégration  $C_4$  est aussi nulle puisque au point C, l'articulation est à  $y = 0$ . Exprimons la continuité de la poutre sur la ligne d'action de la force  $F$  par :  $y_b' = -y_c'$  et  $y_b = y_c$ . En éliminant la constante d'intégration  $C_3$  après substitution, la constante  $C_1$  vaut :

$$C_1 = \frac{F b c / l}{6 E I_z} \cdot (l + c).$$

Introduisons cette valeur dans l'expression de l'angle et de la déformation linéaire dans le premier tronçon :

$$y'_b = \frac{F c / l}{2 E I_z} \left( \frac{l^2 - c^2}{3} - x^2 \right) \quad \text{et} \quad y_b = \frac{F c / l}{6 E I_z} \left[ (l^2 - c^2) \cdot x - x^3 \right].$$

**Valeurs particulières intéressantes** : la déformation est maximale lorsque  $y' = 0$ , soit à l'abscisse  $[(l^2 - c^2)/3]^{0,5}$ . La flèche ou la déformation maximale vaut :

$$f_{\max} = \frac{F c / l}{9 E I_z} \cdot (l^2 - c^2) \cdot \sqrt{(l^2 - c^2)/3}.$$

Les angles de pivotement de la poutre aux appuis se trouvent par :

$$\tan \varphi_B = \frac{F c / l}{6 E I_z} \cdot (l^2 - c^2) \quad \text{et} \quad \tan \varphi_C = -\frac{F b / l}{6 E I_z} \cdot (l^2 - b^2).$$

La déformation linéaire sur la ligne d'action de la force F se calcule par :

$$f_F = y_F = \frac{F}{3 E I_z l} b^2 c^2.$$

### II.3.1.3 Poutre sur deux appuis avec force concentrée à mi distance des appuis

Ce cas particulier présente une déformation symétrique par rapport à l'axe de la force concentrée F. Pour le premier tronçon, soit pour  $0 \leq x \leq l/2$ , les déformations se trouvent par les expressions :

$$y'_b = \frac{F l^2}{16 E I_z} \cdot \left( 1 - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad y_b = \frac{F l^3}{48 E I_z} \cdot \left( 3 \left( \frac{x}{l} \right) - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right).$$

**Valeurs particulières** la déformation est maximale sur la ligne d'action de la force F :

$$f = \frac{F l^3}{48 E I_z}.$$

La déformation angulaire aux appuis B et C de la poutre se calcule par :

$$\tan \varphi_B = -\tan \varphi_C = \frac{F l^2}{16 E I_z}.$$

### II.3.2 POUTRES SOLLICITÉES PAR UNE CHARGE RÉPARTIE CONSTANTE

La charge répartie est constante sur la longueur totale de la poutre,  $q = \text{constante}$ .  
 La charge totale sur la longueur  $l$  vaut :  $F = ql$ .

#### II.3.2.1 Poutre en porte-à-faux

En partant de l'extrémité libre de la poutre, Fig. II.2 à gauche, nous pouvons calculer successivement l'effort tranchant  $T(x)$  et le moment fléchissant  $M_f(x)$  en remarquant que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls pour  $x = 0$ :

Effort tranchant :  $T(x) = -q x$

Moment fléchissant :  $M_f(x) = -q \frac{x^2}{2}$

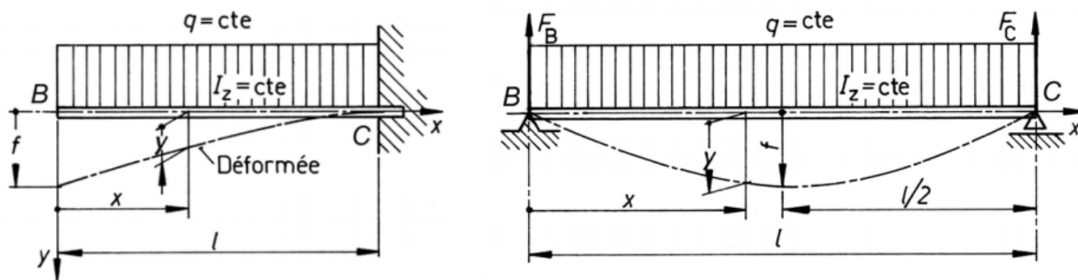


Fig. II.2 Poutres rectilignes avec charge répartie uniformément

Les déformations angulaire et linéaire se trouvent par une intégration en remarquant que pour  $x = l$ , ces deux déformations sont nulles :

$$y' = \frac{q}{EI_z} \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{q}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \quad \text{avec} \quad C_1 = -\frac{ql^3}{6EI_z}$$

d'où : 
$$y' = \frac{ql^3}{6EI_z} \cdot \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^3 - 1 \right]$$

$$y = \frac{q}{6EI_z} \int (x^3 - l^3) \cdot dx = \frac{q}{6EI_z} \left( \frac{x^4}{4} - l^3 x \right) + C_2 \quad \text{avec} \quad C_2 = \frac{ql^4}{8EI_z}$$

d'où : 
$$y = \frac{ql^4}{6EI_z} \cdot \left( 1 - \frac{4x}{3l} + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right)$$

**Valeurs particulières** : Pour  $x = 0$ , la déformation linéaire  $f$  est maximale et la déformation angulaire  $\varphi$  est minimale. Ces deux grandeurs valent :



$$\tan \varphi_B \approx \varphi_B \approx -\frac{q l^3}{6 E I_z} \text{ et } f = y_{\max} = \frac{q l^4}{8 E I_z}.$$

La charge totale sur la poutre de longueur  $l$  étant  $F = ql$ , les réactions d'appui sont:  $F_B = F_C = F/2 = ql/2$ . L'effort tranchant, en fonction de l'abscisse  $x$  varie linéairement et passe de  $F_B$  à  $-F_C$ . Son expression devient :  $T(x) = q(l/2 - x)$ .

Le moment fléchissant devient :

$$M_f(x) = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

Le moment fléchissant  $M_f$  est une fonction continue de  $x$  sur la distance  $l$  entre les points  $B$  et  $C$ . Il est possible de trouver l'expression de l'angle et de la déformée par double intégration :

$$y' = -\frac{q}{2 E I_z} \int (lx - x^2) dx = \frac{q}{2 E I_z} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right) + C_1$$

$$y = \frac{q}{2 E I_z} \int \left( \frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right) dx + \int C_1 dx = \frac{q}{2 E I_z} \left( \frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} \right) + C_1 x + C_2$$

Pour  $x = 0$  et  $x = l$ , la déformation linéaire est nulle. La constante  $C_2$  est donc nulle et la constante  $C_1$  vaut  $ql^2/(24 EI_z)$ . Les relations se simplifient et deviennent :

$$y' = \frac{ql^3}{24 EI_z} \left[ 1 - 6 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \text{ et } y = \frac{ql^4}{24 EI_z} \left[ \frac{x}{l} - 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

**Valeurs particulières :** La déformation est maximale à mi distance soit pour  $x = l/2$  et la déformation angulaire est maximale pour  $x = 0$ . Pour ces deux cas particuliers, les grandeurs des déformations sont :

$$\tan \varphi_{\max} = \tan \varphi_B = \frac{q l^3}{24 E I_z} \text{ et } y_{\max} = y_{x=l/2} = f = \frac{5 q l^4}{384 E I_z}.$$

### II.3.3 POUTRES SOLLICITÉES PAR UN COUPLE

Le couple de moment  $M$  est supposé appliqué à l'extrémité des deux poutres rectilignes.

### II.3.3.1 Poutre en porte-à-faux

Le moment fléchissant est constant sur toute la longueur de la poutre, Fig. II.3 à gauche. Il vaut  $M_f = -M$ , la première intégration permet de trouver la pente à la déformée :

$$y' = \frac{M}{E I_z} \int dx = \frac{M}{E I_z} \cdot x + C_1 \quad \text{avec} \quad C_1 = -\frac{M l}{E I_z} \text{ d'où } y' = \frac{M}{E I_z} \cdot (x - l).$$

$$y = \frac{M}{E I_z} \int (x - l) dx = \frac{M}{E I_z} \left( \frac{x^2}{2} - l x \right) + C_2 \quad \text{avec} \quad C_2 = \frac{M l^2}{2 E I_z} \text{ d'où } y = \frac{M l^2}{2 E I_z} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2.$$

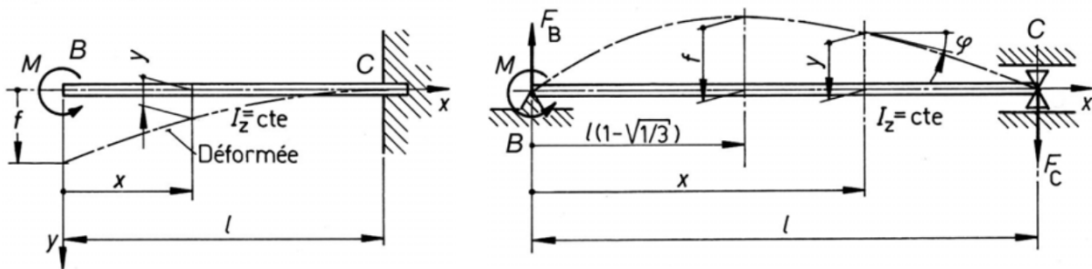


Fig. II.3 Poutres rectilignes sollicitées par un couple pur

**Valeurs particulières** : Pour  $x = 0$ , la déformation linéaire est maximale et la déformation angulaire minimale selon la convention des signes :

$$\tan \varphi_B \approx \varphi_B \approx -\frac{M l}{E I_z} \quad \text{et} \quad y_{\max} = f = \frac{M l^2}{2 E I_z}.$$

### II.3.3.2 Poutre sur deux appuis articulés

Le couple est appliqué au point B à l'appui gauche. Les réactions d'appui forment un couple de forces opposé au couple donné  $M$ . L'intensité des réactions d'appui est :  $F_B = -F_C = M/l$ . Le moment fléchissant est négatif. Il s'exprime par :  $M_f(x) = -M (1 - x/l) = M (x/l - 1)$ . Intégrons l'équation différentielle :

$$y' = \frac{M}{E I_z} \int \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{M}{E I_z} \left( x - \frac{x^2}{2l} \right) + C_1,$$

$$y = \frac{M}{E I_z} \int \left( x - \frac{x^2}{2l} \right) dx + \int C_1 dx = \frac{M}{E I_z} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} \right) + C_1 x + C_2.$$

Pour  $x = 0$  et pour  $x = l$ , la déformation linéaire est nulle :  $y = 0$ .

Il en résulte que  $C_2 = 0$  et  $C_1 = -M l / (3 E I_z)$ . Les expressions deviennent :

$$y' = \frac{Ml}{6EI_z} \left( -2 + 6\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right), \quad y = \frac{Ml^2}{6EI_z} \left( -2\frac{x}{l} + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right).$$

Valeurs particulières : Déformation angulaire aux appuis B et C :

$$\tan \varphi_B = -\frac{Ml}{3EI_z} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_C = \frac{Ml}{6EI_z}.$$

La déformation angulaire à l'appui où agit le couple, au point B, est deux fois plus grand qu'à l'autre appui C. La déformation linéaire est minimale pour  $y' = 0$ , c'est-à-dire à l'abscisse  $x = l \cdot [1 - (1/3)^{0.5}]$ . Cette déformation minimale se trouve par l'expression :

$$y_{\min} = |f|_{\max} = \frac{-Ml^2}{9\sqrt{3}EI_z}.$$

Poutre encastree avec un porte-à-faux		Poutre sur deux appuis articulés	
Schéma	Déformations	Schéma	Déformations
	$\varphi_{\min} = \frac{-Ml}{EI_z}$ $f = \frac{Ml^2}{2EI_z}$ $y = \frac{Ml^2}{2EI_z} \left[ 1 - \frac{x}{l} \right]^2$		$\varphi_B = \frac{Ml}{3EI_z}, \varphi_C = \frac{-Ml}{6EI_z}$ $f = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI_z}$ $y = \frac{Ml^2}{6EI_z} \left[ 2\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$
	$\varphi_{\min} = \frac{-Fl^2}{2EI_z}$ $f = \frac{Fl^3}{3EI_z}$ $y = \frac{Fl^3}{3EI_z} \left[ 1 - \frac{3}{2}\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$		$\varphi_B = \frac{Fc}{6EI_z l} (l^2 - c^2)$ $f_F = \frac{Fb^2c^2}{3EI_z l}$ $y = \frac{Fc}{6EI_z l} \left[ (l^2 - c^2) \cdot x - x^3 \right] \quad (0 \leq x \leq b)$
	$\varphi_{\min} = \frac{-ql^3}{6EI_z}$ $f = \frac{ql^4}{8EI_z}$ $y = \frac{ql^4}{8EI_z} \left[ 1 - \frac{4}{3}\frac{x}{l} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]$		$\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI_z}$ $f = \frac{5ql^4}{384EI_z}$ $y = \frac{ql^4}{24EI_z} \left[ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]$

Fig. II.4 Déformations angulaire et linéaire des poutres rectilignes simples

### II.4 Superposition des déformations

En tout point du centre de gravité des sections planes de la poutre, le moment fléchissant total est égal à la somme des moments fléchissant partiels dus aux forces concentrées, aux charges réparties et aux couples appliqués sur le tronçon isolé. Les contraintes de flexion, normales aux sections planes perpendiculaires à la ligne moyenne, sont également la somme des contraintes engendrées par chaque moment

composant. Enfin, dans le domaine des déformations linéaires, les déformations totales sont égales à la somme des déformations partielles. C'est le principe de la superposition des déformations.

### II.4.1 PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

La ligne courbe résultante de la poutre déformée est égale à la somme des formes courbées provoquées par les charges concentrées, charges réparties et couples. En supposant la pente à la courbe très faible,  $y' \ll 1$ , la somme des courbures peut être remplacées par la somme des dérivées secondes. En appliquant le principe de superposition, il s'ensuit que la déformation de flexion en un point quelconque peut s'écrire sous la forme générale :

$$y = \sum_{i=1}^l y_{Fi} + \sum_{j=1}^m y_{qj} + \sum_{k=1}^n y_{Mk}$$

En utilisant les diverses relations trouvées précédemment pour les déformations des poutres sollicitées par des charges simples, il est possible d'exprimer la déformation résultante par superposition des déformations partielles.

#### II.4.1.1 Application du principe de superposition

Soit à trouver la déformation au milieu d'une poutre rectiligne à section constante placée sur deux appuis articulés, sollicitée simultanément par une force concentrée  $F$  placée à la distance  $b > l/2$  de l'appui B, une charge répartie uniformément  $q$  sur toute la longueur  $l$ , un couple de moment  $M$  placé à l'appui C.

La déformation résultante est égale à la somme des déformations partielles.

1. Déformation due à la charge répartie  $q$  :  $f_q = 5ql^4 / (384EI_z)$ .
2. Déformation due à la charge concentrée  $F$  :  $f_F = \frac{Fl^3c}{48lEI_z} \cdot 4\left(1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2\right) - 1$ .
3. Déformation due au couple  $M$  en C :  $f_M = Ml^2 / (16EI_z)$ .
4. Déformation totale :  $f_{(1/2)} = \frac{5ql^4}{384EI_z} + \frac{Fl^3c}{48lEI_z} \cdot \left[1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2 - 4\right] + \frac{Ml^2}{16EI_z}$ .

## II.5 Méthode des paramètres initiaux (Maculay's Method)

Pour des études relativement complexes, poutre sur deux appuis avec plusieurs tronçons chargés différemment, il est assez laborieux de résoudre le problème avec la méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique :  $n$  tronçons représentent constantes avec les conditions aux appuis, il faut donc  $2n$  équations supplémentaires pour pouvoir résoudre en continuité le problème en passant d'un tronçon à l'autre. Il est donc fortement recommandé d'utiliser la méthode des paramètres initiaux qui permet de diminuer considérablement le nombre d'inconnues à 2 dans la plupart des cas.

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons.

### II.5.1 Déplacements des poutres en flexion

Les déplacements des sections d'une poutre sont caractérisés par :

- 1) Déplacements linéiques des centres de gravité des sections droites dans une direction normale à l'axe géométrique  $x$  de la poutre, appelés déplacements verticaux  $v(x)$ ; le déplacement vertical  $v(x)$  est positif, si la direction coïncide avec le sens positif de l'axe perpendiculaire à l'axe géométrique  $x$  de la poutre.
- 2) Déplacements angulaires des sections droites autour de l'axe neutre  $z$ , appelés rotations  $\varphi(x)$ . La rotation  $\varphi(x)$  est positive si la rotation de la section droite de la poutre autour de l'axe neutre  $z$  se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Puisque l'effort tranchant n'a un effet appréciable que sur la déformation pour les poutres courtes, les quantités  $v$  et  $\varphi$  : sont en général déterminées compte tenu seulement du moment fléchissant. Les valeurs de  $v$  et  $\varphi$  peuvent être calculées par la méthode des paramètres initiaux.

**II.5.2 Principes de la méthode des paramètres initiaux**

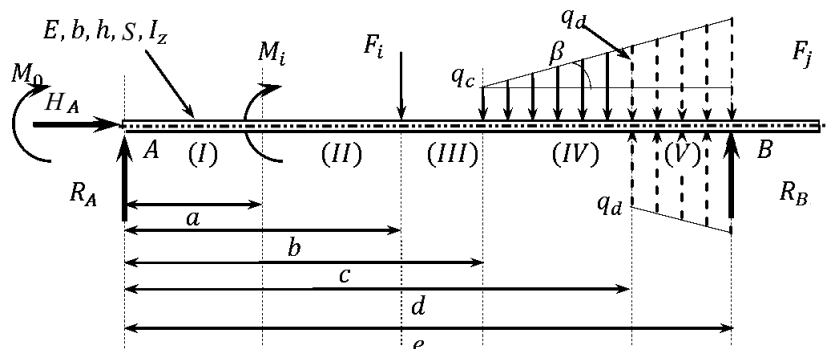
Choisir une origine des coordonnées pour la poutre : cette origine doit être l'appui le plus à gauche, ou le point la plus à gauche de la poutre en porte-à-faux, ici l'appui de point A, Fig. II.5.

Exprimer le moment fléchissant  $M_f(x)$  : On prend le dernier tronçon à droite de la poutre considérée et le moment fléchissant est obtenu en déterminant les moments créés par les forces situées à gauche du tronçon considéré à une distance  $x$  de l'origine des coordonnées.

De façon générale les charges qui peuvent être appliqué ce sont de trois type; moments concentrés, charges concentrées et charges réparties.

- Si un moment extérieur concentré est appliqué à la distance  $a$  de A, Fig. II.6.a, il est multiplié par un facteur  $(x-a)^0$ .
- Si une charge concentrée est appliquée à la distance  $b$  de A, Fig. II.6.b, elle est multipliée par un facteur  $(x-b)^1$ .
- Si une charge répartie est appliquée à la distance  $c$  de A, Fig. II.6.c, elle devrait être traversée par la section au vertical de la coupe considérée. Si la charge répartie est discontinue (tronçon IV de la Fig. II.5), elle est prolongée jusqu'au bout de la poutre et afin de compenser ce surplus, il faut introduire une charge de même type compensatrice de sens inverse, (tronçon V de la Fig. II.5), Les charges extrapolées et les charges compensatrices sont habituellement représentées en pointillés.

Pour tous les tronçons, l'intégration est faite sans ouvrir les parenthèses.



**Fig. II.5 Méthode des paramètres initiaux**

Le moment fléchissant s'écrit de la manière suivante pour le tronçon (V) c'est-à-dire  $d \leq x \leq e$  :

$$M_f(x) = M_0(x-0)^0 + M_i(x-a)^0 + R_A(x-0)^1 - F_i(x-b)^1 - q_c \frac{(x-c)^2}{2} - k \frac{(x-c)^3}{6} + q_d \frac{(x-d)^2}{2} + k \frac{(x-d)^3}{6}$$

Avec  $k$  est assimilée à la dérivée première de la charge répartie  $q_c(x)$  et vaut :

$$k = \frac{dq_c(x)}{dx} = \tan(\beta) = \frac{q_d - q_c}{d - c}$$

L'effort tranchant peut se calculer d'une manière similaire. Ensuite il suffit d'utiliser l'équation de la ligne élastique pour avoir la flèche.

L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes, le déplacement vertical  $v_0$  et la rotation  $\varphi_0$  qui s'avère être les paramètres initiaux. Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de  $v(x)$  et  $\varphi(x)$  sont données par les équations:  $C_1 = \varphi_0$  et  $C_2 = v_0$ .

Les valeurs de  $v(x)$  et  $\varphi(x)$  dans une section arbitraire de la poutre, située à une distance  $x$  de l'origine des coordonnées (si le coefficient de charge linéique  $q(x)$  est une fonction développable en puissances de  $x$ ), sont données par les équations suivantes, soit l'équation universelle de la ligne élastique :

$$EI_z \cdot v_y(x) = EI_z \cdot v_0 + EI_z \cdot \varphi_0 x - \sum_i M_i \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_i F_i \frac{(x-b_i)^3}{3!} - \sum_i q_{c,i} \frac{(x-c_i)^4}{4!} - \sum_i k_{c,i} \frac{(x-c_i)^5}{5!} + \sum_i q_{d,i} \frac{(x-d_i)^4}{4!} + \sum_i k_{d,i} \frac{(x-d_i)^5}{5!} \quad (II.10.a)$$

La rotation peut être exprimée de la même manière :

$$EI_z \cdot \varphi_y(x) = EI_z \cdot \varphi_0 - \sum_i M_i \frac{(x-a_i)^1}{1!} + \sum_i F_i \frac{(x-b_i)^2}{2!} - \sum_i q_{c,i} \frac{(x-c_i)^3}{3!} - \sum_i k_{c,i} \frac{(x-c_i)^4}{4!} + \sum_i q_{d,i} \frac{(x-d_i)^3}{3!} + \sum_i k_{d,i} \frac{(x-d_i)^4}{4!} \quad (II.10.b)$$

Avec  $k_{c,i}$  est assimilée au dérivée (première ou plus) de la charge répartie  $q_{c,i}$  et vaut :

$$k_{c,i} = \frac{dq_{c,i}(x)}{dx} = \tan(\beta_i) = \frac{q_{d,i} - q_{c,i}}{d_i - c_i},$$

et  $k_{d,i}$  est assimilée au dérivée (première ou plus) de la charge répartie  $q_{d,i}$  et vaut :

$$k_{d,i} = \frac{dq_{d,i}(x)}{dx} = \tan(\gamma_i) = \frac{q_{d,i} - q_{e,i}}{e_i - d_i},$$

$E$  : le module d'élasticité longitudinale du matériau de la poutre;

$I$  : moment d'inertie de sa section droite par rapport à l'axe neutre  $z$ ;

$M_i$  : les moments des couples extérieurs;

$a_i$  : les distances à l'origine des coordonnées des sections où sont appliqués les couples (Fig. II.6.a)

$F_i$  : les forces concentrées normales à la ligne moyenne y compris les réactions (Fig. II.6.b).

$b_i$  : les distances à l'origine des coordonnées des points d'application de ces forces sur l'axe de la poutre.

$q_{c,i}$ ,  $k_{c,i} = q'_{d,i}$  respectivement les valeurs de  $q(x)$ , de la première, seconde, etc., dérivée de  $q(x)$  par rapport à  $x$  aux point  $x=c_i$ , pour les sections droites où commence l'action des charges réparties (Fig. II.6.c), *seul la charge uniformément répartie est considérée.*

$q_{d,i}$ ,  $k_{d,i} = q'_{d,i}$  respectivement les valeurs de  $q(x)$ , de la première, seconde, etc., dérivée de  $q(x)$  par rapport à  $x$  aux point  $x=d_i$ , c'est-à-dire pour les sections droites où se termine l'action des charges réparties avant les sections considérées (Fig. II.6.c).

### Remarque:

Si l'origine des coordonnées est au centre de gravité de la section droite extrême de la poutre et l'axe  $x$  orienté vers la gauche, pour les directions indiquées des charges, les signes des termes traduisant l'effet des moments des couples extérieurs dans les formules (II.10.a-b) seront négatifs; le sens de rotation de la section de la poutre, donné par la formule (II.10.b), sera l'inverse de celui adopté plus tôt.

Il faut se rappeler seulement la formule (II.10.a); la formule (II.10.b) s'obtient à



partir de celle-ci par différentiation.

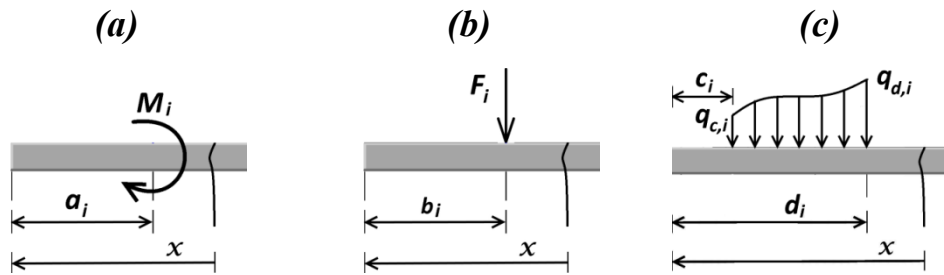


Fig. II.6 Types de charges (a) Moments, (b) Forces et (c) charges réparties.

Les deux paramètres initiaux, le déplacement vertical  $v_0$  et la rotation  $\varphi_0$  sont déterminés par les conditions suivantes de liaison de la poutre :

- pour un encastrement le déplacement vertical et la rotation de la section sont nuls;
- pour les articulations les déplacements verticaux sont nuls.

Dans le cas des poutres symétriques, on considère une de leurs moitiés et on utilise les conditions de symétrie: la rotation de la section, coïncidant avec l'axe de symétrie directe de la poutre, est nulle, ou le déplacement vertical de la section, coïncidant avec l'axe de symétrie indirecte de la poutre, est nul.

Il est rationnel d'écrire seulement une équation (II.16) et une équation (II.17) pour une section arbitraire de la dernière partie de la poutre en tenant compte des charges dans l'ordre de leurs distances à l'origine des coordonnées. Chacune de ces équations est valable pour calculer  $v(x)$  et  $\varphi(x)$  dans n'importe quelle partie de la poutre, si l'on marque d'un trait le nombre des termes correspondant aux charges sur les parties précédentes.

**Exemple :** Etant donné :  $q$ ,  $a$ ,  $P=4 q.a$ ,  $M = q.a^2$ ,  $EI$  (Fig.II.7); calculer  $v(x)$  et  $\varphi(x)$ ?

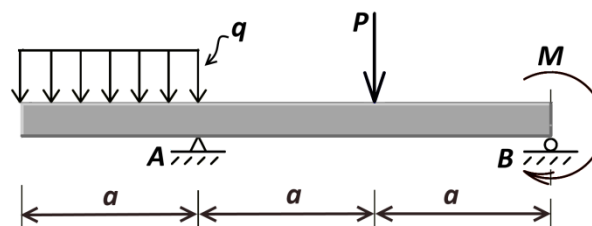


Figure II.7

**Solution :** De la condition de la statique :

$$\sum M_B = 0, \text{ on a : } -q.a.(5/2).a + R_A.2a - 4qa.a + qa^2 = 0 \rightarrow R_A = \frac{11}{4}qa$$

Expression du moment fléchissant :

$$M(x) = -q \frac{(x-0)^2}{2} + \left(\frac{11}{4}qa\right).(x-a)^1 + q \frac{(x-a)^2}{2} - (4qa)(x-2a)^1$$

Selon l'équation (II.16), pour la dernière partie droite de la poutre on peut écrire :

$$EI.v(x) = \underbrace{EI.v_0 + EI.\varphi_0 x - q \frac{x^4}{24}}_I + \underbrace{\frac{11}{4}qa \frac{(x-a)^3}{6} + q \frac{(x-a)^4}{24}}_{II} - \underbrace{4qa \frac{(x-2a)^3}{6}}_{III}$$

Pour le tronçon I :  $0 \leq x \leq a$

Pour le tronçon II :  $a \leq x \leq 2a$

Pour le tronçon III :  $2a \leq x \leq 3a$

D'après les conditions de liaison, on a, à l'appui gauche :

$$EI.v(a) = EI.v_0 + EI.\varphi_0.a - q \frac{a^4}{24} = 0$$

à l'appui droit :  $EI.v(3a) = EI.v_0 + EI.\varphi_0.3a + \frac{88}{24}qa^4 - \frac{2}{3}qa^4 - \frac{81}{24}qa^4 + \frac{16}{24}qa^4 = 0$

C'est-à-dire: 
$$\left. \begin{aligned} EI.v_0 + EI.\varphi_0.a - \frac{qa^4}{24} &= 0 \\ EI.v_0 + 3EI.\varphi_0.a + \frac{7}{24}qa^4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

D'où :  $2EI.\varphi_0.a + \frac{8}{24}qa^4 = 0$

et  $\varphi_0 = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI}$

Après substitution, on obtient :

$$EI.v_0 + -\frac{1}{6}a^4 - \frac{qa^4}{24} = 0$$

Par conséquent :  $v_0 = \frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI}$

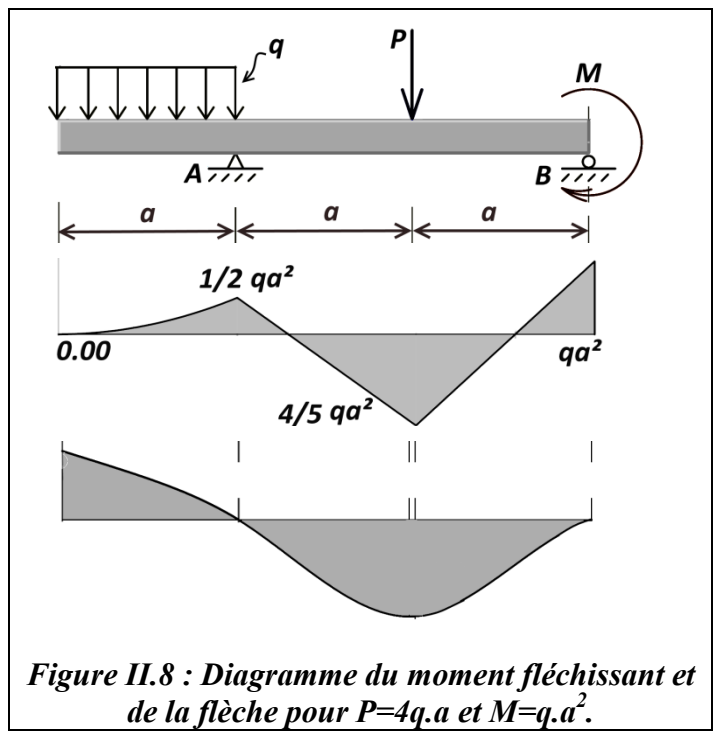


Figure II.8 : Diagramme du moment fléchissant et de la flèche pour  $P=4q.a$  et  $M=q.a^2$ .

Les équations, déterminant  $v(x)$  et  $\varphi(x)$  dans une section arbitraire de chaque partie, se réduisent à :

$$EI.v(x) = \frac{5}{24}qa^4 + \left. -\frac{1}{6}qa^3x - \frac{qx^4}{24} \right|_{0 \leq x \leq a} + \left. \frac{11}{24}qa(x-a)^3 + \frac{q}{24}(x-a)^4 \right|_{a \leq x \leq 2a} - \left. \frac{2}{3}qa(x-2a)^3 \right|_{2a \leq x \leq 3a}$$

$$EI.\varphi(x) = \left. -\frac{1}{6}qa^3 - \frac{qx^3}{6} \right|_{0 \leq x \leq a} + \left. \frac{11}{8}qa(x-a)^2 + \frac{q}{6}(x-a)^3 \right|_{a \leq x \leq 2a} - \left. 2qa(x-2a)^2 \right|_{2a \leq x \leq 3a}$$

Par exemple, pour la rotation de la section située sur l'appui gauche, on a :

$$\varphi(a) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{6}qa^3 - \frac{qa^3}{6} \right) = -\frac{qa^3}{3EI}$$

Pour la rotation de la section située sur l'appui droit, on a :

$$\varphi(3a) = \frac{qa^3}{EI} \left( -\frac{1}{6} - \frac{27}{6} + \frac{44}{8} + \frac{8}{6} - 2 \right) = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI}$$

Pour le déplacement de la poutre, au droit de la force concentrée, on a :

$$v(2a) = \frac{qa^4}{EI} \left( \frac{5}{24} - \frac{2}{6} - \frac{16}{24} + \frac{11}{24} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{7}{24} \frac{qa^4}{EI}$$

La figure II.8 montre la déformée de la poutre. Notons que Pour les sections de la poutre où le moment fléchissant est nul, la déformée doit avoir un point d'inflexion, là où le moment fléchissant est positif, la déformée est convexe vers le haut, là où le moment fléchissant est négatif, la déformée est convexe vers le bas.

## II.6 Théorème de Clapeyron

Avant de développer les méthodes énergétiques et les théories associées, expliquons d'abord le travail externe fait par une force ou un couple. On se limite dans ce qui suit au cas des poutres chargées dans leur plan moyen.

### II.6.1 Travail d'une force

Lorsqu'une force  $F$  subit un déplacement dans la même direction que la force et si le déplacement total est " $s$ ", le travail élémentaire effectué devient alors :

$$dW_E = F(s).ds \quad (\text{II.11.a})$$

Considérons maintenant l'action d'une force axiale  $F$  appliquée à l'extrémité d'une barre de longueur  $l$ , **Fig. II.11.a**. La grandeur de la force augmente de zéro à la valeur finale  $F$  c'est-à-dire «  $F(s):0 \rightarrow F$  » et l'élongation de la barre  $s$  augmente aussi d'un état initial caractérisé par 0 déformation à un état final caractérisé par une

valeur finale  $\Delta$ , c'est-à-dire «  $s : 0 \rightarrow \Delta$  ». Dans l'analyse statique, le matériau possède un comportement élastique linéaire (loi de Hook), alors la valeur de force  $F$  à un moment  $s$  s'écrit de la forme suivante, **Fig. II.11.b**:

$$\left. \begin{array}{l} F(s): 0 \rightarrow F \\ s : 0 \rightarrow \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow F(s) = \frac{F}{\Delta} s \quad (\text{II.11.b})$$

Après intégration de (II.1), Le travail effectué par cette force sera défini comme suit :

$$W_E = \int_0^{\Delta} F(s) \cdot ds; \quad F(s) = \frac{F}{\Delta} s$$

$$W_E = \int_0^{\Delta} \frac{F}{\Delta} s \cdot ds = \frac{F}{\Delta} \int_0^{\Delta} s \cdot ds = \frac{F}{\Delta} \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_0^{\Delta} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

$$W_E = \frac{1}{2} F \cdot \Delta \quad (\text{II.11.c})$$

S'il y a plusieurs forces externes, le travail effectué prend la forme suivant :

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_0^n F_i \cdot \Delta_i \quad (\text{II.11.d})$$

Là où  $F_i$  est la valeur finale de la force d'indice  $i$  et  $\Delta_i$  est le déplacement correspondant.

### II.6.2 Théorie de Potentiel Interne

Soit une structure constituée d'un ensemble de poutres. Pour amener cette structure, par application d'un système de forces extérieures, d'un **état initial** à un **état final** caractérisé par un tenseur de contraintes et un tenseur de déformations il faut dépenser un travail  $W$ .

Si le passage de l'état initial à l'état final se fait de façon réversible, le travail ne dépend que de l'état final. Ce travail est par définition le **potentiel interne** de la structure et c'est l'énergie potentielle emmagasinée par la structure pendant la déformation.

Dans la barre de la figure **II.11.a**, sous l'action de la force externe (appelée très

souvent charge), le point d'application de la force se déplace vers le bas (Fig. II.11.a) et celui-ci crée un travail externe durant cette translation, dans la même phase l'énergie de déformation (un potentiel interne) sera emmagasinée dans l'élément. Si la barre est relâchée, l'énergie de déformation se transforme en travail qui déplace l'extrémité de la barre vers le haut, quand la barre retrouve sa forme initiale après suppression de la charge l'énergie de déformation sera nulle.

Le travail produit donc est complètement transformé en potentiel interne et il est dissipé lors d'un cycle de déchargement progressif.

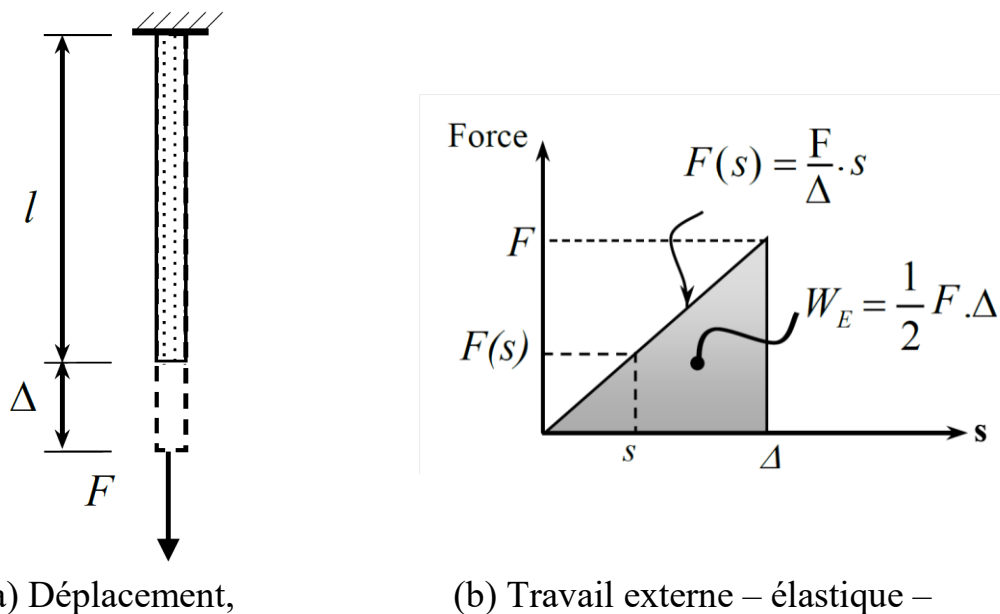


Figure II.11. Travail externe d'une force axiale.

### a) Potentiel interne de l'effort Normal :

Soit un tronçon de barre de longueur élémentaire  $ds$  et de section transversale  $A$ . Sous l'action d'un effort Normal  $N$ , l'élément de barre sera le support d'une déformation axiale. Le déplacement  $du$  est calculé par la combinaison de trois relations différentes :

- Relation entre l'allongement et la longueur du tronçon :  $\varepsilon = du/ds$
- Définition de la contrainte normale :  $\sigma = N/A$
- Enoncé de la loi de Hooke :  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Alors le déplacement  $du$  est donné par :

$$E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{du}{ds} = \frac{N}{A} \Rightarrow du = \frac{N}{E \cdot A} ds \quad (\text{II.11.d})$$

Si le matériau est élastique linéaire et isotrope alors l'énergie de déformation  $W_i^N$  qui entraîne l'effort normal sera exprimé par la formule suivante :

$$W_i^N = \frac{1}{2} N \cdot du \Rightarrow W_i^N = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \cdot ds \quad (\text{II.12})$$

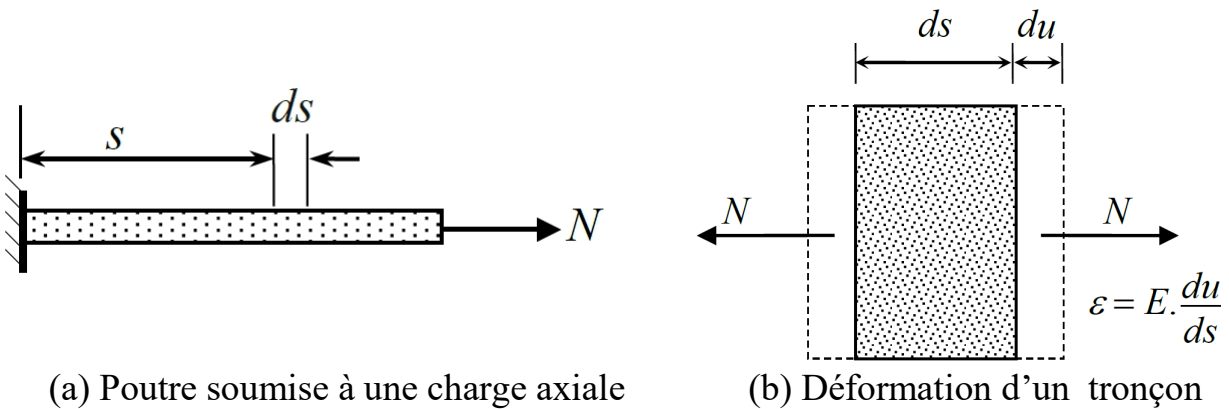


Figure II.12. Déformations dues à l'effort normal

**b) Potentiel interne de l'effort Tranchant :**

Un tronçon d'une barre de longueur élémentaire  $ds$  et de section  $A$  soumis à d'action d'un effort Tranchant  $T$  sera le support d'une déformation de cisaillement.

La contrainte cisaillement d'une section est donnée par la formule de Jouravski :

$$\tau = \frac{T \cdot S_x}{I_x \cdot b} \quad (\text{II.13})$$

Avec :

$b$  : La largeur de la fibre étudiée,

$S_x$  : Le moment statique de la surface de la fibre étudiée jusqu'à la fibre extrême,

$I_x$  : le moment d'inertie de la section étudiée.

Posant:

$$\tau = \kappa \frac{T}{A} = \frac{T}{\Omega} \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$\kappa$ : est liée à la forme de section A de la barre,  $\kappa = \frac{A}{I_x^2} \int_A \left(\frac{S_x}{b}\right)^2 . dA$

$\Omega$ : est une section réduite (aire de cisaillement), puisqu'elle a la même dimension qu'une aire.

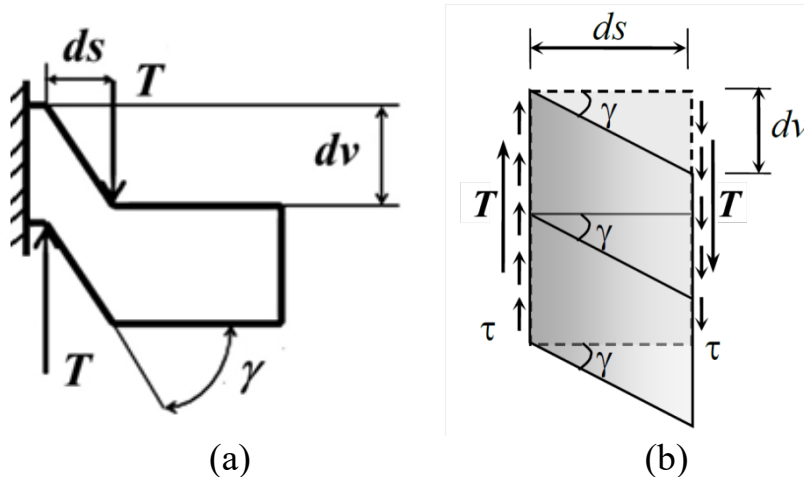


Figure II.13. Déformations dues à l'effort tranchant

Le déplacement  $dv$  est calculé par la combinaison de trois relations différentes :

- Relation entre l'angle de cisaillement  $\gamma$  et la longueur du tronçon:  $\gamma = dv/ds$
- Définition de la contrainte tangentielle (formule de Jouravski):  $\tau = \frac{T}{\Omega}$
- Enoncé de la loi de Hooke :  $\tau = G.\gamma$

Alors le déplacement  $dv$  est donné par :

$$G.\gamma = G.\frac{dv}{ds} = \frac{T}{\Omega} \Rightarrow dv = \frac{T}{G.\Omega} ds \tag{II.15}$$

Si le matériau est élastique linéaire et isotrope alors l'énergie de déformation  $W_I^T$  qui entraîne l'effort tranchant sera exprimé par la formule suivante :

$$W_I^T = \frac{1}{2} T.dv \Rightarrow W_I^T = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G.\Omega} ds \tag{II.16}$$

**c) Potentiel interne du moment fléchissant :**

Soit un tronçon de barre de longueur élémentaire  $ds$  et de section transversale  $A$ . Sous l'action de couples de moment directement opposés  $M_f$ , l'élément de barre sera

le support d'une déformation de flexion. Le déplacement  $d\theta$  est calculé par la combinaison de trois relations différentes :

- Relation entre l'allongement et la longueur du tronçon :  $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$
- Définition de la contrainte normale :  $\sigma = \frac{-M_f \cdot y}{I_x}$
- Enoncé de la loi de Hooke :  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{E} \cdot \frac{-M_f \cdot y}{I_x} = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{E \cdot I_x} \quad (\text{II.17})$$

$$\text{Et } dx = ds = \rho \cdot d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{M_f}{E \cdot I_f} ds \quad (\text{II.18})$$

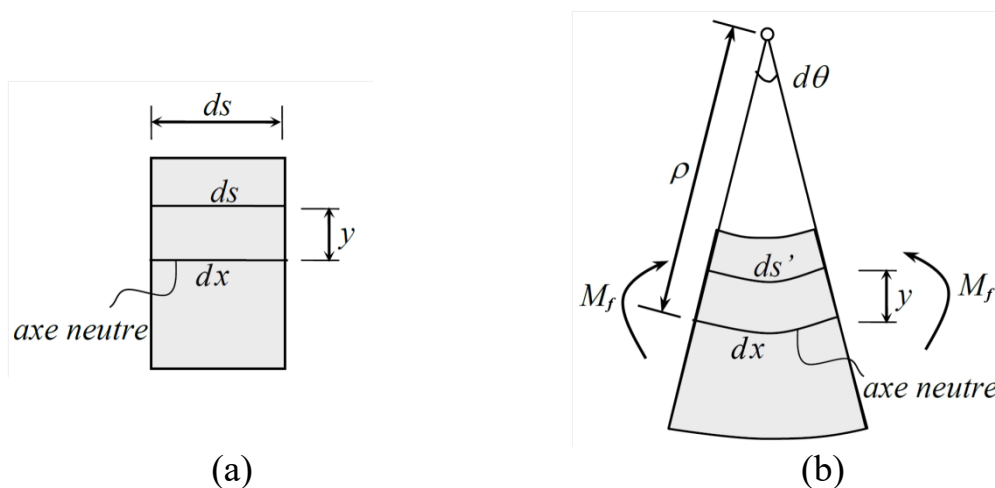


Figure II.14. Déformations dues au moment de flexion

Si le matériau est élastique linéaire et isotrope alors l'énergie de déformation  $W_I^f$  qui entraîne la flexion sera exprimé par la formule suivante :

$$W_I^f = \frac{1}{2} M_f \cdot d\theta \Rightarrow W_I^f = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{E \cdot I_x} \cdot ds \quad (\text{II.19})$$

**d) Potentiel interne du moment de torsion :**

Soit une poutre infiniment longue à axe rectiligne et de section circulaire constante, constituée d'un matériau isotrope et soumise à deux moments de torsion  $M_t$  égaux et opposés, supposés appliqués aux sections extrêmes (Fig. II.15).



On note  $\varphi(s)$  l'angle de rotation de la section d'abscisse  $s$  comptée par rapport à la section d'abscisse  $s=0$ , et  $\theta = \frac{d\varphi}{ds}$  l'angle de torsion par unité de longueur, qui est donc constant dans le cas étudié.

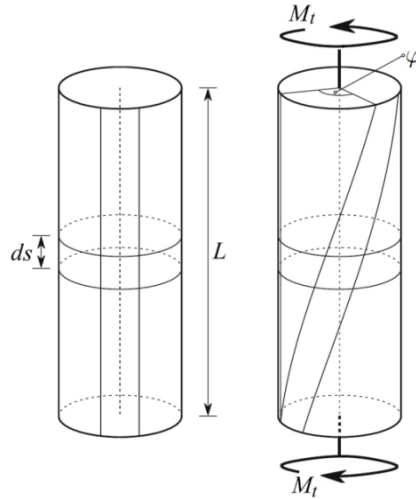


Figure II.15. Element de poutre en torsion uniforme

En étudiant le tronçon de poutre de longueur  $ds$  de la figure (Fig. II.15), qui trace une ligne « $ab$ », situé sur le rayon  $\rho$  et devenu « $ab'$ » après déformation, on montre que l'angle de glissement  $\gamma$  s'écrit, en faisant l'approximation des petits angles ( $\cos \gamma = 1$ ) :

$$\gamma = \frac{\|bb'\|}{\|ab\|} = \frac{\rho d\varphi}{dx} = \rho \theta \tag{II.20}$$

Pour l'élément d'aire  $dA$  hachuré sur la figure (Fig. I.5), l'effort de cisaillement repris vaut  $\tau.dA$ , et donc le moment à une distance  $\rho$  vaut :  $\tau.\rho.dA = G\theta\rho^2 dA$ . En écrivant l'équilibre en rotation de tout le tronçon, on a :

$$M_t = \int_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G I_\rho \theta \tag{II.21}$$

D'où  $I_\rho$  est l'inertie polaire de la section.

L'angle de la torsion par unité de longueur  $\theta$  est calculé par la combinaison de trois relations différentes :

- Relation entre l'allongement et la longueur du tronçon :  $\gamma = \frac{\rho d\varphi}{ds} = \rho \theta$

- Définition de la contrainte de torsion :  $\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_p}$
- Enoncé de la loi de Hooke :  $\tau = G \cdot \gamma$

$$\frac{\tau}{G} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M_t \cdot \rho}{I_p} = \rho \theta \Rightarrow \theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \tag{II.22}$$

On peut remarquer que l'équation (II.22) est analogue aux relations précédentes entre la flèche et le moment de flexion. On peut d'ailleurs montrer qu'il existe une parfaite analogie entre le phénomène de torsion et celui de flexion.

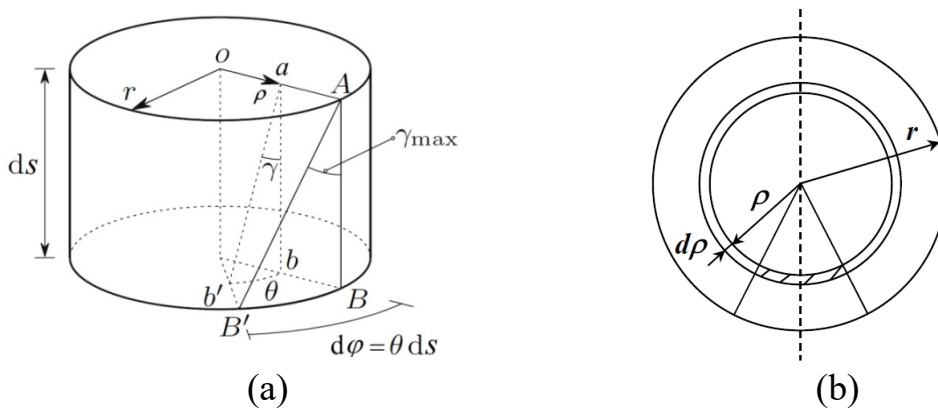


Figure II.16. Déformations dues au moment de torsion uniforme

Si le matériau est élastique linéaire et isotrope alors l'énergie de déformation  $W_t'$  qui entraîne la torsion sera exprimé par la formule suivante :

$$\theta = \frac{d\phi}{ds} = \frac{M_t}{G I_p} \text{ et } d\phi = \frac{1}{G} \frac{M_t}{I_p} ds \tag{II.23}$$

La distribution des contraintes de cisaillement, c'est-à-dire leur direction et leur intensité en un point donné de la section, est donc dans le cas général (prismatique) assez différent du cas des sections circulaires. Cependant, même dans des cas où la section n'est pas circulaire, la relation entre la dérivée de l'angle de torsion et le moment appliqué reste valable puisqu'on reste en élasticité.

$$W_t' = \frac{1}{2} M_t \cdot d\phi \Rightarrow W_t' = \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{G \cdot I_p} \cdot ds \tag{II.24}$$

### II.6.3 Énoncé du théorème de Clapeyron:

Soit une structure élastique en équilibre, soumise à un système de forces (au sens général, soit force et couple), dont l'application est lente et progressive, et tel que les liaisons soient rigides et sans frottement. On peut définir les quantités suivantes:

- Travail des forces extérieures au cours de leur application:

$$W_E = \frac{1}{2} \left[ \sum F_i \Delta_i + \sum M_j \varphi_j \right] \quad (\text{II.25.a})$$

$\Delta_i$ : est la projection, sur la direction de la force  $F_i$ , du déplacement du point d'application de cette force.

$\varphi_j$ : est la rotation, projetée sur l'axe du couple  $M_j$ , de la section de ce couple;

- Potentiel interne (travail des forces intérieures), qui peut s'exprimer par:

$$W_I = \frac{1}{2} \int_0^s \left( \frac{N^2}{E.A} + \frac{M_f^2}{E.I_x} + \frac{T^2}{G.\Omega} + \frac{M_t^2}{G.I_p} \right) . ds \quad (\text{II.25.b})$$

Puisque les structures élastiques sont des systèmes conservatifs, c'est-à-dire le travail mécanique des forces extérieures se transforme complètement en énergie potentielle de déformation (potentiel interne) et d'après le théorème de Clapeyron, le travail mécanique total est égal à zéro (nul), soit :

$$W_T = W_I + W_E = 0 \quad (\text{II.26})$$

qui est une application du principe de la conservation de l'énergie entre  $W_E$  et  $W_I$  ; cette égalité ne dépend ni de l'ordre dans lequel les forces sont appliquées, ni des variations de ces forces entre l'état initial et l'état final de la structure.

D'après la dernière équation il découle l'égalité suivante:

$$W_E = - W_I$$

L'énergie de déformation (potentiel interne) est toujours un minimum. Autrement dit, la structure répond toujours aux actions extérieures avec un minimum d'effort.

## II.7 Théorème de Castigliano

Le théorème de Castigliano établit une relation entre les déplacements et le potentiel interne. Pour l'établir, on part de l'égalité de Clapeyron et on calcule plus explicitement le travail des forces extérieures.

Dans un système à appuis indéformables, la dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une force (ou un couple) extérieure est égale à la projection sur la direction de cette force (ou sur l'axe du couple) du déplacement élastique du point d'application de la force (ou de point de rotation élastique où s'applique le couple) :

$$\frac{\partial W_I}{\partial F_i} = \Delta_i \quad (\text{II.27.a})$$

C'est-à-dire: la dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une action quelconque est égale au déplacement du point d'application de cette action mesurée algébriquement sur la ligne d'action de celui-ci.

### Conséquences :

Si l'on veut calculer le déplacement  $\Delta$  d'une section S d'une poutre dans une direction donnée, on applique une force auxiliaire fictive  $F^*$  dans la section S suivant cette direction, et  $\Delta$  sera égal à la valeur de :

$$\frac{\partial W_I}{\partial F^*} \text{ pour } F^*=0. \quad (\text{II.27.b})$$

L'utilisation de cette méthode dite de la charge fictive est également nécessaire lorsque le système est soumis à une charge répartie. Le théorème serait encore applicable aux systèmes à appuis élastiques à condition d'introduire le travail de déformation des appuis dans l'expression de  $W_I$  (voir application suivante).

### II.7.1 Applications de Théorème de Castigliano pour calcul des déplacements :

#### II.7.1.1 Déplacement au droit d'une force (ou couple) extérieure :

- **Étapes de calcul :**

1. Rechercher les variations des efforts intérieurs dans le système en exploitant si

besoin le principe de superposition (on pourra négliger sans trop d'erreur l'influence des efforts tranchants devant ceux des moments de flexion);

2. Calculer l'expression du potentiel interne  $W_I$  du système étudié en fonction des forces  $F_i$  (ou couples) appliquées;
3. Le déplacement  $\Delta_i$  au droit et dans le sens de la force  $F_i$  est le résultat de la

dérivée:  $\frac{\partial W_I}{\partial F_i} = \Delta_i$

### Remarque :

En présence d'appuis élastiques, compléter l'expression de  $W_I$  par le travail de déformation des appuis.

### Exemple II.2.1: Poutre console avec force ponctuelle à l'extrémité

Soit le cas d'une poutre console avec une force ponctuelle à l'extrémité, donnée dans la figure II.17;

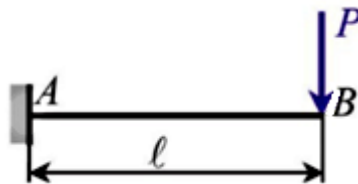


Figure II.17 Poutre console avec force ponctuelle à l'extrémité.

*Solution* : Moment de flexion d'une console avec force concentrée à l'extrémité :

$$M = -P(1 - x)$$

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W_I = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

Déplacement en B:

$$\Delta_B = \frac{\partial W_I}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

### II.7.1.2 Déplacement dans une section S quelconque

- **Étapes de calcul :**

- Définir au droit de la section S étudiée une force auxiliaire fictive  $F^*$  en complément du système de forces  $F_i$  extérieures ;
- Rechercher les variations des efforts intérieurs ;
- Calculer l'expression du potentiel interne  $W_I$  du système étudié en fonction des forces  $F^*$  et  $F_i$  (ou couples) appliquées (même remarque que paragraphe précédent);
- Le déplacement  $\Delta$  au droit de la section S est le résultat de la dérivée :

$$\left( \frac{\partial W_I}{\partial F^*} \right)_{F^*=0} = \Delta \quad (\text{II.27.c})$$

#### Exemple II.2.2 : Déplacement dans une section S quelconque.

Même cas que (Fig. II.17), calcul du déplacement dans une section S située à une distance  $a$  de l'encastrement.

Une force  $F^*$  est introduite au droit de la section S (Figure II.18).

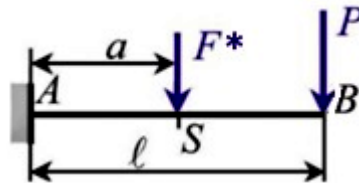


Figure II.18. Déplacement dans une section S quelconque.

*Solution :* Moment de flexion obtenu par le principe de superposition :

$$0 < x < a \quad M = -P(1-x) - F^* \cdot (a-x)$$

$$a < x < l \quad M = -P(1-x)$$

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W_I = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(P(1-x) + F^* \cdot (a-x))^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_a^l \frac{(P(1-x))^2}{EI} dx$$

$$W_I = \frac{P^2 l^3}{6EI} + \frac{(F^*)^2 \cdot a^3}{6EI} + \frac{PF^* a^3}{6EI} (3l-a)$$

Déplacement en  $S$ :

$$\Delta = \left( \frac{\partial W_I}{\partial F^*} \right)_{F^*=0} = \frac{P \cdot a^2}{6EI} (3l - a)$$

Résultats conforme au formulaire de l'Annexe A (Poutre console N°02).

### Exemple II.2.3 Cas d'une charge répartie

En présence d'une seule charge répartie  $p$ , l'utilisation d'une charge auxiliaire fictive  $F^*$  est nécessaire. Considérons l'exemple de la figure II.19 et recherchons le déplacement en  $B$  au droit d'une charge fictive  $F^*$ .

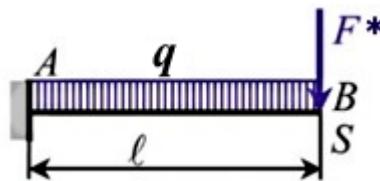


Figure II.19 : Poutre console avec charge uniformément répartie.

*Solution* : Moment de flexion obtenu par le principe de superposition:

$$M = -F^* \cdot (l - x) - \frac{q \cdot (l - x)^2}{2}$$

Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W_I = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{(F^*)^2 l^3}{6EI} + \frac{F^* q l^4}{8EI} + \frac{q^2 l^5}{40EI}$$

Déplacement en  $B$  :

$$\Delta = \left( \frac{\partial W_I}{\partial F^*} \right)_{F^*=0} = \frac{q l^4}{8EI}$$

## II.8 Théorème de Menabrea ou de l'énergie minimale

Ce théorème se déduit de théorème de Castigliano, dans un système hyperstatique sur appuis invariables, les réactions hyperstatiques dues aux réactions  $R_i$  doivent donc satisfaire aux équations liaisons surabondantes ne travaillent pas pendant la déformation du système:

$$\frac{\partial W_I}{\partial R_i} = 0 \quad (\text{II.28})$$

Les dérivées partielles du potentiel interne, par rapport aux réactions hyperstatiques, sont nulles.

### II.8.1 Applications de Théorème de Ménabréa pour calcul de réactions hyperstatiques de liaison :

#### II.8.1.1 Poutres hyperstatiques de degré 1:

- Étapes de calcul :

- Déterminer le degré d'hyperstatisme et définir les réactions hyperstatiques  $R_i$  associées aux liaisons surabondantes ;

- Rechercher les variations des efforts intérieurs et calculer l'expression du potentiel interne  $W_I$  du système étudié en fonction des réactions hyperstatiques et des autres charges extérieures ;

- Les réactions hyperstatiques ne travaillant pas pendant la déformation du système, on peut écrire :  $\frac{\partial W_I}{\partial R_i} = 0$

**Exemple II.2.4 :** cas d'une poutre hyperstatique de degré 1.

Soit une poutre encastree avec une charge uniforme, un cas hyperstatique de degré 1 et substituons à l'appui simple en  $A$  la réaction hyperstatique  $R_A$  correspondante (Figure II.20).

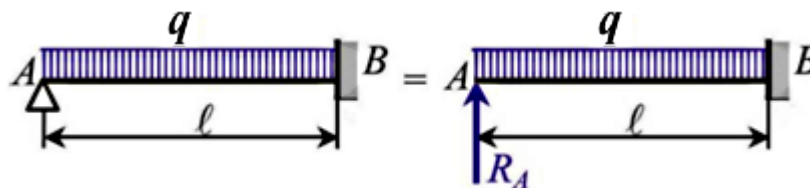


Figure II.20. Une poutre hyperstatique de degré 1.

*Solution :* Moment de flexion obtenu par le principe de superposition:

$$M = R_A x - \frac{q}{2} x^2$$



Potentiel intérieur (effort tranchant négligé) :

$$W_I = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left( \frac{R_A^2 \cdot l^3}{3} + \frac{q^2 l^5}{20} + \frac{R_A \cdot q l^4}{4} \right)$$

Application du théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial W_I}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI} \left( \frac{2R_A \cdot l^3}{3} - \frac{q l^4}{4} \right) = 0 \rightarrow R_A = \frac{3ql}{8}$$

**Exemple II.2.5:** Cas d'un appui élastique

Reprenons le cas précédent de la figure II.20 en remplaçant l'appui invariable en *A* par un appui élastique de raideur *k*. La réaction *R<sub>A</sub>* est repoussée au-delà de la partie élastique de l'appui (Fig. II.21).

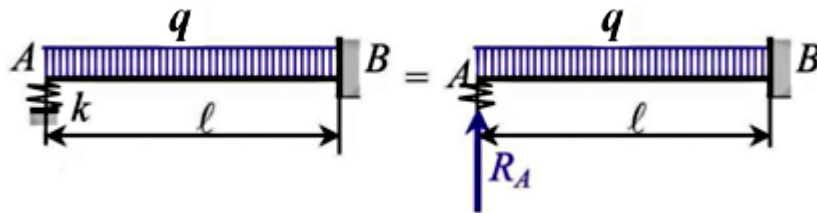


Figure II.21 Poutre avec appui élastique

*Solution* : Le potentiel intérieur se voit augmenté du travail de déformation de l'appui élastique :

$$W_I = \frac{1}{2EI} \left( \frac{R_A^2 \cdot l^3}{3} + \frac{q^2 l^5}{20} + \frac{R_A \cdot q l^4}{4} \right) + \frac{R_A^2}{2k}$$

Le théorème de Ménabréa permet alors d'écrire :

$$\frac{\partial W_I}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI} \left( \frac{2R_A \cdot l^3}{3} - \frac{q l^4}{4} \right) + \frac{R_A}{k} = 0 \rightarrow R_A = \frac{3 q \cdot k \cdot l^4}{8(k \cdot l^3 + 3 EI)}$$

**II.9 Formule de Maxwell-Mohr**

**II.9.1 Cas des systèmes à plan moyen chargés dans leur plan**

Soit *M<sub>F</sub>*, *N<sub>F</sub>* et *V<sub>F</sub>* les éléments de réduction produits dans la section *S* par un système de forces extérieures *F*, et *M<sub>w</sub>*, *N<sub>u</sub>* et *V<sub>u</sub>* les éléments de réduction produits dans cette même section par une force (ou un couple) unitaire appliquée dans la section *i* suivant la direction *i*.

La **formule de Mohr** donne le déplacement (ou la rotation) de la section  $i$ , suivant la direction  $i$ , sous l'effet du système de forces  $F$ :

$$\Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_F M_u}{EI} ds + \int_0^l \frac{N_F N_u}{ES} ds + \int_0^l \frac{V_F V_u}{E\Omega} ds \quad (\text{II.29})$$

Si le système est hyperstatique, on démontre que les éléments  $M_u$ ,  $N_u$  et  $V_u$  peuvent être calculés dans le système rendu isostatique par la suppression de certaines liaisons, judicieusement choisies.

### II.9.2 Principe de calcul :

Pour calculer le déplacement (ou la rotation) en une section ( $S$ ) d'une structure isostatique sollicitée en flexion par un système de chargement extérieur, on procède de la manière suivante :

- on calcule les efforts intérieurs associés au chargement extérieur (*i.e.*  $M_F$ ,  $N_F$ ,  $V_F$ ).
- on applique une charge unitaire  $P$  à la section  $S$  dans le sens du déplacement recherché et on détermine les efforts intérieurs associés ( $M_u$ ,  $N_u$ ,  $V_u$ ).

### II.9.3 Cas des pièces droites à âme pleine

Les deux derniers termes peuvent être négligés, et l'on a :

$$\Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_F M_u}{EI} ds \quad (\text{II.30.a})$$

Si de plus la section est constante :

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_F M_u ds \quad (\text{II.30.b})$$

### II.9.4 Calcul des intégrales de Mohr (par une méthode simplifiée)

Il s'agit d'une méthode simple lorsqu'un des diagrammes est linéaire (avec  $EI$  constant), (voir la figure II.22), on obtient alors :

$$\frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M_i(x) M_j(x) dx = A.B \quad (\text{II.31.a})$$

avec  $A$  la valeur dans le diagramme  $M_j(x)$  (linéaire) au niveau du centre de gravité  $X_{Gi}$  du diagramme  $M_i(x)$  et  $B$  l'aire sous la courbe  $M_i(x)$ .

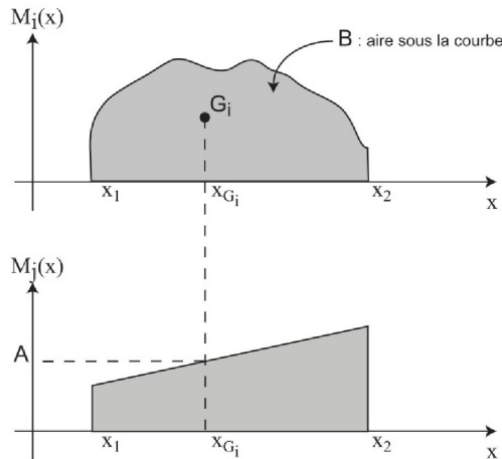


Figure II.22 : Multiplication de deux surfaces (Intégrale de Mohr)

### II.10 Principe des travaux virtuels

Le **principe des travaux virtuels** pour un système matériel indéformable exprime que si ce système est en équilibre, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, la somme des travaux de toutes les forces agissant sur le système est nulle.

Pour un système élastique, le travail total comprend celui des forces extérieures et celui des forces intérieures au cours de la déformation élastique. Ce dernier est donc égal à la variation de potentiel interne changé de signe.

On en déduit que, si l'on considère seulement le déplacement  $\Delta_n$  correspondant à la force extérieure  $F_n$ , on a :

$$\frac{\partial W}{\partial \Delta_{iF}} = F_n \tag{II.31.b}$$

La dérivée partielle du potentiel interne par rapport à un déplacement donne la force correspondante. On peut observer, dans la formule de Mohr (II.34) que les expressions:

$$\frac{M_F}{EI} . ds, \frac{N_F}{ES} . ds \text{ et } \frac{V_F}{E\Omega} . ds$$

sont les déformations produites sur la longueur  $ds$  par le système de forces  $F$ .

On en déduit que dans tout système en équilibre, le déplacement  $\Delta_F$  d'une section  $i$  suivant la direction  $i$ , sous l'effet du système de forces  $F$ , est égal au travail virtuel que produit, au cours de l'application de ces forces, la force unitaire agissant en  $i$ ,

suivant la direction  $i$ .

### II.11 Théorème de la force unité

Le théorème de la force unité s'énonce comme suit :

Le déplacement d'un point d'une structure dans une direction donnée, s'obtient en calculant sous l'action d'une force virtuelle unité associée, le travail virtuel complémentaire interne de la structure, moins celui des réactions d'appui.

Considérons une structure déformable soumise à des actions diverses (forces extérieures, tassements d'appui, actions thermiques, retrait ...). Dans une structure donnée (Fig. II.23.a), on désire savoir que vaut le déplacement  $u_A$  du point A de la structure, dans la direction donnée  $\Delta_A$  ?

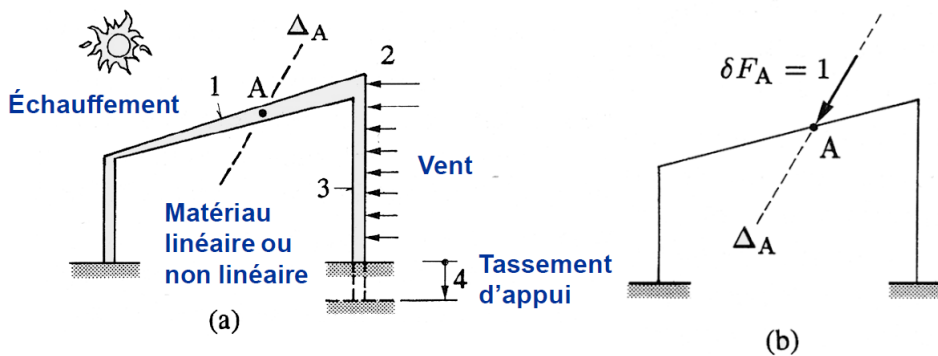


Figure II.23 Théorème de la force unité : (a) actions réelles produisant l'état cimatique (1: gradient thermique, 2: vent, 3: matériaux non linéaire, 4: tassement d'appui), (b) action virtuelle conduisant à l'état statique virtuel.

Pour répondre à cette question, appliquons le principe des forces virtuelles (II.31) en choisissant comme état statique virtuel celui résultant dans la structure d'une seule force concentrée unité  $\delta F_A = 1$  appliquée au point A dans la direction  $\Delta_A$ . En désignons par l'indice 1 les grandeurs relatives à cet état particulier, on obtient, dans le cas plan.

Application d'une force concentrée **unique et unitaire**  $\delta F_A = 1$ , (Fig. II.23.b):

$$1.u_A = \int_L (N_1 \cdot \varepsilon + V_1 \cdot \gamma + M_1 \cdot \varphi) \cdot dx - \sum R_1 \cdot u_R \tag{II.32}$$

Avec :

$N_1, V_1, M_1$  et  $R_1$  Représentent un champ d'efforts intérieurs et de réactions en équilibre avec l'unique force extérieure virtuelle 1.

$\varepsilon$ ,  $\gamma$  et  $\varphi$  Caractérisent le champ de déformation réel de la structure, produit par les diverses actions;

$u_R$  sont les tassements d'appui (ces quantités étant généralement connues.

$1.u_A$  est bien un travail extérieur de la force unité et  $\sum R_1.u_R$  est un travail extériorisé.

L'équation (II.32) traduit le théorème de la force unité.

### II.11.1 Cas des matériaux élastique linéaires :

Si le matériau accepte la loi de Hooke, il existe une relation entre l'effort intérieur et sa déformation associé. Ces relations sont :

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad \gamma = \frac{V}{GA_C} \quad \varphi = \frac{M}{EI} \quad (II.33)$$

On peut alors, introduire ces relations dans les équations précédentes pour exprimer ces équations en fonction des seules grandeurs statiques ou cinématiques.

### II.11.2 Calcul des déplacements :

Quelque soit le déplacement, il s'obtient par (II.32), voyons les cas les plus courants, structures planes en barres et poutres à matériaux élastique linéaire.

– L'état de déformation réel est produit par les efforts intérieurs :

Dans ce cas, on peut remplacer les déformations  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  et  $\varphi$  par les relations (II.33) dans (II.32). On obtient la forme statique:

$$1.u_A = \int_L N_1 \cdot \frac{N \cdot dx}{EA} + \int_L V_1 \cdot \frac{V \cdot dx}{GA_C} + \int_L M_1 \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (II.34)$$

Cette relation est plus facile à utiliser, car les diagrammes des efforts intérieurs réels  $N$ ,  $V$  et  $M$  sont généralement connus.

– Pour les treillis toutes les grandeurs sont constantes, alors la relation (II.54) s'écrit :

$$1.u_A = \sum_b \frac{N \cdot N_1}{EA} L \quad (II.35)$$

– Pour les poutres essentiellement fléchies, on néglige toujours les déplacements dus à l'effort tranchant et à l'effort normal, alors la relation (II.34) s'écrit :

$$1.u_A = \int_L \frac{M_1 M}{EI} dx \quad (II.36)$$

– Calcul des intégrales : pour les formes courantes des diagrammes des moments on utilise le tableau des intégrales dit de Mohr.

– Calcul des structures hyperstatiques : vue la puissance de la méthode de la force unité, elle est utilisée essentiellement pour le calcul des structures statiquement indéterminées et leurs déplacements en équilibre.

## II.12 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Ce théorème se déduit de l'égalité de Clapeyron en considérant deux systèmes de chargement appliqués à la même structure. On applique à un corps élastique un système de  $n$  forces (ou couples)  $F_i$ , puis un second système de  $p$  forces  $G_j$ . On considère les déplacements (ou rotations) élastiques entraînés par l'action du premier système agissant seul, puis ceux provoqués par le seul second système.

La somme des travaux des forces et couples du premier système  $F_i$  pour les déplacements  $\Delta_{ij}$  dus aux forces et couples du second est égale à la somme des travaux des forces et couples du second système  $G_j$  pour les déplacements  $\Delta_{ji}$  dus aux forces et couples du premier.

$$\sum_{i=1}^n F_i \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^p G_j \Delta_{ji} \quad (II.37)$$

Cette égalité (3.5) est donnée en produit scalaire. On ne pourra donc connaître que la composante du déplacement suivant la direction d'application de la force.

### Conséquences :

Le déplacement (ou la rotation) produit en  $i$  par une force (ou couple) unitaire agissant en  $j$  à la même mesure que le déplacement (ou la rotation) produit en  $j$  par la force (ou le couple) unitaire agissant en  $i$ .

**II.12.1 Calcul de déplacements par le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti**

L'application du théorème de Maxwell-Betti facilite le calcul de déplacements en exploitant la réciprocité entre deux cas de charges.

**Exemple II.4 : Rotation au droit d'un couple C**

Soit une poutre bi-appuyée soumise à l'action d'un couple C (partie droite de la Figure II.19).

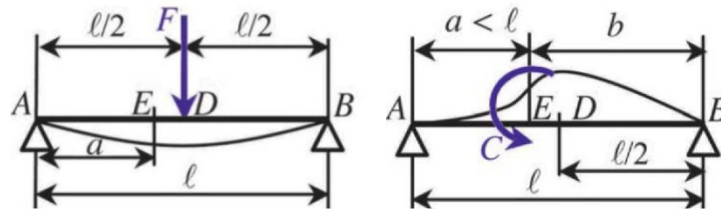


Figure II.27 Rotation au droit d'un couple C

*Solution* : Par application du théorème de réciprocité, le travail de la force  $F$  en  $D$  dans le déplacement dû à l'application du couple  $C$  est égal au travail du couple  $C$  en  $E$  dans la rotation de section due à l'application de la force  $F$  soit :

$$F \cdot \Delta_{D,C} = C \cdot \varphi_{E,F} \tag{II.38}$$

Considérons comme connus les résultats de Formulaire de l'annexe 1, du cas 1 (de poutre bi-appuyées cas N° 1: la force  $F$  est au milieu de la poutre) ; la rotation de section pour  $x = a$  est donnée par :

$$\varphi_{E,F} = \frac{F}{48EI} (3l^2 - 12x^2) = -\frac{F}{16EI} (l^2 - 4a^2)$$

En conséquence :

$$\Delta_{D,C} = \varphi_{E,F} \cdot \frac{C}{F} = -\frac{C}{16EI} (l^2 - 4a^2) , \text{ déplacement algébrique compté dans le sens de } F.$$

### III. Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des forces :

#### III.1 Introduction

La méthode des forces s'appuie principalement sur la validité du principe de superposition. Dans cette méthode les inconnues sont des forces. Le terme « force » doit être compris ici dans un sens général, les inconnues pouvant être des efforts internes, des réactions d'appui, des moments ou des paires de moments, etc. Pour résoudre un système, des conditions supplémentaires de déformation sont exprimées se nomment « conditions de compatibilité cinématiques ».

Pour déterminer les efforts intérieurs dans une structure isostatique, les équations d'équilibre suffisent pour trouver les dits efforts. Au contraire, en présence d'une structure statiquement indéterminée (hyperstatique) de degré  $h$ , on ne sait y déterminer la distribution complète des efforts intérieurs, sous une combinaison d'action donnée, par les seules équations d'équilibre global, il y a en effet  $h$  efforts intérieurs.

Une structure peut être plus ou moins hyperstatique dans le sens où elle peut contenir plus ou moins de liaisons surabondantes. Dans un souci de caractérisation, on définit le degré d'hyperstativité comme étant le nombre de coupures nécessaire à rendre la structure isostatique. Le degré d'hyperstativité est une caractéristique centrale pour l'application de la méthode des forces car il correspond directement au nombre d'inconnues nécessaire à la résolution.

#### III.2 Liaisons surabondantes et degré d'hyperstativité

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons supplémentaires qu'il faudrait supprimer du système hyperstatique pour obtenir un système isostatique. On a deux types de liaisons surabondantes chacune est associée à un nombre :

- Les liaisons surabondantes extérieures que l'on retrouve dans les appuis (les réactions), elles sont caractérisées par le nombre de liaisons externes  $h_{\text{ext}}$ . Dans la structure hyperstatique (Fig.III.7.a) on doit enlever six liaisons externes pour la rendre isostatique, (Fig.III.7.b).

- Les liaisons surabondantes intérieures sont celles qui proviennent des contours fermés (on ouvrant le contour les efforts internes deviennent des inconnues supplémentaires), elles sont caractérisées par le nombre de liaisons internes  $h_{\text{int}}$ . Dans

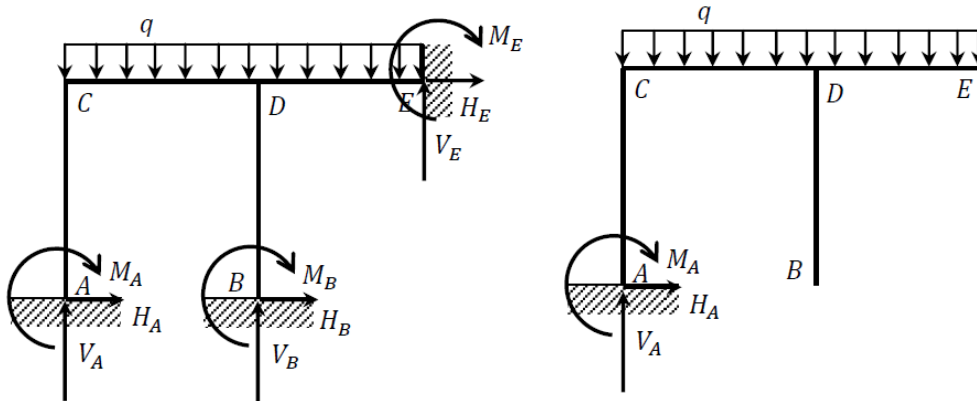


la structure hyperstatique (Fig.III.8.a) on doit enlever trois liaisons internes pour la rendre isostatique, (Fig.III.8.b).

Le degré d'hyperstativité est défini par la somme des deux nombres :

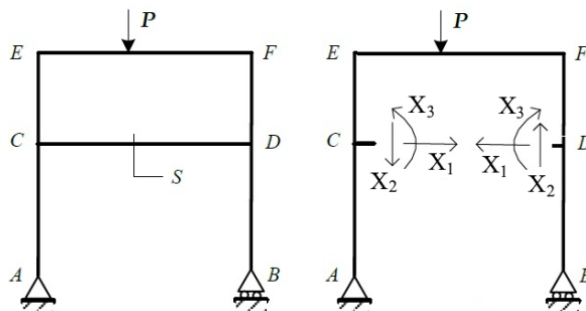
$$h = h_{ext} + h_{int} \tag{III.1}$$

La suppression des liaisons surabondantes peut servir à libérer une réaction sur un appui suivant son type d'inconnues associées H, V et M (Fig. III.7.a), ou une coupure correspondra à la suppression d'un effort interne inconnu  $X_1, X_2, X_3$  (moment de flexion, effort tranchant, effort normal). La suppression peut être exécutée sur les liaisons externes ou internes jusqu'à ce que la structure devienne isostatique (Fig.III.9). Après avoir supprimé toutes les liaisons surabondantes, on obtient une structure statiquement déterminée (isostatique). Le nombre de suppressions nécessaires pour rendre la structure isostatique représente, bien entendu, le degré d'hyperstativité.



**Figure III.7.a:** Portique hyperstatique  
(6 liaisons externes supplémentaires  $h_{ext} = 6$ )

**Figure III.7.b :** Portique isostatique  
(liaisons supplémentaires supprimées)



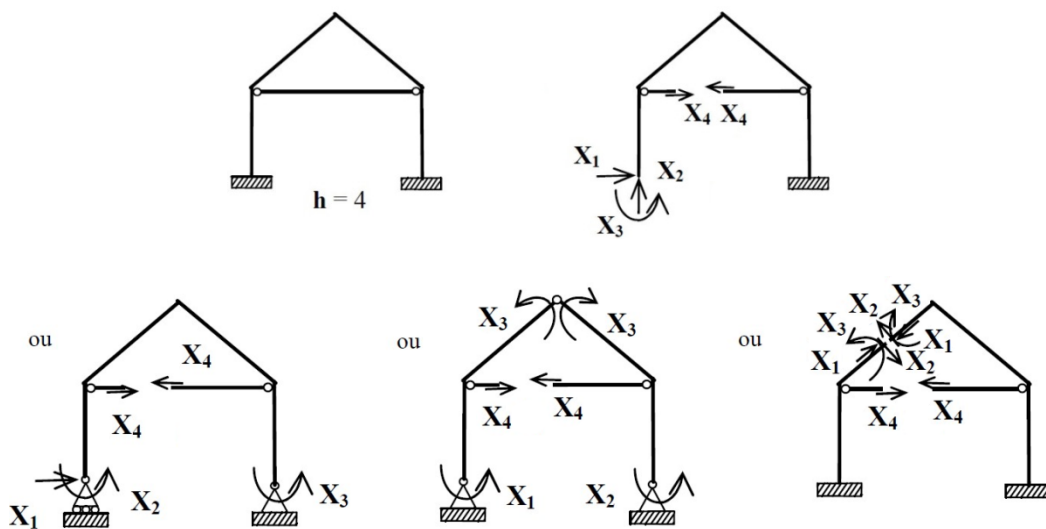
**Figure III.8.a:** Portique hyperstatique  
(3 liaisons internes surabondantes  $h_{int} = 3$ )

**Figure III.8.b :** Portique isostatique  
(liaisons surabondantes supprimées)

**Remarque :**

Tout effort (internes) libéré par une coupure consiste en fait en une paire de forces. Chacune de celles-ci agit sur un des tronçons isolés par la coupure. Il est essentiel de les représenter toutes deux lorsqu'on effectue une coupure interne à la structure (Fig. III.8.b).

Lorsque la structure est symétrique et symétriquement/anti-symétriquement chargée, il est souvent intéressant de choisir des nœuds sur l'axe de symétrie afin de tirer profit des conditions de symétrie/antisymétrie.



**Figure III.9** Pour la même structure hyperstatique on peut avoir plusieurs configurations isostatiques.

**III.2.1 Systèmes en treillis instables**

La condition nécessaire pour que le treillis soit intérieurement isostatique est :

$$b = 2n - 3 \tag{III.2}$$

Où : **b** : nombre de membrures (barres)

**n** : nombre de nœuds

Si  $b = 2n - 3$  : Le système est intérieurement isostatique ;

Si  $b < 2n - 3$  : Le système est instable ;

Si  $b > 2n - 3$  : Le système est hyperstatique intérieurement.

Dans ce cas le degré d'hyperstativité du treillis  $h$  est donné par :

$$h = b + l - 2n \tag{III.3}$$

Où **b** : nombre de membrures (barres) ;

**n** : nombre de nœuds ;

**l** : le nombre de réactions d'appuis;

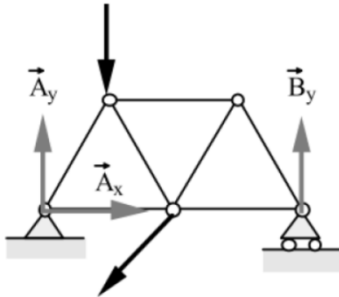


Figure III.10.a: Système isostatique stable

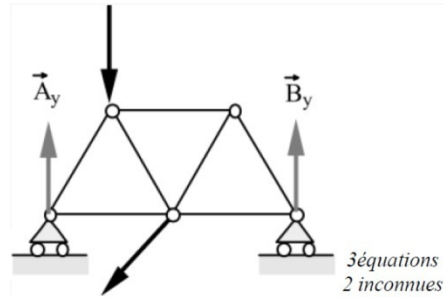


Figure III.10.b : Système instable  
3 équations  
2 inconnues

### III.2.2 Hypersaticité des portiques

On définit **un portique plan** comme étant une structure plane constituée de poutres droites dont les extrémités sont appelées des nœuds. Ceux-ci sont généralement rigides mais ils peuvent aussi être des articulations. Le degré d'hyperstaticité du portique est alors donné par, (ex. Fig. III.11) :

$$h = (3n + 2r + l) - 3b \tag{III.4}$$

Avec :

**b** : nombre d'éléments (poutres ou barres) ;

**n** : liaisons rigides (appuis rigides : encastrements ou nœuds rigide entre deux éléments) ;

**r** : articulations (avec l'extérieur ou entre éléments du portique) ;

**l** : appuis chariot

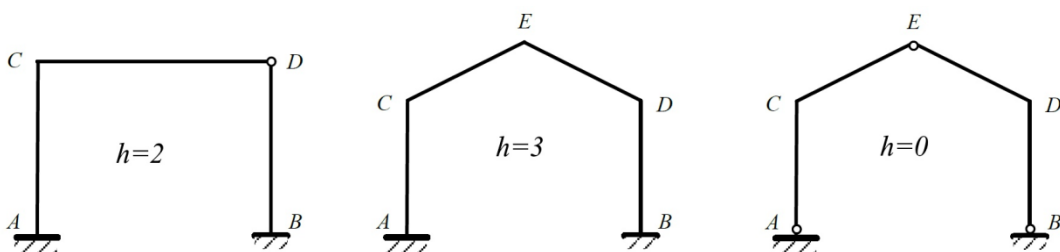


Fig. III.11 hypersaticité des portiques.

### III.3 Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des inconnues, qu'il faut calculer.

- Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par "structure de référence",  $S_0$ .
- Pour une seule structure hyperstatique, ayant la possibilité d'obtenir plusieurs structures de références, le choix de celui avec lequel on travaillera ensuite sera fait en fonction des facilités apportées aux calculs.
- On observe que la structure de référence retenue aura par rapport à la structure initiale, quelques possibilités de déplacements (ou rotations) supplémentaires, le retour au comportement réel de la structure initiale permet d'écrire les équations supplémentaires (équations de compatibilité cinématique) à partir desquelles on pourra trouver les inconnues supplémentaires.
- On procède à écrire une équation de compatibilité cinématique pour chaque liaison surabondante supprimée (ou inconnue).
- Le nombre d'équations est égale au nombre d'inconnue est le système peut être résolu.

#### III.3.1 Exemple d'une poutre hyperstatique de premier degré

Soit une poutre (AB) de longueur  $2l$  encastrée à gauche, simplement appuyée à droite, soumise en son centre à une charge verticale  $P$  dirigée vers le bas (Fig. III.12).

La poutre, ayant un seul degré de hypersaticité, un des structures de références pourront être pris en considération est celui indiqué dans la figure III.12.b. La structure de référence aura un comportement équivalent à la structure initiale, à condition que l'inconnue  $X_I$  ait la valeur réelle de  $V_B$ .

On ne connaît pas la valeur de  $X_I$  au début, on peut appliquer le principe de superposition des effets : le déplacement de la structure de référence (figure III.13.a)

est égale à la somme des déplacements de la même poutre soumise à l'action de la charge extérieure  $P$  et à l'action de la force concentrée  $X_I$  (Figure III.13.b-c), cette condition conduit à l'équation de compatibilité cinématique suivante :

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow \Delta_B^0 + \Delta_B^{X_I} = 0$$

$\Delta_B$  : déplacement vertical réel de la structure de référence au droit de point  $B$ .

$\Delta_B^0$  : déplacement vertical au point  $B$  de la même structure sous la charge extérieure  $P$ .

$\Delta_B^{X_I}$  : déplacement vertical au point  $B$  de la même structure sous la charge inconnue  $X_I$ .

Le déplacement  $\Delta_B^0$  de la structure de référence sous chargement extérieur  $P$  est calculé avec la méthode de la charge unitaire appliquée au point  $B$ .

Le déplacement  $\Delta_B^{X_I}$  de la structure de référence soumise à la charge inconnue  $X_I$  ne peut être calculé parce que la valeur de  $X_I$  est inconnue, c'est pour cela qu'on calculera une valeur proportionnelle, c'est le déplacement  $\delta_{11}$  au droit de l'inconnue  $X_I$  et selon sa direction sous l'action d'une charge unitaire ( $X_I=1$ ). Ainsi,  $\Delta_B^{X_I}$  sera :

$$\Delta_B^{X_I} = X_I \cdot \delta_{11} \quad (\text{III.5})$$

### III.3.2 Signification du paramètre de proportionnalité $\delta_{11}$ :

Ce paramètre traduit la relation linéaire entre la force  $X$  et le déplacement associé  $D$ , d'où :  $D = f \cdot X$ , posant  $X=1$  alors  $D=f$ . Le paramètre  $f$  est le coefficient de flexibilité qui représente un déplacement due à une charge unitaire, le même que  $\delta_{11}$  et il sera calculé en intégrant le diagramme du moment  $m_I$  (de la charge unitaire  $X_I=1$ ) par lui-même, en considérant les signes corrects.

Ainsi, l'équation  $\Delta_B = 0$ , pourra être écrite sous la forme définitive suivante:

$$\Delta_B^0 + X_I \cdot \delta_{11} = 0, \quad (\text{III.6})$$

### III.3.3 Schémas des étapes de calcul

— On utilisera la réaction verticale  $V_B = X_I$  comme paramètre (liaison surabondante) :

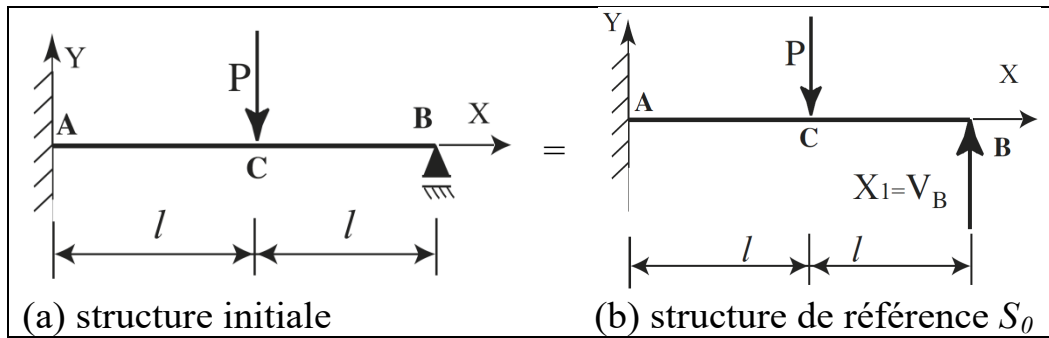


Figure III.12 poutre hyperstatique de premier degré  $h=1$ .

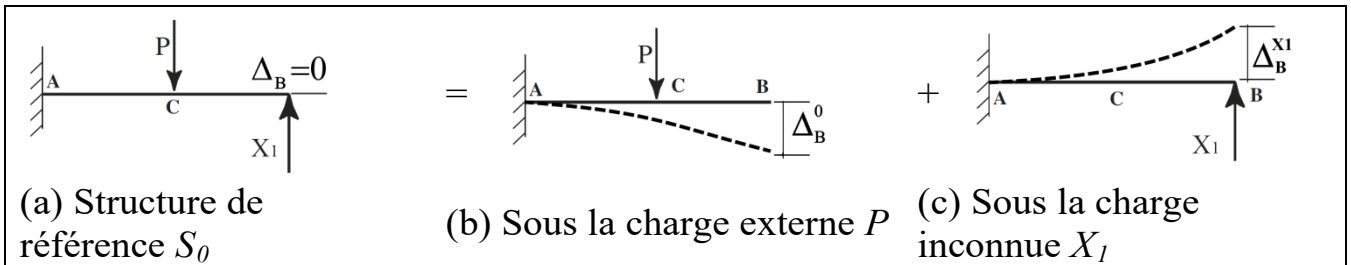
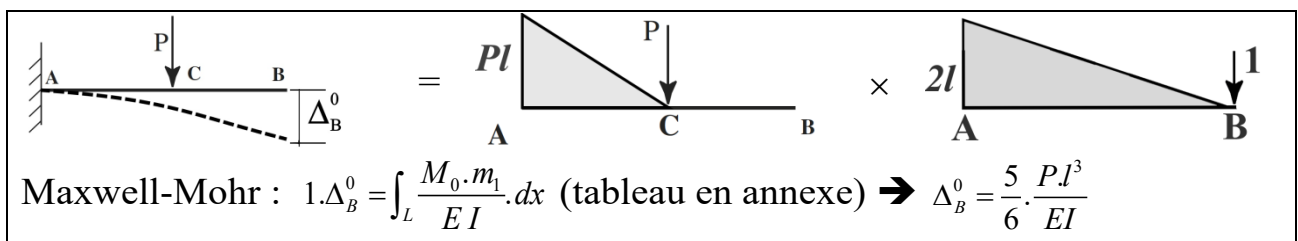
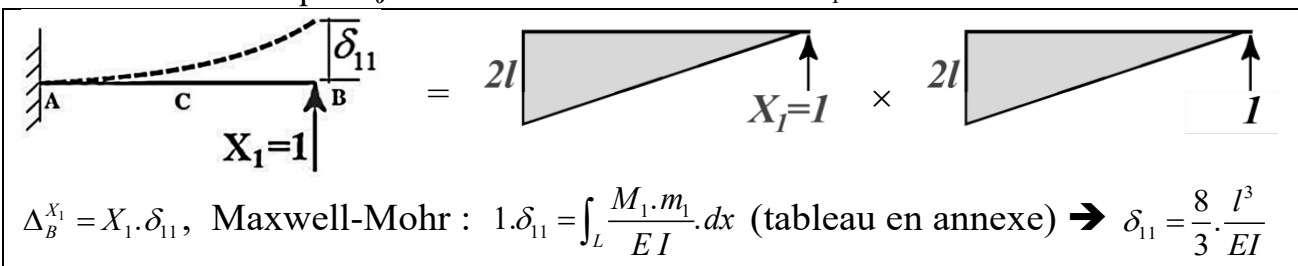


Figure III.13 Application du Principe de superposition ;  $\Delta_B = 0 \Rightarrow \Delta_B^0 + \Delta_B^{X_1} = 0$

– Structure isostatique  $S_0$  sous chargement extérieur P :



– Structure isostatique  $S_0$  soumise à la force unitaire  $X_1=1$  :



– D'où l'équation de compatibilité des déformations, considérant les signes corrects:

$$\Delta_B^0 + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \Rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{P \cdot l^3}{EI} - \frac{8}{3} \cdot \frac{X_1 l^3}{EI} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{5}{16} P$$

### III.3.4 Problème de signes :

Dans l'application du théorème de la force unité, il suffit de discerner les moments de même sens et ceux de sens opposé. A cet effet la convention de la fibre tendue est entièrement satisfaisante. Une intégrale  $\int_L \frac{M \cdot m_1}{EI} \cdot dx$  relative à un tronçon de

poutre positive quand  $M$  et  $m_1$  sont de même sens dans ce tronçon, négative dans le cas contraire (il peut être employé pour corriger l'équation de compatibilité cinématique).

**III.4 Procédures de résolution de la méthode des forces:**

1- Après la suppression des liaisons surabondantes, la structure obtenue est désignée par "structure de référence",  $S_0$  (Fig. III.12).

2- On procède à écrire une équation de compatibilité cinématique pour chaque liaison surabondante supprimée, ici  $X_1$  pour le point B (Fig. III.13) :

$$f_{11}X_1 + D_1^0 = D_1 \tag{III.7}$$

Avec :

$D_1^{X_1} = f_{11}X_1 = \Delta_B^{X_1}$  déplacement due à l'inconnue  $X_1$  dans  $S_0$  ( $f_{11}$  coefficient de flexibilité).

$D_1^0 = \Delta_B^0$  déplacement due au chargement externe  $P$  (à la section de la force  $X_1$  dans  $S_0$ ).

$D_1 = 0$  déplacement réel, de la structure de référence  $S_0$  (à la section de la force  $X_1$ ).

3- On calcul le coefficient de flexibilité  $f_{11}$ , on préfère utiliser généralement la méthode de Maxwell-Mohr ou la méthode de la force unitaire:

Calcul de coefficient  $f_{11}$   
 $X_1 = 1 \Rightarrow D_1^{X_1} = f_{11} \cdot (1) = f_{11}$

$$1 \cdot f_{11} = \int_L \frac{M_1 \cdot m_1}{EI} \cdot dx \text{ (tableau en annexe)} \Rightarrow f_{11} = \frac{8}{3} \cdot \frac{l^3}{EI}$$

4- On calcul les déplacements dues aux chargements externes :  $D_1^0 = \frac{5}{6} \cdot \frac{P \cdot l^3}{EI}$

5- On résout le système des équations obtenus (III.27), en considérant les signes

corrects:  $\left(-\frac{8}{3} \cdot \frac{l^3}{EI}\right) X_1 + \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{P \cdot l^3}{EI}\right) = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{5}{16} P$

**III.5 Equations générale de la méthode des forces :**

La structure isostatique déduite de la structure réelle, appelée « structure

isostatique de référence  $S_0$  ». Il y a évidemment plusieurs structures isostatiques de référence possibles, pour la même structure de départ, puisque les coupures simples peuvent s'effectuer dans des sections quelconques. On adopte la structure de référence la plus simple pour simplifier les calculs à effectuer.

Les forces extérieures directement appliquées, d'une part et les inconnues hyperstatiques extériorisées, d'autre part, produisent des déplacements relatifs aux lèvres de chacune des  $h$  coupures simples. L'objectif de la méthode des forces est de déterminer les  $h$  inconnues hyperstatiques  $X_j$  d'une structure dont le degré d'hyperstaticité est  $h$ . Désignons par:

- Inconnue hyperstatique  $X_j$  ( $j=1, 2, \dots, h$ ) effort inconnu de coupure  $j$ .
- Coefficient de flexibilité  $D_{i0}$ , le déplacement relatif aux lèvres de la coupure simple  $i$  produit par les forces extérieures appliquées au point de coupure considéré;
- Coefficient de flexibilité  $f_{ij}$ , le déplacement relatif des bords de la coupure simple  $i$  (dans la direction  $i$ ) sous l'effet d'une valeur unitaire  $X_j = 1$  de l'inconnue  $X_j$  agissant dans la coupure  $j$  (dans la direction  $j$ ), de sorte que  $X_j \cdot f_{ij}$  représente le déplacement relatif des lèvres de la coupure simple  $i$  produit par l'inconnue  $X_j$  prise à sa vraie valeur.
- Déplacement réel  $D_i$  le déplacement réel dans le point considéré, dans le cas général ces déplacements peuvent être imposés (ex : tassement d'appui) ou nuls.

En écrivant la condition de compatibilité cinématique en chacune des  $h$  coupures simples, on obtient un système de  $h$  équations (nombre de coupures simples) à  $h$  inconnues (nombre d'efforts inconnus):

$$\sum_{j=1}^h f_{ij} \cdot X_j + D_{i0} = D_i \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (III. 8)$$

ou sous forme matricielle :

$$[F]\{X\} + \{D_0\} = \{D\} \quad (III. 9)$$

Avec :



$\{X\}$  est le vecteur des inconnues  $X_j$ . Vecteur colonne de dimensions  $(h \times 1)$ ,

$[F]$  est la *matrice de flexibilité* de la structure ; elle est constituée de matrice carrée des coefficients de flexibilité  $f_{ij}$ ; elle a les dimensions  $(h \times h)$  :

$$f_{ij} = \sum_k \left[ \int_{L_k} \frac{N_j \cdot n_i}{EA} \cdot dx + \beta_k \cdot \int_{L_k} \frac{V_j \cdot v_i}{GA} \cdot dx + \int_{L_k} \frac{M_j \cdot m_i}{EI} \cdot dx \right] \quad (III.10)$$

Cette relation est plus facile à utiliser, car les diagrammes des efforts intérieurs réels  $N_j, V_j$  et  $M_j$  sont généralement connus.

– Pour les treillis toutes les grandeurs sont constantes, alors la relation (III.10) s'écrit :

$$f_{ij} = \sum_k \frac{N_j \cdot n_i}{EA} L_k \quad (III.11)$$

– Pour les poutres essentiellement fléchies, on néglige toujours les déplacements dues à l'effort tranchant et à l'effort normal, alors la relation (III.10) s'écrit :

$$f_{ij} = \sum_k \int_{L_k} \frac{M_j \cdot m_i}{EI} \cdot dx$$

$\{D_0\}$  est le champ de déplacements  $(h \times 1)$  dus aux seules charges externes :

$$D_{i0} = \sum_k \left[ \int_{L_k} \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} \cdot dx + \beta_k \cdot \int_{L_k} \frac{V_0 \cdot v_i}{GA} \cdot dx + \int_{L_k} \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} \cdot dx \right] \quad (III.12)$$

Cette relation est plus facile à utiliser, car les diagrammes des efforts intérieurs réels  $N_0, V_0$  et  $M_0$  sont généralement connus.

$\{D\}$  est le champ de déplacements réels  $(h \times 1)$  dans la structure étudiée.

La résolution du système d'équations (III.9) fournit donc les valeurs des  $h$  inconnues  $X_j$ .

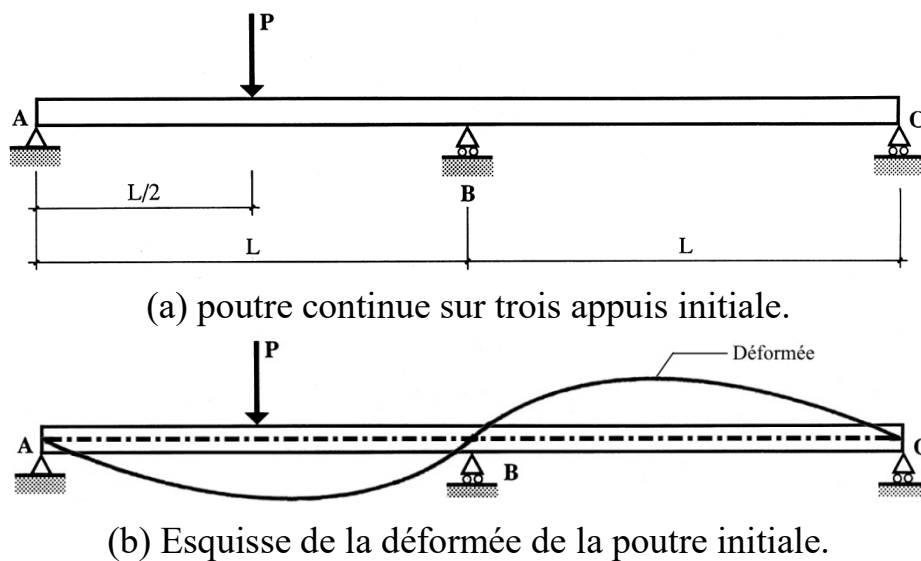
### III.6 Exemple de poutre continue sur trois appuis rigides :

Considérons la poutre continue sur trois appuis, soumise à une charge concentrée à mi-portée de la première travée, figure III.14(a). A l'évidence, le système est une fois hyperstatique, ce problème sera analysé par la méthode des forces.

### III.6.1 Esquisse de la déformée

Le premier pas dans l'analyse par la méthode des forces consiste à esquisser la déformée de la poutre étudiée. L'esquisse se trouve à la figure III.14(b). Bien entendu, la déformée doit passer par les appuis, c'est-à-dire les points A, B et C. La travée AB subit une déformation proche de celle d'une poutre simple et la travée BC est soulevée par la rotation de l'appui B. La déformée permet d'identifier les caractéristiques utiles à la résolution du système. Ici, les deux propriétés suivantes peuvent être utilisées :

1. absence de déplacement vertical au droit des appuis A, B et C;
2. continuité de la tangente à la déformée.



**Figure III.14. Déformée de la poutre à trois appuis, avec une charge concentrée à mi-portée de la 1<sup>ière</sup> travée.**

Il faut remarquer que le nombre de possibilités de résolution est illimité, car la deuxième propriété est valable sur toute la poutre. La continuité de la tangente sur l'appui intermédiaire est choisie ici comme condition de compatibilité cinématique pour la résolution de ce problème.

### III.6.2 Mise en évidence des inconnues

Le choix de la continuité de la tangente sur l'appui intermédiaire B implique l'introduction d'une rotule (coupure de la liaison du moment) sur cet appui de manière à exprimer la condition de compatibilité cinématique. L'inconnue qui est alors associée

à cette coupure est le moment de flexion interne sur l'appui B. Pour la suite, elle est nommée  $X_1$ . Statiquement, ce moment est représenté par une paire de moments de flexion opposés.

### III.6.3 Structure de référence $S_0$

La structure de référence  $S_0$  est la structure dans laquelle le moment sur l'appui intermédiaire B est nul. Il s'agit donc des deux poutres simples accolées, représentées à la figure III.15.

### III.6.4 Condition de compatibilité cinématique

La condition de compatibilité cinématique est la continuité de la tangente sur l'appui intermédiaire B. Mathématiquement, conformément à la relation générale (III.8), elle s'exprime par l'équation linéaire à une inconnue suivante:

$$f_{11} \cdot X_1 + D_{10} = 0 \quad (III.3)$$

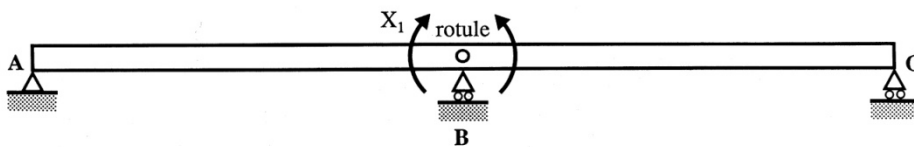


Figure III.15. Structure de référence  $S_0$  dont le choix de l'inconnue cinématique est le moment fléchissant  $X_1$ .

L'inconnue  $X_1$  est le moment de flexion interne sur l'appui B. L'équation (III.13) traduit simplement le fait que le moment sur appui doit exactement compenser le «pli» dû à la charge extérieure qui apparaîtrait en son absence (rotule). La résolution de l'équation (III.13) permet donc d'ajuster le moment sur l'appui B afin de rétablir la continuité de la tangente sur cet appui. Le principe de résolution expliqué, il reste à déterminer les coefficients  $f_{11}$  et  $D_{10}$  de l'équation (III.13).

### III.6.5 Coefficient $D_{10}$

Dans un premier temps, il faut déterminer le «pli» au droit de la coupure sur l'appui B, dû à la charge extérieure  $P$ . Comme le montre la figure III.16, le coefficient  $D_{10}$  représente cette «cassure». Plus précisément, le coefficient  $D_{10}$  représente la

rotation relative des lèvres de la coupure dans la structure de référence sous l'effet des charges extérieures.

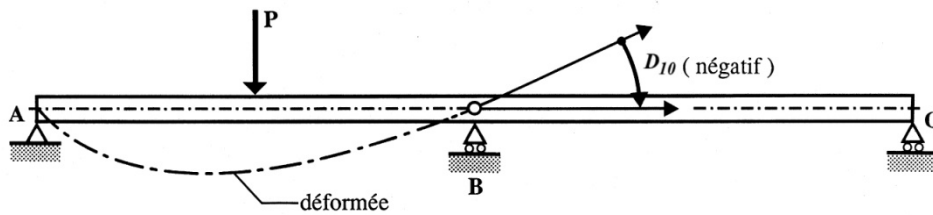


Fig. III.16. Le coefficient  $D_{10}$  représente dans la structure de référence la rotation relative des lèvres de la coupure sous l'effet de la charge extérieure P.

D'un point de vue pratique, la détermination du coefficient  $D_{10}$  peut s'effectuer à l'aide du principe des travaux virtuels §II.10. Conformément au principe des travaux virtuels, il faut procéder à la multiplication de la statique virtuelle par la cinématique réelle. Les éléments de cette opération sont représentés à la figure III.17. La force virtuelle unitaire doit effectuer un travail virtuel sur le déplacement à déterminer.

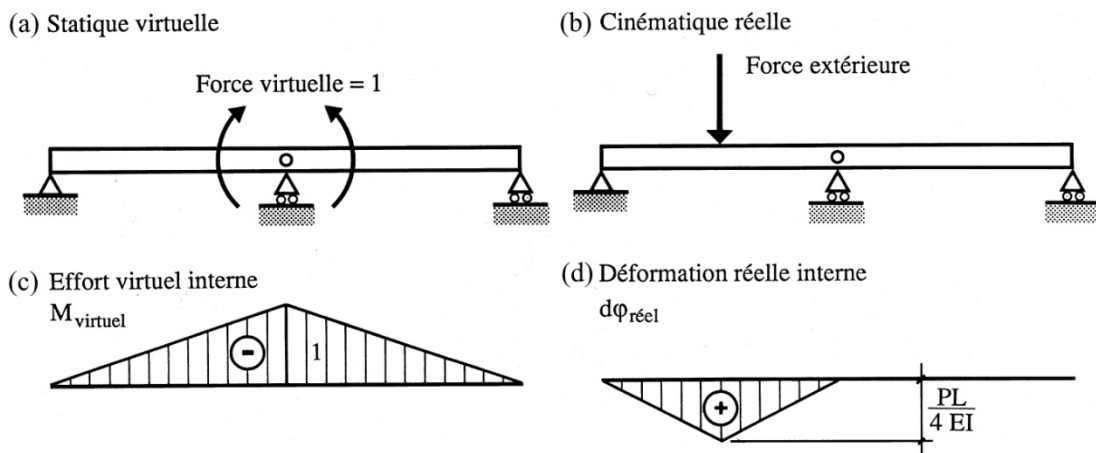


Fig.III.17. Détermination du coefficient  $D_{10}$  à l'aide des travaux virtuels.

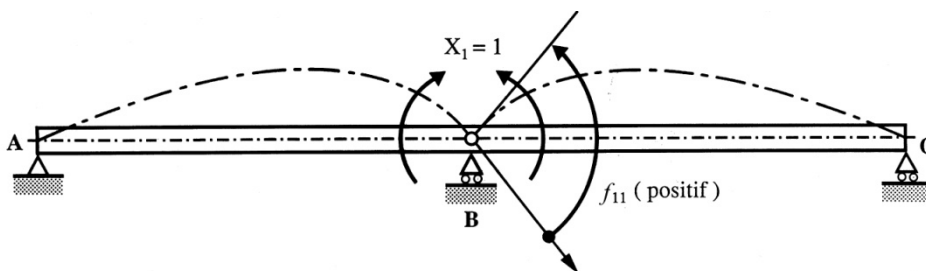
Etant donné que le coefficient  $D_{10}$  a été identifié comme étant une rotation relative, la «force» virtuelle associée est une paire de moments opposés. La Figure III.17(a) montre la force virtuelle unitaire sur l'appui B et le diagramme des moments de flexion internes correspondant (figure III.17c). L'établissement du diagramme des moments est élémentaire. Sur chaque poutre simple, il varie linéairement depuis l'extrémité libre et prend une valeur unitaire à leur jonction sur l'appui B, où la paire de moments unitaires opposés est appliquée. La partie droite de la figure III.17 est consacrée à la cinématique réelle. Conformément à la théorie des poutres, la

déformation réelle interne (la courbure,  $d\phi_{\text{réel}}$ ) est déterminée à partir du diagramme des moments de flexion internes par la relation usuelle  $d\phi = -M/EI$ . Le tracé du diagramme des moments est trivial, c'est celui d'une poutre simple soumise à une charge concentrée en son milieu. Par conséquent, les déformations réelles internes ont l'allure triangulaire représentée à la figure III.17(d). La pointe du triangle se trouve sous la charge  $P$  avec une valeur de  $PL/4EI$ . A l'aide des diagrammes de la figure III.17 et des tables d'intégration, la valeur du coefficient  $D_{10}$  se détermine facilement selon l'équation (III.14) :

$$1.D_{10} = \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot \frac{PL}{4EI} \cdot L = -\frac{PL^2}{16EI} \tag{III.14}$$

**III.6.6 Coefficient  $f_{11}$**

Ensuite, il faut déterminer de combien le «pli» au droit de l'appui intermédiaire B est réduit par l'application d'un moment de flexion interne unitaire ( $X_1=1$ ). Comme le montre la figure III.18, le coefficient  $f_{11}$  représente la réduction du «pli » sur l'appui B. Plus précisément, le coefficient  $f_{11}$  représente la rotation relative des lèvres de la coupure dans la structure de référence sous l'effet de l'inconnue  $X_1$  unique et unitaire.



**Fig.III.18. Le coefficient  $f_{11}$  représente la rotation dans la structure de référence due à l'inconnue unitaire  $X_1$ .**

A nouveau, la détermination du coefficient  $f_{11}$  s'effectue à l'aide du principe des travaux virtuels. La multiplication de la statique virtuelle par la cinématique réelle est illustrée à la figure III.19. Etant donné que les coefficients  $f_{11}$  et  $D_{10}$  considèrent la même rotation relative, la statique virtuelle est identique à celle de la figure III.17. Par ailleurs, comme il s'agit de déterminer la rotation relative à l'endroit de l'application de la paire de moments opposés (l'inconnue unitaire  $X_1$ ), le même diagramme des

moments apparaît dans la cinématique réelle. Cette constatation a une portée générale pour la détermination des coefficients  $f_{11}$  et s'explique aisément en se référant à la définition du paragraphe IV.5.

A l'aide des diagrammes de la figure III.19 et des tables d'intégration, la valeur du coefficient  $f_{11}$  se détermine selon l'équation (III.15):

$$1 \cdot f_{11} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \left( -\frac{1}{EI} \right) \cdot 2L = \frac{2L}{3EI} \tag{III.15}$$

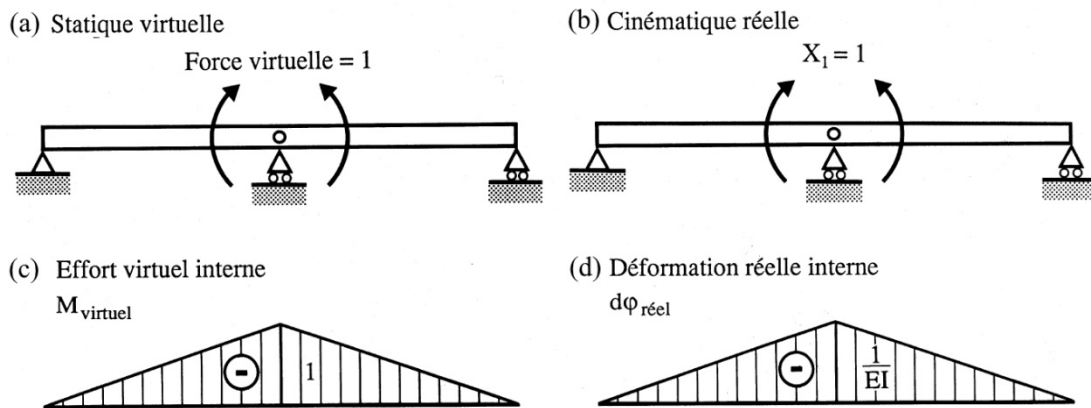


Fig. III.19 Détermination du coefficient  $f_{11}$  à l'aide des travaux virtuels.

### III.6.7 Résolution de l'équation de compatibilité cinématique

Les valeurs des coefficients  $f_{11}$  et  $D_{10}$  ayant été déterminées, elles peuvent être introduites dans l'équation (III.13) de compatibilité cinématique. La résolution de cette équation linéaire à une inconnue est triviale. L'inconnue prend alors la valeur donnée à l'équation (III.36):

$$X_1 = -\frac{D_{10}}{f_{11}} = \frac{3PL}{32} \tag{III.16}$$

En résumé, c'est avec cette intensité que le moment de flexion interne sur l'appui intermédiaire B parvient à gommer le «pli» qui apparaîtrait, en son absence, sous l'effet de la charge extérieure  $P$ . Le signe positif obtenu dans l'équation (III.36) indique que le sens du moment sur appui est le même que celui choisi intuitivement (ou arbitrairement) pour l'inconnue unitaire  $X_1$ . Si le sens contraire avait été choisi, seule la valeur du coefficient  $f_{11}$  aurait été affectée, prenant alors le signe opposé. La

résolution de l'équation (III.13) de compatibilité cinématique aurait alors conduit à un signe négatif, opposé à la valeur de l'inconnue  $X_I$  de l'équation (III.16), ce signe négatif indiquerait que le sens réel du moment sur appui serait opposé à celui choisi.

### III.6.8 Tracé des diagrammes des efforts internes

Les inconnues  $X_i$  ayant été déterminées selon les systèmes linéaires d'équations (III.28), la structure est résolue et il reste à tracer les diagrammes des efforts intérieurs. D'une manière générale, les efforts intérieurs s'obtiennent par superposition. Avec la méthode des forces, on peut également les obtenir en déterminant préalablement les réactions d'appui correspondantes.

#### III.6.8.1 Efforts tranchants

Pour les efforts tranchants, la superposition, en tenant compte de toutes les inconnues, s'effectue selon l'équation (III.17) :

$$V = V_0 + \sum V_i \cdot X_i \quad (III.17)$$

$V$  : efforts tranchants totaux

$V_0$  : efforts tranchants dus aux charges externes dans la structure de référence  $S_0$ .

$V_i$  : efforts tranchants dus à une valeur unitaire de l'inconnue  $X_I$  dans  $S_0$ .

#### III.6.8.2 Moments de flexion

De manière similaire, pour les moments de flexion. la superposition en tenant compte de toutes les inconnues s'effectue selon l'équation (III.38):

$$M_f = M_0 + \sum M_i \cdot X_i \quad (III.18)$$

moments de flexion totaux moments de flexion dus aux charges externes dans le système fondamental moments de flexion dus à une valeur unitaire de l'inconnue  $X_I$  dans la structure de référence  $S_0$ .

La figures III.20 et figure III.21 montrent le diagramme de l'effort tranchant total et du moment fléchissant total respectivement, obtenus après application du principe de superposition

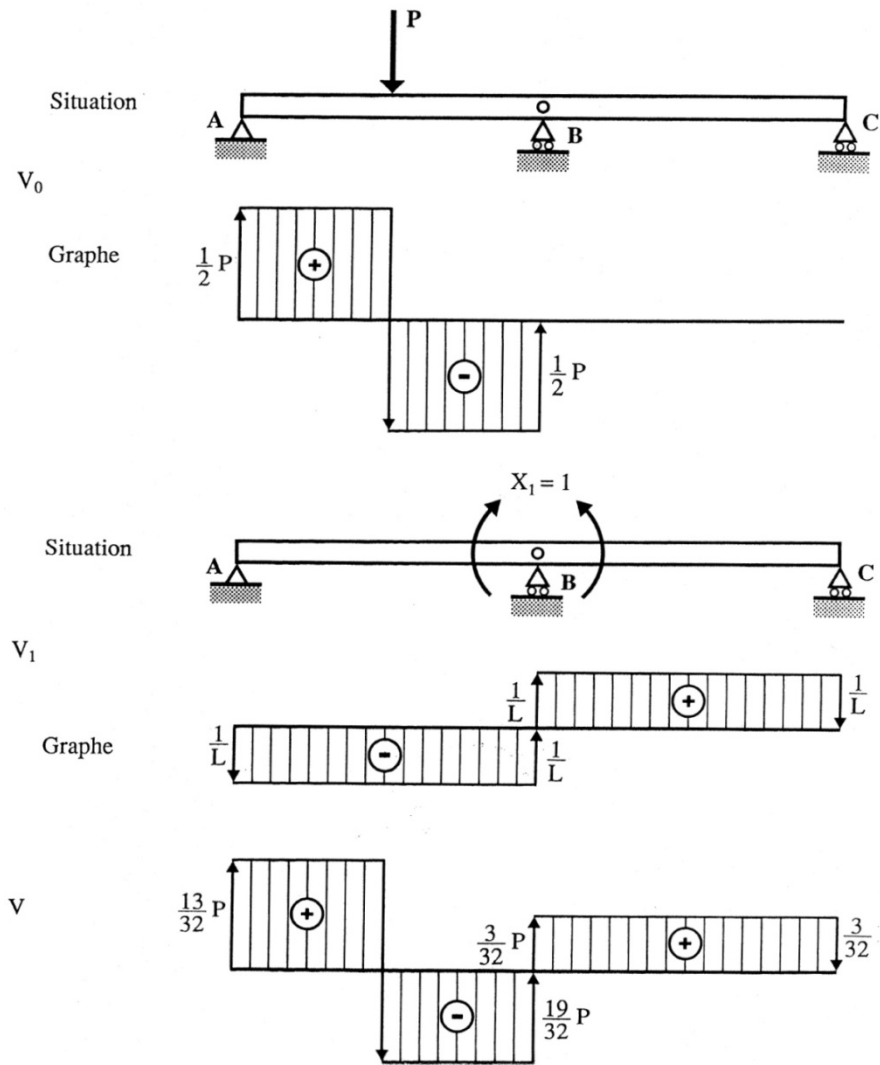


Figure III.20. Diagramme de l'effort tranchant total obtenu par superposition.

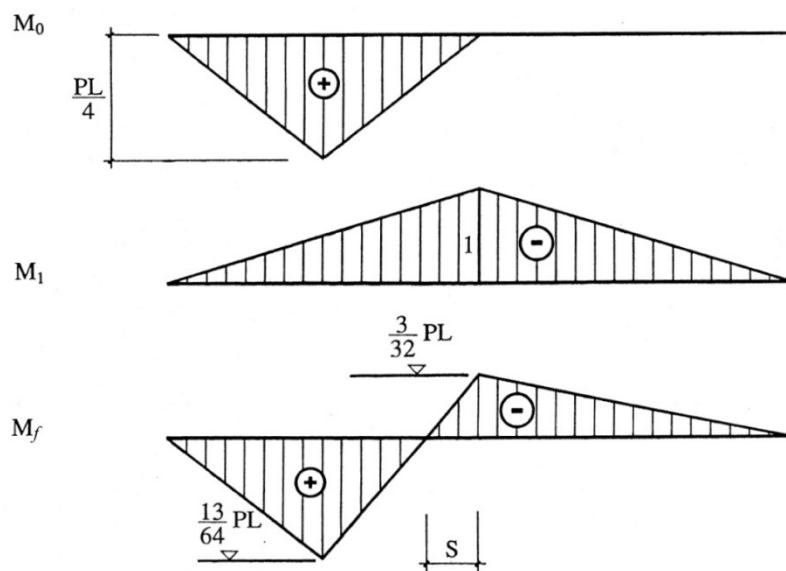


Figure III.21. Diagramme du moment fléchissant total obtenu par superposition.



### III.7 Exemple d'un portique à appuis encastrés

Le problème à résoudre se compose d'un cadre à rigidité flexionnelle  $E.I_z$  constante, sollicité par une charge répartie uniformément  $q$  sur l'un des côtés verticaux, encastré dans deux appuis rigides B et C. Les efforts dans les deux appuis et les diagrammes des efforts doivent être trouvés, figure III.22(a).

#### a. Equilibre et degré d'hyperstativité

L'ensemble est retenu par deux appuis encastrés B et C. Les réactions forces comprennent chacune deux composantes  $H_B, V_B, H_C, V_C$ . L'encastrement de ces appuis génère des couples  $M_B$  et  $M_C$ . Le nombre total d'inconnues est six alors que l'équilibre statique permet de lever seulement trois inconnues. Le problème est un hyperstatique de troisième ordre  $h=3$ .

#### b. Choix de la structure de référence

La structure initiale est rendue isostatique en libérant l'appui C du portique. Les liaisons surabondantes sont  $H_C=X_1, V_C=X_2$  et  $M_C=X_3$ . L'encastrement du tronçon est remplacé par trois efforts inconnus (désignées réelles):

- 1- Une composante horizontale de la réaction force :  $X_1$ .
- 2- Une composante verticale de la réaction force :  $X_2$ .
- 3- Un composant moment de la réaction d'appui :  $X_3$ .

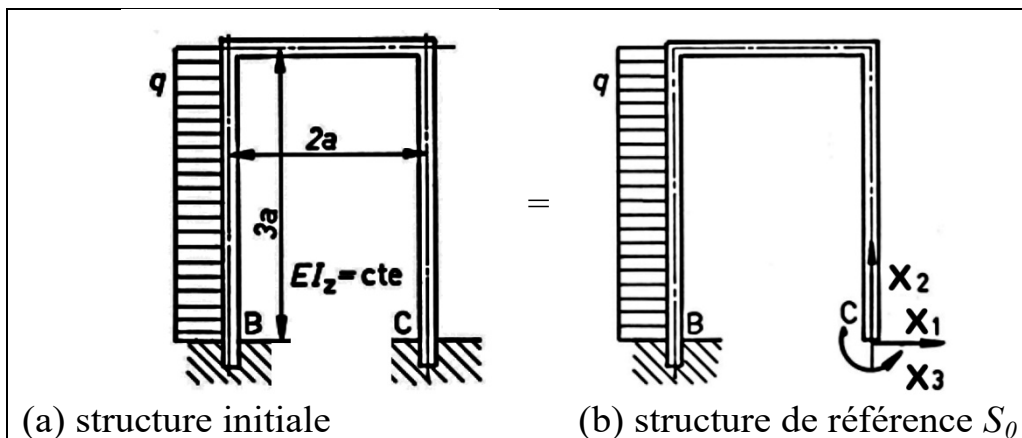


Figure III.22 Portique hyperstatique d'ordre trois ( $h=3$ ).

Le système d'équations linéaires comporte trois inconnues. Sa forme matricielle est la suivante :

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} D_{10} \\ D_{20} \\ D_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \text{ avec : } \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = 0 \end{cases} \quad (III.19)$$

Ou de la forme équivalente :  $[F]\{X\} + \{D_0\} = \{D\}$

### c. Valeur des coefficients de flexibilité

Donnons la méthode pour calculer les coefficients flexibilité de la première colonne  $f_{i1}$  ( $i=1,2,\dots,h$ ) ainsi que la valeur de la constante  $D_{10}$ . Comme tous les tronçons de la structure sont rectilignes, la méthode par multiplication des diagrammes est applicable et plus simple à retenir.

- 1-Coefficient de flexibilité  $f_{11}$  : produit du diagramme réel de  $X_1=1$  par lui même.
- 2-Coefficient de flexibilité  $f_{21}$  : produit du diagramme réel de  $X_1=1$  par le diagramme virtuel de  $X_2=1$ .
- 3-Coefficient de flexibilité  $f_{31}$  : produit du diagramme réel de  $X_1=1$  par le diagramme virtuel de  $X_3=1$ .
- 4-Constante  $D_{10}$  : produit du diagramme sous l'effet de charges externes réelles par le diagramme virtuel de l'effort unitaire  $X_1=1$ .

Les autres colonnes du système d'équations linéaires contenant les coefficients de flexibilité et la constante sont construites de la même façon.

### d. Calcul des constantes

Dans le principe du calcul donné ci-après, les coefficients de flexibilité jouissent la propriété :  $f_{ij} = f_{ji}$ . La matrice des coefficients de flexibilité est donc symétrique. La solution d'un système d'équations linéaires à matrice est fortement simplifiée, surtout si ce système comprend de nombreuses inconnues.

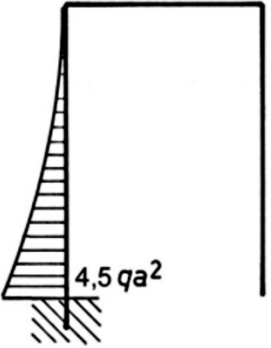
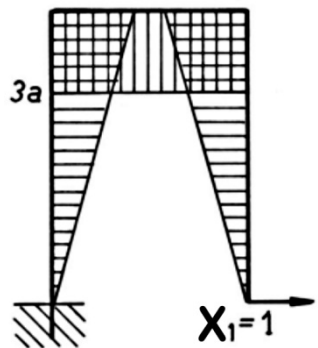
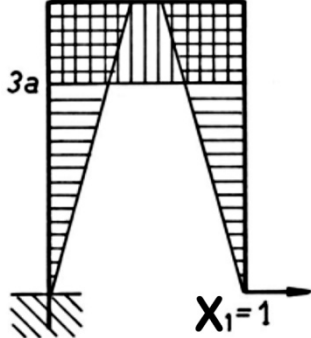
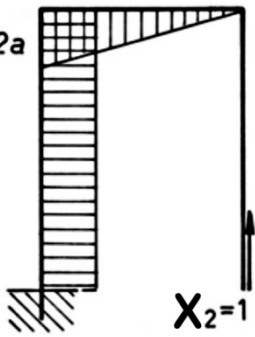
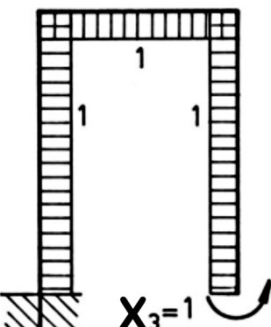
– Moment fléchissant engendré par la charge répartie au point B:

$$M_B = \frac{3}{2} \cdot a \cdot 3a \cdot q = \frac{9}{2} \cdot qa^2 = 4,5 qa^2$$

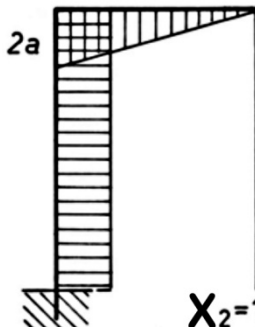
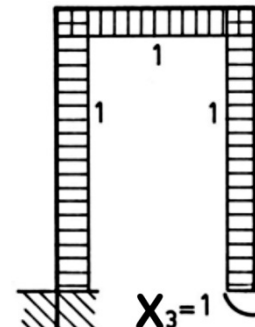
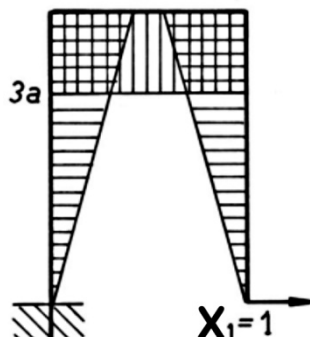
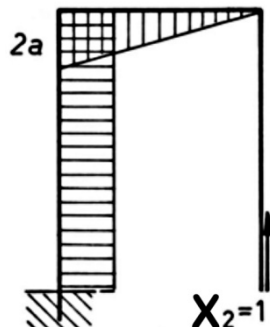
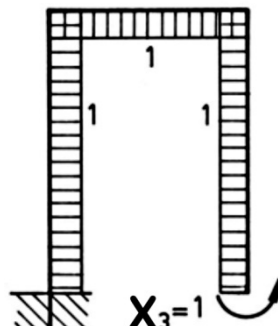
– Les coefficients de flexibilité et les constantes sont calculés après simplification par

la rigidité flexionnelle  $E.I_z$ , voir **Tableau III.1-2**.

**Tableau III.1 : Constantes  $D_{i0}$  et coefficients de flexibilité de la 1<sup>ère</sup> colonne  $f_{i1}$**

<p>Diagrammes des moments de la structure de référence <math>S_0</math></p> <p>Les coefficients de flexibilités et constantes sont calculés après simplification par <math>E.I</math></p>	<p>Sous la charge externe « <math>q</math> », <i>Moment réel</i> : <math>M_0</math></p> 	<p>Sous la charge réelle <math>X_1=1</math> <i>Moment réel</i> : <math>M_1</math></p> 
<p>Moments virtuels <math>m_i</math></p>	$D_{i0} = \int_L \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} \cdot dx$	$f_{i1} = \int_L \frac{M_1 \cdot m_i}{EI} \cdot dx$
	$D_{10} = -\frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{9}{2} \cdot qa^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3a$ $= -\frac{27}{8} qa^4$	$f_{11} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 2a$ $+ 2a \cdot 3a \cdot 3a$ $+ \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 2a = 36a^3$
	$D_{20} = -\frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{9}{2} \cdot qa^2 \cdot 2a$ $= -9qa^4$	$f_{21} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 3a$ $+ \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 2a = 15a^3$
	$D_{30} = -\frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{9}{2} \cdot qa^2 \cdot 1$ $= -\frac{9}{2} \cdot qa^3$	$f_{31} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 1$ $+ 2a \cdot 3a \cdot 1$ $+ \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 1 = 15a^2$

**Tableau III.2 : Coefficients de flexibilité de 2<sup>ème</sup> colonne  $f_{i2}$  et 3<sup>ème</sup> colonne  $f_{i3}$**

<p>Diagrammes des moments de la structure de référence <math>S_0</math></p> <p>Les coefficients de flexibilités et constantes sont calculés après simplification par <math>E.I</math></p>	<p>Sous la charge réelle <math>X_2=1</math></p> <p><i>Moment réel : <math>M_2</math></i></p> 	<p>Sous la charge réelle <math>X_3=1</math></p> <p><i>Moment réel : <math>M_3</math></i></p> 
<p>Moments virtuels <math>m_i</math></p>	$f_{i2} = \int_L \frac{M_2 \cdot m_i}{EI} \cdot dx$	$f_{i3} = \int_L \frac{M_3 \cdot m_i}{EI} \cdot dx$
	$f_{12} = f_{21} = 15 a^3$	$f_{13} = f_{31} = 15 a^2$
	$f_{22} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a$ $+ 3a \cdot 2a \cdot 2a = \frac{44}{3} a^3$	$f_{23} = f_{32} = 8 a^2$
	$f_{23} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1$ $+ 3a \cdot 2a \cdot 1 = 8 a^2$	$f_{33} = 3a \cdot 1 \cdot 1$ $+ 2a \cdot 1 \cdot 1$ $+ 3a \cdot 1 \cdot 1 = 8 a$

– Le système linéaire sous forme matricielle, après simplification par la grandeur  $a$ , s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 36a^2 & 15a^2 & 15a \\ 15a^2 & 44/3 a^2 & 8a \\ 15a & 8a & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = qa^2 \cdot \begin{Bmatrix} 3,375a \\ 9a \\ 4,5 \end{Bmatrix} \quad (III.20)$$

– Après solution du système d'équations linéaires les résultats de  $\{X\}$  :

$$\begin{aligned} X_1 &= H_C = -0,643 qa \\ X_2 &= V_C = +0,675 qa \\ X_3 &= M_C = +1,093 qa^2 \end{aligned} \quad (III.21)$$

– Les efforts inconnus (liaisons surabondantes) étant connus, il est possible de trouver l'équilibre statique du portique. Les réactions d'appui au point  $B$  :

$$\begin{aligned} H_B &= -2,357 qa \\ V_B &= -0,675 qa \\ M_B &= 2,057 qa^2 \end{aligned} \quad (III.22)$$

– Le diagramme des moments fléchissant résultants est donné dans la figure III.22

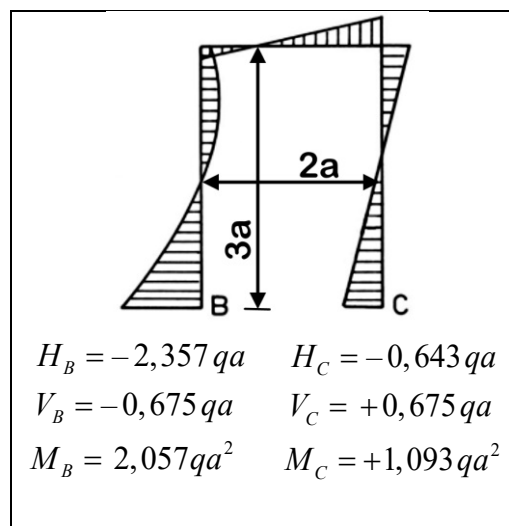


Figure III.22. Réactions aux appuis et diagramme des moments du portique ( $h=3$ ).

### III.8 Cas de variation des températures :

Une structure hyperstatique possédant des liaisons surabondantes, est, de ce fait, empêchée de se dilater (ou se contracter) librement lorsqu'elle est soumise à des variations uniformes de température ou à des gradients thermiques.

Ce bridage a pour effet de faire naître des efforts intérieurs dans la structure (à l'opposé d'une structure isostatique, qui subit, elle, des déformations sans apparition d'efforts internes). Les inconnues hyperstatiques dues à cette cause peuvent se déterminer par la méthode des forces. La seule différence avec les applications précédentes, est que les déplacements  $D_{i0}$  dus aux charges extérieures, aux coupures  $i$  de la structure isostatique de référence  $S_0$ , sont, cette fois, provoqués par les variations de températures et notés  $D_{iT}$ .

Les deux croquis suivants représentent, d'une part, les accroissements de températures (par rapport à la température de construction, habituellement admise égale à  $10^\circ$ ) dans un petit élément de poutre de longueur  $dx$ , et, d'autre part, les déformations que celui-ci subit du fait de ces accroissements de températures.

L'accroissement moyen de température  $T_0$  provoque la dilatation (ou la contraction) du de l'élément  $dx$ , tandis que le gradient de température  $\Delta T = (T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})$  provoque une rotation  $d\phi$  de la section. On a alors les relations suivantes :

$$\frac{du}{dx} = \alpha.T_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{dx} = -\alpha.\frac{\Delta T}{h} \quad (\text{III.23})$$

(le signe négatif dans la deuxième équation correspond au fait qu'un  $\Delta T$  positif provoque une courbure correspondante à un moment négatif).

d'où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique du matériau.

L'expression du coefficient (III.12) devient alors, compte tenu que :

$$\frac{N_0}{EA} = \frac{du}{dx} = \alpha.T_0 \quad \text{et} \quad \text{que} \quad \frac{M_0}{EI} = \frac{d\phi}{dx} = -\alpha.\frac{\Delta T}{h} \quad (\text{III.24})$$

$$D_{iT} = \int_L \frac{n_i}{EA} \cdot \alpha \cdot T_0 \, dx + \int_L \frac{m_i}{EI} \cdot \frac{-\alpha \cdot \Delta T}{h} \, dx$$

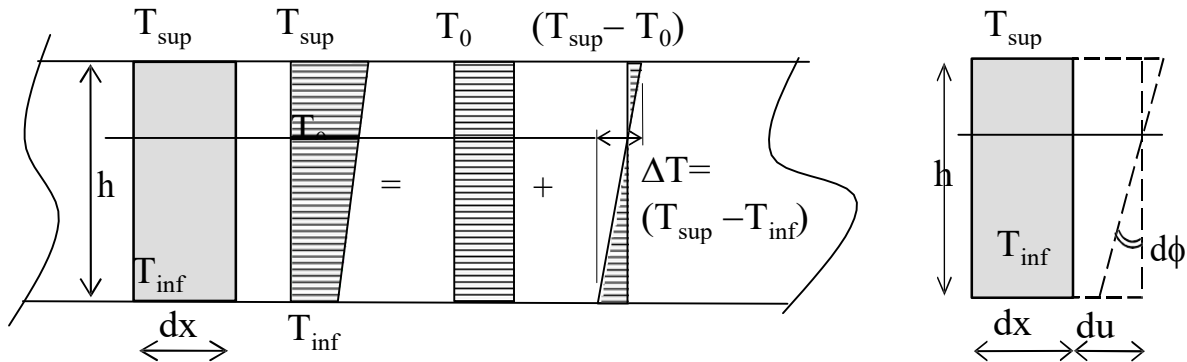


Figure III.22 cas de poutre en variations des températures

Et le terme de l'équation de compatibilité sera écrit de la façon générale suivante :

$$D_{iT} = \sum_k \left[ \int_{L_k} \frac{n_i}{EA} \cdot \alpha \cdot T_0 \, dx + \int_{L_k} \frac{m_i}{EI} \cdot \frac{-\alpha \cdot \Delta T}{h} \, dx \right] \tag{III.25}$$

### III.9 Cas de déplacements des appuis :

Pour les mêmes raisons de bridage qu'évoquées dans le cas des effets thermiques, les structures hyperstatiques sont le siège d'efforts intérieurs lorsque certains de leurs appuis subissent des mouvements différentiels. Les inconnues hyperstatiques dues à cette cause peuvent se déterminer par la méthode des forces, mais deux situations sont possibles :

- **des coupures sont effectuées pour correspondre aux déplacements d'appuis**

Dans ce cas, il suffira d'égaliser les équations de la méthode des forces qui correspondent à ces coupures, non pas à zéro, mais bien à la valeur du déplacement d'appui. Le signe de ce déplacement imposé sera positif s'il va dans le même sens que celui dû à la réaction inconnue hyperstatique correspondante.

- **le système de coupures n'inclut pas les appuis qui subissent des mouvements**

Dans ce cas, il faudra substituer aux déplacements  $D_{i0}$  dus aux charges extérieures aux coupures  $i$  de la structure isostatique de référence  $S_0$ , les déplacements relatifs  $D_{iA}$  des bords de ces mêmes coupures, dus, cette fois, aux mouvements d'appuis. Ces déplacements se déterminent par voie directe, à partir de

considérations géométriques et en considérant qu'un  $D_{iA}$  est positif s'il se produit dans le même sens que le déplacement dû à l'effort unitaire  $X_i$  correspondant.

Exemple : poutre continue en tassement d'appui

Soit la poutre continue à 4 travées soumise au déplacement d'appuis  $\Delta$  au niveau d'appui central, donnée dans la figure III.23 :

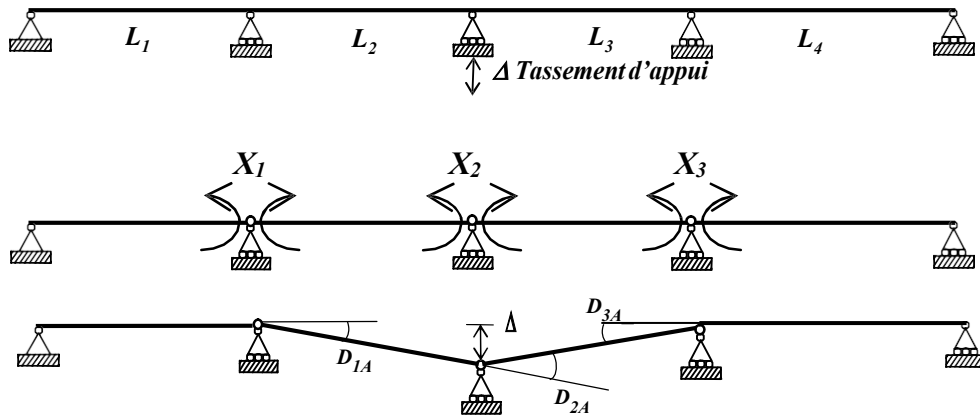


Figure III.23 Déplacement d'appuis dans une poutre continue

Le calcul des coefficients  $D_{iA}$  de l'équation de compatibilité (III.12), ajoutés aux constantes  $D_{i0}$  est aisément déterminé:

$$D_{1A} = \frac{\Delta}{L_2}, \quad D_{2A} = -\frac{\Delta}{L_2} - \frac{\Delta}{L_3} \quad \text{et} \quad D_{3A} = \frac{\Delta}{L_3}.$$

Et d'une façon l'équation (III.32) prend la forme :

$$D_{i0} = \sum_k \left[ \int_{L_k} \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} \cdot dx + \beta_k \cdot \int_{L_k} \frac{V_0 \cdot v_i}{GA} \cdot dx + \int_{L_k} \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} \cdot dx \right] + \sum \left( \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{L_k} + \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{L_{k+1}} \right)$$



## **IV. Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des déplacements :**

### **IV.1 Introduction :**

La position déformée est une position d'équilibre pour toute structure élastique (Hyp. C', Chap. I). Pour un portique, la position déformée est définie si on connaît les déplacements – rotations et translations – de chaque nœud, à cause de l'interdépendance qui existe entre les forces et déplacements pour les structures hyperstatiques, on peut trouver les moments fléchissant pour chaque barres et, donc tracer les diagrammes des efforts. La méthode des déplacements prend comme inconnues ces déplacements et se propose de trouver les moyens de les déterminer.

Pour arriver à ce but la méthode des déplacements part du principe de remplacer la structure initiale par une autre structure équivalente – en introduisant des déplacements dans la première pour la rendre totalement bloquée –, ce qui permet de calculer les efforts engendrés dans ses barres pour n'importe quel déplacement donné à un nœud quelconque. Pour identifier les inconnues, l'esquisse de la déformée doit indiquer où les nœuds subissent des déplacements qui ne sont pas connus a priori. Pour pouvoir exprimer les conditions d'équilibre, il faut dans un premier temps les empêcher de se réaliser et bloquer les nœuds correspondants.

Contrairement à la méthode des forces où les inconnues du problème sont les forces de liaisons hyperstatiques, dans la méthode des déplacements, les inconnues se trouvent dans des nœuds, des points particuliers de la structure, sur appuis à l'extrémité des barres ou à la jonction de plusieurs barres.

### **IV.2 Déplacements inconnues et degré d'indétermination cinématique**

Quand une structure est chargée, des points spécifiques appelés nœuds vont subir une translation ou une rotation inconnues (inconnues cinématiques), Figure IV.1.

Les déplacements inconnus sont généralement situés à :

- Des appuis simples et articulés qui permettent une rotation, Fig. IV.1.a-b.
- L'extrémité d'un élément en porte-à-faux, qui possède à la fois une translation et

une rotation, Fig. IV.1.b.

- Et aux noeuds intermédiaires des portiques, qui possèdent à la fois une translation et une rotation, Fig. IV.1.c.
- En 2 dimensions, comme les structures présentées dans la figure IV.1.a-c, chaque nœud peut avoir un maximum de 2 translations et 1 rotation ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\theta$ ). Pour le portique de la figure IV.1.c; si  $\Delta_B = \Delta_C$ , alors ceux-ci ne compte que 1 inconnue.

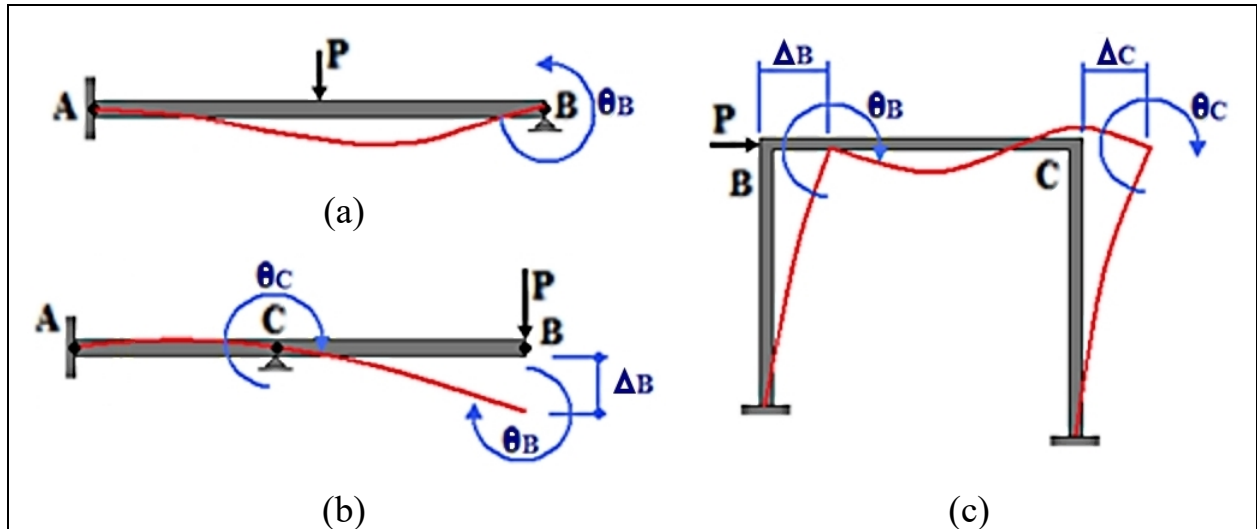


Figure IV.1. Différents Types de translations et rotations dans les barres constituant le d.d.l

Le nombre de degrés de liberté « *ddl* » de la structure (généralement en portique) est égale à la somme des nombres de translations et rotations possibles dans la structure, ces déplacements doivent être inconnus et indépendants. Les déplacements inconnus dans ce cas sont appelés inconnues cinématiques.

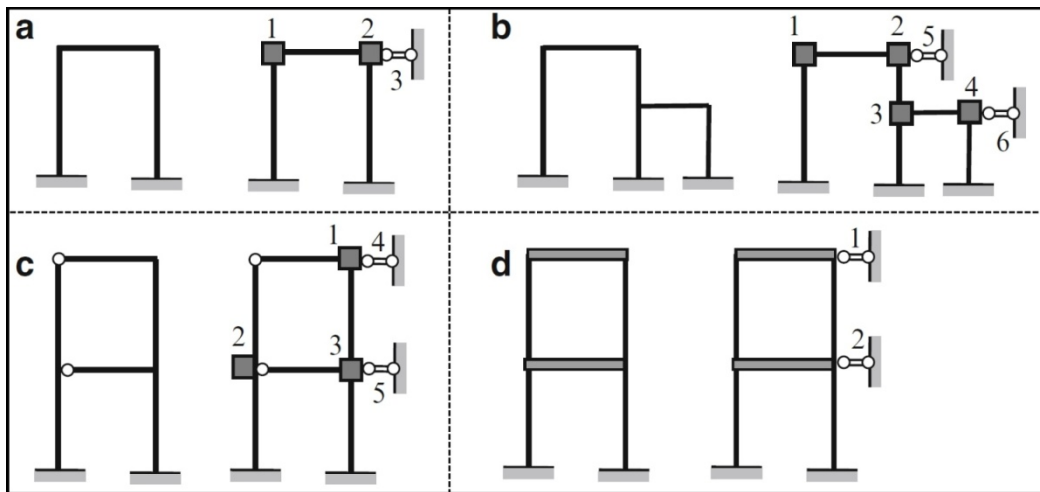
#### IV.2.1 Degré d'indétermination cinématique d'une structure (*m*) :

Une structure est dite « cinématiquement déterminée » lorsque toutes les inconnues cinématiques sont imposées nulles, c'est-à-dire lorsqu'elle est **entièrement bloquée** via-à-vis aux mouvements possibles de ses nœuds. Dans le cas contraire, lorsque certains déplacements d'un ou plusieurs nœuds ne sont pas bloqués (donc inconnus), la structure est dite « cinématiquement indéterminée ».

A partir d'une structure initiale, la structure primaire  $C_0$  de la méthode de déplacement est obtenue en ajoutant des liaisons supplémentaires pour empêcher les rotations et les translations indépendantes de tous les nœuds rigides. Ces liaisons

ajoutées sont représentées par les carrés ombrés (sorte d'encastrement) et articulations, respectivement. Les structures primaires de certaines structures initiales sont illustrées à la figure IV.2.

Le « degré d'indétermination cinématique  $m$  » d'une structure est égal au nombre total de blocages simples nécessaires pour la rendre cinématiquement déterminée (entièrement bloquée). Chaque blocage simple supprime une composante de déplacement inconnu et donc un degré de liberté du système, c-à-d ( $m=ddl$ ).



**Figure IV.2 Exemples de structures primaires et ddl associés.**

Les inconnues primaires  $D_i$  ( $i=1 ; 2 ; \dots ; m$ ) représentent les déplacements des liaisons introduites (angles de rotations et/ou translations de différents nœuds d'un portique). Le nombre d'inconnues primaires,  $m$ , pour chaque structure est égal au degré de son indétermination cinématique.

**IV.2.2 Inconnues de la méthode des déplacements (calcul théorique du ddl)**

Le nombre de translations et de rotations inconnues dans les nœuds sont les inconnues du problème, il représente à la fois le nombre de degrés de liberté de la structure «  $ddl$  ».

Le nombre de degrés de liberté «  $ddl$  » de la structure (généralement en portique) est égale à la somme des nombres de translations et rotations possibles dans la structure:

$$ddl = l_r + l_t$$

$l_r$  : le nombre de rotations d'un portique est égal au nombre de nœuds intermédiaires rigides ( $l_r$  nœuds intermédiaires rigides),

$l_t$  : le nombre de translations indépendantes possibles, il est donné par la formule:

$$l_t = 2n - (b + r) \quad (IV.1)$$

Avec :

$n$  Nombre total de noeuds (intermédiaires et appuis).

$b$  Nombre de barres.

$r$  Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

### Exemple IV.1:

Dans la structure de figure IV.3 :  $l_t = 2(5) - (4+6) \rightarrow l_t = 0$ ,  $l_r = 2 \rightarrow ddl = 2$ ,  $h=5$

Dans la structure de figure IV.4 :  $l_t = 2(5) - (4+5) \rightarrow l_t = 1$ ,  $l_r = 2 \rightarrow ddl = 3$ ,  $h=4$

### IV.2.3 Classes des structures (calcul intuitive du ddl) :

La méthode étant basée sur les déplacements des nœuds, les structures considérées sont classées en fonction des possibilités de déplacement de leurs nœuds, soient des nœuds fixes ou des nœuds déplaçables, on distingue deux catégories :

#### IV.2.3.1 Structures à nœuds fixes ou à nœuds non déplaçables :

Dans de telles structures (Figure IV.3.a), les nœuds ne peuvent subir que des rotations (Figure IV.3.b), nous pouvons examiner chaque nœud individuellement pour évaluer le nombre total de degrés de liberté dans notre système :

**Nœuds A et B** : ne peut pas se déplacer horizontalement ou verticalement et ne peut pas tourner en raison d'encastrement à cet endroit, donc le  $ddl = 0$ .

**Nœud C** : ne peut pas se déplacer horizontalement ou verticalement à cause de l'articulation qui se trouve à cet endroit. Il peut tourner, et aura une rotation de  $\theta_C$  comme le montre la figure IV.3.b, puisque cette rotation est appliquée sur une articulation d'où le moment est nul, elle ne sera pas inclut dans la méthode, donc le

$ddl = 0$ .

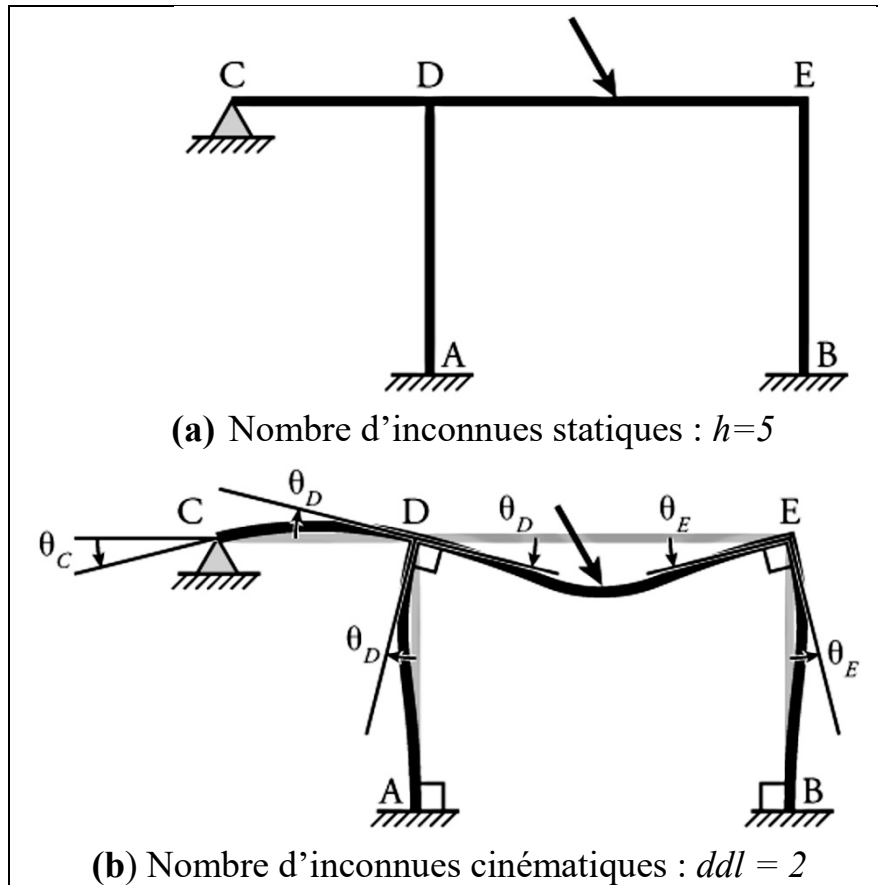


Figure IV.3 Structure à nœuds fixes,  $h=5$ ,  $ddl=2$

**Nœud D** : ne peut pas se déplacer horizontalement en raison de la contrainte exercée par l'élément CD qui est retenu horizontalement par l'articulation au point C (rappelons que nous considérons que les éléments du portique sont rigides axialement). Le nœud D ne peut pas se déplacer verticalement en raison de la retenue assurée par l'élément AD qui est retenue verticalement par l'encastrement au nœud A. Il peut tourner, et aura une rotation de  $\theta_D$  comme indiqué sur la figure IV.3.b. La même rotation est appliquée aux extrémités des trois éléments qui s'encadrent dans le nœud D (AD, CD et DE), donc le  $ddl = 1$ .

**Nœud E** : ne peut pas se déplacer horizontalement en raison de la fixation fournie par l'élément DE qui est retenu horizontalement par l'élément CD qui est retenu horizontalement par l'articulation au point C. Le nœud E ne peut pas se déplacer verticalement en raison de la retenue fournie par l'élément BE qui est retenue verticalement par l'encastrement au nœud B. Il peut tourner et aura une rotation de  $\theta_E$

comme le montre la figure IV.3.b. La même rotation est appliquée aux extrémités des deux éléments qui s'encadrent dans le nœud E (BE et DE), donc le  $ddl=1$ .

En additionnant tous les  $ddl$  de chaque nœud, nous voyons que cette structure a trois Degré De Libertés ( $ddl=2$ ) au total:  $\theta_D$  et  $\theta_E$ . Donc, pour une l'analyse par la méthode des déplacements, il faudrait résoudre un système de deux équations et deux inconnues. Si nous avons utilisé la méthode des forces pour analyser cette structure, nous devons résoudre un système de cinq équations et cinq inconnues puisque la structure est statiquement indéterminée de degré  $h=5$ , c'est pratiquement impossible à faire à la main.

#### **IV.2.3.2 Structures à nœuds déplaçables :**

Ce sont des structures dont les nœuds ou certains nœuds subissent des translations en plus des rotations, Figure IV.4.a. Nous pouvons à nouveau examiner chaque nœud individuellement pour le portique la Figure IV.4.b pour évaluer le nombre total de degrés de liberté dans notre système :

**Nœuds A et B :** ne peut toujours pas se déplacer horizontalement ou verticalement et ne peut pas tourner en raison du d'encastrement à cet endroit, donc le  $ddl = 0$ .

**Nœud C :** ne peut pas se déplacer verticalement en raison d'appui simple à cet endroit; toutefois, il peut maintenant se déplacer horizontalement, car l'appui ou l'élément CD n'assure aucune retenue horizontale. Cette translation horizontale peut être appelée  $\Delta_{Cx}$  comme le montre la figure IV.4.b. Le nœud peut également tourner, et aura une rotation de  $\theta_C$  comme le montre la figure, puisque cette rotation est appliquée sur une articulation d'où le moment est nul, elle ne sera pas inclut dans la méthode, donc le  $ddl = 1$ .

**Nœud D :** ne peut pas se déplacer verticalement en raison de la retenue fournie par l'élément AD qui est retenu verticalement par l'encastrement au nœud A ; toutefois, il peut maintenant se déplacer horizontalement puisque l'élément CD ne fournit plus de retenue horizontale. Cette translation horizontale peut être appelée  $\Delta_{Dx}$  comme le montre la figure IV.4.b; cependant, comme le membre CD est toujours rigide

axialement, la translation  $\Delta_{Dx}$  dans la direction horizontale doit être exactement égale à la translation horizontale du point C ( $\Delta_{Cx}$ ). Comme les points C et D se déplacent ensemble, on considère qu'ils ne représentent qu'un seul *ddl* (ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre). Ainsi, aucun nouveau *ddl* n'est ajouté au système en raison de la translation horizontale du point D. Le nœud D peut tourner, et aura une rotation de  $\theta_D$  comme le montre la figure IV.4.b (qui est un nouveau *ddl* indépendant). Total des *ddl* = 2, Total des *ddl* indépendants = 1.

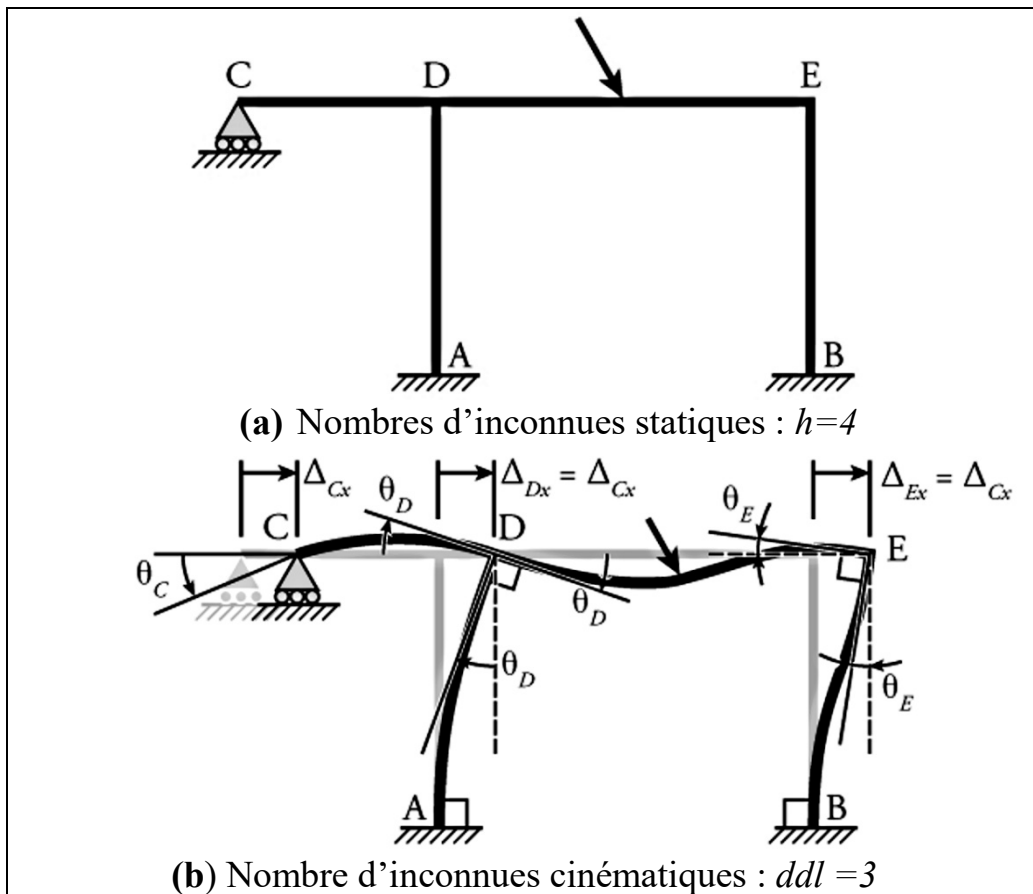


Figure IV.4 Structure à nœuds déplaçables,  $h=4$ ,  $ddl=3$

**Nœud E** : ne peut pas se déplacer verticalement en raison de la retenue fournie par l'élément BE qui est retenu verticalement par l'encastrement au nœud B. Comme le nœud D, le nœud E peut maintenant se translater horizontalement ( $\Delta_{Ex}$  comme le montre la figure), mais la quantité de translation horizontale est égale à la translation horizontale des points C et D ( $\Delta_{Cx}$  et  $\Delta_{Dx}$ ), donc cela ne constitue pas un nouveau *ddl* indépendant. Le nœud E peut pivoter, et aura une rotation de  $\theta_E$  comme indiqué sur la figure IV.4.b (qui est un nouveau *ddl* indépendant). Total des *ddl* = 2, Total des DDL

indépendants = 1.

En additionnant tous les ddl de chaque nœud, nous voyons que cette structure a quatre (ddl=3) total indépendants :  $\Delta_{Cx}$ ,  $\theta_D$  et  $\theta_E$ . Donc, pour une analyse par la méthode des déplacements, nous aurions besoin de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Les portiques à nœuds déplaçables sont plus difficiles à résoudre en utilisant la méthode déplacements que les cadres à nœuds fixes.

### **IV.3 Principe de la méthode des déplacements :**

Dans le cas de la méthode des forces, les inconnues sont les forces aux liaisons surabondantes (inconnues statiques). En connaissant ces forces, nous pouvons trouver la répartition des forces internes et, après cela, les déplacements en tout point d'une structure.

L'approche fondamentale de la méthode des *déplacements* est l'inverse: nous calculons d'abord les *déplacements aux* extrémités des éléments, puis les forces internes dans ces éléments. Ainsi, les principales inconnues dans la méthode des *déplacements* sont les *déplacements* (inconnus cinématiques).

L'analyse d'une structure par la méthode de déplacements est basée sur les hypothèses suivantes:

- Les déformations des éléments de la structure causées par les efforts normales et transversales peuvent être négligées, les moments fléchissant sont prépondérants.
- La différence entre la longueur de l'élément déformable et sa longueur initiale peut être négligée.

#### ***IV.3.1 Les étapes d'analyse par la méthode des déplacements :***

- a. On détermine la structure primaire  $C_0$  :** afin d'obtenir une structure cinématiquement déterminée, c.-à-d. totalement bloquée on ajoute des liaisons de blocage (aux nœuds à déplacements inconnus) à la structure initiale, Fig. IV.5.a-c;
- **Dans le cas d'une structure non déplaçable:** on bloque tous les nœuds intermédiaires de la structure réelle (ajoutons de liaison empêchant la rotation de



noeud).

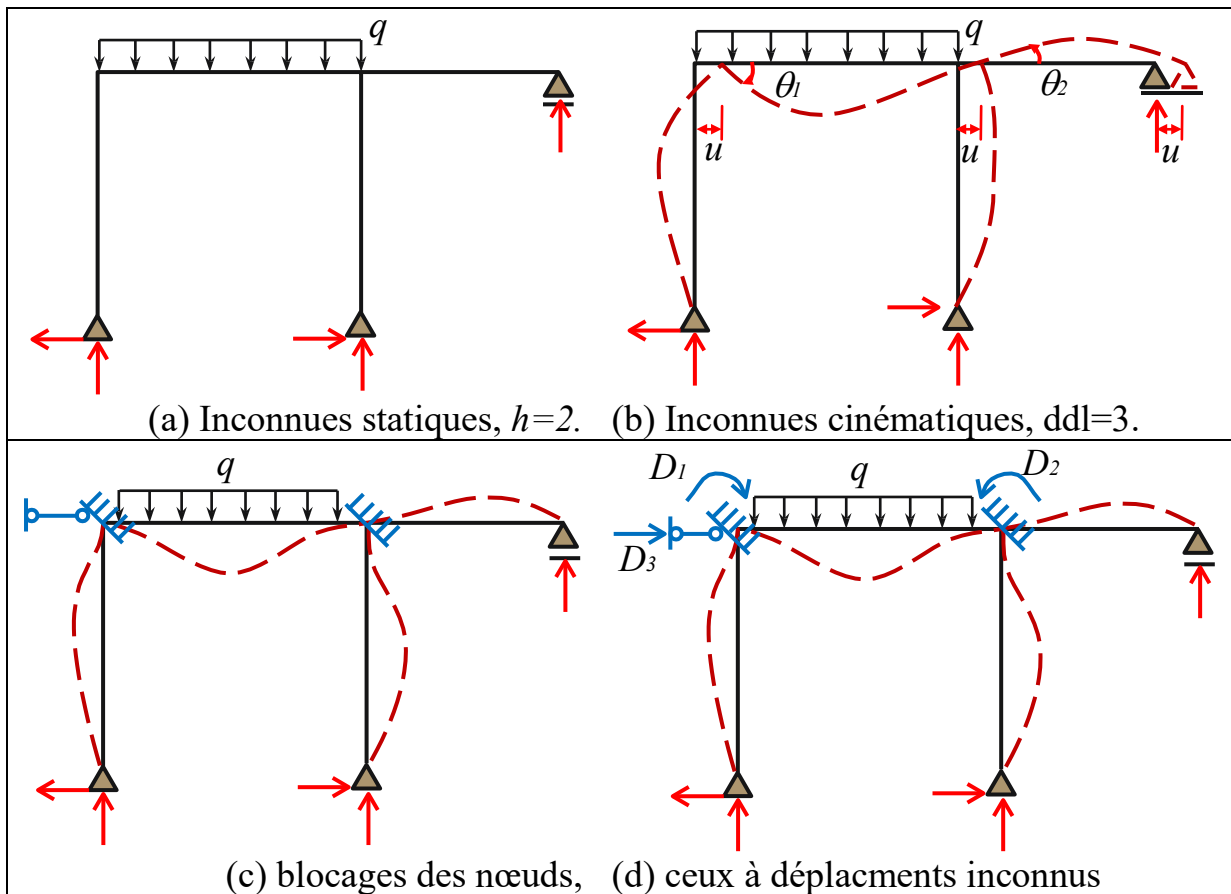


Figure IV.5 blocages des nœuds dans une structure à nœuds déplaçables

– Dans le cas d’une structure à nœuds déplaçables, (Figure IV.5.a-b): on bloque les nœuds intermédiaires (ajoutons de liaison empêchant la rotation de nœud) et en bloque aussi les translations (ajoutons de liaison empêchant la translation de nœud), Figure IV.5.c. Chaque barre de la structure travaille seul comme le modèle bi-encasté ou encasté-articulé.

Afin d’obtenir un système équivalent à la structure initiale, on applique des déplacements (inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (Figure IV.5.d).

**b. Les inconnues du problème dans le cas considéré (Figure IV.5.d) sont :**

$D_1$ : rotation du nœud 1

$D_2$ : rotation du nœud 2

$D_3$ : translation horizontale des nœuds 1, 2 et 3 (en bloc), la variation de longueur des barres 1-2 et 1-3 étant négligée (hypothèse).

Les indices réfèrent aux degrés de liberté et non pas aux nœuds du portique.

c. **Obtenir les déplacements inconnus ( $D_1, D_2, D_3$ )** : dans le portique original, il n'y a pas de liaisons sur les nœuds et donc pas de réactions communes aux nœuds. Logiquement, si les deux structures devaient être équivalentes, alors ces nouvelles réactions doivent être nulles ( $R_1=0, R_2=0, R_3=0$ ). Et c'est l'équation d'équilibre à partir de laquelle nous trouverons les valeurs des déplacements :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{1P} + k_{11} \cdot D_1 + k_{12} \cdot D_2 + k_{13} \cdot D_3 = 0 \\ R_2 &= R_{2P} + k_{21} \cdot D_1 + k_{22} \cdot D_2 + k_{23} \cdot D_3 = 0 \\ R_3 &= R_{3P} + k_{31} \cdot D_1 + k_{32} \cdot D_2 + k_{33} \cdot D_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

D'où :

$D_j$  est le déplacement sur la liaison  $i$  due à la valeur réelle de la rotation  $j$ .

$k_{ij}$  est la réaction sur la liaison  $i$  due à la valeur unitaire de la rotation  $j$  ( $D_j=1$ ).

$k_{ij} \cdot D_j$  est la réaction sur la liaison  $i$  due à la valeur réelle de la rotation  $j$ .

$R_{iP}$  est la réaction due aux charges externes sur la liaison  $i$ .

Il reste à composer des diagrammes de moments internes à partir des déplacements unitaires et à calculer les réactions aux liaisons supplémentaires.

**Remarque :**

Pour terminer, on retient que la méthode des déplacements est caractérisée par :

- Le blocage des rotations des nœuds intermédiaires et des translations du portique.
- Donc un seul système de base est possible, une façon unique de mettre le problème en équations (de ce fait, la méthode est particulièrement indiquée pour le calcul automatique).
- Des liaisons ajoutées spéciales ; en effet,
- Les encastremets ajoutés supportent uniquement des moments et peuvent par conséquent subir des translations.
- Les liaisons de translation supportent seulement des forces suivant la liaison ajoutée.

#### **IV.4 Avantage de la méthode des déplacements :**

L'avantage prépondérant de la méthode des déplacements apparaît de manière éclatante dans l'exemple général de la figure IV.6.a. Cette structure est hyperstatique de degré  $h=10$ . Sa résolution par la méthode des forces requiert par conséquent 10 inconnues, associées à 10 conditions de compatibilité cinématique.

Cependant, la structure ne contient qu'un nœud; l'endroit où toutes les barres concourent. La rotation de ce nœud constitue l'unique inconnue cinématique nécessaire, si la structure est résolue par la méthode des déplacements. Dans ce genre de cas, la méthode des déplacements est nettement supérieure à la méthode des forces puisqu'elle réduit le nombre nécessaire d'inconnues de manière considérable.

De plus, la modification des conditions d'appui, des encastremets pour toutes les barres par exemple, n'affecte pas le nombre d'inconnues cinématiques nécessaires; ce qui n'est évidemment pas le cas dans la méthode des forces. Pour la structure de la figure IV.6(a), la condition d'équilibre en rotation du nœud s'exprime par une équation à une seule inconnue (IV.3.a). Les coefficients  $k_{11}$  et  $D_1$  sont présentés de manière qualitative à la figure IV.6(b). Les coefficients sont déterminés dans le système primaire, dans lequel l'inconnue  $D_1$  est nulle, c'est-à-dire avec le nœud bloqué en rotation. Le coefficient  $R_{1P}$  représente, par conséquent, le moment dû à la charge extérieure  $P$  à l'encastrement d'une barre bi-encastree.

$$R_{1P} + k_{11} \cdot D_1 = 0 \qquad \qquad \qquad \text{(IV.3.a)}$$

Le coefficient  $k_{11}$  quant à lui, représente le moment de rappel agissant sur le nœud lorsque celui-ci subit une rotation unitaire. Il est constitué de la somme ( $\sum k_i$ ) des contributions de chaque. Les contributions  $k_i$  des barres correspondent à leur rigidité. Il faut remarquer que, logiquement, elles «tournent» toutes dans le même sens. La valeur de l'inconnue cinématique  $D_1$  est déterminée à partir de l'équation d'équilibre du nœud. La résolution conduit à l'expression générale de l'inconnue selon l'équation (IV.3.b):

$$M_f^0 + M_1 \cdot D_1 = R_{1P} + \sum k_i \cdot D_1 = 0 \rightarrow D_1 = -\frac{R_{1P}}{\sum k_i} \quad (\text{IV.3.a})$$

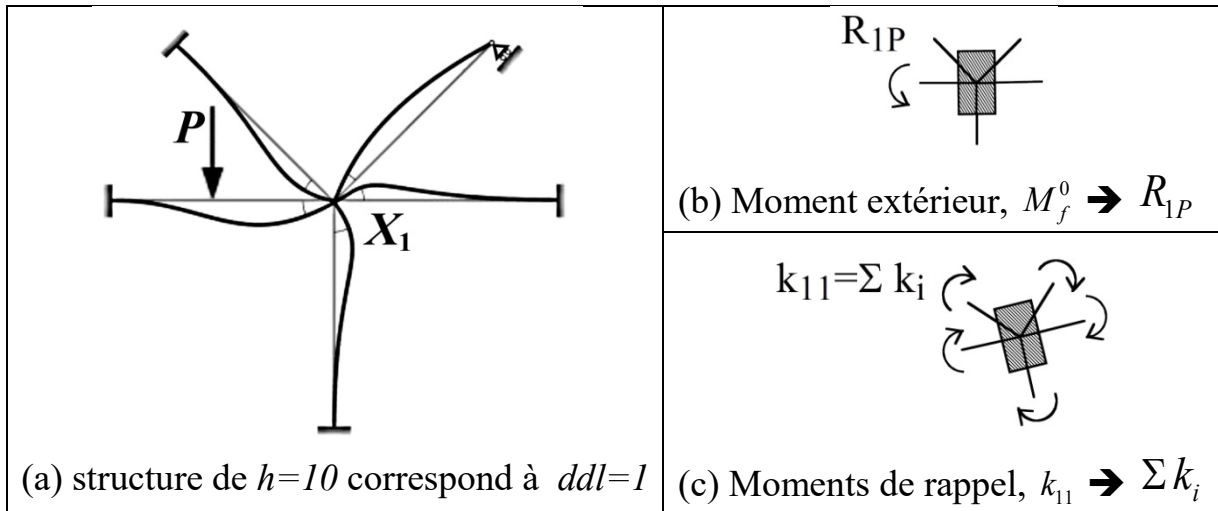


Figure IV.6. Structure hyperstatique de  $h=10$ , avec une seule inconnue cinématique,  $ddl=1$ .

Logiquement, la rotation  $D_1$  du nœud est directement proportionnelle à l'effet ( $R_{1P}$ ) de la charge extérieure et inversement proportionnelle à la somme des rigidités ( $\sum k_i$ ) des barres qui y aboutissent. Conformément à l'équation (IV.3.c), les moments de flexion s'obtiennent par superposition.

Dans les barres non chargées aboutissant au nœud, les moments de flexion  $M_f^0$  dus aux charges extérieures sont évidemment nuls. Par conséquent, dans ces barres, les moments de flexions totaux  $M_f$ , à l'endroit du nœud s'obtiennent par l'équation (IV.3.c):

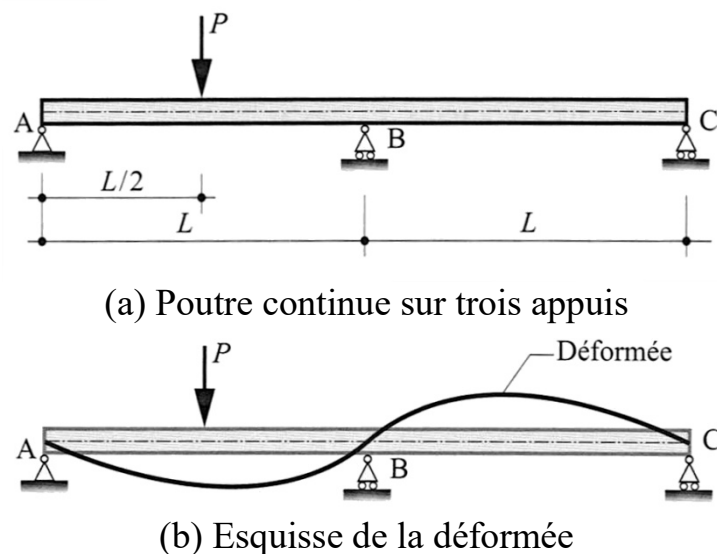
$$M_f = M_f^0 + M_1 \cdot D_1 = 0 + k_i \cdot D_1 = R_{1P} \cdot \frac{k_i}{\sum k_i} \quad (\text{IV.3.c})$$

Conformément à l'équation (IV.3.b), le moment de flexion à l'extrémité, liée au nœud, des barres non chargées est directement proportionnel à leur rigidité ( $\sum k_i$ ). On retrouve ici une règle générale des systèmes hyperstatiques; *les sollicitations sont proportionnelles à la rigidité des éléments*. Cette propriété s'explique aisément en considérant que la rotation est la même pour toutes les barres qui aboutissent au nœud, c'est l'inconnue  $D_1$  de l'équation (IV.3.c). Il est donc logique que les barres les plus rigides mobilisent plus de moments, ou, si l'on préfère, soient les plus sollicitées.

### IV.5 Exemple de poutre cinématiquement indéterminée de premier degré

Dans la méthode des déplacements, les inconnues sont des déplacements. Le terme «déplacements» doit également être compris dans son sens général, les inconnues pouvant également être des rotations ou des translations. Concrètement, des conditions supplémentaires d'équilibre sont exprimées pour résoudre le système.

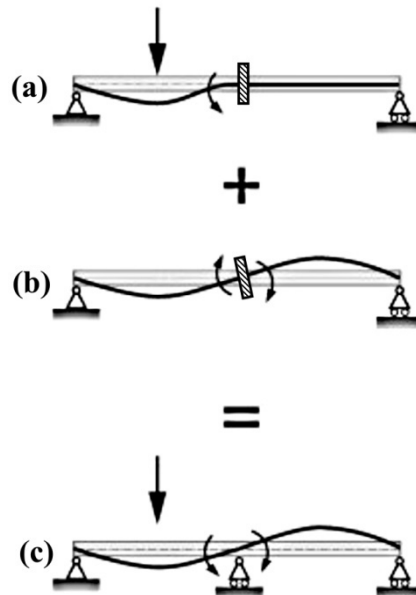
Pour illustrer les grandes lignes de la méthode et en acquérir une compréhension intuitive, on commence par examiner qualitativement un exemple simple. Considérons la poutre continue sur trois appuis, soumise à une charge concentrée à mi-portée de la première travée, représentée à la figure IV.7(a). A l'évidence, le système est une fois hyperstatique.



**Figure IV.7 (a) Poutre à trois appuis, (b) mise en évidence des déplacements.**

La déformée du système est esquissée à la figure IV.7(b). Dans son état déformé, le système doit respecter l'équilibre, qui est une propriété fondamentale des structures. L'observation de la déformée permet d'identifier une condition d'équilibre à exprimer (Fig. IV.7.a); ici l'équilibre en rotation du nœud sur l'appui intermédiaire.

Ici, la rotation de la poutre sur l'appui intermédiaire constitue l'inconnue. Pour utiliser cette propriété afin de résoudre le système, il faut procéder en deux étapes, en imaginant un blocage du nœud sur l'appui intermédiaire, Fig. IV.8.a-c:



*Figure IV.8 Principe de résolution dans la méthode des déplacements*

- **Tout d'abord, la rotation du nœud étant empêchée :**

La déformation de la poutre soumise à la charge concentrée y imprime un moment de flexion, Fig. IV.8.(a).

- **Ensuite, l'effet de la rotation du nœud est considéré :**

Cette rotation, inconnue (Fig. IV.8.b), mobilise des moments de rappel, ces moments de rappel proviennent de la déformation de la poutre et peuvent être matérialisés en isolant le nœud. Plus précisément, il s'agit de moments de flexion qui agissent sur le nœud et qui ont tendance à le ramener à sa position non déformée (Fig. IV.8.c). Soulignons que dans cette deuxième étape, la charge extérieure n'est pas considérée. Dès que les moments de rappel compensent exactement le moment dû à la charge extérieure, l'équilibre est atteint. La déformée complète est alors constituée par la superposition (Fig. IV.8.c) de celles des deux étapes avec lesquelles le système a été traité.

Le principe de la méthode des déplacements est aussi simple que cela: la rotation du nœud sur l'appui intermédiaire de la poutre continue sur trois appuis correspond à celle qui permet de réaliser l'équilibre en rotation du nœud après son blocage (virtuel). En d'autres termes, on bloque le nœud et on considère le moment qui le déstabilise.

**IV.5.1 Principe de résolution du problème :**

Le principe de résolution exposé avec l'exemple introductif (Figure IV.8) se généralise facilement. Avec des structures plus complexes, seul le nombre de conditions d'équilibre imposées est plus élevé. Il faut encore noter que, contrairement au cas de la méthode des forces, les inconnues ne peuvent pas être choisies librement. D'un point de vue pratique, la démarche reste identique, mais doit être répétée à plusieurs reprises. Concrètement, pour chaque condition d'équilibre, on procède de la même façon: après le blocage (imaginé) du déplacement concerné et la détermination de l'effort associé dû aux forces extérieures (qui tend à l'actionner), on cherche quel déplacement permet de réaliser l'équilibre.

Les coefficients des équations d'équilibre sont déterminés dans la structure primaire, où tous les degrés de liberté sont bloqués. Les inconnues y sont appliquées une à une, avec une valeur unitaire. Cependant, si l'inconnue a bien tendance à mobiliser des forces de rappel pour réaliser l'équilibre du nœud concerné, elle a généralement aussi une influence sur les autres nœuds bloqués. Par conséquent, les conditions d'équilibre doivent tenir compte des effets de toutes les inconnues. Mathématiquement, elles s'expriment par le système linéaire d'équations (IV.4.a):

$$\sum_j k_{ij} \cdot D_j + R_{iP} = R_i \quad (\text{IV.4.a})$$

ou bien encore sous forme matricielle selon l'équation (IV.4.b):

$$[K] \cdot \{D\} + \{R_p\} = [R] \quad (\text{IV.4.b})$$

Le vecteur  $\{R_p\}$  est le vecteur des réactions dus aux charges externes dans la structure primaire qui est constituée des coefficients  $R_{iP}$ . La matrice  $[K]$  est la matrice de rigidité du système. Elle réunit les coefficients  $k_{ij}$  qui sont définis de la manière suivante:

$k_{ij}$  représente, dans la structure primaire, la rotation associée au déplacement inconnue  $D_j$  dû à l'action *unique et unitaire* de l'inconnue  $D_j$ .

**IV.5.2 Mise en évidence des inconnues**

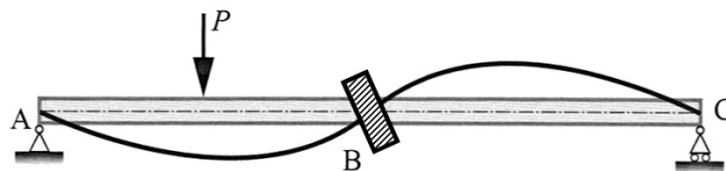
L'examen de la déformée de la figure IV.7(b) permet d'identifier la rotation du nœud au-dessus de l'appui *B* comme inconnue cinématique. Concrètement, la résolution du système consiste à déterminer la valeur de la rotation inconnue ( $X_1$ ) en exprimant l'équilibre en rotation du nœud sur l'appui *B* comme condition.

Les réactions associées à cette inconnue sont les moments qui agissent sur le nœud considéré. D'un point de vue pratique, pour pouvoir exprimer la condition d'équilibre, il faut dans un premier temps l'empêcher de se réaliser. On y parvient en imaginant le blocage du nœud concerné.

**IV.5.3 Structure primaire**

Dans la méthode des déplacements, la structure primaire est issue de la structure initiale par les blocages effectués dans le but d'exprimer les conditions d'équilibre.

Par définition, la structure primaire, dans laquelle se déroule tout le processus de résolution, est la structure où l'inconnu est nul. Dans le cas de la poutre continue sur trois appuis, la structure primaire de la méthode des déplacements est constitué de deux poutres encastrees-appuyées et juxtaposées, issues du blocage de la rotation du nœud sur l'appui intermédiaire *B*. Cette structure est représentée à la figure IV.9.



**Fig. IV.9 La structure primaire de la méthode des déplacements est issue du blocage du nœud sur l'appui intermédiaire.**

Remarquons que, contrairement au cas de la méthode des forces, la structure primaire est ici hyperstatique et elle est même hyperstatique d'un degré supérieur à celui de la structure initiale.



#### **IV.5.4 Condition d'équilibre**

Dans l'exemple précédant figure IV.8, le système a été résolu en exprimant une condition d'équilibre en rotation pour le nœud situé sur l'appui intermédiaire. En fait, soumis à l'effet de la charge extérieure, et à partir de la position non déformée, ce nœud tourne jusqu'à ce que l'équilibre soit réalisé. Etant donné que la rotation de ce nœud n'a a priori pas de valeur connue, comme zéro par exemple, elle doit obligatoirement être utilisée comme inconnue cinématique lors de la résolution par la méthode des déplacements. C'est une différence essentielle par rapport à la méthode des forces; dans la méthode des déplacements, les inconnues cinématiques sont généralement imposées et il n'y a pas de choix possible entre plusieurs possibilités.

La condition d'équilibre concerne les moments sur le nœud au-dessus de l'appui intermédiaire  $B$ , dans la position déformée. Mathématiquement, conformément à la relation générale (IV.3), elle s'exprime par l'équation linéaire à une inconnue suivante:

$$R_1 = R_{1P} + k_{11} \cdot D_1 = 0 \quad (\text{IV.5})$$

L'inconnue  $D_1$  est la rotation du nœud sur l'appui  $B$ . L'équation précédente traduit le fait que les moments de rappel mobilisés par la rotation du nœud ( $k_{11} \cdot D_1$ ) doivent exactement équilibrer le moment dû à la charge extérieure ( $R_{1P}$ ) qui déstabiliserait le nœud si sa rotation était bloquée. La résolution de l'équation (IV.9) permet donc d'ajuster la rotation du nœud sur l'appui  $B$  afin de réaliser son équilibre. Le principe de résolution expliqué, il reste à déterminer les coefficients  $R_{1P}$  et  $k_{11}$  de l'équation (IV.5).

#### **IV.5.5 Coefficient $R_{1P}$**

Dans un premier temps, il faut déterminer l'effet de la charge concentrée  $P$  sur le nœud  $B$  dans le système fondamental. Comme le montre la figure IV.10, le coefficient  $R_{1P}$  représente un moment déstabilisant qui a tendance à faire tourner le nœud dans le sens trigonométrique. Plus précisément, le coefficient  $R_{1P}$  représente le moment sur le nœud au-dessus de l'appui  $B$  dans la structure primaire sous l'effet des causes extérieures, Figure IV.10. Ici, il s'agit du moment à l'encastrement d'une poutre

encastrée-appuyée soumise à une charge concentrée à mi-portée. Sa valeur, donnée à l'équation (IV.6), peut être déterminée par la méthode des forces, Tableau IV.1.

$$R_{1P} = \frac{3}{16} PL \tag{IV.6}$$

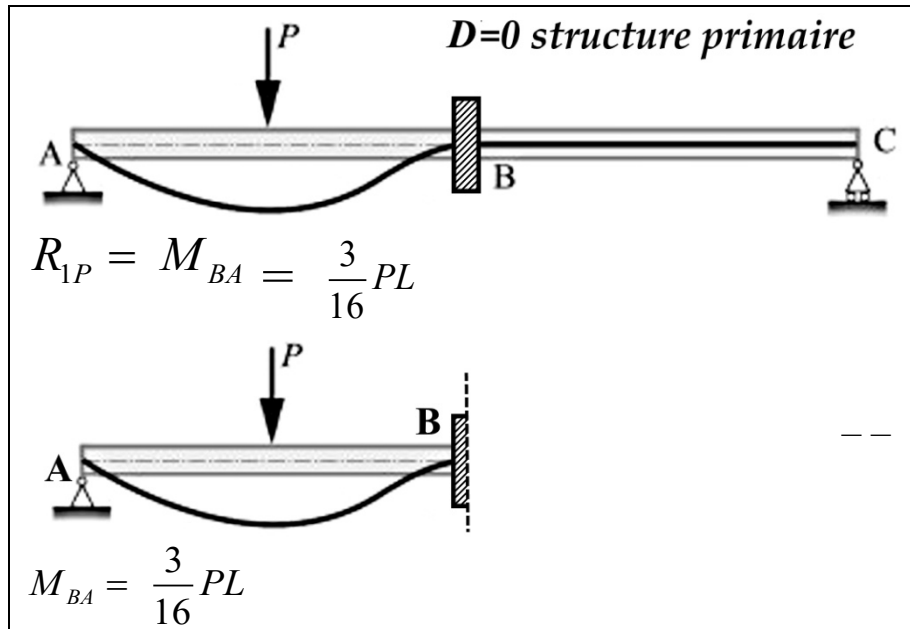


Fig. IV.10.a. Le coefficient  $R_{1P}$  représente le moment agissant sur le noeud au-dessus de l'appui B sous l'effet de la charge concentrée P, avec le noeud B bloqué.

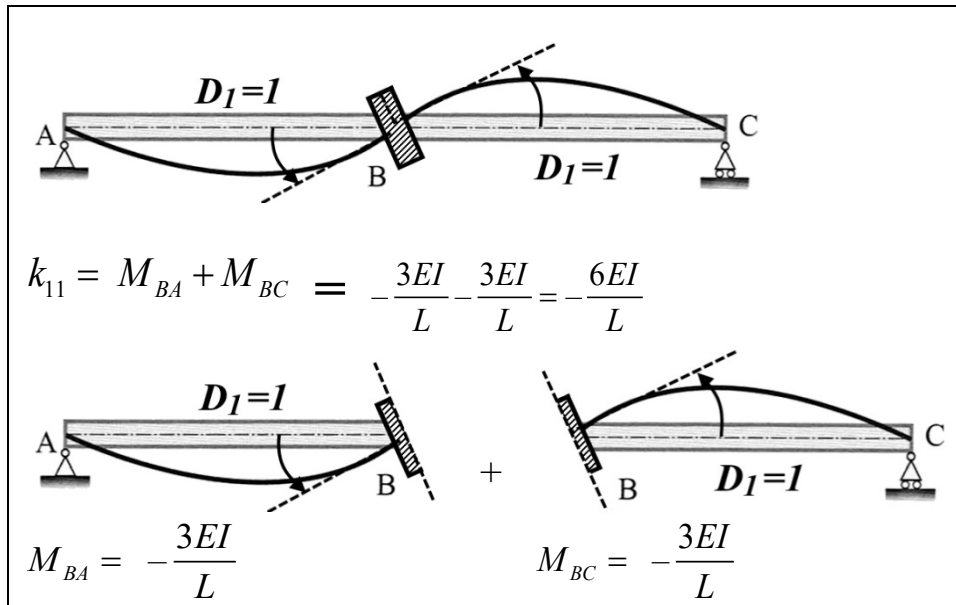
Table IV.1 : Efforts et réactions dans une poutre articulée – encastrée soumise à une charge concentrée à mi-portée.

Charge concentrée	Réactions	Effort Tranchant	Moment de flexion
	$R_A = \frac{5P}{16}$  $R_B = \frac{11P}{16}$	$V_{x(AC)} = \frac{5P}{16}$  $V_{x(CB)} = -\frac{11P}{16}$	$M_{x(AC)} = \frac{5Px}{16}$ $M_{x(CB)} = PL\left(\frac{1}{2} - \frac{11x}{16L}\right)$ $M_c = \frac{5}{32} PL$ $M_{\max} = M_B = -\frac{3}{16} PL$

#### IV.5.6 Coefficient $k_{11}$

Ensuite, il faut déterminer la quantité de moments de rappel mobilisée par l'application d'une rotation unitaire ( $D_I=1$ ) du noeud sur l'appui intermédiaire B.

Comme le montre la figure IV.11, le coefficient  $k_{11}$  représente la somme des moments de rappel qui agissent sur le nœud au-dessus de l'appui B. Plus précisément, le coefficient  $k_{11}$  représente le moment total qui agit sur le nœud dans la structure primaire sous l'effet de l'inconnue  $D_1$  unique et unitaire ( $D_1=1$ ).



**Fig. IV.10.b.** Le coefficient  $k_{11}$  représente le moment de rappel total qui agit sur le nœud au-dessus de l'appui B sous l'effet de l'inconnue unitaire  $D_1=1$ .

Ici, il s'agit de la somme des moments à l'extrémité de deux poutres simples, soumises à une rotation unitaire de cette extrémité. Les valeurs peuvent être déterminées à l'aide du principe des travaux virtuels ou par la méthode des paramètres initiaux (Chap. II), le résumé des résultats est donné dans le Tableau IV.2 :

**Table IV.2 : Réactions dans une poutre articulée – encastree soumise à une rotation imposée à l'appui encastree.**

Cas de charges	Reactions d'appui	Expressions des reactions
		$M_A = \frac{3EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2}$

Au final, la valeur du coefficient  $k_{11}$  se détermine donc selon l'équation (IV.7):

$$k_{11} = -\frac{3EI}{L} - \frac{3EI}{L} = -\frac{6EI}{L} \tag{IV.7}$$

### **IV.5.7 Résolution de l'équation d'équilibre**

Les valeurs des coefficients  $R_{1P}$  et  $k_{11}$  ayant été déterminées, elles peuvent être introduites dans l'équation d'équilibre (IV.5). L'inconnue prend alors la valeur donnée à l'équation (IV.8):

$$D_1 = -\frac{R_{1P}}{k_{11}} = \frac{PL^2}{32EI} \quad (\text{IV.8})$$

En résumé, c'est avec cette amplitude que la rotation du nœud sur l'appui intermédiaire  $B$  parvient à équilibrer le moment déstabilisant dû à la charge extérieure  $P$ . Le signe positif obtenu dans l'équation (IV.8) indique que le véritable sens de la rotation du nœud sur l'appui intermédiaire est le même que celui choisi intuitivement (ou arbitrairement) pour l'inconnue unitaire  $D_1$ .

### **IV.5.8 Tracé du diagramme de moment de flexion**

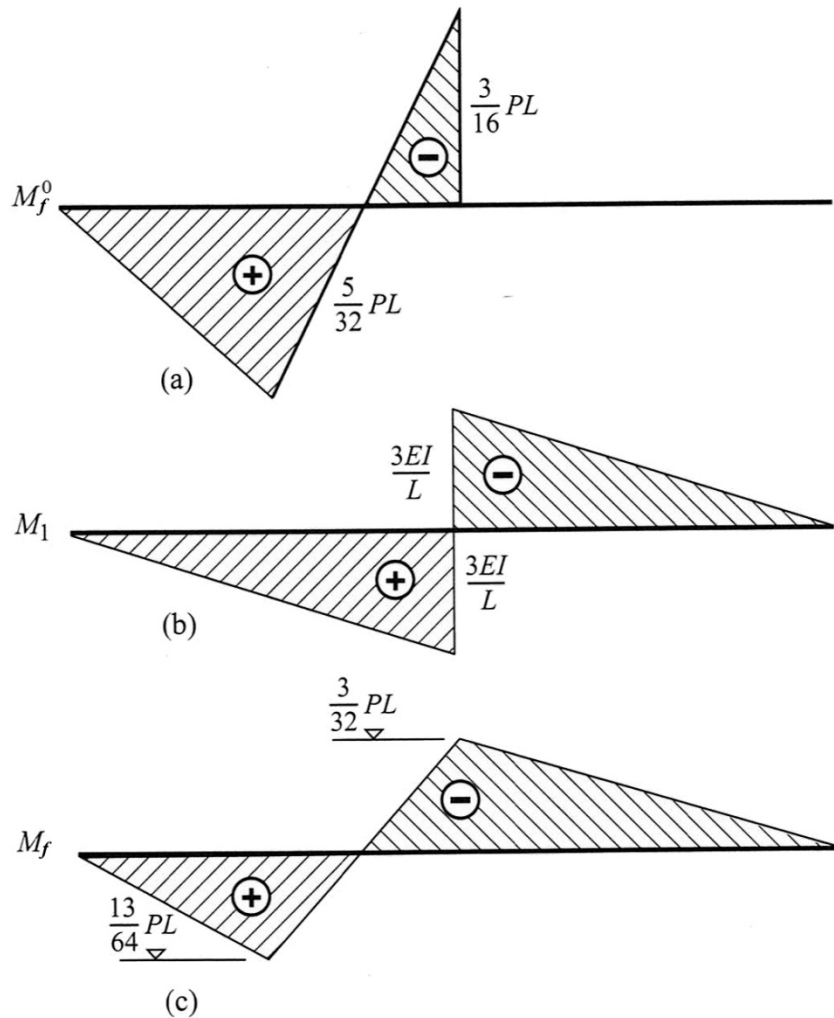
Les inconnues  $D_j$  ayant été déterminées selon les systèmes linéaires d'équations (IV.4.a) et (IV.4.a), la structure est résolue et il reste à tracer les diagrammes des efforts intérieurs. Les efforts intérieurs s'obtiennent par superposition, en tenant compte de toutes les inconnues, la superposition s'effectue selon l'équation (IV.9) :

$$M_f = M_f^0 + M_1 \cdot D_1 = R_{1P} + k_{11} \cdot D_1 = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Le diagramme des moments de flexion  $M_f^0$  dus à la charge extérieure est représenté à la figure IV.11(a). Il faut remarquer que ce diagramme est établi dans la structure primaire où la rotation du nœud sur l'appui intermédiaire est bloquée. Par conséquent, sur la première travée, c'est le diagramme des moments de flexion d'une poutre encastree-appuyée, soumise à une charge concentrée à mi-portée.

Le diagramme des moments de flexion  $M_1$  dus à une rotation unitaire du nœud ( $D_1=1$ ) est représenté à la figure IV.11(b). Sur chaque travée, le diagramme correspond à celui d'une poutre simple soumise à un moment concentré de  $\frac{3EI}{L}$  à son extrémité. A ce stade, il faut remarquer que les diagrammes des moments de flexion

$M_f^0$  et  $M_1$  ne sont pas en équilibre sur le nœud au-dessus de l'appui intermédiaire.



**Figure IV.11.** Application du principe de superposition pour le tracé de  $M_f$ .

Bien que surprenants à première vue, ces diagrammes sont corrects car ils correspondent à des stades intermédiaires. Conformément à l'exemple introductif, c'est là l'essence même de la méthode des déplacements qui repose justement sur la combinaison des déséquilibres de chaque étape pour réaliser l'équilibre final. Le diagramme des moments de flexion totaux  $M_f$  s'obtient par la superposition des diagrammes selon l'équation (IV.9). Il se trouve à la figure IV.11(c). Remarquons enfin que le diagramme des moments totaux est partout en équilibre, conformément à la condition qui a été utilisée pour résoudre le système.

### **IV.5.9 Signes et sens positif**

Dans la méthode des déplacements, le sens positif est choisi arbitrairement. Cependant le choix du sens positif n'affecte pas le signe de l'inconnue obtenu par l'équation (IV.8) pour autant, et c'est *capital* que le sens positif soit conservé pour la détermination de tous les coefficients. En effet, le choix du sens positif opposé inverse le signe des deux coefficients ( $R_{IP}$  et  $k_{II}$  dans l'exemple précédent), laissant le signe de l'inconnue  $D_I$  inchangé.

Par conséquent, il faut bien distinguer deux choix arbitraires de signe positif (ou de sens); le premier choix concerne celui de l'inconnue et le deuxième concerne celui des déplacements ou des efforts qui lui sont associés. Il n'est pas nécessaire que ces choix coïncident : ils peuvent très bien être opposés. Il faut cependant bien prendre garde à conserver le même sens positif pour la détermination de tous les coefficients.

Dans la méthode des déplacements, il faut remarquer que le sens des efforts représentant les coefficients dépend de la nature des coefficients qui est prise en compte. La résolution ci-dessus est basée sur la considération de l'action des poutres sur le noeud. Il est pourtant également tout à fait possible d'utiliser la réaction du noeud sur les poutres pour exprimer l'équilibre du noeud. En vertu de l'égalité de l'action et de la réaction (première loi de *Newton*), ces deux formulations de l'équilibre sont équivalentes. Elles conduisent aux mêmes équations d'équilibre ; aux signes des coefficients près. Il faut toute fois relever qu'il est capital d'effectuer un choix de formulation et de s'y tenir strictement pour la suite pour la détermination de tous les coefficients. Il ne faut surtout pas mélanger les formulations au cours de la détermination des coefficients, sinon les signes relatifs sont perturbés. En ce qui concerne le sens positif des forces associées aux inconnues, il sera en général choisi de telle manière à ce que le signe des coefficients  $k_{ij}$  soit positif.

### **IV.5.10 Synthèse des procédures**

Cet exemple introductif résume la substance de la méthode des déplacements, il est essentiel pour sa compréhension qui, une fois acquise sur cette base, facilitera le

passage à l'application de la méthode.

En guise de synthèse, on peut retenir les étapes suivantes :

- esquisser la déformée pour identifier l'inconnue cinématique ;
- bloquer le nœud sur l'appui intermédiaire ;
- décomposer les effets (moments) sur le nœud ;
- déterminer la rotation du nœud nécessaire pour réaliser son équilibre.

#### **IV.6 Relations force-déplacement dans les barres hyperstatiques**

Comme nous venons de le voir, il reste à composer des diagrammes de moments internes à partir des déplacements unitaires et à calculer les réactions supplémentaires aux liaisons supplémentaires.

Le système de base est constitué de barres qui peuvent être :

- Encastrées aux deux extrémités
- Encastrées d'un côté et appuyées de l'autre

Ces barres sont sollicitées par :

- Les déplacements imposés
- Les charges extérieures

Le calcul de ces poutres peut être effectué par l'une des méthodes exposées précédemment comme la méthode des paramètres initiaux, la méthode des forces ou la formule des 3 moments ou toute autre méthode comme la méthode de la poutre conjuguée qui peut convenir dans ces cas.

Examinons à titre d'exemple le cas de la poutre encastrée à ses deux extrémités (bi-encastrée) soumise à une rotation de l'un de ses appuis (Figure IV.12.a), et le cas de la poutre encastrée-articulée soumise à une translation imposée à l'appui en articulation (Figure IV.12.b), on applique la méthode des paramètres initiaux dans les calculs des réactions.

**a) barre bi-encastée avec angle imposé à gauche:**

On veut calculer les réactions. Soient  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  et  $M_B$  les composantes des réactions aux appuis  $A$  et  $B$  qui apparaissent sous l'action de  $r_A$ .

On a :

$$M_x = M_A + R_A x$$

$$EI y'' = -M_A - R_A x$$

$$EI y' = -M_A x - R_A x^2/2 + EI \theta_0$$

$$EI y = -M_A x^2/2 - R_A x^3/6 + EI \theta_0 x + EI y_0$$

Donc, les expressions des déplacements:

$$EI y' = + EI \theta_0 - M_A x - R_A x^2/2$$

$$EI y = + EI y_0 + EI \theta_0 x - M_A x^2/2 - R_A x^3/6$$

Avec les deux paramètres initiaux (Chap. II) :

$$\text{En } A (x = 0), \text{ on a : } y'(0) = r_A \rightarrow \boxed{\theta_0 = r_A}$$

$$\text{En } A (x = 0), \text{ on a : } y(0) = 0 \rightarrow \boxed{y_0 = 0}$$

L'angle  $r_A$  étant connu, de ces équations on écrit:

$$EI y' = + EI r_A - M_A x - R_A x^2/2$$

$$EI y = + EI r_A x - M_A x^2/2 - R_A x^3/6$$

à l'extrémité B, les conditions sont:

$$\text{En } B (x = l), \text{ on a : } \theta_B = 0 \text{ et } y_B = 0$$

D'où :

$$0 = -M_A l - R_A l^2/2 + EI r_A$$

$$0 = -M_A l^2/2 - R_A l^3/6 + EI r_A l$$

ou encore :

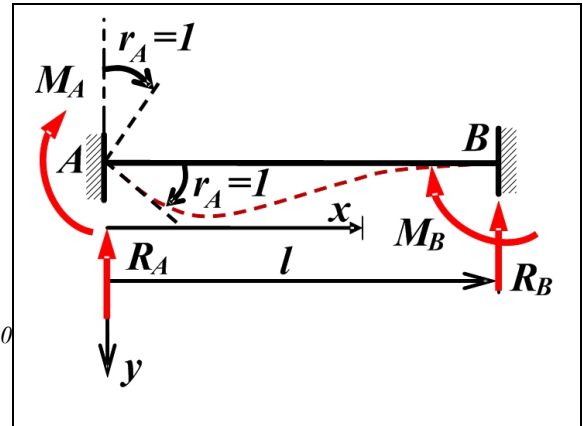


Figure IV.12.a. Barre bi-encastée avec angle imposé.



$$\begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ R_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI r_A \\ EIl r_A \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_A = \frac{4EI r_A}{l} \\ R_A = -\frac{6EI r_A}{l^2} (\downarrow) \end{cases}$$

On peut maintenant calculer  $R_B$  et  $M_B$ .

$$M_B = M_A + R_A l = \frac{4EI r_A}{l} - \frac{6EI r_A}{l} = -\frac{2EI r_A}{l}$$

$$R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{6EI r_A}{l^2} (\uparrow)$$

Application : Rotation unitaire ( $r_A = 1$ )

$$M_A = \frac{4EI}{l}; M_B = -\frac{2EI}{l}; R_A = -\frac{6EI}{l^2} (\downarrow); R_B = \frac{6EI}{l^2} (\uparrow)$$

Et si on veut calculer l'équation de la déformée, elle sera de la forme:

$$EI y(x) = EI r_A x - \frac{M_A}{2} x^2 - \frac{R_A}{6} x^3 \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{L^2} \cdot x^3 - \frac{2}{L} \cdot x^2 + 1}$$

Pour calculer les autres cas, on garde la même démarche et on change entre plusieurs façon différente. Le tableau IV.3 résume les résultats de présent calcul et les cas en dépendance avec ce même calcul.

**b) Barre encastrée-articulée avec translation imposée à l'articulation à gauche:**

On veut calculer les réactions. Soient  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  et  $M_B$  les composantes des réactions aux appuis  $A$  et  $B$  qui apparaissent sous l'action de  $\delta_B$ .

On garde le même système d'équations, les conditions imposées se changent :

$$EI y' = + EI \theta_0 - M_A x - R_A x^2/2$$

$$EI y = + EI y_0 + EI \theta_0 x - M_A x^2/2 - R_A x^3/6$$

Avec les deux paramètres initiaux (Chap. II) :

$$\text{En } A (x = 0), \text{ on a : } y'(0)=0 \Rightarrow \theta_0 = 0$$

$$\text{En } A (x = 0), \text{ on a : } y(0)=0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Les équations des déplacement s'écrivent:

$$EI y' = -M_A x - R_A x^2/2$$

$$EI y = -M_A x^2/2 - R_A x^3/6$$

à l'extrémité B, les conditions sont:

En B ( $x = l$ ), on a :

$$M_B = 0 \rightarrow M_A = R_A l,$$

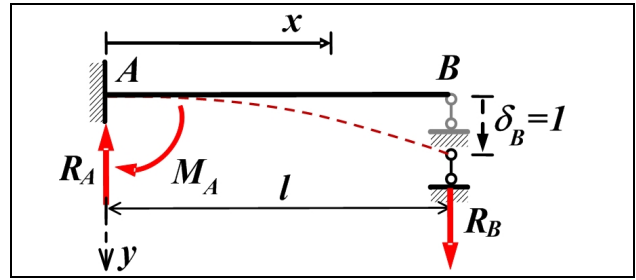


Figure IV.12.b. Poutre encastree articulée avec translation imposée.

La translation  $\delta_B$  étant connue, donc:

$$EI \delta_B = -R_A l^3/2 - R_A l^3/6 \rightarrow R_A = -3 EI \delta_B / l^3 \text{ et } M_A = -3 EI \delta_B / l^2$$

$$\text{On peut maintenant calculer } R_B : R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3EI \delta_B}{l^2} (\uparrow)$$

**Application** : Rotation unitaire ( $\delta_B = l$ )

$$M_A = -\frac{3EI}{l^2} ; M_B = 0 ; R_A = -\frac{3EI}{l^2} (\downarrow) ; R_B = \frac{3EI}{l^2} (\uparrow)$$

Et si on veut calculer l'équation de la déformée, elle sera de la forme:

$$EI y(x) = -\frac{1}{2} M_A \cdot x^2 - \frac{1}{6} R_A \cdot x^3 \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{2L^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2L^2} \cdot x^3}$$

Pour calculer les autres cas, on garde la même démarche. Le tableau IV.3 résume les résultats de présent calcul et les cas en dépendance avec ce même calcul.

Le tableau IV.4 ci-dessous donne les équations de la déformée ( $EI=1$ ) des cas fondamentaux de la méthode des déplacements. Rappelons que ces cas peuvent être combinés entre eux (par superposition) pour obtenir d'autres cas de déplacements imposés. De plus, seuls ces cas sont indispensables pour automatiser la résolution de poutres continues par la méthode des déplacements. On peut se limiter aux cas du tableau en considérant les points d'application des charges concentrées en plus des appuis comme nœuds avec les deux inconnues associées (rotation et déplacement vertical).

**Table IV.3 Résumé des calculs des relations force-déplacement**

No	Cas de charges	Reactions d'appui	Expressions des reactions
1			$M_A = \frac{3EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2}$
2			$M_A = \frac{3EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3}$
3			$M_A = \frac{4EI}{l},$ $M_B = \frac{2EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2}$

**Table IV.4 Equations de la déformée (EI=1) des cas fondamentaux de la méthode des déplacements.**

N°	Cas de charge/déplacement	Réactions d'appui	Equation de la déformée
1			$y(x) = + \frac{1}{L^2} \cdot x^3 - \frac{1}{L} \cdot x^2$
2			$y(x) = + \frac{1}{2L^2} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x$
3			$y(x) = - \frac{2}{L^3} \cdot x^3 + \frac{3}{L^2} \cdot x^2$

**IV.7 Exemple de portique à nœuds déplaçables (ddl=3) :**

On reprend l'exemple d'illustration de la figure IV.5, la longueur de chaque barre est «  $l$  ». Il reste à composer les diagrammes de moments internes à partir des déplacements unitaires et à calculer les réactions aux liaisons supplémentaires dans la structure de la figure (IV.13).

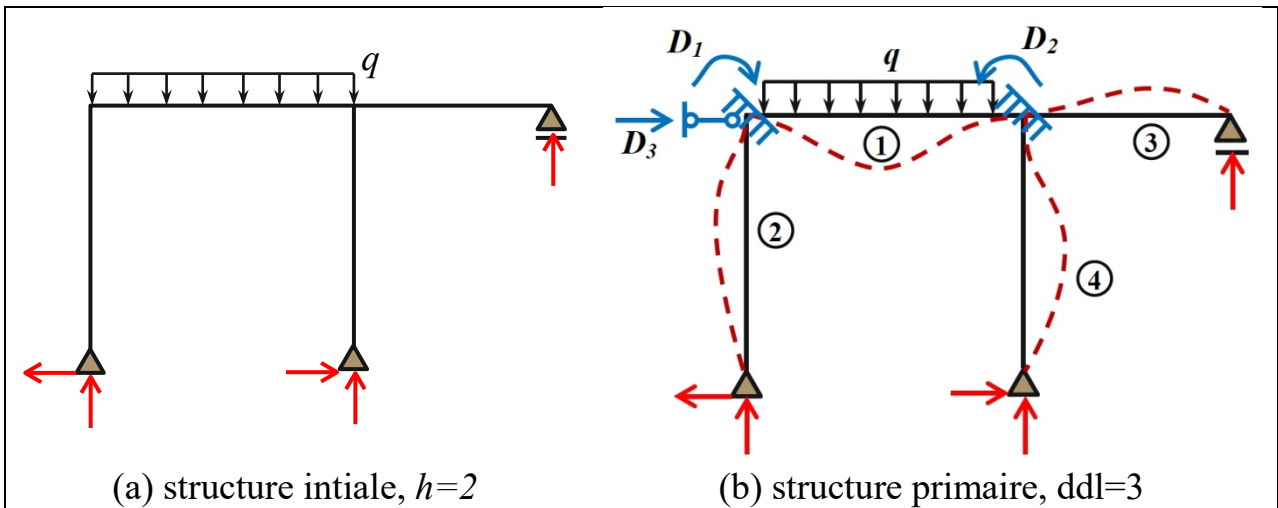


Figure IV.13 Portique à nœuds déplaçables, (a) initial et (b) primaire ; ddl=3.

**IV.7.1 Composition des diagrammes en utilisant les relations force-déplacement :**

Lorsque on a ajouté des liaisons (de rotations et de translations), alors les nœuds de portique sont entièrement fixes il n'y a pas de translations et de rotations. Si on impose une rotation au nœud de gauche ( $D_1=1$ ), seules les barres du portique qui lui sont reliés se déforiment. Les autres ne seront pas déformées, c-à-d uniquement les deux barres ① et ② sont affectées par la rotation ( $D_1=1$ ), figure IV.14.a.

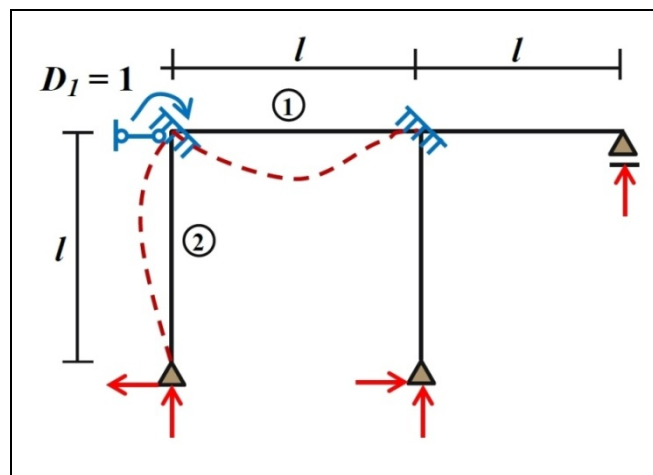


Figure IV.14.a deux barres sont affectées par la rotation  $D_1=1$ .

Au début, les deux barres déformées ① et ② sont indépendantes l'une de l'autre. En d'autres termes, le portique est séparé en barres indépendantes. De cette façon, le problème d'analyse du portique à partir de la rotation au nœud gauche se transforme en un problème d'analyse des différentes barres (① et ②), les deux cas de relations charge-déplacement extrait du **Tableau IV.3** sont données dans la Figure IV.b-c.

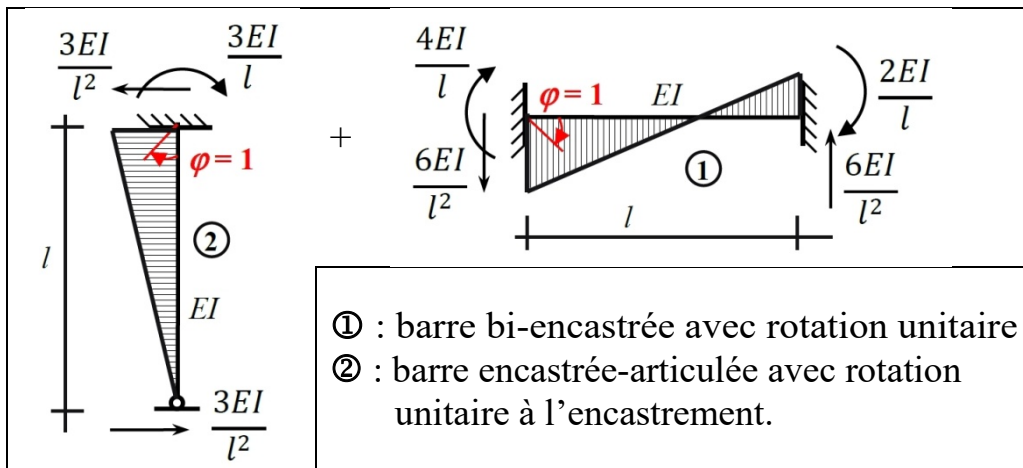


Figure IV.14.b-c. Relations charge-déplacement extrait du **Tableau IV.4**

Il suffit de bien réfléchir à la façon de faire pivoter les diagrammes (ex. la barre ②).

Donc le diagramme des moments internes du cas  $D_1=1$  (Fig. IV.14.a) sera composé à partir des diagrammes de différentes parties ( $M_1=①+②$ ), Figure IV.d.

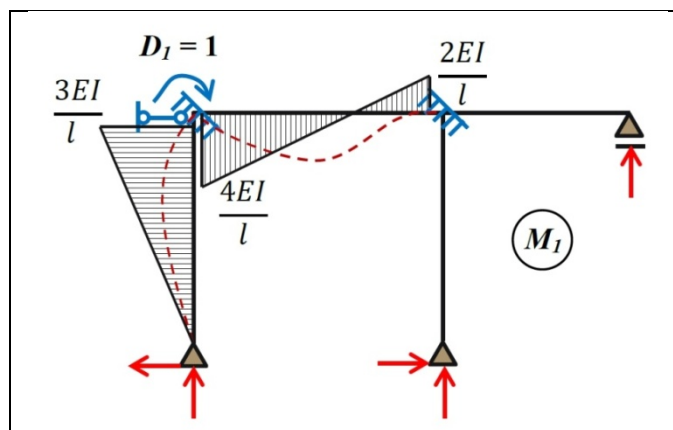


Figure IV.14.d. Composition des diagrammes de moments pour  $D_1=1$ .

La meilleure façon de dessiner correctement les diagrammes est de regarder les positions déformées des différentes barres et de dessiner les diagrammes des moments du côté des fibres tendues de la barre.

De la même façon, le diagramme des moments internes du cas ( $D_2=1$ ) sera

composé à partir des diagrammes de différentes parties ( $M_2 = \textcircled{1} + \textcircled{3} + \textcircled{4}$ ), Figure IV.e.

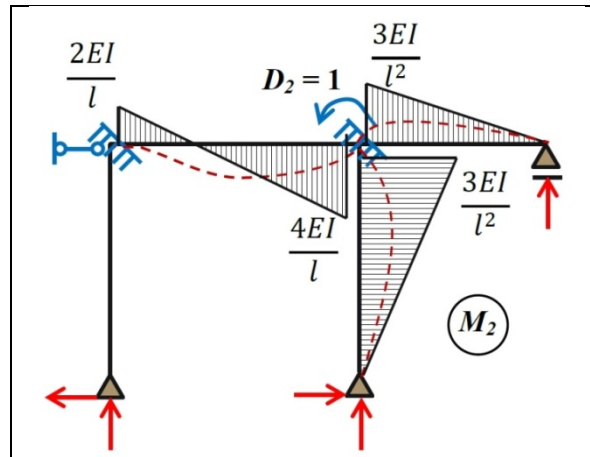


Figure IV.14.e. Composition des diagrammes de moments pour  $D_2=1$ .

Le diagramme des moments internes du cas ( $D_3=1$ ) sera composé à partir des diagrammes de différentes parties ( $M_3 = \textcircled{2} + \textcircled{4}$ ), Figure IV.f.

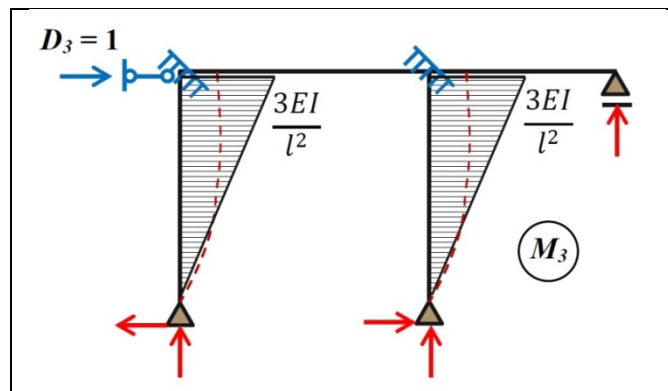


Figure IV.14.f. Composition des diagrammes de moments pour  $D_3=1$ .

Le diagramme des moments internes de la charge externe ( $R_{0P}$ ), ( $M_f^0 = \textcircled{1}$ ), Figure IV.g.

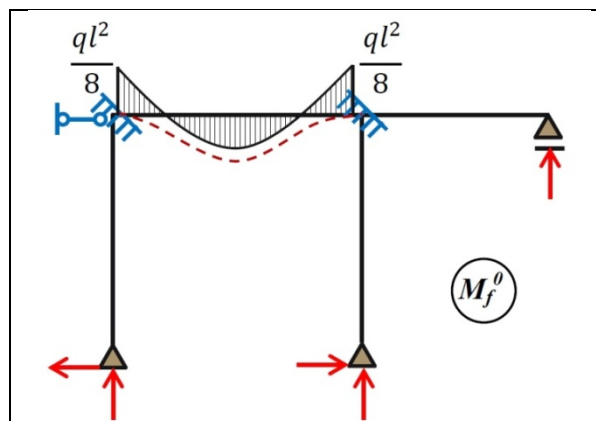


Figure IV.14.g. Diagramme du moment interne de la charge externe  $q$ , ( $R_{0P}$ ).

IV.7.2 Calcul d'équilibre des nœuds

Concernant les réactions  $k_{ij}$  et  $R_{iP}$ , nous pouvons les trouver facilement en utilisant l'équilibre des nœuds, Figure IV.15.a-d. Le sens de  $k_{ij}$  est positif si il est dans le même sens que la déformée crée par le déplacement  $D_j$ .

Il est important de comprendre que même les valeurs paramétriques des moments sont égales; les valeurs numériques sont différentes car les sections « $A$ », la longueur « $L$ » et le module « $E$ » peuvent être différents.

On donne l'équilibre des nœuds en cas de  $D_1=1 \rightarrow M_1$ , Figure IV.15.a.

On donne l'équilibre des nœuds en cas de  $D_2=1 \rightarrow M_2$ , Figure IV.15.b.

On donne l'équilibre des nœuds en cas de  $D_3=1 \rightarrow M_3$ , Figure IV.15.c.

On donne l'équilibre des nœuds en cas de  $R_{1P} \rightarrow M^0_f$ , Figure IV.15.e.

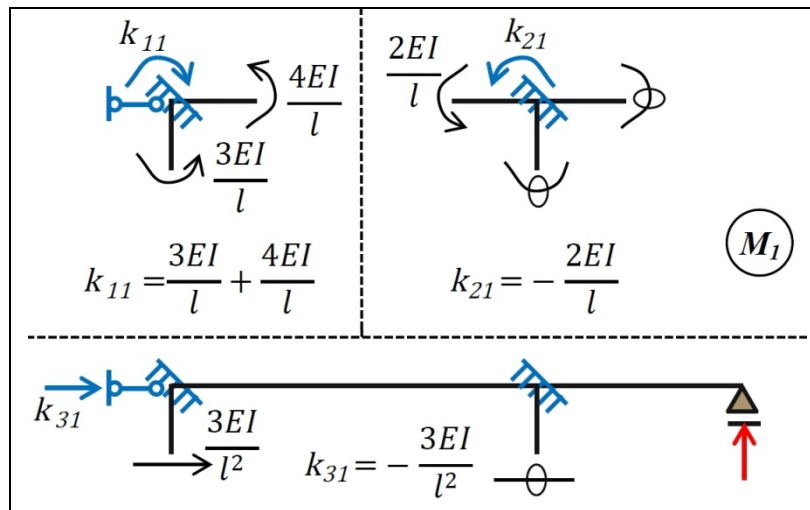


Figure IV.15.a. Equilibre des nœuds en cas de  $D_1=1 \rightarrow M_1$

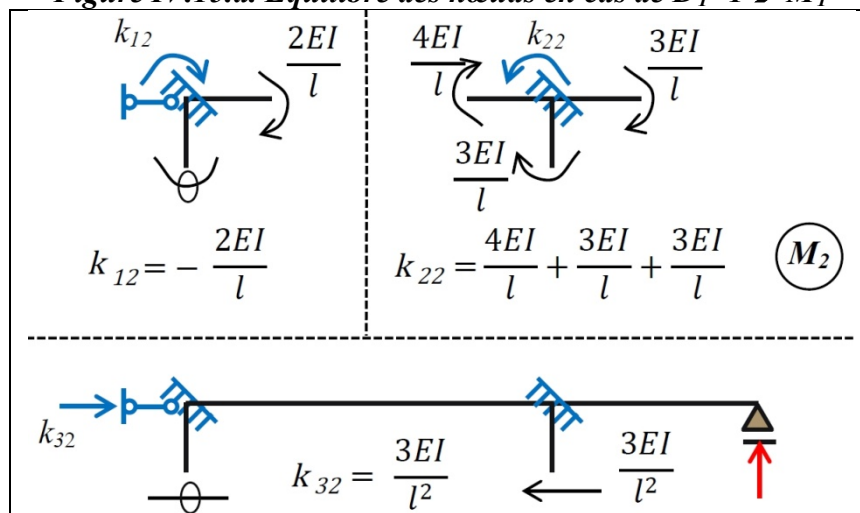


Figure IV.15.b. Equilibre des nœuds en cas de  $D_2=1 \rightarrow M_2$

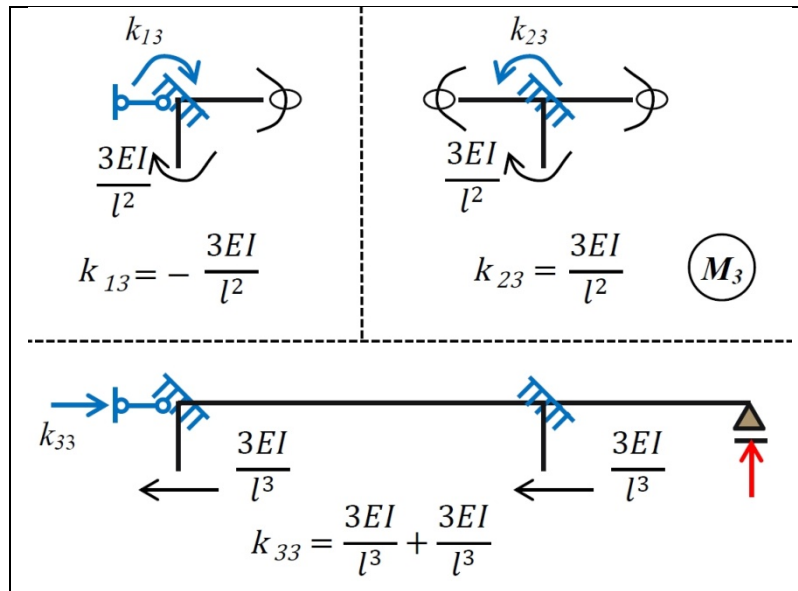


Figure IV.15.c. Equilibre des nœuds en cas de  $D_3=1 \rightarrow M_3$

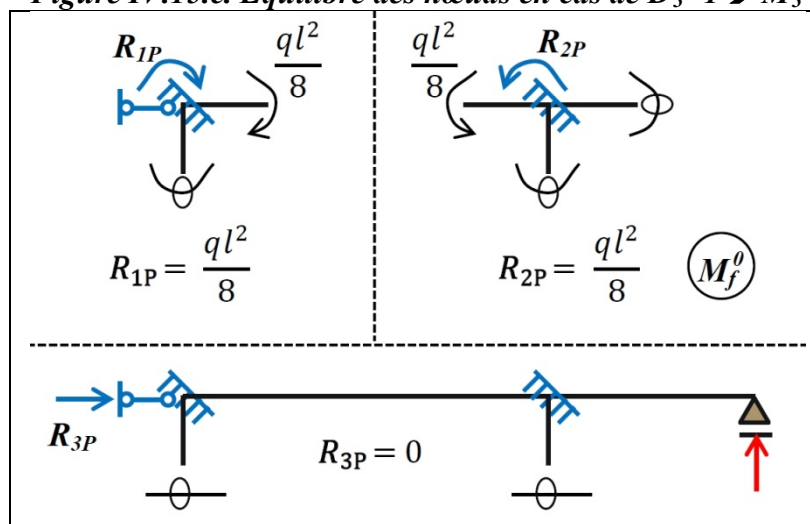


Figure IV.15.d. Equilibre des nœuds en cas de  $R_{1P} \rightarrow M_f^0$

L'étude d'équilibre des nœuds nous permet de composer les équations linéaires d'équilibre pour calculer les inconnues  $D_j$  ( $D_1, D_2, \dots, D_n$ ) :

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 7 & -2 & \frac{-3}{l} \\ -2 & 10 & \frac{3}{l} \\ \frac{-3}{l} & \frac{3}{l} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{8} \\ -\frac{ql^2}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.15)$$

Par la méthode d'élimination de Gauss, on procède la 1<sup>ière</sup> Colonne:



$$\begin{array}{l} L_2 = L_2 + \left(\frac{2EI}{l}\right)\left(\frac{l}{7EI}\right).L_1 \\ L_3 = L_3 + \left(\frac{3EI}{l^2}\right)\left(\frac{l}{7EI}\right).L_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} L_2 = L_2 + \left(\frac{2}{7}\right).L_1 \\ L_3 = L_3 + \left(\frac{3}{7l}\right).L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 7 & -2 & \frac{-3}{l} \\ 0 & \frac{66}{7} & \frac{15}{7l} \\ 0 & \frac{15}{7l} & \frac{33}{7l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{8} \\ -\frac{9ql^2}{56} \\ -\frac{3ql^2}{56} \end{Bmatrix}$$

On procède la 2<sup>ième</sup> Colonne:

$$L_3 = L_3 - \left(\frac{15EI}{7l^2}\right)\left(\frac{7l}{66EI}\right).L_2 \rightarrow L_3 = L_3 - \left(\frac{15}{66l}\right).L_2$$

$$\rightarrow \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 7 & -2 & \frac{-3}{l} \\ 0 & \frac{66}{7} & \frac{15}{7l} \\ 0 & 0 & \frac{93}{22l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{8} \\ -\frac{9ql^2}{56} \\ -\frac{3ql}{176} \end{Bmatrix}$$

– Après solution du système d'équations linéaires les résultats de  $\{D\}$  :

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{3}{124} \cdot \frac{ql^3}{EI} \\ D_2 &= -\frac{1}{62} \cdot \frac{ql^3}{EI} \\ D_3 &= -\frac{1}{248} \cdot \frac{ql^4}{EI} \end{aligned} \tag{IV.16}$$

Et le diagramme des moments totaux  $M_f$  s'obtiennent par superposition, en applique l'équation (IV.17) dans l'ensemble des barres:

$$M_f = M_f^0 + M_i.D_j \tag{IV.17}.$$

L'idée présentée est valable non seulement pour les structures indéterminées d'ordre trois, mais aussi pour les structures indéterminées d'ordre  $n$ . La procédure est la même. Les équations d'équilibre pour une structure indéterminée d'ordre  $n$ , sont :

$$k_{11}.D_1 + k_{12}.D_2 + k_{13}.D_3 + \dots + k_{1n}.D_n + R_{1P} = 0$$

$$k_{21}.D_1 + k_{22}.D_2 + k_{23}.D_3 + \dots + k_{2n}.D_n + R_{2P} = 0$$

$$k_{31}.D_1 + k_{32}.D_2 + k_{33}.D_3 + \dots + k_{3n}.D_n + R_{3P} = 0$$

.....

$$k_{n1}.D_1 + k_{n2}.D_2 + k_{n3}.D_3 + \dots + k_{nn}.D_n + R_{nP} = 0$$

Comme nous avons déjà le diagramme du moment interne, nous pouvons obtenir les diagrammes des efforts tranchants et normaux. Et à la fin pour trouver des réactions et on procède à l'équilibre du système comme vérification finale.

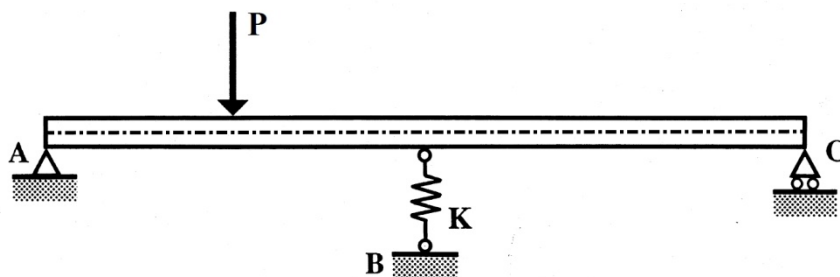
## V. Calcul des poutres continues sur appuis élastiques

### V.1 Introduction

Dans l'analyse des structures hyperstatiques, il faut accorder une attention particulière aux hypothèses adoptées pour les conditions d'appui car celles-ci influencent de manière significative le comportement mécanique de la structure et, par-là même, la répartition des efforts intérieurs. Par simplification, les appuis sont couramment considérés comme infiniment rigides dans certaines directions. Toutefois, ces blocages parfaits n'existent pas dans la réalité. Même une fondation appuyée sur de la roche saine se déforme légèrement lorsque des charges lui sont appliquées. Cependant, dans ce cas, la rigidité de l'appui est généralement bien plus élevée que celle de la structure qu'il supporte, justifiant ainsi l'hypothèse de blocage parfait. Il n'en est pas forcément toujours de même avec d'autres sols de fondation. Un autre cas fréquent d'appui flexible apparaît lorsque la structure considérée est elle-même appuyée sur une autre. Pour l'analyse, les appuis élastiques sont symbolisés par des ressorts.

### V.2 Poutre continue sur trois appuis l'appui intermédiaire est élastique :

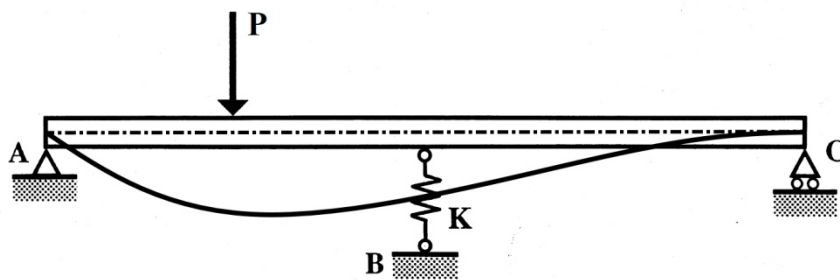
Soit la poutre continue sur trois appuis de la figure V.1, la poutre est soumise à une charge concentrée  $P$ , à mi-portée de la première travée. L'appui intermédiaire est élastique de rigidité  $K$ . Notons que cette poutre avec un appui intermédiaire à réaction normale (c'est-à-dire une rigidité  $K$  infinie) a été résolue au chapitre III (§ III.6).



*Figure V.1. Poutre continue sur trois appuis un appui intermédiaire élastique de rigidité  $K$ , soumise à une charge concentrée à mi-portée de la première travée.*

La figure V.2 montre schématiquement la déformée de la poutre continue

considérée. La déformée est semblable à celle de la poutre avec un appui intermédiaire à réaction normale (fig. III.14), sauf que le point de jonction du ressort à la poutre (au-dessus du point B) subit un déplacement vertical. Parmi les nombreuses possibilités de résolution, la continuité de la tangente au point de jonction du ressort à la poutre peut, sans autres, être employée comme condition de compatibilité cinématique. En revanche, à l'évidence, la jonction poutre-ressort n'est pas exempte de déplacement vertical et ne peut donc pas être l'endroit où la condition de compatibilité cinématique (absence de déplacement vertical) est exprimée.



*Figure V.2. Dans l'absence de déplacement vertical à la jonction poutre-ressort, la tangente au droit de la jonction est utilisée comme condition cinématique.*

Cependant, l'autre extrémité du ressort, sa base, ne subit effectivement pas de déplacement vertical. Il faut par conséquent, et la distinction est primordiale, exprimer la condition de compatibilité cinématique (l'absence de déplacement vertical) à la base du ressort et non à son sommet.

Les deux possibilités de résolution sont présentées en détail ci-après; d'abord en utilisant la continuité de la tangente sur l'appui intermédiaire, puis l'alternative qui consiste à prendre la réaction d'appui comme inconnue.

#### **a. Résolution en considérant la continuité de la tangente sur l'appui intermédiaire**

Conformément à la figure V.3, dans le cas où la continuité de la tangente sur l'appui intermédiaire est utilisée comme condition de compatibilité cinématique, la structure de référence  $S_0$  est formée d'une suite de deux poutres simples accolées, élastiquement appuyées à leur jonction.

Par rapport à un appui intermédiaire à réaction normale (§ III.6), les deux coefficients  $f_{11}$  et  $D_{10}$  doivent être adaptés en tenant compte de la modification du

«pli» due à la présence du ressort (V.1). Lors de la détermination des coefficients à l'aide du principe des travaux virtuels, il suffit de rajouter le travail virtuel venant du ressort. D'une manière générale, ce travail virtuel se compose d'une force axiale virtuelle multipliée par une déformation réelle. Conformément à la définition de la rigidité d'un ressort, la déformation réelle est égale au rapport de la force réelle et de la rigidité.

$$f_{11} \cdot X_1 + D_{10} = 0 \tag{V.1}$$

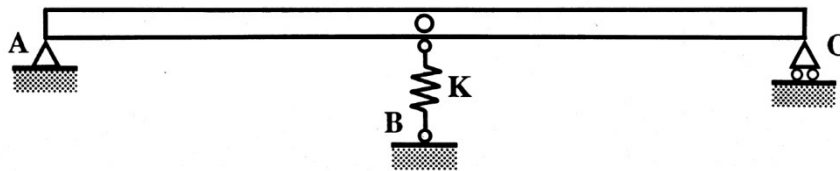


Figure V.3. La structure de référence  $S_0$  est une suite de deux poutres simple, élastiquement appuyées à leur jonction.

La figure V.4 illustre la détermination du coefficient  $D_{10}$  à l'aide du principe des travaux virtuels. La statique virtuelle se trouve à gauche et la cinématique réelle à droite. En ce qui concerne la poutre, les diagrammes sont rigoureusement identiques à ceux associés à un appui intermédiaire à réaction normale (fig. III.17). Pour tenir compte de la flexibilité de l'appui intermédiaire, il faut ajouter le produit des deux termes qui composent le travail virtuel dans le ressort (fig. V.4, en bas). La force virtuelle  $2/L$  est liée à la somme des réactions d'appuis aux extrémités communes des deux poutres simples accolées. Quant à la déformation réelle de  $P/2K$ , elle correspond à la compression du ressort due à la réaction d'appui issue de la charge  $P$ . Le signe du travail virtuel dans le ressort est positif car celui-ci est comprimé tant dans la statique virtuelle que dans la cinématique réelle. Au final, l'équation (III.34) est complétée par un terme supplémentaire selon l'équation (V.1) :

$$1.D_{10} = \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot \frac{PL}{4EI} \cdot L + \frac{2}{L} \cdot \frac{PL^2}{2K} = -\frac{PL^2}{16EI} + \frac{P}{KL} \tag{V.2}$$

A l'évidence, la valeur du coefficient  $D_{10}$  de l'équation (V.2) tend vers celle de l'équation (III.34) lorsque la rigidité du ressort tend vers l'infini. La présence du ressort tend à réduire la valeur absolue du coefficient  $D_{10}$ . Logiquement, par rapport à

un appui infiniment rigide, l'assouplissement dû à la présence du ressort diminue l'amplitude du « pli » issu de l'application de la charge extérieure.

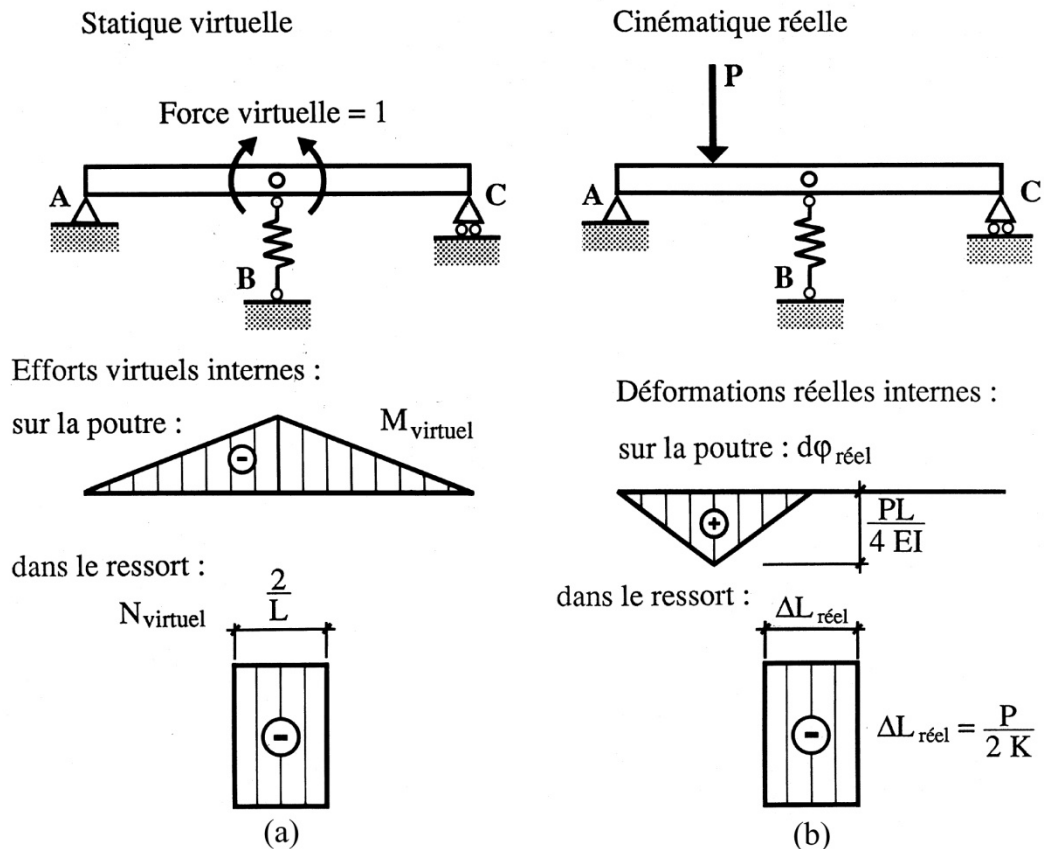


Figure V.4. Détermination du coefficient  $D_{10}$  à l'aide du principe des travaux virtuels. Le travail virtuel supplémentaire dans le ressort est composé de deux termes constants (en bas).

La figure V.5 illustre la détermination du coefficient  $f_{11}$  à l'aide du principe des travaux virtuels. La statique virtuelle se trouve à gauche et la cinématique réelle à droite. A nouveau, pour la poutre, les diagrammes sont rigoureusement identiques à ceux associés à un appui intermédiaire à réaction normale (fig. III.19). La flexibilité de l'appui intermédiaire intervient en ajoutant le produit des deux termes qui composent le travail virtuel dans le ressort (fig. V.5, en bas). Dans les deux cas, les efforts dans le ressort sont de  $2/L$ , correspondant à la somme des réactions d'appuis aux extrémités communes des deux poutres simples accolées. La déformation réelle prend donc la valeur de  $2/KL$  et le signe du travail virtuel dans le ressort est positif. Au final, l'équation (III.19) est complétée par un terme supplémentaire selon l'équation (V.2):

$$1.f_{11} = 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot L \right) + \frac{2}{L} \cdot \frac{2}{KL} = \frac{2L}{3EI} + \frac{4}{KL^2} \tag{V.3}$$

La valeur du coefficient  $f_{11}$  de l'équation (V.3) tend vers celle de l'équation (III.35) lorsque la rigidité du ressort tend vers l'infini. Contrairement au coefficient  $D_{10}$ , par rapport à un appui infiniment rigide, l'assouplissement dû à la présence du ressort augmente l'amplitude de la « cassure » issue de l'application de la paire de moments de flexion (l'inconnue  $X_1$ ) unitaire.

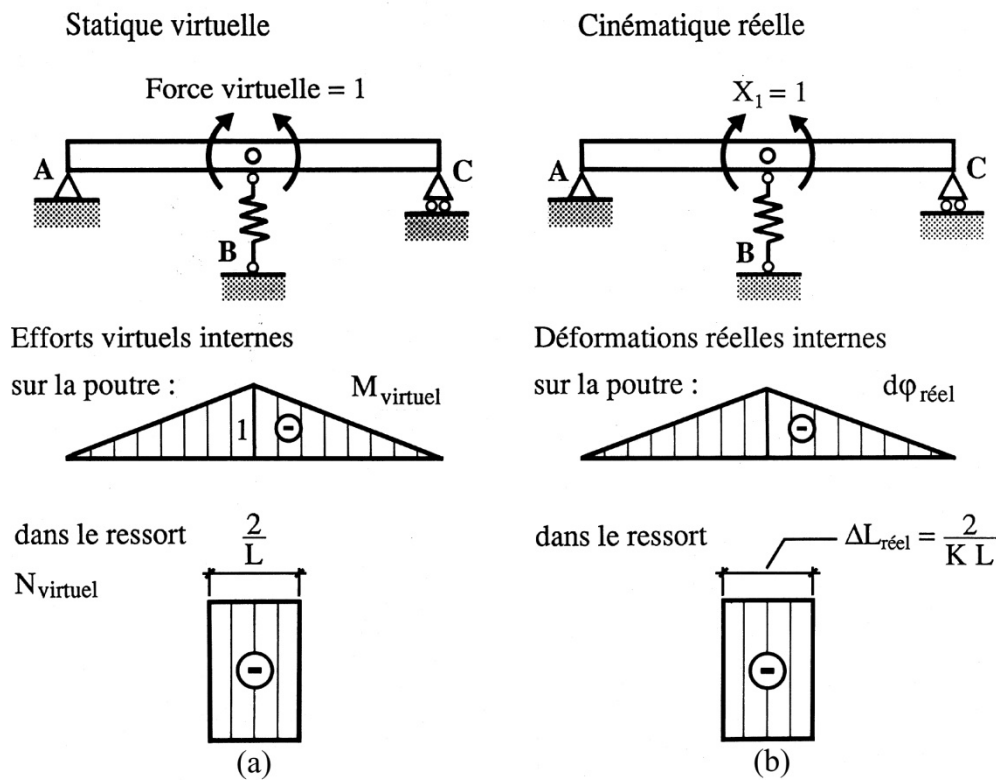


Figure V.5 Détermination du coefficient  $f_{11}$  à l'aide du principe des travaux virtuels. Le travail virtuel supplémentaire dans le ressort est composé de deux termes constants (en bas).

La résolution de l'équation générale (III.28), traduisant la condition de compatibilité cinématique, est élémentaire, mais l'expression du résultat est compliquée par les termes supplémentaires correspondant au travail dans le ressort. L'introduction du rapport des rigidités de la poutre et du ressort dans l'équation (V.4), sous la forme du paramètre  $\alpha$  ( $\alpha = EI/KL^3$ ), facilite l'interprétation du résultat :

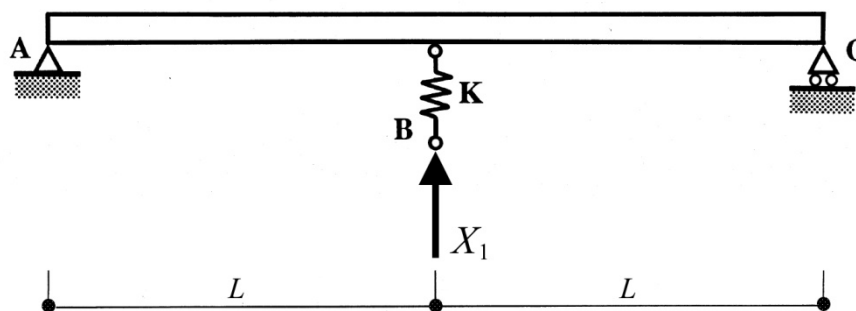
$$X_1 = -\frac{D_{10}}{f_{11}} = \left( \frac{PL^2}{16EI} + \frac{P}{KL} \right) / \left( \frac{2L}{3EI} + \frac{4}{KL^2} \right) = \frac{3}{32} \cdot PL \cdot \frac{1-16\alpha}{1+6\alpha} \tag{V.4}$$

Evidemment, la valeur de l'inconnue tend vers celle de l'équation (III.36) lorsque la rigidité du ressort tend vers l'infini. Le paramètre  $\alpha$  tend alors vers zéro.

### b. Résolution en considérant l'absence de déplacement vertical au droit de l'appui intermédiaire

Cette section examine la résolution alternative qui consiste à prendre la réaction d'appui comme inconnue. Comme relevé ci-avant, avant de débiter la détermination des coefficients, il est capital de d'abord bien identifier l'emplacement où la condition de compatibilité cinématique (l'absence de déplacement vertical) est exprimée.

Conformément à la déformée esquissée sur la figure V.2, la jonction poutre-ressort n'est pas exempte de déplacement vertical et ne peut donc pas être l'endroit où la condition de compatibilité cinématique est exprimée. C'est effectivement la base du ressort qui ne subit pas de déplacement vertical. Par conséquent, la condition de compatibilité cinématique est exprimée à la base du ressort et non à son sommet. Le structure de référence est donc constituée de l'ensemble de la poutre simple entre A et C et du ressort qui est, en quelque sorte, suspendu en son milieu. Comme l'illustre la figure V.6, l'inconnue  $X_1$  agit alors à la base du ressort.

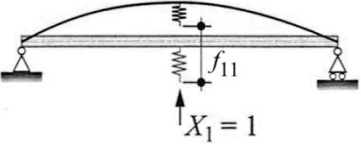
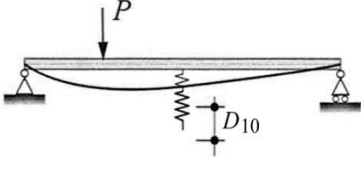


*Figure V.6. Le ressort fait partie intégrante du système fondamental. L'inconnue  $X_1$  agit à la base du ressort qui est suspendu au milieu de la poutre simple entre A et C.*

Le tableau synoptique de la figure V.7 présente de manière synthétique les éléments intervenant dans la résolution du système. La flexibilité du ressort n'influence que la valeur du coefficient  $f_{11}$ . Par rapport au cas sans ressort, le terme supplémentaire  $1/K$  considère le travail virtuel dans le ressort. En revanche, la valeur du coefficient  $D_{10}$  n'est pas modifiée par la présence du ressort car, sous l'effet de la



charge extérieure  $P$ , le ressort est entraîné d'un bloc par la poutre, sans se déformer. Il faut cependant bien noter que le coefficient représente physiquement le déplacement vertical de la base du ressort.

Causes		
Effets	$X_1 = 1$	$D_{10}$
Déplacements selon $X_1$	$f_{11} = \frac{L^3}{6EI} + 1 \cdot \frac{1}{K}$	$D_{10} = -\frac{PL^3}{16EI} \cdot \frac{11}{6}$

**Figure V.7** Tableau synoptique correspondant au choix de l'absence de déplacement vertical à la base du ressort comme condition de compatibilité cinématique. La flexibilité du ressort n'intervient que dans le coefficient  $f_{11}$ .

L'équation générale (III.28) est résolue en introduisant le paramètre  $\alpha (\alpha = EI/KL^3)$  correspondant au rapport des rigidités de la poutre et du ressort, déjà utilisé auparavant. L'introduction de ce paramètre dans l'équation (V.4) facilite l'interprétation du résultat:

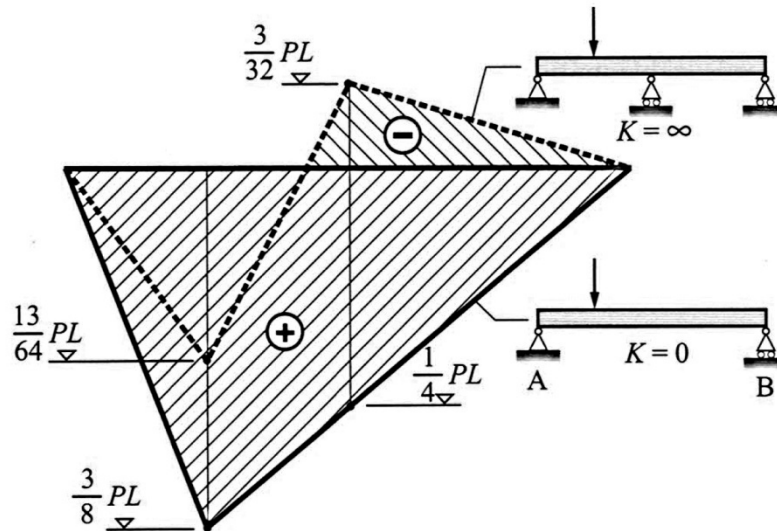
$$X_1 = -\frac{D_{10}}{f_{11}} = \left( \frac{PL^3}{16EI} \cdot \frac{11}{6} \right) / \left( \frac{L^3}{6EI} + \frac{1}{K} \right) = \frac{11P}{16} \cdot \frac{1}{1+6\alpha} \tag{V.4}$$

Logiquement, la résolution selon l'équation (V.4) permet de retrouver la valeur de l'inconnue lorsque la rigidité du ressort tend vers l'infini ( $\alpha$  s'annule). La réaction d'appui déterminée à l'équation (V.4) étant connue, il est facile de déduire les autres par équilibre. Une fois toutes les réactions d'appui déterminées, il est trivial de vérifier que le moment de flexion sur l'appui intermédiaire correspond bien à la valeur de l'inconnue précédemment déterminée à l'équation (V.3).

**d. Diagramme des moments de flexion en fonction de la rigidité du ressort**

Les résultats qui précèdent permettent de déterminer la plage de variation des efforts intérieurs en fonction de la rigidité du ressort. Par exemple, les deux bornes du diagramme des moments de flexion sont représentées à la figure V.8. Si la rigidité du ressort est nulle, il n'y a pas d'appui intermédiaire et le diagramme des moments de

flexion (en trait continu) correspond à celui d'une poutre simple chargée au quart de sa portée. Si elle est infinie (en traitillé), on retrouve le diagramme représenté à la figure III.21 et établi au chapitre III pour un appui à réaction normale.



**Figure V.8** En fonction de la rigidité du ressort, le diagramme des moments de flexion se situe entre deux bornes. Si la rigidité est nulle, c'est celui d'une poutre simple. Si elle est infinie, on retrouve le diagramme de la figure III.21.

On peut noter ici que, comme le montre l'équation (V.3), la valeur de l'inconnue  $X_1$  de la première résolution s'annule pour une valeur du paramètre  $\alpha$  de  $\alpha=1/16$ . Le diagramme des moments de flexion correspondant, sur la première travée, est identique à celui d'une poutre simple chargée à mi-portée, et s'annule sur la travée non chargée. Avec la deuxième résolution, selon l'équation (V.4), l'inconnue  $X_1$  prend dans ce cas la valeur de  $P/2$ , qui est bien la réaction d'appui d'une poutre simple. Cependant, la déformée est légèrement modifiée par rapport à celle d'une poutre simple habituelle; elle subit une rotation en bloc autour de l'appui fixe en raison du tassement du ressort. En fait, la poutre tourne jusqu'à ce que la tangente à son extrémité coïncide avec la droite reliant le sommet du ressort à l'appui à réaction normale à l'extrémité, puisque cette poutre est exempte de moments de flexion.

### V.3 Poutre continue sur appuis rigides :

### V.3.1 Equation de trois moments de Clapeyron

Les poutres continues sur plusieurs appuis, dont un est une articulation et les autres sont des appuis simples véritables, représentent des structures particulières. La figure V.9(a) montre une poutre continue à  $n$  travées soumise à un chargement transversal arbitraire. La structure est  $n-1$  fois hyperstatique. Par conséquent, il faut exprimer  $n-1$  conditions de compatibilité cinématique supplémentaires pour la résoudre. En prenant comme conditions de compatibilité cinématique la continuité de la tangente sur les appuis intermédiaires, la structure de référence est la suite de poutres juxtaposées, à la figure V.9(b). Les inconnues ( $X_1, X_2 \dots X_{n-1}$ ) correspondent aux moments de flexion internes sur les appuis ( $M_1, M_2 \dots M_{n-1}$ ). La structure de base possède la caractéristique d'isoler les poutres simples par rapport aux moments de flexion introduits sur les appuis. Une inconnue ne produit des déplacements que sur les deux poutres simples adjacentes à son point d'application. Par conséquent, le diagramme des moments de l'inconnue  $X_k$  d'un appui n'affecte que les barres adjacentes à cet appui  $X_{k-1}$  et  $X_{k+1}$ .

Avec ces éléments on peut écrire maintenant un système d'équations de conditions qui expriment le fait que dans tous les appuis de la poutre les déformations – dans ce cas les déformations sont des rotations – sont nulles. Les solutions de ce système donnent les valeurs des moments fléchissant dans les appuis intermédiaires :

$$\begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,k-1} & f_{1,k} & f_{1,k+1} & \cdots & f_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k-1,1} & \cdots & f_{k-1,k-1} & f_{k-1,k} & f_{k-1,k+1} & \cdots & f_{k-1,n-1} \\ f_{k,1} & \cdots & f_{k,k-1} & f_{k,k} & f_{k,k+1} & \cdots & f_{k,n-1} \\ f_{k+1,1} & \cdots & f_{k+1,k-1} & f_{k+1,k} & f_{k+1,k+1} & \cdots & f_{k+1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n-1,k-1} & f_{n-1,k} & f_{n-1,k+1} & \cdots & f_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k-1} \\ X_k \\ X_{k+1} \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} D_{1,0} \\ \vdots \\ D_{k-1,0} \\ D_{k,0} \\ D_{k+1,0} \\ \vdots \\ D_{n-1,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (V.5)$$

Pour l'appui d'ordre  $k$ , on a :

$$f_{k,1} \cdot X_1 + f_{k,2} \cdot X_2 + \cdots + f_{k,k-1} \cdot X_{k-1} + f_{k,k} \cdot X_k + f_{k,k+1} \cdot X_{k+1} + \cdots + f_{k,n-1} \cdot X_{n-1} + D_{k,0} = 0 \quad (V.6)$$

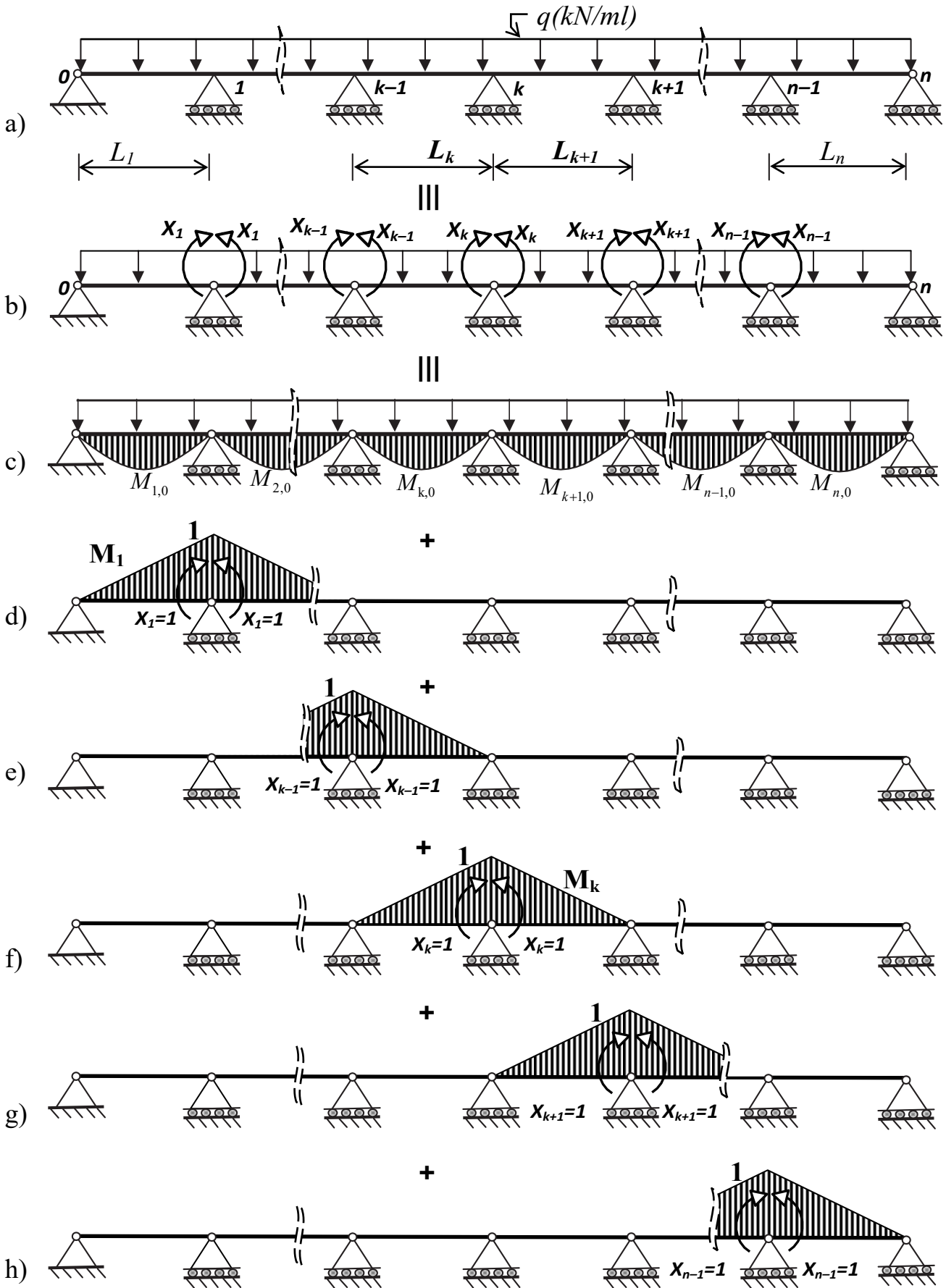


Figure V.9(a-h) Conditions de compatibilité de la poutre continue sur appuis rigides

les diagrammes ne s'étendent pas sur les mêmes barres. Donc, l'éq. (V.6) devient :

$$f_{k,k-1} \cdot X_{k-1} + f_{k,k} \cdot X_k + f_{k,k+1} \cdot X_{k+1} + D_{k,0} = 0 \quad (V.7)$$

Il reste maintenant à calculer les coefficients de la relation (V.7).

Pour simplifier les calculs on suppose que la rigidité de la poutre est constante.

Et égale à E.I :

$$f_{k,k-1} = \frac{1}{E.I} \sum \int M_k \cdot M_{k-1} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \frac{1}{2} \times L_k \cdot \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6E.I} \cdot L_k \quad (V.8.a)$$

$$f_{k,k} = \frac{1}{E.I} \sum \int M_k^2 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \frac{1}{2} (1) \cdot L_k \cdot \frac{2}{3} (1) + \frac{1}{E.I} \cdot \frac{1}{2} (1) \cdot L_{k+1} \cdot \frac{2}{3} (1) = \frac{1}{3E.I} (L_k + L_{k+1}) \quad (V.8.b)$$

$$f_{k,k+1} = \frac{1}{E.I} \sum \int M_k \cdot M_{k+1} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \frac{1}{2} \times L_{k+1} \cdot \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6E.I} \cdot L_{k+1} \quad (V.8.c)$$

Pour  $D_{k,0}$  en appliquant la méthode de Véréschéaguine (Fig. V.10), on obtient :

$$D_{k,0} = \frac{1}{E.I} \sum \int M_k \cdot M_0 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \int_0^{L_k} M_k \cdot M_{k,0} \cdot dx + \frac{1}{E.I} \int_0^{L_{k+1}} M_k \cdot M_{k+1,0} \cdot dx \quad (V.9.a)$$

$$D_{k,0} = \frac{y_{G,k}}{E.I} \int_0^{L_k} M_{k,0} \cdot dx + \frac{y_{G,k+1}}{E.I} \int_0^{L_{k+1}} M_{k+1,0} \cdot dx$$

$$\frac{y_{G,k}}{1} = \frac{x_{G,k}}{L_k} \Rightarrow y_{G,k} = \frac{x_{G,k}}{L_k}$$

$$\frac{y_{G,k+1}}{1} = \frac{x_{G,k+1}}{L_{k+1}} \Rightarrow y_{G,k+1} = \frac{x_{G,k+1}}{L_{k+1}}$$

$$x_{G,k} = \frac{\int_0^{L_k} x \cdot M_{k,0} \cdot dx}{\int_0^{L_k} M_{k,0} \cdot dx} \quad \text{et} \quad x_{G,k+1} = \frac{\int_0^{L_{k+1}} x \cdot M_{k+1,0} \cdot dx}{\int_0^{L_{k+1}} M_{k+1,0} \cdot dx}$$

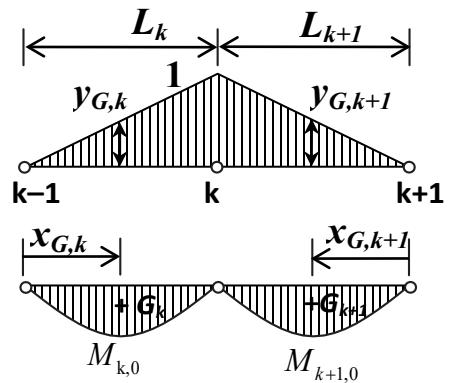


Figure V.10 calcul de la rotation relative  $D_{k,0}$ .

Il résulte ainsi :

$$D_{k,0} = \frac{1}{E.I} \left[ \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} x \cdot M_{k,0} \cdot dx + \frac{1}{L_{k+1}} \int_0^{L_{k+1}} x \cdot M_{k+1,0} \cdot dx \right] = \frac{1}{E.I} \left( \frac{S_{k-1}}{L_k} + \frac{S_{k+1}}{L_{k+1}} \right) \quad (V.9.b)$$

Ou  $S_{k-1}$  et  $S_{k+1}$  sont les moments statiques des diagrammes des moments des forces extérieures données (pris comme charges), par rapport aux points  $k-1$  et  $k+1$ .

Avec les signes des diagrammes considérés et tous les coefficients calculés

(V.8.a-c) et (V.9.a-b), l'équation (V.7) s'écrit :

$$M_{k-1} \cdot L_k + 2M_k(L_k + L_{k+1}) + M_{k+1} \cdot L_{k+1} + 6 \left( \frac{S_{k-1}}{L_k} + \frac{S_{k+1}}{L_{k+1}} \right) = 0 \quad (V.10)$$

La relation (V.10) s'appelle « l'équation des trois moments » ou « l'équation de Clapeyron ».

### Observations :

Si l'on considère les poutres adjacentes (isostatiques) à l'appui « k » comme poutre simplement appuyée, **et qu'on les charges avec les diagrammes des moments fléchissant données par les forces initiales afférentes** – tracés aussi dans l'hypothèse où les poutres sont simplement appuyées, en terme d'appuis, la poutre bi-articulée constitue un cas tout à fait exceptionnelle dans la méthode de la poutre conjuguée, appelée par fois méthode de la poutre auxiliaire –, on voit que :

$$\left( \frac{S_{k-1}}{L_k} + \frac{S_{k+1}}{L_{k+1}} \right) = r_k \quad (V.11.a)$$

C'est exactement la réaction dans l'appui « k » donné par ce chargement fictif.

- On écrit une équation de « trois moments » pour chaque appui intermédiaire, on obtenant ainsi un système de  $n-2$  équations avec  $n-2$  inconnues. Toutes les équations ont trois inconnues – des moments – sauf la première et la dernière qui n'en ont que deux,
- Les termes  $r_k$  est positif si la réaction qu'il représente est dirigée de bas en haut.
- Pour les poutres ayant un ou les bouts encastres, on remplace chaque encastrement par une poutre adjacente de longueur nulle,
- Pour les poutres avec des consoles, on remplace les consoles par leurs effets.

#### V.3.1.1 Termes ou Facteurs de charge

Afin de diminuer le volume des calculs, les notions de « terme (facteur) de charge » sont définis tels que :

$$t_k = 6 \frac{S_{k-1}}{L_k} \text{ et } t_{k+1} = 6 \frac{S_{k+1}}{L_{k+1}} \quad (V.11.b)$$

avec ces notations les calculs deviennent extrêmement simples, l'éq. (V.10) s'écrit :

$$M_{k-1} \cdot L_k + 2M_k (L_k + L_{k+1}) + M_{k+1} \cdot L_{k+1} + (t_k + t_{k+1}) = 0 \quad (V.11.c)$$

dans l'utilisation pratique, on calcule d'avance les termes de charge  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , pour diverses situations de charge. Dans le tableau V.1 les valeurs de  $t_k$  et  $t_{k+1}$  sont données pour un ensemble de poutre couramment rencontré dans les pratique.

### V.3.1.2 Poutre continue aux rigidités des barres non constantes

L'équation de trois moments (V.11.c), dans le cas d'une poutre continue avec des barres à rigidités non constantes ( $I_k \neq I_{k+1}$ ) prend une forme plus générale (V.12.a), le module d'élasticité ( $E$ ) peut être simplifié et il nous reste en facteur :

$$M_{k-1} \cdot \frac{L_k}{I_k} + 2M_k \left( \frac{L_k}{I_k} + \frac{L_{k+1}}{I_{k+1}} \right) + M_{k+1} \cdot \frac{L_{k+1}}{I_{k+1}} + \left( t_k \cdot \frac{L_k}{I_k} + t_{k+1} \cdot \frac{L_{k+1}}{I_{k+1}} \right) = 0 \quad (V.12.a)$$

Parce que tous les termes se trouvant dans la composition de cette équation contient le facteur ( $\frac{1}{I}$ ), on peut multiplier l'équation entière par ( $I_c$ ) :

$$I_c \cdot \frac{L_k}{I_k} = L_k \cdot \frac{I_c}{I_k} = \lambda_k \text{ et } I_c \cdot \frac{L_{k+1}}{I_{k+1}} = L_{k+1} \cdot \frac{I_c}{I_{k+1}} = \lambda_{k+1} \quad (V.12.b)$$

ou ( $I_c$ ) est un moment d'inertie conventionnel.

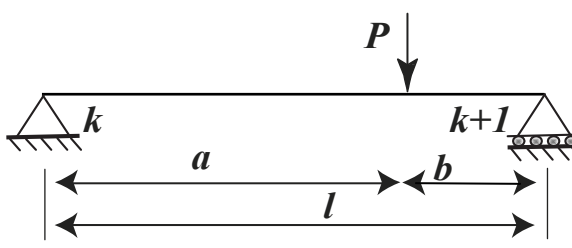
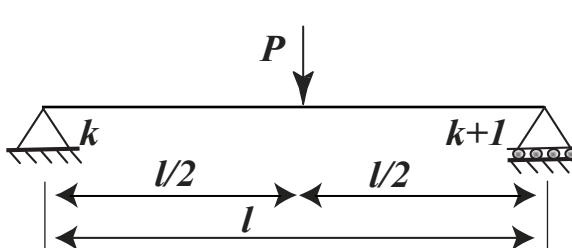
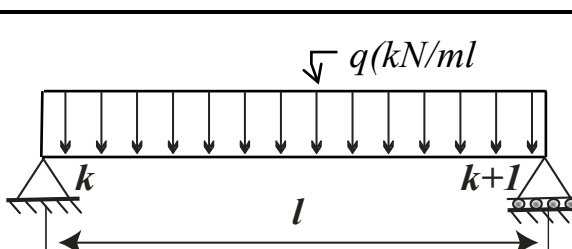
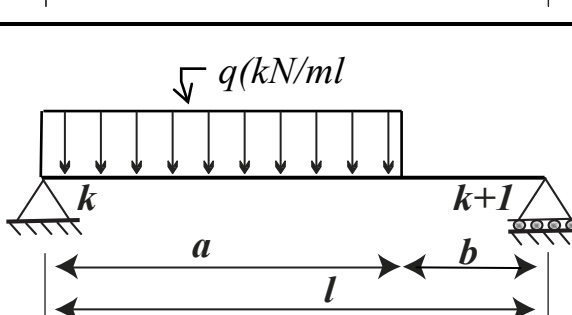
La longueur ( $\lambda_k$ ) est dénommée « portée transformée » et elle a comme signification physique une portée qui assure à la poutre une rigidité égale à celle antérieure, pour un nouveau moment d'inertie ( $I_c$ ). On peut donc imposer à toutes les barres d'une structure le même moment d'inertie ( $I_c$ ), à condition que les portées (ou longueurs des barres) deviennent obligatoirement transformée en terme de ( $\lambda_k$ ), et l'équation de trois moments après cette adaptation a la forme :

$$M_{k-1} \cdot \lambda_k + 2M_k (\lambda_k + \lambda_{k+1}) + M_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} + t_k \cdot \lambda_k + t_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} = 0 \quad (V.12.c)$$

Avec :

$$\lambda_k = L_k \cdot \frac{I_c}{I_k} \text{ et } \lambda_{k+1} = L_{k+1} \cdot \frac{I_c}{I_{k+1}} : \text{portées transformées des poutres isostatiques.}$$

**Tableau V.1:** Valeurs de termes de charge  $t_k$  et  $t_{k+1}$  pour un ensemble de poutre.

N°	Géométrie et chargement de la poutre	$t_k$	$t_{k+1}$
01		$\frac{P.a.b(l+b)}{l^2}$	$\frac{P.a.b(l+a)}{l^2}$
02		$\frac{3}{8} \cdot P.l$	$\frac{3}{8} \cdot P.l$
03		$\frac{q.l^2}{4}$	$\frac{q.l^2}{4}$
04		$\frac{q.a^2}{4} \left(2 - \frac{a}{L}\right)^2$	$\frac{q.a^2}{4} \left[2 - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right]$

**V.3.2 Poutre continue sur appuis rigides avec dénivèlements:**

Dans le cas d'une poutre continue à appuis rigides avec dénivèlements, il faudra ajouter aux déplacements  $D_{k,0}$  dus aux charges extérieures aux coupures «  $i$  » de la structure isostatique de référence  $S_0$ , les déplacements relatifs  $D_{iA}$  des bords de ces mêmes coupures, dus, cette fois, aux mouvements d'appuis. Ces déplacements se



déterminent par voie directe, à partir de considérations géométriques et en considérant qu'un  $D_{iA}$  est positif s'il se produit de haut en bas.

Dans le cas général, d'une poutre continue avec des appuis ont des tassements  $\Delta_{k-1}$ ,  $\Delta_k$  et  $\Delta_{k+1}$  (Fig. V.11), l'équation des trois moments (V.10) prend la forme :

$$M_{k-1} \cdot \lambda_k + 2M_k (\lambda_k + \lambda_{k+1}) + M_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} + t_k \cdot \lambda_k + t_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} = \left( \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{L_{k+1}} - \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{L_k} \right) \quad (V.13)$$

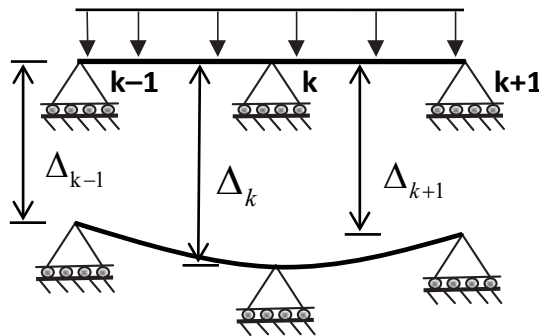


Figure V.11 Élément de poutre continue avec tassements d'appuis.

### V.3.3 Exemple d'application de l'équation des trois moments

Soit la poutre continue à quatre travées de la figure V.12(a). Supposons les moments d'inertie suivants :  $I_1=1$ ,  $I_2=I_3=2$  et  $I_4=1,5$ .

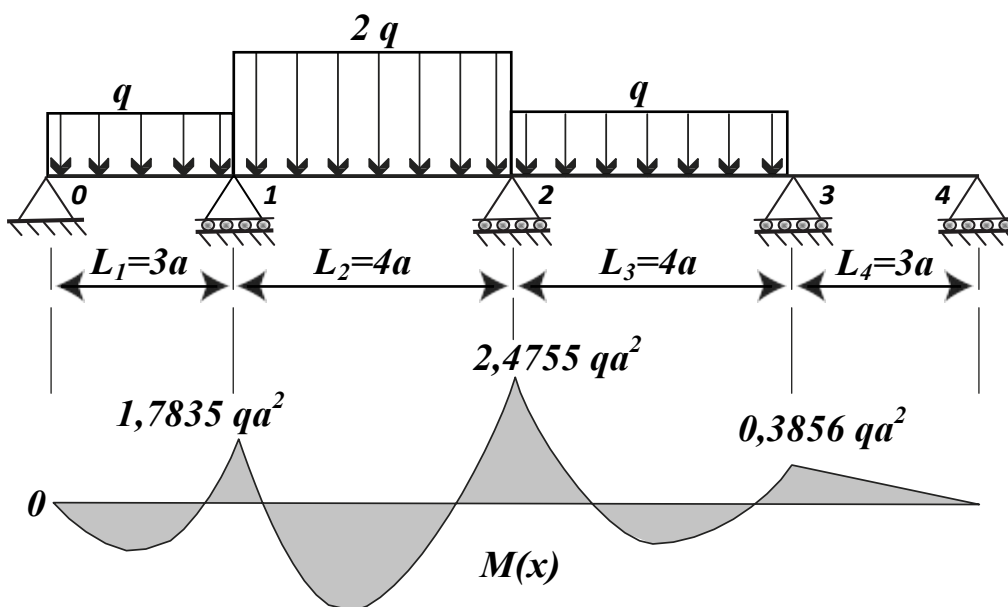


Figure V.12. haut (a): Géométrie de la poutre, bas (b): diagrammes de  $M(x)$ .

Les appuis intermédiaires sont calculé en utilisant l'équation des trois moments (V.12.c), le nombre de moments inconnus est  $n-1=3$ :

$$M_{k-1} \cdot \lambda_k + 2M_k (\lambda_k + \lambda_{k+1}) + M_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} = -(t_k \cdot \lambda_k + t_{k+1} \cdot \lambda_{k+1}), \quad k=1..3$$

1) Le moment d'inertie conventionnel de la poutre continue :

$$I_c = I_1 = 1 \quad (I_c \text{ égale au moment d'inertie de la première travée ou le plus petit}).$$

2) Calcul des portées transformées pour les travées des poutres isostatiques :

- $\lambda_1 = L_1 \cdot \frac{I_c}{I_1} = 3a \cdot \frac{1}{1} = 3a$
- $\lambda_2 = L_2 \cdot \frac{I_c}{I_2} = 4a \cdot \frac{1}{2} = 2a$
- $\lambda_3 = L_3 \cdot \frac{I_c}{I_3} = 4a \cdot \frac{1}{2} = 2a$
- $\lambda_4 = L_4 \cdot \frac{I_c}{I_4} = 3a \cdot \frac{1}{1,5} = 2a$

3) Les termes (facteurs) de charge  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , on utilise le Tab. V.1 (cas N° 03):

- $k=1 \Rightarrow t_1 = \frac{q \cdot (3a)^2}{4} = \frac{9}{4} q \cdot a^2$
- $k=2 \Rightarrow t_2 = \frac{2q \cdot (4a)^2}{4} = 8q \cdot a^2$
- $k=3 \Rightarrow t_3 = \frac{q \cdot (4a)^2}{4} = 4q \cdot a^2$
- $k=4 \Rightarrow t_4 = \frac{(0) \cdot (4a)^2}{4} = 0$

4) Les équations des moments inconnus, avec ( $M_0 = 0$  et  $M_4 = 0$ ) :

- $k=1 \Rightarrow (3a) \cdot (0) + 2(3a + 2a)M_1 + (2a)M_2 = -(3a) \cdot (9/4) \cdot q \cdot a^2 - (2a) \cdot (8q \cdot a^2)$
- $k=2 \Rightarrow (2a)M_1 + 2(2a + 2a)M_2 + (2a)M_3 = -(2a) \cdot (8q \cdot a^2) - (2a) \cdot (4q \cdot a^2)$
- $k=3 \Rightarrow (2a)M_2 + 2(2a + 2a)M_3 + (2a) \cdot (0) = -(2a) \cdot (4q \cdot a^2) - (2a) \cdot (0)$

Après arrangement des équations de calcul des inconnues  $M_k$  ( $M_1, M_2, \dots, M_3$ ), le système d'équations est de la forme:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(91/8)qa^2 \\ -12qa^2 \\ -4qa^2 \end{Bmatrix}$$

5) Par la méthode d'élimination de Gauss, on déduit :

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = -1,78345 q.a^2$$

$$M_2 = -2,45774 q.a^2$$

$$M_3 = -0,38556 q.a^2$$

$$M_4 = 0$$

Le diagramme des moments fléchissant de la poutre continue est donné dans la figure V.12.b.

#### V.4 Poutre continue sur appuis élastiques ponctuels

Par hypothèse, les dénivellations d'appui sont proportionnelles aux réactions d'appui. Un appui élastique «  $i$  » est caractérisé par une constante positive «  $k_i$  » définie par :

$$v_i = -k_i \cdot R_i \quad (V.14.a)$$

Avec :

$v_i$  : est le déplacement vertical de l'appui «  $i$  ».

$R_i$  : est la réaction verticale de l'appui «  $i$  ».

$k_i$  : est appelé coefficient de souplesse de l'appui «  $i$  ».

L'équation de trois moments d'une poutre avec dénivellations (V.13), pour une poutre continue sur appuis élastiques ponctuels prend la forme générale suivante:

$$M_{i-1} \cdot \lambda_i + 2M_i (\lambda_i + \lambda_{i+1}) + M_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} + t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} = \left( \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i} \right) \quad (V.14.b)$$

on a donc :

$$M_{i-1} \cdot \lambda_i + 2M_i(\lambda_i + \lambda_{i+1}) + M_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} + t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} = \left[ \frac{v_{i-1}}{L_i} - \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_i} \right) v_i + \frac{v_{i+1}}{L_{i+1}} \right] \quad (V.14.c)$$

Il reste maintenant à calculer les coefficients de la relation (V.14.c).

#### V.4.1 Expressions des sollicitations et actions de liaison

Les sollicitations dans la travée hyperstatique «  $i$  » sont déterminées par superposition des sollicitations dues au chargement extérieur et celles dues aux moments sur appuis.

Soit, pour le moment fléchissant, on peut écrire :

$$M_i(x) = M_{i,0}(x) + M_{i-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{L_i}\right) + M_i \cdot \left(\frac{x}{L_i}\right) \quad (V.15.a)$$

De même pour l'effort tranchant :

$$T_i(x) = T_{i,0}(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} \quad (V.15.b)$$

$M_{i,0}(x), T_{i,0}(x)$  et  $M_i(x), T_i(x)$  : sont les sollicitations à la travée «  $i$  » dues aux chargements extérieurs et celles de la travée hyperstatique respectivement.

On déduit les actions de liaisons de l'appui «  $i$  » des valeurs de l'effort tranchant à droite et à gauche de celui-ci :

$$R_i = T_i(L_i) - T_{i+1}(0) = T_i^d - T_{i+1}^g \quad (V.15.c)$$

Ce qui donne pour des travées quelconques:

$$R_i = R_{i,0} + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} - \frac{M_i - M_{i+1}}{L_{i+1}} \quad (V.15.d)$$

Et pour des travées de longueurs identiques:

$$R_i = R_{i,0} + \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{L_i} \quad (V.15.e)$$

$R_{i,0}$  et  $R_i$  : sont les réactions à l'appui «  $i$  » dues aux chargements extérieurs et celles de la travée hyperstatique respectivement.

### V.4.2 Equation des cinq moments

En considérant les expressions de réactions provoquées dans les bornes des travées hyperstatiques (V.15.d), les équations de dénivellations (V.14.a) prennent la forme suivante :

$$v_i = -k_i \cdot \left[ R_{i,0} + \frac{M_{i-1}}{L_i} - \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_i} \right) M_i + \frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} \right] \quad (V.16.a)$$

$$v_{i-1} = -k_{i-1} \cdot \left[ R_{i-1,0} + \frac{M_{i-2}}{L_{i-1}} - \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i-1}} \right) M_{i-1} + \frac{M_i}{L_i} \right] \quad (V.16.a)$$

$$v_{i+1} = -k_{i+1} \cdot \left[ R_{i+1,0} + \frac{M_i}{L_{i+1}} - \left( \frac{1}{L_{i+2}} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) M_{i+1} + \frac{M_{i+2}}{L_{i+2}} \right] \quad (V.16.a)$$

On reporte les équations (V.16.a-c) dans l'équation (V.14.c) et utilisant les notations suivantes  $R_{i-1,0} = R_{i-1}^0$ ,  $R_{i,0} = R_i^0$  et  $R_{i+1,0} = R_{i+1}^0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} M_{i-1} \cdot \lambda_i + 2M_i(\lambda_i + \lambda_{i+1}) + M_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} + t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} = \frac{1}{L_{i+1}} \left( k_{i+1} \cdot R_{i+1}^0 - k_i \cdot R_i^0 \right. \\ \left. + k_{i+1} \cdot \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{L_{i+2}} - (k_{i+1} + k_i) \cdot \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} + k_i \cdot \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \right) + \frac{1}{L_i} \left( k_i \cdot R_i^0 - k_{i-1} \cdot R_{i-1}^0 \right. \\ \left. + k_i \cdot \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} - (k_i + k_{i-1}) \cdot \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} + k_{i-1} \cdot \frac{M_{i-1} - M_{i-2}}{L_{i-1}} \right) \end{aligned} \quad (V.17.a)$$

En regroupant les moments ensemble, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{k_{i-1} \cdot M_{i-2}}{L_i L_{i-1}} + \lambda_i \cdot M_{i-1} - \left( \frac{k_i}{L_i \cdot L_{i+1}} + \frac{k_i + k_{i-1}}{L_i^2} + \frac{k_{i-1}}{L_i \cdot L_{i-1}} \right) \cdot M_{i-1} \\ + (\lambda_i + \lambda_{i+1}) \cdot M_i + \left( \frac{k_i + k_{i+1}}{L_{i+1}^2} + \frac{2k_i}{L_i \cdot L_{i+1}} + \frac{k_i + k_{i-1}}{L_i^2} \right) \cdot M_i \\ + \lambda_{i+1} \cdot M_{i+1} - \left( \frac{k_{i+1}}{L_{i+1} \cdot L_{i+2}} + \frac{k_i + k_{i+1}}{L_{i+1}^2} + \frac{k_i}{L_i \cdot L_{i+1}} \right) \cdot M_{i+1} + \frac{k_{i+1} \cdot M_{i+2}}{L_{i+1} L_{i+2}} \\ + t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} = - \left( \frac{k_{i-1} \cdot R_{i-1}^0}{L_i} - k_i \cdot R_i^0 \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_i} \right) + \frac{k_{i+1} \cdot R_{i+1}^0}{L_{i+1}} \right) \end{aligned} \quad (V.17.b)$$

En arrangeant les termes, l'expression finale de l'équation est:

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{i-1}}{L_i L_{i-1}} \cdot M_{i-2} + \left[ \lambda_i - \frac{k_{i-1}}{L_i} \left( \frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) - \frac{k_i}{L_i} \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) \right] \cdot M_{i-1} \\
& + \left[ (\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \frac{k_{i-1}}{L_i^2} + k_i \cdot \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{L_{i+1}^2} \right] \cdot M_i \\
& + \left[ \lambda_{i+1} - \frac{k_i}{L_{i+1}} \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) - \frac{k_{i+1}}{L_{i+1}} \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_{i+2}} \right) \right] \cdot M_{i+1} + \frac{k_{i+1}}{L_{i+1} L_{i+2}} \cdot M_{i+2} \\
& + t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} + \left( \frac{k_{i-1} \cdot R_{i-1}^0}{L_i} - k_i \cdot R_i^0 \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_i} \right) + \frac{k_{i+1} \cdot R_{i+1}^0}{L_{i+1}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{V.17.c}$$

Et nous posant pour simplifier l'expression :

$$\alpha_i = (\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \frac{k_{i-1}}{L_i^2} + k_i \cdot \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{L_{i+1}^2} \tag{V.17.d}$$

$$\beta_i = \lambda_i - \frac{k_{i-1}}{L_i} \left( \frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) - \frac{k_i}{L_i} \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) \tag{V.17.e}$$

$$\gamma_i = \frac{k_i}{L_i L_{i+1}} \tag{V.17.f}$$

$$\Omega_i = t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} + \left( \frac{k_{i-1} \cdot R_{i-1}^0}{L_i} - k_i \cdot R_i^0 \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_i} \right) + \frac{k_{i+1} \cdot R_{i+1}^0}{L_{i+1}} \right) \tag{V.17.g}$$

D'où l'expression du théorème des cinq moments :

$$\gamma_{i-1} \cdot M_{i-2} + \beta_i \cdot M_{i-1} + \alpha_i \cdot M_i + \beta_{i+1} \cdot M_{i+1} + \gamma_{i+1} \cdot M_{i+2} + \Omega_i = 0 \tag{V.18.a}$$

**La relation (V.18.a) s'appelle « l'équation des cinq moments ».**

### Observations :

En appliquant l'équation des 5 moments à chacun des appuis d'une poutre continue à «  $n$  » appuis, on obtient ainsi un système linéaire de «  $n$  » équations à «  $n$  » inconnues ( $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$ ) :

– Pour les premières travées de la poutre :

$$\begin{aligned}
i = 0 & \Rightarrow \alpha_0 M_0 + \beta_1 M_1 + \gamma_1 M_2 = -\Omega_0 \\
i = 1 & \Rightarrow \beta_1 M_0 + \alpha_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_3 = -\Omega_1 \\
i = 2 & \Rightarrow \gamma_1 M_0 + \beta_2 M_1 + \alpha_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \gamma_3 M_4 = -\Omega_2
\end{aligned} \tag{V.18.b}$$

– Pour les dernières travées de la poutre

$$\begin{aligned}
 i = n-2 &\Rightarrow \gamma_{n-3}M_{n-4} + \beta_{n-2}M_{n-3} + \alpha_{n-2}M_{n-2} + \beta_{n-1}M_{n-1} + \gamma_{n-1}M_n = -\Omega_{n-2} \\
 i = n-1 &\Rightarrow \gamma_{n-2}M_{n-3} + \beta_{n-1}M_{n-2} + \alpha_{n-1}M_{n-1} + \beta_n M_n = -\Omega_{n-1} \\
 i = n &\Rightarrow \gamma_{n-1}M_{n-2} + \beta_n M_{n-1} + \alpha_n M_n = -\Omega_n
 \end{aligned} \tag{V.18.c}$$

Ainsi la matrice à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \gamma_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & \vdots & \vdots \\
 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
 \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 \vdots & \vdots & 0 & \gamma_{n-3} & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{n-2} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{n-1} & \beta_n & \alpha_n
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 M_0 \\
 M_1 \\
 M_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 M_{n-2} \\
 M_{n-1} \\
 M_n
 \end{pmatrix}
 = -
 \begin{pmatrix}
 \Omega_0 \\
 \Omega_1 \\
 \Omega_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Omega_{n-2} \\
 \Omega_{n-1} \\
 \Omega_n
 \end{pmatrix} \tag{V.18.d}$$

Dans les cas courants on suppose que les appuis sont articulés (appuis rotules) et les moments aux appuis ( $M_0, M_n$ ) sont nuls, par suite le système se ramène à  $n-2$  équations à résoudre.

**V.4.3 Exemple d'application de l'équation des cinq moments**

Soit la poutre continue à quatre travées sur des ressorts aux appuis élastiques « 1 » et « 2 », figure V.19(a). Supposons les souplesses des ressorts :  $k_1 = \frac{q}{20}$  et  $k_2 = \frac{q}{30}$ . La rigidité des barres est constante, soit :  $I_1 = I$  et  $I_2 = I_3 = I_4 = I$ .

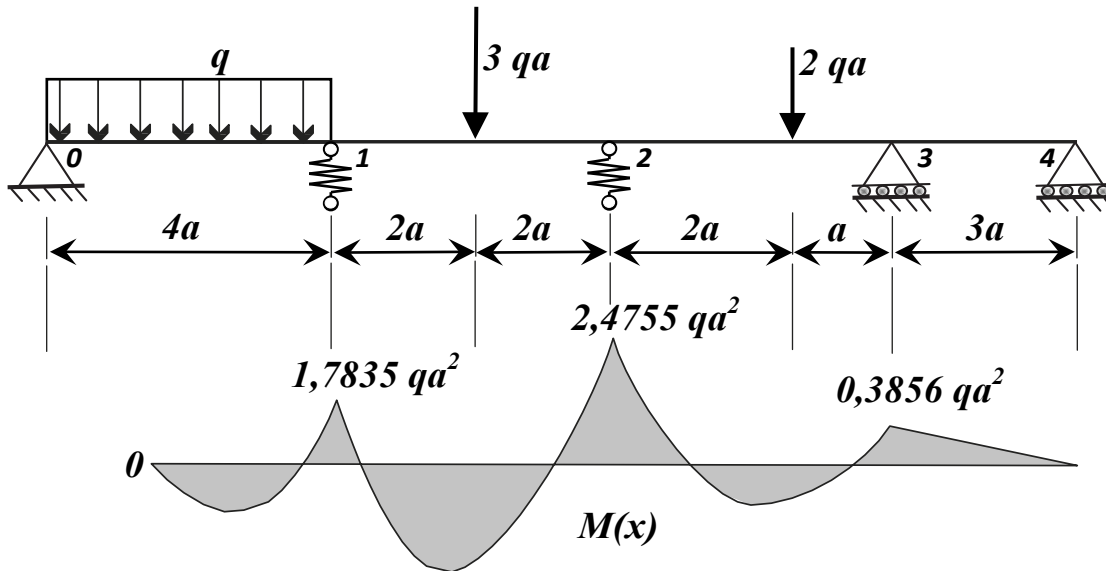


Figure V.12. haut (a): Géométrie de la poutre, bas (b): diagrammes de M(x).

Pour évaluer les moments de flexion aux appuis, on observe que les moments d'appui au niveau de « 0 » « 4 » sont nuls ( $M_0 = 0$  et  $M_4 = 0$ ). Comme la poutre continue est soutenue par des ressorts aux appuis « 1 » et « 2 », on aura les dénivellations d'appuis.

Les appuis intermédiaires sont calculés en utilisant l'équation des cinq moments (V.18.a), le nombre des moments inconnus est  $n-1=3$ :

$$\gamma_{i-1} \cdot M_{i-2} + \beta_i \cdot M_{i-1} + \alpha_i \cdot M_i + \beta_{i+1} \cdot M_{i+1} + \gamma_{i+1} \cdot M_{i+2} + \Omega_i = 0, \quad i=0..4$$

1) Calcul des portées transformées pour les travées des poutres isostatiques :

- $\lambda_1 = L_1 = 4a$
- $\lambda_2 = L_2 = 4a$
- $\lambda_3 = L_3 = 3a$
- $\lambda_4 = L_4 = 3a$



3) Les termes (facteurs) de charge  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , on utilise le Tab. V.1 (cas N° 03):

- $i = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{q \cdot (4a)^2}{4} = \frac{1}{4} q \cdot a^2$
- $i = 2 \Rightarrow t_2 = \frac{q \cdot (4a)^2}{4} = \frac{1}{4} q \cdot a^2$
- $i = 3 \Rightarrow t_3 = \frac{3(3qa)(4a)}{8} = \frac{9}{2} q \cdot a^2$
- $i = 4 \Rightarrow t_4 = \frac{(2qa)(2a) \cdot a(4a)}{(3a)^2} = \frac{16}{9} q \cdot a^2$

4) Soit  $R_1$  et  $R_2$  les réactions aux appuis « 1 » et « 2 » respectivement. Le tassement des supports « 1 » et « 2 » est calculé en fonction des réactions dues au chargement externe de chaque travée. Les appuis se déplacent vers le bas, ainsi :

- $k_1 = \frac{q}{20} \Rightarrow k_1 \cdot R_1^0 = \frac{q}{20} \cdot \frac{4qa}{2} = \frac{a}{10} q^2$
- $k_2 = \frac{q}{30} \Rightarrow k_2 \cdot R_2^0 = \frac{q}{30} \cdot \frac{3qa}{2} = \frac{a}{20} q^2$

La formulation de système d'équations nous indique les coefficients à calculer en premier. Les equations des moments inconnus  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ , avec ( $M_0 = 0$  et  $M_4 = 0$ ) :

$$i = 1 \Rightarrow \alpha_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_3 = -\Omega_1$$

$$i = 2 \Rightarrow \beta_2 M_1 + \alpha_2 M_2 + \beta_3 M_3 = -\Omega_2$$

$$i = 3 \Rightarrow \gamma_2 M_1 + \beta_3 M_2 + \alpha_3 M_3 = -\Omega_3$$

Ces facteur sont arrangés dans le tableau suivant :

$i$	$\lambda_i$	$t_i$	$t_i \cdot \lambda_i$	$k_i \cdot R_i^0$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\Omega_i$
1	$4a$	$\frac{1}{4} q \cdot a^2$	$q \cdot a^3$	$\frac{a}{10} q^2$	$8a + \frac{7q}{480a^2}$	/	/	
2	$4a$	$\frac{9}{2} q \cdot a^2$	$18 q \cdot a^3$	$\frac{a}{20} q^2$				
3	$3a$	$\frac{16}{9} q \cdot a^2$	$48 q \cdot a^3$	$0$			/	

Coefficients de l'équation de cinq moments :

$$\alpha_i = (\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \frac{k_{i-1}}{L_i^2} + k_i \cdot \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{L_{i+1}^2} \tag{V.17.d}$$

$$\beta_i = \lambda_i - \frac{k_{i-1}}{L_i} \left( \frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) - \frac{k_i}{L_i} \left( \frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) \quad (V.17.e)$$

$$\gamma_i = \frac{k_i}{L_i L_{i+1}} \quad (V.17.f)$$

$$\Omega_i = t_i \cdot \lambda_i + t_{i+1} \cdot \lambda_{i+1} + \left( \frac{k_{i-1} \cdot R_{i-1}^0}{L_i} - k_i \cdot R_i^0 \left( \frac{1}{L_{i+1}} + \frac{1}{L_i} \right) + \frac{k_{i+1} \cdot R_{i+1}^0}{L_{i+1}} \right) \quad (V.17.g)$$

- Ainsi la matrice à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \gamma_{n-3} & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{n-2} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{n-1} & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Omega_{n-2} \\ \Omega_{n-1} \\ \Omega_n \end{Bmatrix} \quad (V.18.d)$$

Après arrangement des équations de calcul des inconnues  $M_k$  ( $M_1, M_2, \dots, M_3$ ), le système d'équations est de la forme:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(91/8)qa^2 \\ -12qa^2 \\ -4qa^2 \end{Bmatrix}$$

5) Par la méthode d'élimination de Gauss, on déduit :

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_1 &= -1,78345 q.a^2 \\ M_2 &= -2,45774 q.a^2 \\ M_3 &= -0,38556 q.a^2 \\ M_4 &= 0 \end{aligned}$$

Le diagramme des moments fléchissant de la poutre continue est donné dans la figure V.12.b.

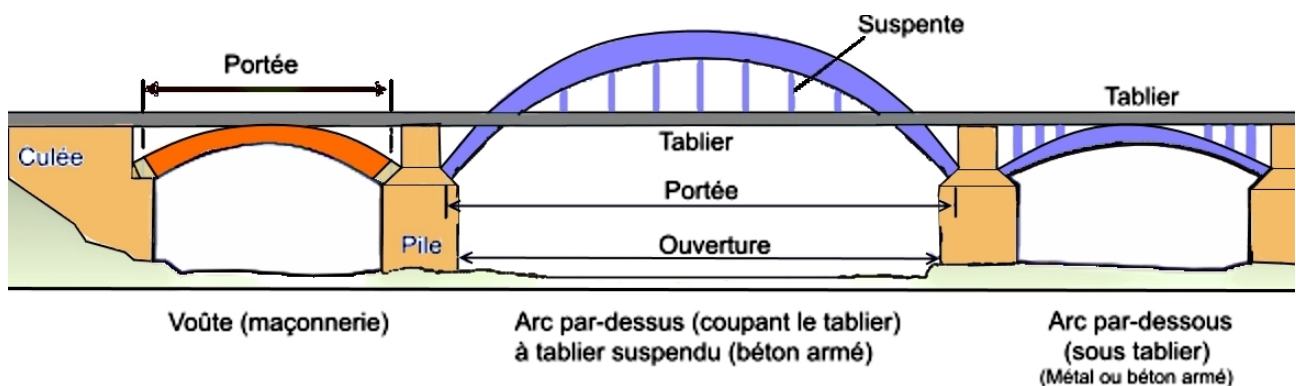
## VI. Arcs plans chargés dans leurs plan

### VI.1 Introduction

Un arc est une poutre incurvée dont les deux extrémités sont fixées en position dans les directions X et Y et qui peut être bloquée en rotation. Cela signifie que les supports peuvent être fixés par des articulations ou par des encastremements, mais jamais par des supports à rouleaux. Une grande importance est donnée à la forme courbe développée par la ligne centrale de l'arc, on trouve entre autre l'arc parabolique, circulaire et asymétrique (à dénivelée). Dans la pratique l'arc parabolique à trois articulations est préféré aux autres types. Les arcs sont d'un emploi très répondeu dans les systèmes hydrotechniques tels que les ponts en arcs.

### VI.2 Terminologie d'un pont en arc

Les termes utilisés se déroulent du schéma de la figure VI.1. Une voûte est un ouvrage de maçonnerie cintré permettant de couvrir un espace en s'appuyant sur des murs, des piliers ou des colonnes. La voûte est constituée d'un plancher (en brique, moellon, pierre, béton) dont le dessous (ou encore intrados) est fait en arc (ou en plate-bande). L'intérêt premier d'une forme en arc est de faire travailler ces matériaux majoritairement en compression.



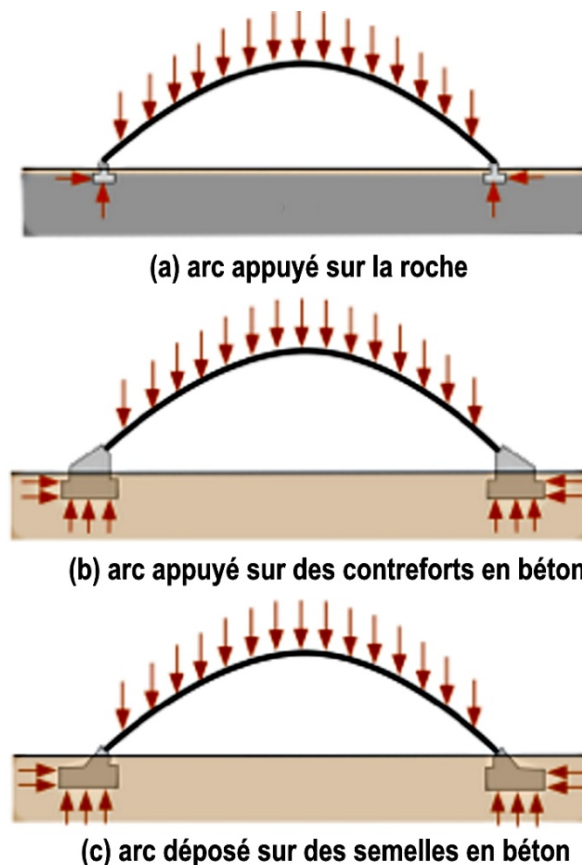
*Figure VI.1. Terminologie d'un pont en arc.*

La stabilisation dans le cas d'un pont routier où le tablier est supporté par un arc, l'arc peut être placée au-dessus, en dessous ou au milieu du tablier. On peut décider que le tablier sera simplement suspendu ou déposé sur l'arc et que celle-ci sera suffisamment rigide pour résister aux efforts de flexion. Il est calculé alors comme un

poteau-poutre.

### VI.3 Poussée de l'arc :

Toute charge placée sur l'arc provoque une réaction horizontale et verticale au niveau des supports. Les forces exercées par les supports sont connues sous le nom de **poussées (des forces horizontales et verticales)** et qui réduisent considérablement les moments de flexion de l'arc. De point de vue conceptuel et pour minimiser leur grandeurs, la solution idéale consiste à assoir l'arc directement sur la roche ce qui n'exige que des fondations de petite dimension (Fig.VI.2.a). La seconde option consiste à déposer l'arc sur des contreforts massifs en béton armé qui transmettent les efforts verticaux et horizontaux au sol de fondation (Fig.VI.2.b). Une troisième possibilité consiste à déposer l'arc sur des semelles de fondation enfouies dans le sol (Fig.VI.2.c). Ces semelles devront être de grandes dimensions pour résister à l'action combinée des forces verticales et horizontales (**poussée de l'arc**), **figure VI.2.**



**Figure VI.2. Solutions envisagées pour l'Actions de l'arc ou Poussés sur les supports.**

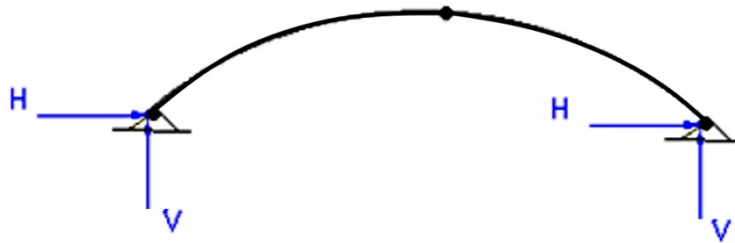
On peut même ajouter un tirant en acier entre les deux supports et qui peut être

placé au-dessus ou au-dessous du niveau du sol. Le tirant reprend les efforts horizontaux de sorte que seules les forces verticales sont transmises aux semelles de fondation.

#### VI.4 Arc isostatique à trois articulations

L'introduction d'une articulation supplémentaire sur un arc bi-articulé crée une équation supplémentaire (**la somme de tous les moments ainsi que le moment de flexion est nulle au niveau de la articulation**), aux trois équations de la statique ( $\Sigma V = 0 ; \Sigma H = 0 ; \Sigma M = 0$  dans l'ensemble de la structure).

Nous avons maintenant 4 inconnues et 4 équations, ce qui rend l'arc statiquement déterminé d'où  $ht=0$ , figure VI.3.a



*Figure VI.3.a Arc parabolique à trois articulations.*

L'arc parabolique à trois articulations est statiquement déterminé.

##### VI.4.1 Arc parabolique symétrique à trois articulations

Puisque une section quelconque est située aux distances  $x$  et  $y$  par rapport à l'origine (Fig. VI.3.b), a comme troisième élément, la tangente à la courbe de l'arc, on doit la déterminer dès le début des calculs.

L'équation développant un arc parabolique prend en générale, la forme (VI.4.a) :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (VI.4.a)$$

On prend l'origine à A(0,0), alors  $c = 0$ , l'équation (VI.4.a) s'écrit :

$$y = ax^2 + bx \quad (VI.4.b)$$

Dans B d'où  $x = l, y = 0$  :

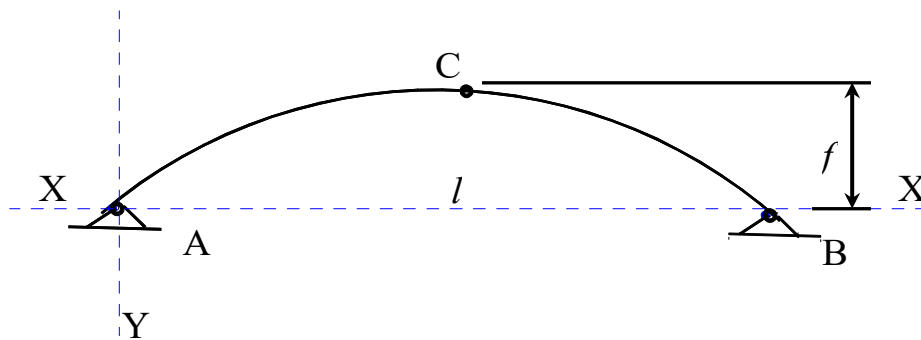
$$\Rightarrow b = -al \quad (IV.4.c)$$

Dans C d'où  $x = \frac{l}{2}, y = f$  :

$$\Rightarrow f = \frac{al^2}{4} + \frac{bl}{2} \tag{IV.4.d}$$

D'où l'équation (VI.4.a) prend la forme finale en considérant (VI.4.b-d) :

$$y = \frac{4rx}{l^2}(l-x) \tag{IV.4.e}$$



**Figure VI.3.b. Arc parabolique symétrique à trois articulations.**

Ou  $l$  représente la portée et  $f$ , la flèche de l'arc, la tangente sera donc :

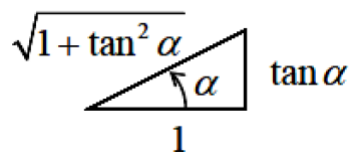
$$\tan \alpha = y'(x) = \frac{4f}{l^2}(l-x) \tag{IV.4.f}$$

Et pour une valeur donnée de  $x$ , l'angle est :  $\alpha = \arctan (y')$ .

En ayant la tangente on peut, évidemment calculer n'importe quelle grandeur trigonométrique, pour des valeurs concrète de l'angle  $\alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$



**Fonction trigonométrique**

**Triangle droit unitaire (rappel)**

### VI.4.2 Arc parabolique asymétrique à trois articulations

Puisque une section quelconque est située aux distances  $x$  et  $y$  par rapport à l'origine (Fig.VI.3.c), a comme troisième élément, la tangente à la courbe de l'arc, on doit lui déterminer dès le début des calculs.

L'équation développant un arc parabolique prend en générale, la forme (VI.5.a) :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (VI.5.a)$$

Prendre l'origine à C(0,0)  $\Rightarrow c = 0$ , figure :

$$y = ax^2 + bx \quad (VI.5.b)$$

Le point C est le point tournant et  $\frac{dy}{dx} = 0$  :

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx) = 2ax + b = 0 \quad (VI.5.c)$$

Dans C, d'où :

$$x = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = ax^2 \quad (VI.5.d)$$

Dans A, d'où :  $x = -L_2, y = -Y_a$ , alors :

$$-Y_a = aL_2^2 \quad (VI.5.e)$$

Dans B, d'où :  $x = L_1, y = -Y_b$ , alors :

$$-Y_b = aL_1^2 \quad (VI.5.f)$$

Résoudre le problème de (VI.5.e) en a :

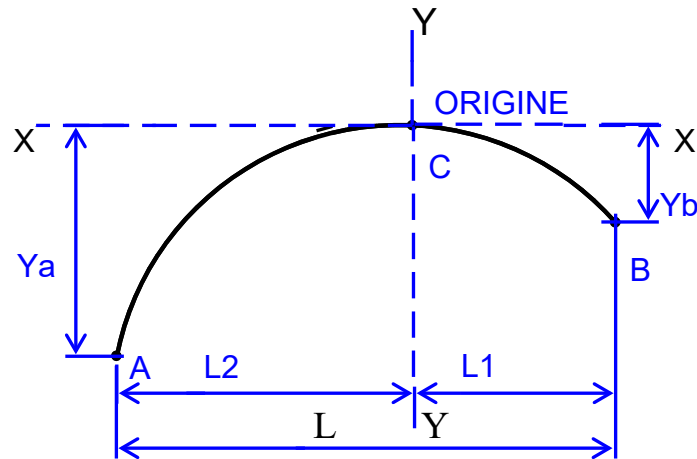
$$a = \frac{-Y_a}{L_2^2} \quad (VI.5.g)$$

Remplaçant le résultat en (VI.5.f), donc :

$$-Y_b = -Ya \frac{L_1^2}{L_2^2} \quad (VI.5.h)$$

Faisons le rapport des (VI.5.f) et (VI.5.h) :

$$\sqrt{\frac{Y_b}{Y_a}} = \frac{L_1}{L_2} \quad (VI.5.i)$$



*Figure VI.3.c. Arc parabolique asymétrique à trois articulations.*

### VI.4.3 Calcul des forces axiales et de cisaillement radial

Dans la figure de l'arc asymétrique à trois articulations, en tout point D de la courbe, la **poussée axiale horizontale H** agit dans le sens de la tangente à la courbe dans ce dernier point, est la **somme des de toutes les composantes horizontales, les forces (y compris les réactions) à la gauche (ou à la droite) de ce point** dans la direction de la tangente :

- La composante de H dans le plan Y-Y =  $\Sigma H \sin \alpha$
- Et la composante de H dans le plan X-X =  $\Sigma H \cos \alpha$
- La composante de V dans le plan Y-Y =  $\Sigma V \cos \alpha$
- Et la composante de V dans le plan X-X =  $\Sigma V \sin \alpha$

En Ajoutant les deux composantes dans le sens de la tangente, on obtient :

$$N = \Sigma H \cos \alpha + \Sigma V \sin \alpha \quad (VI.6.a)$$



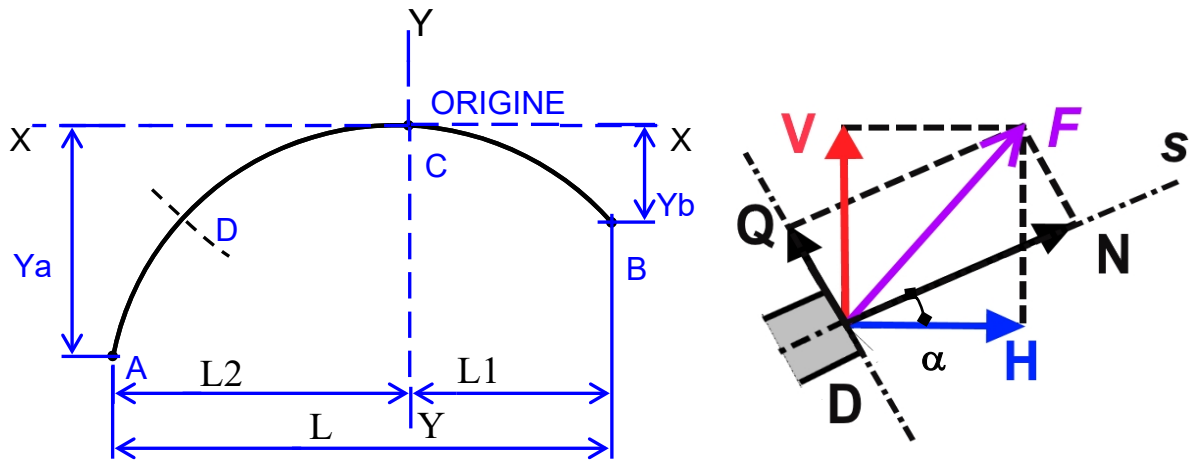


Figure VI.3.d. Calcul des forces axiales et de cisaillement radial.

De la même façon, la force de cisaillement radial Q en tout point de la X courbe est la composante de tous les forces à gauche (ou à droite) de ce point perpendiculairement à la tangente à ce dernier point.

Addition dans la direction perpendiculaire à la tangente :

$$Q = \Sigma V \cos \alpha - \Sigma H \sin \alpha \tag{VI.6.b}$$

**Remarque :**

Les formules (VI.6.a) et (VI.6.b) s'appliquent uniquement à la section AB avec,  $\Sigma V$  vers le haut et  $\Sigma H$  de gauche vers la droite.

Il est recommandé que toutes les forces inclinées soient résolues en composantes horizontale et verticale pour calculer  $\Sigma V$  et  $\Sigma H$  ; la somme de toutes les forces verticales et horizontales à gauche du point D.

Pour les conditions aux appuis de la section ci-dessus, les formules changent en :

$$N = \Sigma H \cos \alpha - \Sigma V \sin \alpha \tag{VI.7.a}$$

$$Q = \Sigma V \cos \alpha + \Sigma H \sin \alpha \tag{VI.7.b}$$

Pour calculer les moments de flexion maximum et minimum, le moment de flexion doit être écrit en fonction de la variable  $x$  c.-à-d.  $M = f(x)$ . La dérivée  $\frac{dM}{dx} = 0$  doit donner les valeurs de  $x$  des moments de flexion maximum et minimum.

**VI.4.3.1 Exemple VI.1**

Un arc parabolique à trois articulations s'étend sur 10 m entre les supports, et une flèche de 2,5 m. l'arc est soumis à une charge uniforme de 15 kN/ml sur la moitié gauche de la portée, Fig. VI.4.a.

Calculer le moment de flexion, la force de poussée axiale et la force de cisaillement radiale en un point D,  $AD = \frac{l}{4}$  de l'appui de la main gauche.

On Prend l'origine à A ( 0,0), figure VI.4.a :

$$y = ax^2 + bx \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow b = -al \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$b = -10a$$

$$\Rightarrow r = \frac{al^2}{4} + \frac{bl}{2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$2.5 = 25a + 5b$$

$$a = -0.1 \text{ et } b = 1$$

$$\Rightarrow y = -0.1x^2 + x$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = -0.2x + 1$$

$$\text{à } x = 2,5 \text{ m ; } \tan \alpha = 0,5 \text{ et } \alpha = 26,57^\circ$$

$$\Rightarrow y = -0.1 \times 2.5^2 + 2.5 = 1.875 \text{ m}$$

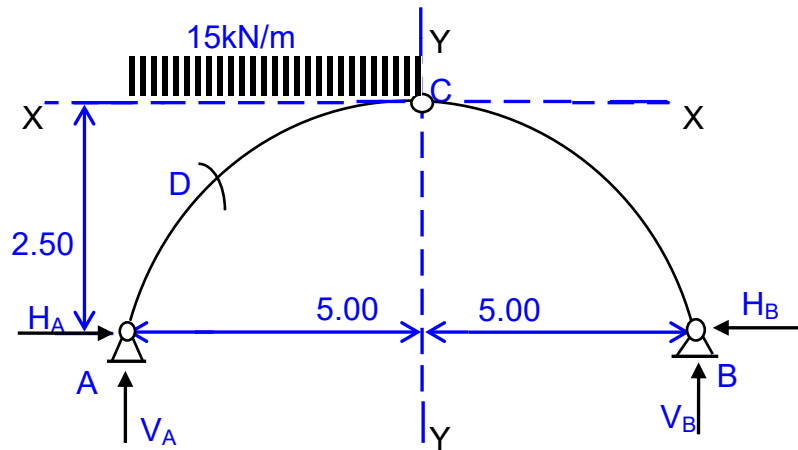


Figure VI.4.a. Arc à 3 trois articulations.

**Réactions :**

1)  $\Sigma V = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 5 \times 15 = 75 \text{ kN}$

2)  $\Sigma M/B = 0 \Rightarrow 10 V_A - (15 \times 5 \times 7.5) = 0$

$\Rightarrow V_A = 56.25 \text{ kN}$

et  $V_B = 75 - 56.25 = 18.75 \text{ kN}$

3)  $\Sigma M/C = 0$  et  $H_A = H_B = H$

$\Rightarrow (56.25 \times 5) \left( 15 \times \frac{5}{2} \right)^2 - H (2.5) = 0$

$\Rightarrow H = 37.5 \text{ kN}$

A gauche de D :

$\Sigma H = 37.5 \text{ kN}$  et  $\Sigma V = 56.25 - (2.5 \times 15) = 18.75 \text{ kN}$

On applique les formules (VI.6.a) et (VI.6.b) :

$N = 37.5 \cos (26.570) + 18.75 \sin (26.570)$

$= 41.926 \text{ kN}$  (compression)

$Q = 18.75 \cos (26.570) - 37.5 \sin (26.570)$

$= 0 \text{ kN}$

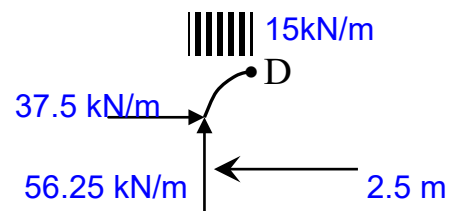


Diagramme de Moment :

$$M(x) = 56.25 \times 2.5 - 37.5 \times 1.875 - 15 \times \frac{2.5^2}{2} \quad (\text{comme précédemment.})$$

$$= 23.4375 \text{ kN.m}$$

Une formule pour le moment de flexion se lirait :

$$M(x) = 56,25 x - 37,5 - (y) 15 \frac{x^2}{2}$$

$$= 56.25 x - 37.5 - (-0.1x^2 + x) 15 \frac{x^2}{2}$$

$$= -3.75 x^2 + 18.75 x$$

Au point de moment de flexion maximum  $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = 0 = -7.5 x + 18.75$$

Donnant,  $x = 2.5 \text{ m}$  et  $y = 2.5 = \frac{2.5^2}{10} 18.75 \text{ m}$

Le moment de flexion à ce point est de  $M_D = 23.4375 \text{ kN.m}$

#### VI.4.4 Arc isostatique circulaire et arc en segment :

L'équation analytique d'un cercle (Fig. VI.5.a), de point O1 :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{VI.8.a})$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (\text{VI.8.b})$$

De point O2 :

$$x^2 + (y + b)^2 = R^2 \quad (\text{VI.7.c})$$

$$R^2 = a^2 + b^2$$

$$R = h + b$$

$$\Rightarrow R^2 = h^2 + 2hb + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = h^2 + 2hb + b^2$$

$$b = \frac{a^2 - h^2}{2h} \quad \text{et} \quad R = h + b$$

D'où  $a =$  la moitié de la portée et  $h =$  la hauteur de l'arc.

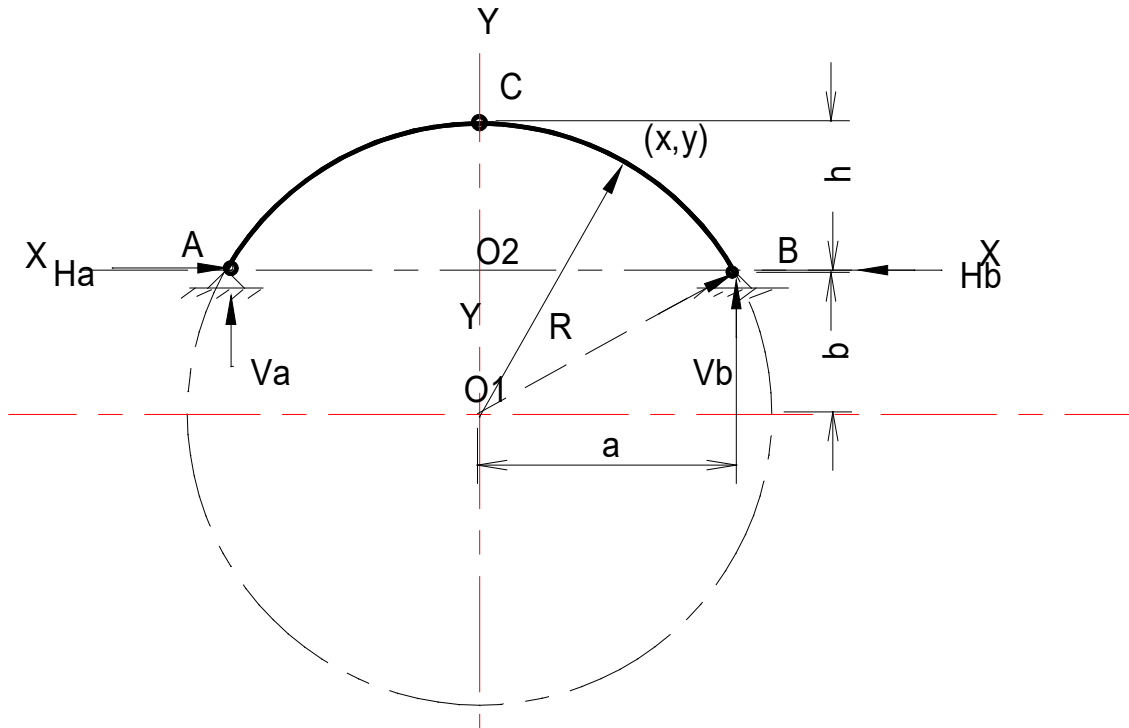


Figure VI.5.a Arc circulaire et arc en segment

VI.4.4.1 Calcul de l'angle de tangence pour les arcs en segments

La tangente est calculée directement de la géométrie de la figure VI.5.b :

$$\tan \vartheta = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

(VI.8.d)

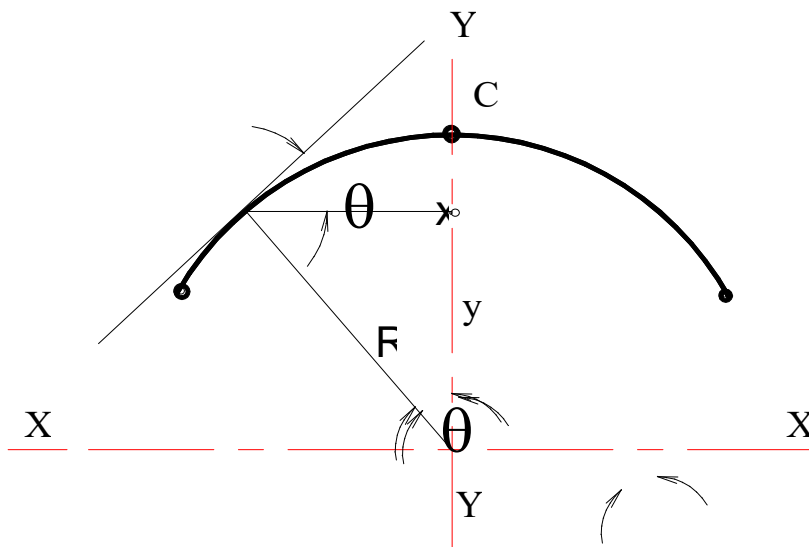


Figure VI.5.b. Calcul de l'angle de tangence pour les arcs en segments

## VI.4.4.2 Exemple VI.2

Calculer le moment de flexion, la poussée axiale et le cisaillement radial au point P, qui est à 10 m, horizontalement par rapport à A, figure VI.5.c.

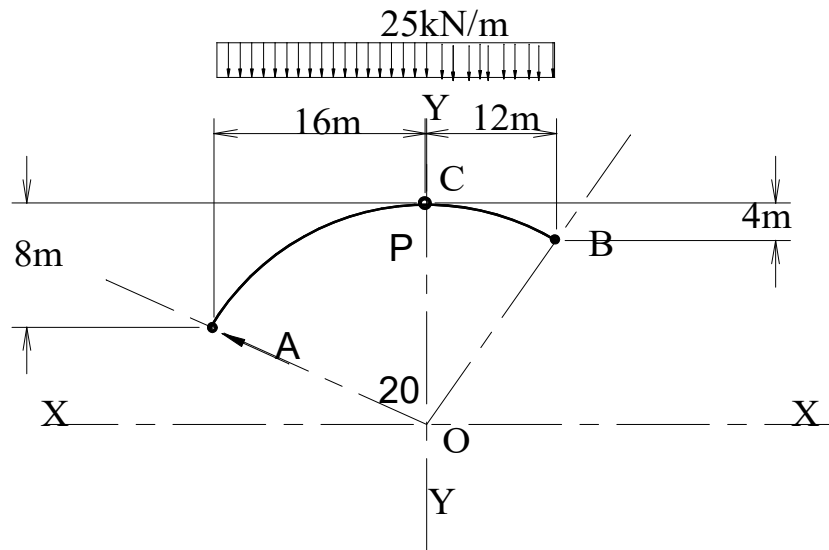


Figure VI.5.c. Un élément d'arc circulaire

L'équation analytique d'un cercle est :

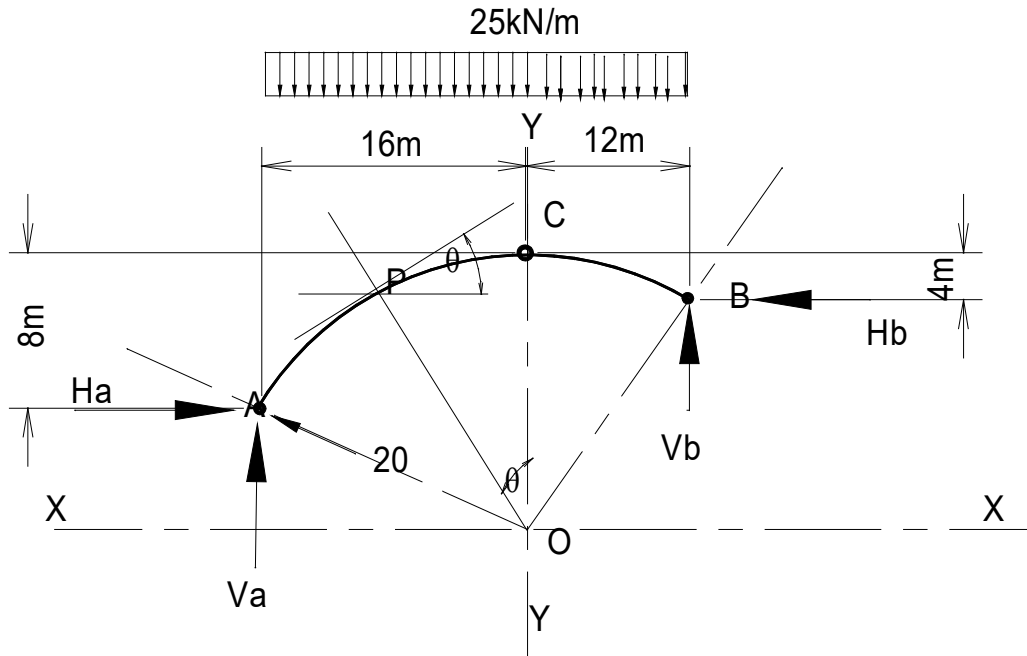
$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y_a = \sqrt{20^2 - (-16)^2} = 12m$$

$$y_b = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16m$$

$$y_c = \sqrt{20^2 - 0^2} = 20m$$



**Réactions**

Équilibre horizontal :

$$H_b = H_a$$

MOMENTS SUR B :  $7V_a - H_a = 2450$  ..... (1)

MOMENTS SUR C :  $2V_a - H_a = 400$  ..... (2)

$$V_a = 410kN$$

$$H_a = 420kN$$

Équilibre vertical  $V_b = 290kN$  .

– Au point P :

$$x = -10m$$

$$y_p = \sqrt{20^2 - (-10)^2} = 17.32m$$

$$y_a = \sqrt{20^2 - (-16)^2} = 12m$$

Comme auparavant

$$Mp = -224.4kNm$$

$$\theta_p = 30^\circ$$

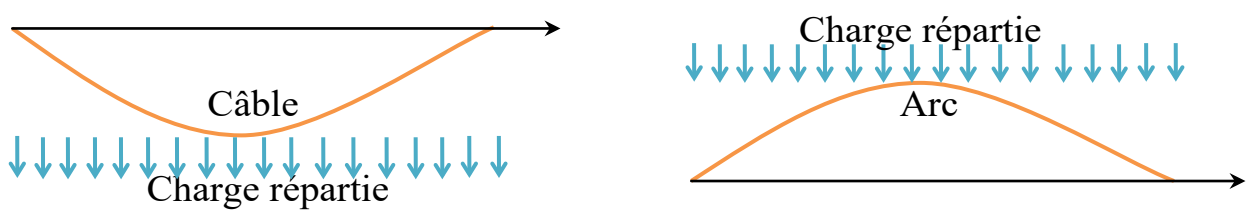
Poussée axiale = 493,7 kN

Cisaillement radial = 15,2 kN

### VI.4.5 Arc funiculaire :

L'arc parabolique agit comme l'inverse d'un câble flexible qui pend en pure tension pour former une parabole lorsqu'une charge uniformément répartie  $y$  est suspendue. L'arc parabolique est donc en compression pure lorsqu'il porte une charge uniformément répartie. Dans la conception d'un arc, on cherche à donner une géométrie telle que le matériau ne travaille majoritairement qu'en compression en limitant les efforts tranchants et les moments fléchissant qui doivent donc être nuls. La forme réalisant cette condition est appelée polygone funiculaire.

Il est possible de faire l'analogie avec un câble dont la rigidité flexionnelle est très faible ; les câbles adoptent des géométries satisfaisant les équations d'équilibre en supprimant dans chaque section le moment fléchissant. Même si les forces dans un câble sont des forces de traction, on peut ainsi envisager une certaine dualité entre câbles et arcs : pour un chargement donné, un câble adopte la forme que devra adopter l'arc pour ne pas présenter de moment fléchissant. Un arc soumis à un chargement uniforme pour être funiculaire, doit donc adopter la même forme, mais de sens opposés, qu'un câble de même portée soumis à la même charge (figure VI.9).



**Figure VI.9 : Similitude arc-câble soumis à un chargement uniforme**

L'arc n'est funiculaire que pour un type de chargement, si le chargement varie, des moments fléchissant vont apparaître. La forme de l'arc est définie en fonction de la charge majoritaire. C'est le cas de la charge de poids propre pour des ponts des longues portées.



## VI.5 Arcs hyperstatiques

Dans le cas de l'arc à extrémités encastrées, nous avons 4 réactions et 2 moments réactifs aux supports. On peut encore supprimer trois réactions et la structure tiendra stable. Ce type de structure est donc statiquement indéterminé au 3<sup>ème</sup> degré  $ht=3$ , figure VI.10.



*Figure VI.10. Arc parabolique encastré.*

La suppression de deux réactions de moment qui étaient dans l'arc encastré, nous donne 4 réactions aux supports. Une réaction horizontale peut encore être supprimé, l'arc s'étendrait mais resterait une structure stable. Ce type de structure est donc statiquement indéterminé au 1<sup>er</sup> degré  $ht=1$ , figure VI.11.



*Figure VI.11. Arc parabolique bi-articulé.*

## VI.6 Arcs articulés aux naissances (bi-articulé)

### VI.6.1 Calcul sous charges fixes

Le calcul se fait par la méthode des forces avec comme inconnue la force horizontale  $X_1$  (cas général, voir fig. VI.12.1, b) ou parfois, en introduisant une rotule intermédiaire pour obtenir un arc à trois articulations (voir fig. VI.12.1, c).

L'influence de l'effort axial est plus important aux arcs, par rapport aux portiques et la principale difficulté dans le calcul des arcs hyperstatiques est qu'on ne peut utiliser la simplification apportée par la règle de Véréchtchaguine, les

diagrammes ayant une forme courbe. On va intégrer d'après les relations de Maxwell-Mohr.

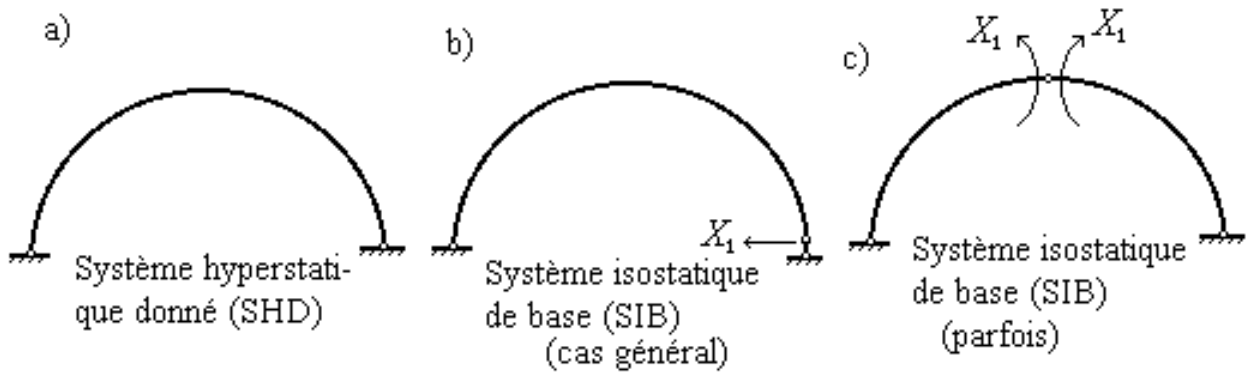


Fig. VI.12.1. arc articulé à la naissance

L'inconnue dans ce cas est la poussée horizontale qui agit selon la direction des deux appuis, d'où l'équation canonique est :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \tag{VI.9.a}$$

avec,  $\Delta_{1P}$  : le déplacement horizontal de l'appui droit sous l'action des forces extérieures ;

$\delta_{11}$  - le déplacement horizontal de l'appui droit sous l'action de  $\bar{X} = 1$ .

Quand les deux appuis sont situés au même niveau, pour  $\bar{X} = 1$  les efforts seront :

$$\bar{M}_1 = -y \text{ et } \bar{N}_1 = -\cos \vartheta \tag{VI.9.b}$$

Les déplacements  $\Delta_{1P}$  et  $\delta_{11}$  sont déterminés par les formules habituelles des déplacements:

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds + \sum_s \int \frac{\bar{N}_1 N_P}{EA} ds ; \tag{VI.10.a}$$

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2}{EA} ds . \tag{VI.10.b}$$

Il faut noter que pour les arcs surbaissés, les déplacements dus à l'effort normal peuvent être négligés on a:

$$\bar{M}_1 = -1.y \text{ et } \bar{N}_1 = 1.\cos\varphi \text{ donc, } \delta_{11} = 2 \int_0^{s/2} y^2 \frac{ds}{EI} + 2s / 2 \int_0^s \cos^2 \varphi \frac{ds}{EA} .$$

### VI.7 Arcs avec tirants

Pour les arcs avec tirants, le système isostatique de base est obtenu en coupant le tirant; l'inconnue  $X_1$  sera l'effort normal (la traction) dans le tirant, voir fig. VI.13.1). L'équation canonique a la forme suivante :

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0 \Rightarrow X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

Avec,

$\delta_{11}$  - le déplacement mutuel horizontal des sections coupées sous l'action de  $\bar{X} = 1$ ;

$\Delta_{1P}$  - le même déplacement sous l'action des charges extérieures.

Sous l'action des forces extérieures, il se développe des efforts internes dans l'arc seulement, le tirant étant coupé, donc il est libéré de tout effort interne. Ainsi, l'expression de  $\Delta_{1P}$  est la même que pour les arcs analogues à deux articulations.

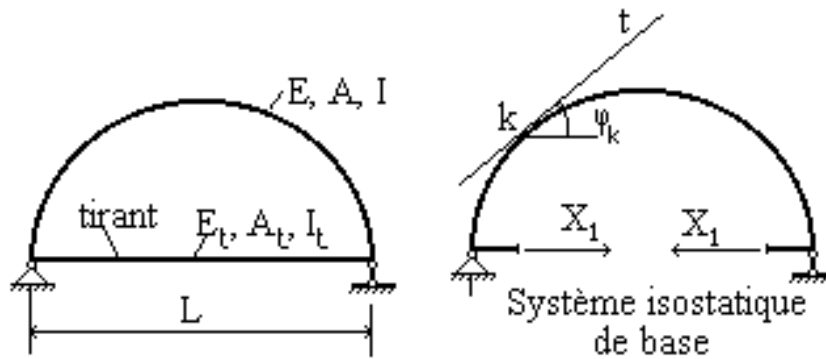


Fig. VI.13.1.

Quant au déplacement  $\delta_{11}$ , à celui correspondant à l'arc à deux articulations  $\delta_{11,a}$ , il faut ajouter l'allongement du tirant égal à  $1 \cdot \frac{L}{E_t A_t}$ ; donc, on obtient :

$$\delta_{11} = \delta_{11,a} + 1 \cdot \frac{L}{E_t A_t} = \int \bar{M}_1^2 \frac{ds}{EI} + \int \bar{N}_1^2 \frac{ds}{EA} + \frac{L}{E_t A_t} \tag{VI.16}$$

En négligeant l'influence de l'effort tranchant  $T$  et de l'effort normal  $N$ , la valeur de l'effort dans le tirant (c'est-à-dire la poussée)  $X$  sera :

$$X = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11,a} + \frac{L}{E_t A_t}} = - \frac{- \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{M ds}{EI}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \frac{ds}{EI} + \frac{L}{E_t A_t}} \tag{VI.17}$$

La poussée dans un arc à deux articulations sera:  $X_a = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11,a}}$

Ainsi,  $X \leq X_a$ , c'est-à-dire que la poussée dans un arc avec tirant est toujours inférieure à celle dans un arc à deux articulations. On a :

$$X = X_a \frac{1}{1 + \frac{L}{E_t A_t \delta_{11,a}}} \quad (VI.18)$$

### **Remarques:**

- Si  $A_t = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow$  l'arc se transforme en poutre.
- Si  $A_t \rightarrow \infty \Rightarrow X = X_a \Rightarrow$  on a un arc à deux articulations.
- Plus  $A_t$  est petite, plus l'effort est petit dans le tirant.

## **VI.8 Arcs encastrés aux naissances**

### ***VI.8.1 Calcul sous l'action des charges fixes***

Pour le calcul d'un arc encastré aux naissances (fig. VI.14.1, a), on supposera qu'il est symétrique et que toutes les charges extérieures sont situées dans le plan de l'arc. Un arc encastré aux naissances est hyperstatique d'ordre 3 (voir fig. VI.14.1, b). Les inconnues sont  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ , respectivement la force horizontale, le moment de flexion et l'effort tranchant. Le système d'équations canoniques est:

$$\begin{aligned} \delta_{11} Z_1 + \delta_{12} Z_2 + \delta_{13} Z_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} Z_1 + \delta_{22} Z_2 + \delta_{23} Z_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} Z_1 + \delta_{32} Z_2 + \delta_{33} Z_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \quad (VI.19)$$

Compte tenu de la symétrie des épures de  $\bar{M}_{Z_1}$  et  $\bar{M}_{Z_2}$  et de l'antisymétrie de l'épure  $\bar{M}_{Z_3}$  (voir fig. VI.14.1, c, d, e), on a :

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

Donc, le système d'équations canoniques devient :

$$\begin{aligned} \delta_{11} Z_1 + \delta_{12} Z_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} Z_1 + \delta_{22} Z_2 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33} Z_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \quad (VI.20)$$

Généralement, le calcul se fait dans un nouveau système avec de nouvelles inconnues  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  appliquées au point  $D$  d'une console rigide impondérable de

longueur  $c_d$  telle que l'on a (voir fig. VI.14.1, f) :

$$Z_1 = X_1; Z_2 = X_2 - X_1 c_d; Z_3 = X_3 \quad \text{et} \quad c_d = \frac{\int_0^{s/2} y \frac{ds}{EI}}{\int_0^{s/2} \frac{ds}{EI}} \quad (\text{VI.21.a})$$

Le point  $D$  est appelé **centre élastique de l'arc**; il est le centre de gravité de la fibre moyenne de l'arc affecté en chaque point d'une densité de charge fictive égale à  $1/EI$ . En effet, le point  $D$  est tel que  $\delta_{12} = 0$ ; on a:  $\bar{M}_1 = -1.y_1$ ;  $\bar{M}_2 = 1$ , donc,

$$\delta_{12} = \int_0^{s/2} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{ds}{EI} = - \int_0^{s/2} y_1 . 1 . \frac{ds}{EI} = - \int_0^{s/2} (c_d - y) \frac{ds}{EI} = 0 \Rightarrow c_d = \frac{\int_0^{s/2} y \frac{ds}{EI}}{\int_0^{s/2} \frac{ds}{EI}}. \quad (\text{VI.21.b})$$

On obtient ainsi, pour le système d'équations (voir fig. VI.14.1, g, h):

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} &= 0 \Rightarrow X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0 \Rightarrow X_2 = - \frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} \\ X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} &= 0 \Rightarrow X_3 = - \frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}} \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

Avec,

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \int_0^{s/2} y_1^2 \frac{ds}{EI} + 2 \int_0^{s/2} \cos^2 \varphi \frac{ds}{EI}; \quad \delta_{22} = 2 \int_0^{s/2} \frac{ds}{EI}; \quad \delta_{33} = 2 \int_0^{s/2} x^2 \frac{ds}{EI}; \\ \Delta_{1P} &= - \int_0^{s/2} M_p y_1 \frac{ds}{EI}; \quad \Delta_{2P} = \int_0^{s/2} M_p \frac{ds}{EI}; \quad \Delta_{3P} = \int_0^{s/2} M_p x \frac{ds}{EI}. \end{aligned}$$

En plaçant les valeurs des déplacements dans le système d'équations canoniques, on détermine les inconnues; après quoi, on peut calculer les efforts internes dans n'importe quelle section de l'arc.

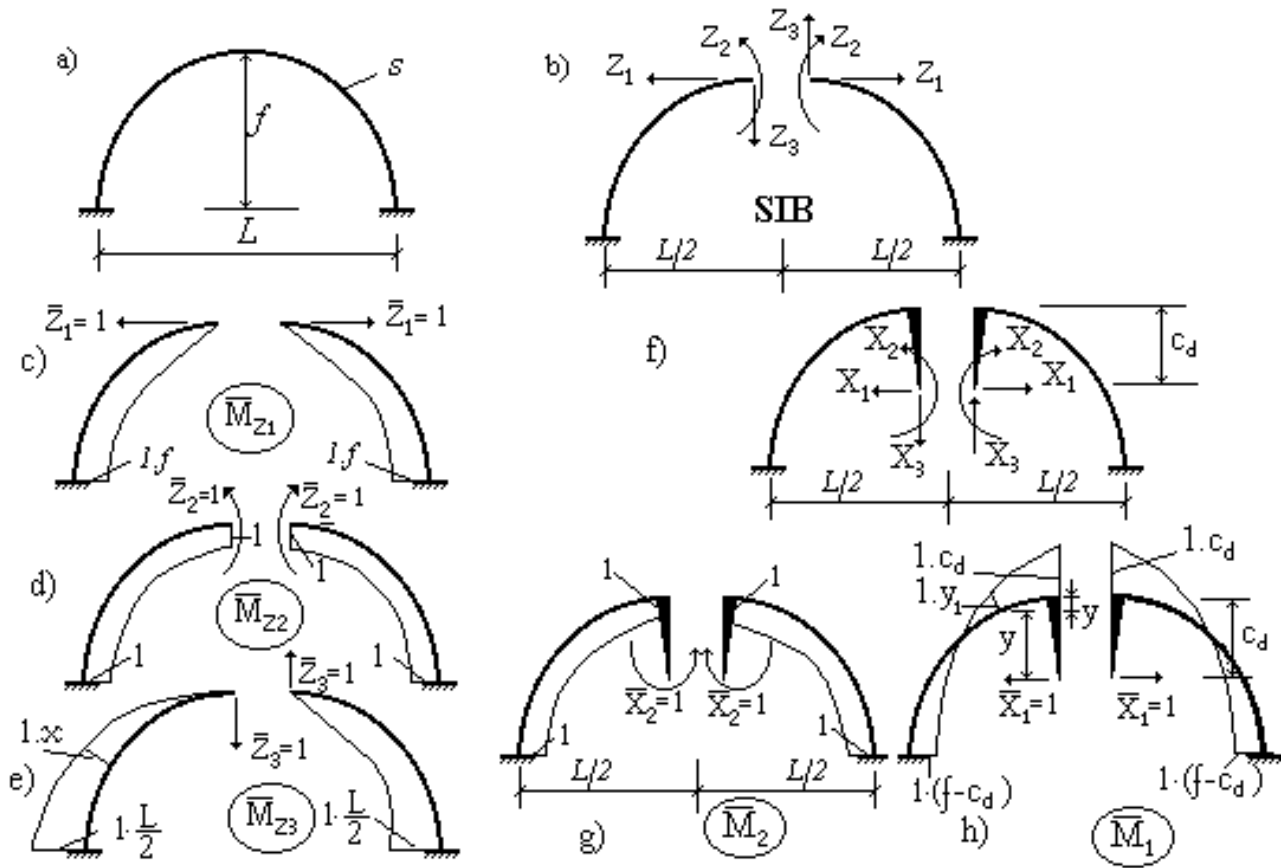


Fig. VI.14.1.

### VI.9 Arcs circulaires sous pression radiale

Dans les ouvrages hydrotechniques, il est fréquent de rencontrer des arcs circulaires soumis à la pression hydrostatique sous forme de pression radiale.

Soit un arc circulaire soumis à l'action d'une pression constante radiale d'intensité  $q_\phi$  et aux extrémités duquel sont appliquées les forces  $N_o, T_o, M_o, N_s,$

$T_s$  et  $M_s$  (voir fig. VI.15.1, a).

En dégagant un élément infiniment petit et en écrivant pour lui les équations d'équilibre, on obtient (voir fig. VI.15.1, b) :

– en projetant toutes les forces agissant sur l'élément sur l'axe  $s-s$ :

$$\frac{dT}{d\phi} = -N + q_\phi R \quad (q_o = q_\phi); \tag{VI.23}$$

– en projetant toutes les forces agissant sur l'élément sur l'axe perpendiculaire à  $s-s$ :

$$\frac{dN}{d\varphi} = N; \tag{VI.24}$$

– en prenant la somme des moments de toutes les forces par rapport au centre:

$$T = \frac{dM}{ds}. \tag{VI.25}$$

Comme on a:  $ds = R d\varphi$ , on obtient:  $\frac{dM}{d\varphi} = T.R.$

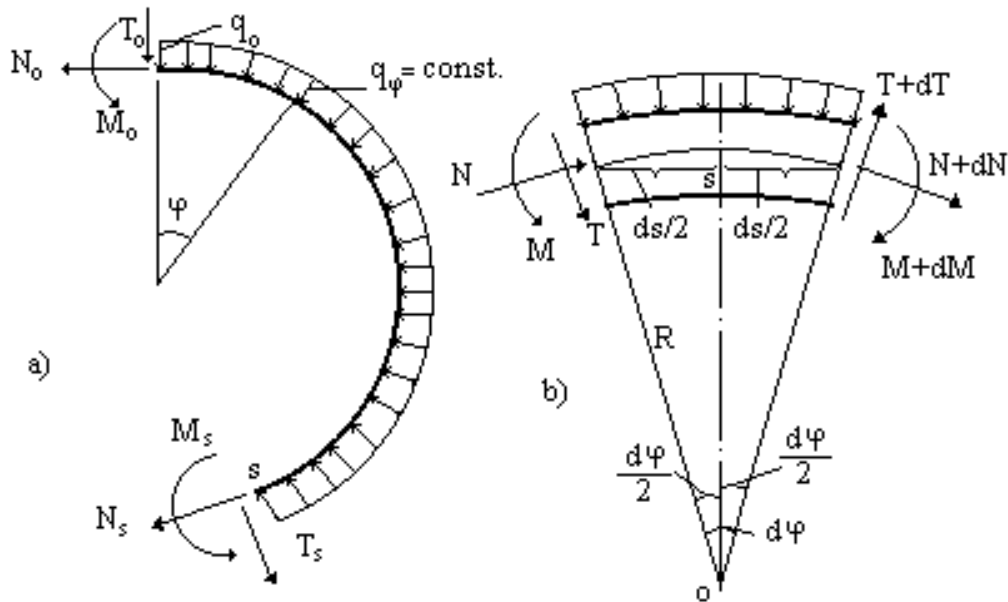


Fig. VI.15.1.

En considérant ces relations différentielles entre les différents efforts internes et en supposant connues les forces appliquées aux extrémités, on obtient, pour une section quelconque, les expressions suivantes pour les sollicitations :

$$\begin{aligned} T &= T_0 \cos\varphi + q_0 R \sin\varphi - N_0 \sin\varphi; \\ N &= N_0 \cos\varphi + T_0 \sin\varphi + q_0 R (1 - \cos\varphi); \\ M &= M_0 + T_0 R \sin\varphi + (q_0 R^2 - N_0 R)(1 - \cos\varphi). \end{aligned} \tag{VI.26}$$

## Références

- [1] S. P., TIMOSHENKO, History of Strength of Materials, Dover, New York, 1983.
- [2] L., TODHUNTER, and K., PEARSON, History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials, Vols. I and II, Dover, New York, 1960.
- [3] A LUVANOS-ROJAS, Method of structural analysis taking into account deformations by flexure, shear and axial, ICIC Express Letters. vol.9, no.9 , pp.3817-3818, September 2013.
- [4] R. W. Clough and J. Penzien, Dynamics of Structures, Mac Graw-Hill, 1975.
- [5] M.ALBIGES, A. COIN, Résistance des matériaux appliquée, Tome 1, Eyrolles, 1982.
- [6] J. COURBON, Résistance des matériaux, Tome 1, Dunod, 1965.
- [7] V. FEODOSSIEV, Résistance des matériaux, MIR-Moscou
- [8] A. GHALI, NEVILLE, BROWN, Structures analysis, Spon -Press.
- [9] MIROLIOUBOV, Problèmes de résistance des matériaux, MIR-Moscou.
- [10] ARAM SAMIKIAN, Gaetan Morin. Analyse des structures,
- [11] KERGUIGNAS, Résistance des matériaux, Dunod.
- [12] E. DREFFUSS, Leçons sur la résistance des matériaux, Tome 3,
- [13] A. PADUART, J. KESTENS, G. WARZEE, Calcul des structures hyperstatiques, Masson 1984.
- [14] A. GIET, A. Problèmes de résistance des matériaux, Tome 1 et 2, Dunod.
- [15] P. Lestuzzi, L. Pflug. Analyse des structures et milieux continus. Structures en barres et poutres (TGC volume 4). EPFL Press 2014.
- [16] G. MOMANU, P. SADRA, Calcul des structures hyperstatiques, OPU 1993. Alger
- [17] I.A. Karnovsky, O. Labeled, Advanced Methods of Structural Analysis, Springer 2010.
- [18] J. Goulet, J.P. Boutin, F. Lerouge, Aide Mémoire Résistance des matériaux, Dunod 2014.
- [19] Y. Xiong, Formulaire de résistance des matériaux, Eyrolles 2007.
- [20] A. ANISSIMOV, CALCUL DES BARRES : dans le cas de sollicitation composée (Partie I de RDM II), USTHB, ENP, OPU 1993, Alger
- [21] C. A. DOBRESCU, STATIQUE DES STRUCTURES – Problèmes – Tome I, Tome II et Tome III. OPU 1992, Alger.
- [22] M. KHAOUA, Traité de mécanique des structures, OPU 2003, Constantine.
- [23] M. KHEROUF, Résistance des matériaux, Cours et exercices corrigés, OPU 2012, Constantine.