1. مجموعات :

1.1 المجموعات:

كثر استعمال كلمات مرادفة لكلمة المجموعة في حياتنا اليومية مثل اسرة ، عائلة ، فريق ، باقة ، جماعة ،قطيع ، سرب. . . لتدل على تجمع من الاشياء التي ينظر اليها ويفكر بها كوحدة واحدة ، فالكلمات الموجودة داخل الشكل البيضاوي ما يسمى مجموعة فصول السنة .

تعاريف:

- نسمّي مجموعة كلّ تجمّع لأشياء تربطها خاصّية مشتركة، و تدعى هذه الأشياء عناصر المجموعة، أو نقاط المجموعة.
- يرمز عادة للمجموعات بأحرف كبيرة مثل $A, B, C, D, X, Y, \cdots$ و يرمز لعناصر هذه المجموعة بأحرف صغيرة مثل $a, b, c, d, x, y, \cdots$.
- تتعيّن مجموعة إذا عرفت جميع عناصرها، و يمكن عندئذ كتابة المجموعة بذكر جميع عناصرها بين حاضنتين من الشّكل $\{\ \}$ مثل: $A = \{a, b, c\}$.

تتعيّن المجموعة أيضا بذكر خاصّة يمكننا بواسطتها الحكم على أيّ شيء بأنّه عنصر في هذه المجموعة أو إنّه غريب عنها.

مثال:

$A = \{x : x$ فردي $\}$ ، ونقرأ A هي مجموعة العناصر x بحيث x هو عدد فردي.

2.1 المجموعات العدديّة :

تعاريف:

- مجموعة الأعداد الطّبيعيّة $IN = \{0,1,2,3,\cdots\}$
- مجموعة الأعداد الطّبيعيّة المغايرة للصّفر $IN^* = \{1,2,3,\cdots\}$
- مجموعة الأعداد الصّحيحة $Z = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$
- مجموعة الأعداد النّاطقة $Q = \left\{x : x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z^*\right\}$

مجموعة الأعداد الحقيقيّة و نرمز لها بـ IR

- مجموعة الأعداد العقديّة و نرمز لها بـ $\mathbb{C}$

- نسمّي كلّ مجموعة يمكن الانتهاء من عدّ عناصرها مجموعة منتهيّة، وهي المجموعة التّي عدد عناصرها محدود، و نقول في الحالة المخالفة إنّنا أمام مجموعة غير منتهيّة.

مثال:

المجموعة $A = \{a, b, c\}$ هي مجموعة منتهيّة و عدد عناصرها هو 3. أمّا المجموعة IN فهي غير منتهيّة.

3.1 الانتماء :

- إذا كان x عنصرا من المجموعة A فنقول أنّه ينتمي إليها و نكتب : $x \in A$.
- و إذا أردنا نفي انتماء x إلى المجموعة A كتبنا $x \notin A$ ، و نقول x لا ينتمي إلى A .
- المجموعة التّي لا يوجد فيها أيّ عنصر نسمّها المجموعة الخاليّة و نرمز لها بـ $\varnothing$ أو $\{\ \}$.

مثال :

$D = \{x : x \in IN , 2 < x < 3\}$

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

فأي المجموعات الآتية مجموعة جزئية من المجموعة A .

1. $B = \{5,6,7\}$
2. $C = \{5,8,9,11\}$
3. المجموعة A

الحل:

1. نلاحظ ان كل عنصر من عناصر المجموعة B ينتمي للمجموعة A إذن $B \subset A$.
2. إن المجموعة C ليست مجموعة جزئية من المجموعة $C = \{5,8,9\}$ لان $11 \notin A$ في هذه الحالة
   i. نكتب $C \not\subset A$.
3. إن $A \subseteq A$ لان كل عنصر في A ينتمي الى A .
   - ويمكن تعميم الحالة الثالثة بان كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها.

تذكر بان الانتماء يربط عنصرا بمجموعة بينما يربط الاحتواء مجموعة بمجموعة.

4.1 جماعة مجموعات :

إذا كانت عناصر المجموعة هي نفسها مجموعات أيضا، نسمّي مثل هذه المجموعات جماعة (أو أسرة) مجموعات.

مثال:

المجموعة $\{\varnothing, \{5\}, \{1,2\}\}$ هي جماعة مجموعات لأنّ كلّ عنصر منها هو مجموعة.

المجموعة $\{4, \{2,3\}, \{6\}, 7\}$ ليست جماعة مجموعات لأنّ عناصرها هي أعداد و مجموعات.

تعميم:

لتكن $\Im = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$ جماعة مجموعات، لتكن المجموعة $I = \{1,2,\cdots,n\}$. إنّ كلّ عنصر $i \in I$ يقابله عنصر وحيد F_i من $\Im$ ، و لذلك يطلق على المجموعة I اسم مجموعة الأدلّة و كلّ عنصر $i \in I$ يسمّى دليل المجموعة F_i . و للسّهولة و الاختصار نكتب الأسرة $\Im$ على الشّكل $\{F_i\}_{i \in I}$.

5.1 تساوي مجموعتان:

تكون مجموعتان A و B متساويتين أو متطابقتين إذا كان لهما نفس العناصر، و نكتب $A = B$. أو بعبارة أخرى:

$$(A = B) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

و تكون المجموعتان A و B غير متساويتين إذا وجد في إحدى المجموعتين عنصر واحد على الأقلّ لا ينتمي إلى المجموعة الأخرى، ونكتب $A \neq B$ ، و نقرأ A لا تساوي B .

مثال :

المجموعتان $A = \{1,-1,2\}$ و $B = \{x \in Z : (x^2 - 1)(x - 2) = 0\}$ متساويتان.

أمّا المجموعتان $A = \{1,-1,2\}$ و $D = \{1,2\}$ فهي غير متساويتان لأنّ $-1 \in A$ و $-1 \notin D$.

6.1 الاحتواء :

نقول عن مجموعة B أنّها محتواة في مجموعة A إذا كان كلّ عنصر من B عنصرا من A ، و نكتب $B \subset A$ ، أو بعبارة أخرى:

$$(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow (B \text{ محتواة في } A)$$

و تسمّى المجموعة B مجموعة جزئيّة من المجموعة A . بناء على هذا التّعريف نلاحظ أنّه إذا كانت المجموعتان A و B متساويتين $(A = B)$ فإنّ A تكون محتواة في B و B محتواة في A ، أي:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

نقول أنّ المجموعتين A و B متقارنتان إذا كانت $A \subset B$ أو $B \subset A$.

ملاحظة :

1. $A \subset A$ ، $\varnothing \subset A$
2. $(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists x \in A : x \notin B)$
3. $A \not\subset B$ لا تعني أنّ $B \subset A$

7.1 مجموعة أجزاء مجموعة :

•لتكن A مجموعة ما. نسمّي المجموعة التّي عناصرها أجزاء A ، مجموعة أجزاء A و يرمز لها بالرّمز $P(A)$ و منه :

$$(B \in P(A)) \Leftrightarrow (B \subset A).$$

مثال:

لتكن $A = \{a,b,c\}$ ، إذن $P(A) = \{\varnothing, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$.

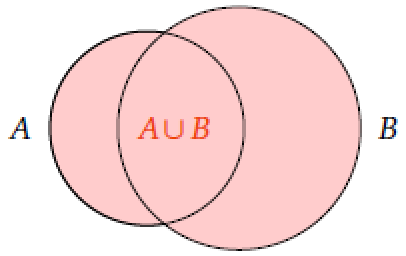
ملاحظة:

إنّ المجموعة A تحتوي على ثلاثة عناصر و المجموعة $P(A)$ تحتوي على $8 = 2^3$ عنصرا. و بصورة أعمّ، إذا كانت A مجموعة منتهيّة تحتوي على n عنصر فإنّ مجموعة الأجزاء $P(A)$ تحتوي على 2^n عنصرا. هذا من جهة، و من جهة أخرى يجب أن نميّز بين a كعنصر من A و $\{a\}$ كعنصر من $P(A)$ أي كمجموعة جزئيّة من A.

8.1 **الاتّحاد:**

اتّحاد مجموعتين A و B الّذي نرمز له بـ $A \cup B$ هو المجموعة المكوّنة من العناصر الّتي تنتمي على الأقلّ إلى إحدى المجموعتين A و B أي أنّ:

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$



مثال :

اذا كانت مجموعة احرف كلمة بيروت= A، { ل ، ب ، ت ، ع }=B

- اوجد A∪B.

الحل :

- ان {ي ، ر ، و ، ب ، ت ، ل ، ع} = A∪B.

تعميم :

يمكننا تعريف اتّحاد عدد منته أو غير منته من المجموعات. فإذا كانت $A_1, A_2, \cdots A_n$ مجموعات جزئيّة من E فإنّ اتّحاد هذه المجموعات هو المجموعة المؤلّفة من جميع عناصر هذه المجموعات كافّة و نرمز لها بـ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. و للاختصار نكتب:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

و بصورة عامّة، إذا كانت $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرة مجموعات جزئيّة من E فإنّنا نرمز لاتّحاد هذه المجموعات بـ $\bigcup_{i \in I} A_i$ و يكون

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : (\exists i_0 \in I : x \in A_{i_0})\}.$$

ملاحظة:

$$(x \notin A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

خواصّ :

1) $A \cup A = A$

2) $A \cup \varnothing = A$

3) $A \cup B = B \cup A$

4) لتكن E مجموعة كلّية نسبيّا: $A \cup E = E$

5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

6) $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$

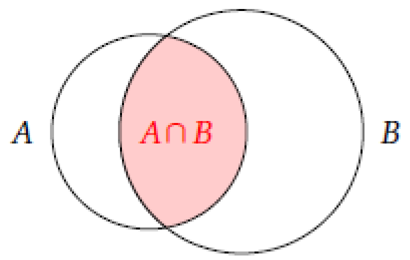
7) إذا كانت $A \subset B$ و $D \subset B$ فإنّ $A \cup D \subset B$

8) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

9.1 التّقاطع :

تقاطع مجموعتين A و B الّذي نرمز له بـ $A \cap B$ هو المجموعة المكوّنة من العناصر الّتي تنتمي إلى كلّ من المجموعتين A و B أي أنّ:

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



مثال 1:

اذا كانت A مجموعة ارقام العدد 23452.

و كانت B= { أ : أ عدد فردي محصور بين 2، 8}، اوجد $A \cap B$.

الحل :

ان $A = \{2,3,4,5\}$، $B = \{3,5,7\}$.

ومنه $A \cap B = \{3,5\}$.

مثال2:

اذا كانت Aمجموعة الاشهر الميلادية التي عدد ايامها 31 يوما ، وكانت S مجموعة الاشهر الميلادية التي عدد ايامها 30 يوما ، فاوجد $A \cap S$.

الحل :

ان {جانفي ، مارس ، ماي ، جويلية ، أوت ، سبتمبر ، أكتوبر} = A

كما ان{فيفري ، أفريل، جوان ، نوفمبر، ديسمبر}=S اذن $A \cap S = \{\ \} = \phi$

ونقول في هذه الحالة بان المجموعتين A ، S منفصلتان او متباعدتان

لذلك يقال للمجموعتين A , S بأنهما منفصلتان(متباعدتان) لذا تحقق الشرط الآتي $A\cap S = S\cap A = \varnothing$ (أي لا يوجد عناصر مشتركة بينهما)

تعميم :

يمكننا تعريف تقاطع عدد منته أو غير منته من المجموعات. فإذا كانت $A_1, A_2, \cdots A_n$ مجموعات جزئيّة من E فإنّ تقاطع هذه المجموعات هو المجموعة المؤلّفة من جميع العناصر المشتركة بين هذه المجموعات و نرمز لها بـ $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. و للاختصار نكتب:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

و بصورة عامّة، إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات جزئيّة من E فإنّنا نرمز لتقاطع هذه المجموعات بـ $\bigcap_{i\in I} A_i$ و يكون

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E : x \in A_i, \forall i \in I\}.$$

ملاحظة:

- $(x \notin A\cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$
- إذا كان $A\cap B = \varnothing$ نقول إنّ المجموعتين A و B منفصلتان.

خواصّ:

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

3) $A \cap B = B \cap A$

4) لتكن E مجموعة كلّية نسبيّا: $A \cap E = A$

5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6) $A\cap B \subset A$ و $A\cap B \subset B$

7) إذا كانت $D \subset A$ و $D \subset B$ فإنّ $D \subset A \cap B$

8) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

9) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

10.1 التّغطيّة و التّجزئة لمجموعة:

- إذا كان $K \subset P(A)$ (جزء من مجموعة أجزاء المجموعة A) فإننا نقول أن K تغطية للمجموعة A إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in A, \exists X \in K : x \in X$$

- ونقول أن $K \subset P(A)$ تجزئة للمجموعة A إذا وفقط إذا تحقق:

أ- K تغطية للمجموعة A.

ب- $\varnothing \notin K$.

ت- $\forall X \in K, \forall Y \in K, X \neq Y, X \cap Y = \varnothing$.

بعبارة أخرى : لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات جزئيّة من المجموعة A، يقال إنّ هذه الأسرة تشكّل تجزيئة لـ A إذا حقّقت الشّرطين التّاليّين:

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \ (i)$$

$$\left(A_i \cap A_j \neq \varnothing\right) \Rightarrow \left(A_i = A_j, \forall i, j \in I\right) (ii)$$

أمثلة :

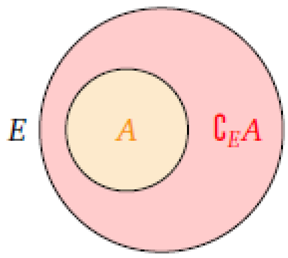
1. إذا كانت $E = \{x\}$ فإن :
$$P(E) = \{\varnothing, \{x\}\},$$
$$P(P(\{x\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{x\}\}, \{\varnothing, \{x\}\}\}$$
2. وإذا كانت $E = \varnothing$ فإن :
$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}, P(P(P(E))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$
3. من أجل كل مجموعة E غير خالية، الجزآن $\{E\}$ و $\{\{x\}, x \in E\}$ هما تجزأتان للمجموعة E.
4. من أجل كل مجموعة E ومن أجل كل جزء $A \subset E$ يختلف عن $\varnothing$ وعن E ، العائلة $\{A, \overline{A}\}$ تجزئة للمجموعة E.
5. العائلة $\{IR_-^*, \{0\}, IR_+^*\}$ تجزئة للمجموعة IR.

11.1 المتمّمة :

إذا كانت A مجموعة جزئيّة من مجموعة كلّية E فالمجموعة المكوّنة من عناصر E الّتي لا تنتمي إلى A، تسمّى متمّمة A. و يرمز لها بالرّمز $\overline{A}$ ، $C_E A$ أو A^C و يكون:

$$C_E A = \{x \in E : x \notin A\}$$

واضح أنّ $(x \notin A) \Leftrightarrow (x \in C_E A)$



مثال :

اذا كانت $\{x : x$ احد اشهر السنة الميلادية $\} = S$

وكانت $\{y : y$ احد اشهر السنة الميلادية عدد ايامه 30 يوما $\}$ **=A**

1)اكتب عناصر المجموعة **S** بطريقة ذكر جميع عناصر المجموعة.

2) اكتب عناصر المجموعة **A** بطريقة ذكر جميع عناصر المجموعة.

3) ماذا تلاحظ بالنسبة المجموعة **A**

الحل :

1) **{ جانفي ،فيفري ، مارس ، أفريل ، ماي ، جوان ، جويلية ، أوت، سبتمير، أكتوبر ، نوفمبر ،ديسمبر } =S**

2) **{ أفريل ، جوان ، سبتمير، نوفمبر}**= A

3) الاحظ ان كل عنصر في المجموعة A ينتمي الى المجموعة S . أي ان $A \subset S$.

مثال 2:

اذا كانت $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، $A = \{2,7,8\}$ ، $S = \{2,3,5,7\}$.

فأوجد كلا مما يلي من المجموعات الاتية :

- 1) C_E^A ، 2) C_E^S ، 3) $C_E^{A\cup S}$ ، 4) $C_E^{A\cap S}$ ، 5) C_E^{ϕ} ، 6) C_E^E .

الحل :

1. $C_E^A = \{1,3,4,5,6,9\}$.
2. $C_E^S = \{1,4,6,8,9\}$.
3. $A \cup S = \{2,3,5,7,8\}$ و منه $C_E^{A\cup S} = \{1,4,6,9\}$.
4. $A \cap S = \{2,7\}$ و منه $C_E^{A\cap S} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$.
5. $C_E^{\phi} = E$.
6. $C_E^E = \phi$.

خواصّ:

1) $C_E^E = \phi$ و $C_E^{\phi} = E$.

2) $A \subset B \Rightarrow C_E B \subset C_E A$ ، $A \subset E$ و $B \subset E$

3) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ و $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

تطبيق:

اختصر العبارات التالية :

$$1.A_1 = A\cap(A^C\cup B)$$
$$2.A_2 = A\cup(A^C\cap B)$$
$$3.B_1 = A\cap(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C\cup C)$$
$$4.B_2 = A\cup(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C\cap C)$$
$$5.C_1 = (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A^C)$$

الحل :

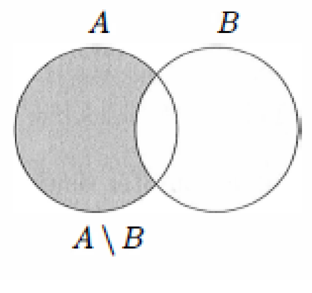
لدينا :

$$1.A_1 = A\cap(A^C\cup B)=\left(A\cap A^C\right)\cup\left(A\cap B\right)=A\cap B$$
$$2.A_2 = A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)=A\cup B$$
$$3.B_1 = A\cap(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C\cup C)$$
$$=A_1\cap\left((A\cap B)^C\cup C\right)=(A\cap B)\cap\left((A\cap B)^C\cup C\right)=A\cap B\cap C$$
$$4.B_2 = A\cup(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C\cap C)=A_2\cup\left[(A\cup B)^C\cap C\right]$$
$$=(A\cup B)\cup\left[(A\cup B)^C\cap C\right]=A\cup B\cup C$$
$$5.C_1 = (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A^C)=\left[B\cup(A\cap C)\right]\cap(C\cup A^C)$$
$$=\left[B\cap(C\cup A^C)\right]\cup\left[(A\cap C)\cap(C\cup A^C)\right]$$
$$=(B\cap C)\cup(B\cap A^C)\cup(A\cap C)=(A\cup B)\cap(C\cup A^C)$$

12.1 الفرق بين مجموعتين:

إذا كانت A و B مجموعتين من E ، فإنّ مجموع العناصر الّتي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B تسمّى فرق A عن B و يرمز لها بالرّمز $A\setminus B$ أو $A-B$ و يكون

$$A\setminus B=\{x:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$



خواصّ :

1) $A\setminus B = A\cap C_E B$

2) $A\setminus A=\varnothing$ ، $A\setminus\varnothing = A$ ، $\varnothing\setminus A=\varnothing$ ، $A\setminus E=\varnothing$

3) $A\setminus B\subset A$.

13.1 الفرق التّناظري:

الفرق التّناظري لمجموعتين A و B هو مجموعة العناصر الّتي تنتمي إلى واحدة و واحدة فقط من المجموعتين A و B. و يرمز لهذه المجموعة بالرّمز $A\Delta B$ الّذي يقرأ (A دلتا B) و يكون:

$$A\Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

خواصّ :

1) $A\Delta B = B\Delta A$

2) $A\Delta \varnothing = A$ ، $A\Delta A = \varnothing$

3) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

14.1 الجداء الدّيكارتي:

الجداء الدّيكارتي لمجموعة A في مجموعة ثانيّة B هو مجموعة جميع الأزواج المرتّبة حيث تكون المركّبة الأولى لكلّ منها في المجموعة الأولى A و المركّبة الثّانيّة في المجموعة الثّانيّة B.

نكتب هذا الجداء بالشّكل $A \times B$ و نقرأ A في B و يكون:

$$A \times B = \{(x, y) : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

و هكذا إذا كان $x \neq y$ فإنّ $(x, y) \neq (y, x)$ و

$[((z,t) = (x, y)) \Leftrightarrow ((z = x) \wedge (t = y))]$ ، $[((z,t) \neq (x, y)) \Leftrightarrow ((z \neq x) \vee (t \neq y))]$.

ملاحظة :

- ينبغي التّفريق بين مفهوم الزّوج (x, y) و مفهوم المجموعة المتكوّنة من عنصرين $\{x, y\}$ لأنّ $(x, y) \in A \times B$ و $\{x, y\} \in P(A \cup B)$.
- في الحالة العامة، لدينا: $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$

لاحظ المثال التالي من أجل $A = B = \{0\}, C = D = \{1\}$.

خواصّ:

1) $A \times \varnothing = \varnothing$ و $\varnothing \times A = \varnothing$

2) إذا كانت المجموعتين A و B غير متساويّتين و كانتا غير خاليّتين فإنّ $A \times B \neq B \times A$ و بالعكس إذا كان $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ فإنّه : $(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$

3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ و

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

15.1 الجداء الدّيكارتي لمجموعة في نفسها:

يتألّف الجداء الدّيكارتي لمجموعة A في نفسها من جميع الأزواج المرتّبة الّتي تكون فيها المركّبتان الأولى و الثّانيّة عنصرين في A و نكتب ذلك بالشّكل $A\times A$ أو A^2 و يكون

$$A\times A=\{(x,y): x\in A\wedge y\in A\}$$

تعميم:

لتكن $A_1, A_2, \cdots A_n$ مجموعات جزئيّة من E عددها n، يرمز لجدائها الدّكارتي بـ $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

و للاختصار نكتب:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$

و يكون $$\prod_{i=1}^{n} A_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in A_i, \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}\}$$

يتساوى العنصران $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ و $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ من عناصر هذا الجداء الدّيكارتي إذا وفقط إذا كان: $x_i=y_i \quad , \quad \forall i\in\{1,\cdots,n\}$

16.1 المجموعة البيانيّة:

كلّ مجموعة محتواة في $A\times B$ تسمّى مجموعة بيانيّة أو بيان في $A\times B$. لتكن G مجموعة بيانيّة في $A\times B$، إذا كان $(x,y)\in G$ نقول إنّ y يرتبط بـ x وفق البيان G.

مثال:

$G=\{(x,x): x\in IR\}$ يمثّل بيان في $IR\times IR$

17.1 البيان العكسي:

ليكن G بيانا في المجموعة $A\times B$. المجموعة $\{(y,x)\in B\times A:(x,y)\in A\times B\}$ تسمّى البيان العكسي لـ G و ندلّ عليها بالرّمز G^{-1} و يكون

$$G^{-1}=\{(y,x)\in B\times A:(x,y)\in A\times B\}$$

إذا كان $G=G^{-1}$ نقول عن البيان G إنّه متناظر.

مثال :

$G=\{(x,2x): x\in IR\}$ إذن $G^{-1}=\{(2x,x): x\in IR\}=\left\{\left(x,\frac{1}{2}x\right): x\in IR\right\}$.

18.1 تمارين محلولة :

تمرين1 :

لتكن A,B,C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E ، برهن العلاقات التالية:

1. $A=B \Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$
2. $A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$
4. $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B=A$
5. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
6. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
7. $A\subset B \Leftrightarrow B^c\subset A^c$
8. $(A\setminus B)^c=A^c\cup(A\cap B)$
9. $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$
10. $A\cap B=\phi \Leftrightarrow B^c\cap(A\cup B)=A$

تمرين2 :

نعرف الفرق التناظري للمجموعتين A,B ونرمز له بالرمز $A\Delta B$ المجموعة التالية

. $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

برهن العلاقات الآتية :

1. $A\Delta B=(A\cup B)/(A\cap B)$
2. $A^c\Delta B^c=A\Delta B$
3. $A\Delta B=\phi \Leftrightarrow A=B$
4. $A\Delta B=A\cap B \Leftrightarrow A=B=\varnothing$
5. $A\Delta B=A\Delta C \Leftrightarrow B=C$

تمرين3 :

اذا كانت $A=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{2,4,6,8\}$ ، E مجموعة الاعداد الطبيعية من 1الى 10 .

اوجد ما يلي :

- ✓ $A\bigcup B$.
- ✓ $A\bigcap B$.
- ✓ $A-B$.
- ✓ $B-A$.
- ✓ C_E^A.
- ✓ $C_E^{A\cup B}$.
- ✓ $C_E^A\bigcap C_E^B$.

تمرين4 :

مدرسة فيها 300 طالب منهم 90 مشتركون في نادي السباحة ،100 مشتركون قي نادي كرة القدم ،150 غير مشتركين في اي من الناديين ، ارسم شكل من اشكال فن واستعمله في اجابة الاسئلة التالية :

- ما عدد المشتركين في الناديين معا
- ما عدد المشتركين في النادي كرة القدم فقط .

تمرين 5 :

لتكن المجموعات A,B,C من $P(E)$

برهن أن: $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

تمرين 6 :

تعطى A,B مجموعتان جزئيتان من E,

بين أن: $C_EA\setminus C_EB=B\setminus A$.

تمرين 7 :

تعطى A,B و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

بين صحة مايلي :

a. $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

b. $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$.

c. $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$.

d. $\begin{cases}A\cup B=A\cup C\\A\cap B=A\cap C\end{cases}\Leftrightarrow B=C$.

تمرين 8 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

الفرق التناظري للمجموعتين A و B هو $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

بين أن : $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$.

تمرين 9 :

تعطى A,B و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

بين أن :

a. $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$.

b. $A\setminus B=A\Leftrightarrow B\setminus A=B$.

c. $A\Delta B=A\cap B\Rightarrow A=B=\phi$.

تمرين 10 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

حل و ناقش حلول المعادلة ذات المجهول $X \in P(E)$ بحيث : $A \bigcup X = B$.

تمرين 11 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

حل و ناقش حلول المعادلة ذات المجهول $X \in P(E)$ بحيث : $A \bigcap X = B$.

19.1 حل التمارينات :

تمرين 1:

1.إذا كان $A = B$ فإن $(A \cap B = A) \wedge (A \cup B = A)$ وبالتالي فإن $A \cap B = A \cup B$. إذا كان $A \cap B = A \cup B$ فإن :

$$\begin{cases} A \subset (A \cup B) = (A \cap B) \subset B \\ B \subset (A \cup B) = (A \cap B) \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

2.ليكن :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow & \left[x \in A \wedge x \in (B \cup C)\right] \Leftrightarrow \\ & (x \in A) \wedge \left[(x \in B) \vee (x \in C)\right] \Leftrightarrow \\ & \left[(x \in A) \wedge (x \in B)\right] \vee \left[(x \in A) \wedge (x \in C)\right] \Leftrightarrow \\ & \left[x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\right] \Leftrightarrow \\ & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

3.ليكن:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow & \left[x \in A \vee x \in (B \cap C)\right] \Leftrightarrow \\ & (x \in A) \vee \left[(x \in B) \wedge (x \in C)\right] \Leftrightarrow \\ & \left[(x \in A) \vee (x \in B)\right] \wedge \left[(x \in A) \vee (x \in C)\right] \Leftrightarrow \\ & \left[x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\right] \Leftrightarrow \\ & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

4.لدينا دوما $(A \cap B) \subset B$ وإذا كان $A = A \cap B$ فإن $A \subset B$. نفرض الآن أن $A \subset B$ ، بما أن $(A \cap B) \subset A$ فإنه يكفي أن نبرهن أن $A \subset (A \cap B)$. إذا كان $x \in A$ فإن $x \in B$ (لأن $A \subset B$) وبالتالي فإن $x \in A \cap B$ ومنه الاحتواء.

5.ليكن:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C & \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ & \Leftrightarrow (x \in A^C) \vee (x \in B^C) \Leftrightarrow x \in (A^C \cup B^C) \end{aligned}$$

6.ليكن:

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A^C) \wedge (x \in B^C) \Leftrightarrow x \in (A^C \cap B^C)$$

7.حسب 4 فإن : $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow (A \cap B)^C = A^C$

وحسب 5 فإن : $A^C = (A \cap B)^C = (A^C \cup B^C) \supset B^C$

8.حسب 3 فإن :

$$\begin{aligned} A^C \cup (A \cap B) &= (A^C \cup A) \cap (A^C \cup B) \\ &= E \cap (B \cup A^C) = (B \cup A^C) \\ &= (A \cap B^C)^C = (A \setminus B)^C \end{aligned}$$

9.لدينا:

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \setminus (A \cap B^C) = A \cap (A \cap B^C)^C \\ &= A \cap (A^C \cup B) = A \cap B \end{aligned}$$

10.إذا كان : $B^C \cap (A \cup B) = A$ فإن : $B^C \cap A = A$ وحسب 4 فإن $A \subset B^C$ ، إذن $A \cap B = \varnothing$ والعكس صحيح .

تمرين 2:

1.لدينا :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C = (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C) \\ &= \big(A \cap (A^C \cup B^C)\big) \cup \big(B \cap (A^C \cup B^C)\big) \\ &= \big(A \cap B^C\big) \cup \big(B \cap A^C\big) = \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big) = A \Delta B \end{aligned}$$

2.لدينا :

$$\begin{aligned} A^C \Delta B^C &= \big(A^C \setminus B^C\big) \cup \big(B^C \setminus A^C\big) = \big(A^C \cap B\big) \cup \big(B^C \cap A\big) \\ &= \big(B \setminus A\big) \cup \big(A \setminus B\big) = A \Delta B \end{aligned}$$

3.لدينا :

$$\begin{aligned} A \Delta B = \varnothing &\Leftrightarrow \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big) = \varnothing \Leftrightarrow \big(A \setminus B = \varnothing \wedge B \setminus A = \varnothing\big) \\ &\Leftrightarrow \big((A \subset B) \wedge (B \subset A)\big) \Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

4.ليكن $x \in A$ ، إذا كان $x \in B$ فإن $x \in A \cap B = A \Delta B$ وهذا تناقض، وإذا كان $x \notin B$ فإن $x \in A \Delta B = A \cap B$ وهذا أيضا تناقضا .

5.إذا كان $B = C$ فإن $A \Delta B = A \Delta C$ محققة بصفة بديهية . الآن ليكن $x \in B$ ، إذا كان $x \notin A$ فإن $x \in A \Delta B = A \Delta C$ ومنه فإن $x \in C$ وإذا كان $x \in A$ فإن $x \notin A \Delta B = A \Delta C$ وبالتالي فإن $x \in C$ ، ومنه فإن $B \subset C$ وبنفس الطريقة نجد أن $C \subset B$ ومنه المساواة .

تمرين3 :

اذا كانت $A = \{2,3,5,7\}$ ، $B = \{2,4,6,8\}$ ، E مجموعة الاعداد الطبيعية من 1الى 10 .

اوجد ما يلي :

- ✓ $A \bigcup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.
- ✓ $A \bigcap B = \{2\}$.
- ✓ $A - B = \{3,5,7\}$.
- ✓ $B - A = \{4,6,8\}$.
- ✓ $C_E^A = \{1,4,6,8,9,10\}$.
- ✓ $C_E^{A \cup B} = \{1,9,10\}$.
- ✓ $C_E^A \bigcap C_E^B = \{1,8,9,10\}$.

تمرين4 :

مدرسة فيها 300 طالب منهم 90 مشتركون في نادي السباحة ،100 مشتركون قي نادي كرة القدم ،150 غير مشتركين في اي من الناديين ، ارسم شكل من اشكال فن واستعمله في اجابة الاسئلة التالية :

- ما عدد المشتركين في الناديين معا
- ما عدد المشتركين في النادي كرة القدم فقط .

تمرين 5 :

لتكن المجموعات A, B, C من $P(E)$

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap C_E (B \cap C) \\ &= (A \cap C_E B) \cup (A \cap C_E C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

تمرين 6 :

لدنيا A, B مجموعتان جزئيتان من E,

$$\begin{aligned} C_E A \setminus C_E B &= C_E A \bigcap C_E B \\ &= B \bigcap C_E B \\ &= B \setminus A \end{aligned}$$

تمرين 7 :

لتكن A, B و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

a. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $B \subset A$ و منه $B \subset A \bigcup B$.

من أجل $x \in A \bigcup B$ هذا يعني أن $x \in A$ أو $x \in B$ و لدنيا $x \in B$ إذن $A \bigcup B \subset B$.

و بالتالي $A \bigcup B = B$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $A \cup B = B$ و لكن $A \subset A \cup B$ و بالتالي $A \cup B = B$.

b. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A = B$ و بالتالي $A = A \cap B = A \cup B$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $A \cup B = A \cap B$ لدنيا $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ و بنفس الطريقة $B \subset A$.

و بالتالي $A = B$.

c. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A \cup B = A \cap C$ ،

و بالتالي $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $B \subset A \subset C$ و بالتالي $A \cup B = A = A \cap C$.

d. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$.

لتكن $x \in B$.

إذا كان $x \in A$ هذا يعني أن $x \in A \cap B = A \cap C$ إذن $x \in C$.

إذا كان $x \notin A$ نعلم أن $x \in A \cup B$ و منه $x \in A \cup C$ إذن $x \in C$.

و بالتالي في الحالتين $x \in C$، و أيضا $B \subset C$، و بالتناظر نجد أن $C \subset B$

و بالتالي $B = C$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $B = C$ و بالتالي $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$ (بديهيا).

تمرين 8 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

ليكن $x \in E$.

$$
\begin{aligned}
x \in A\Delta B &\Leftrightarrow (x \in A \ \ et\ \ x \notin B) ou (x \in B\ \ et\ \ x \notin A)\\
&\Leftrightarrow (x \in A\ \ ou\ \ x \notin B)\, et\ (x \in A\ ou\ x \notin A)\, et\ (x \notin B\ ou\ x \in B)\ et\ (x \notin B\ ou\ x \notin A)\\
&\Leftrightarrow x \in A \bigcup B\quad et\quad x \notin A \bigcap B\\
&\Leftrightarrow x \in (A \bigcup B) \setminus (B \bigcap A)
\end{aligned}
$$

تمرين 9 :

تعطى B,A و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

بين أن :

a. إذا كان $A\Delta B = A\Delta C$ إذن من أجل كل $x \in B$:

إذا كان $x \in A$ و منه $x \notin A\Delta B$ إذن $x \notin A\Delta C$ و بالتالي $x \in A,\ x \in C$.

إذا كان $x \notin A$ و منه $x \in A\Delta B$ إذن $x \in A\Delta C$ و بالتالي $x \notin A,\ x \in C$.

في الحالتين $x \in C$ و أيضا $B \subset C$. و بالتخمين التناظري نجد $C \subset B$.

و بالتالي $B = C$.

عكسيا نفس الطريقة.

b.

$$
\begin{aligned}
A \setminus B = A &\Leftrightarrow A \bigcap C_E B = A\\
&\Leftrightarrow A \subset A \ \ or\ \ A \subset C_E B\\
&\Leftrightarrow B \subset C_E A
\end{aligned}
$$

و بالتالي $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c. $A\Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$ إذن .

$$
\begin{aligned}
A\Delta B = A \bigcap B &\Rightarrow A \bigcap B = \phi = A \bigcup B\\
&\Rightarrow A = B = \phi
\end{aligned}
$$

تمرين 10 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

1. إذا كان $A \not\subset B$ من الواضح أن المعادلة $A \bigcup X = B$ لا تقبل حلول ، $S = \phi$.
2. إذا كان $A \subset B$ إذن $A \bigcup X = B \Rightarrow X \subset B\ \ et\ \ B \setminus A \subset X$ و العكس صحيح.

$S = \{X \in P(E) |\ B \setminus A \subset X \subset B\}$.

تمرين 11 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

1. إذا كان $B \not\subset A$ من الواضح أن المعادلة $A \bigcap X = B$ لا تقبل حلول ، $S = \phi$.

2. إذا كان $B \subset A$ ليكن X حلا للمعادلة .

لدنيا $B \cup C = (A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X)$ $= X$ حيث $C = \overline{A} \cap X \subset \overline{A}$.

عكسيا من أجل $X = B \cup C$ حيث. $A \cap X = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B$, $C \subset \overline{A}$

أيضا

$$\begin{aligned} S &= \{X = B \cup C \mid C \subset \overline{A}\} \\ &= \{X \in P(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A}\} \end{aligned}.$$

20.1 تمارين مقترحة :

تمرين 1 :

نعتبر المجموعتبن :

$A = \{x \in \mathbb{R}; |x+1| > 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x > 15\}$

1. أكتب المجموعتين $C_{\mathbb{R}}^{A}$ و $C_{\mathbb{R}}^{B}$ المتممتين لـ A و B .
2. بين أن : $C_{\mathbb{R}}^{A} \subset C_{\mathbb{R}}^{B}$.

تمرين2 :

حدد في كل حالة مما يلي :

$A \cup B$. $A \cap B$. $A \setminus B$. $B \setminus A$.

1. $A = [2,4]$ و $B = [-2,3]$.
2. $A = [1,+\infty]$ و $B = [-\infty,5]$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R}; |x-2| < 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x > 10\}$.

تمرين3 :

لتكن المجموعتين A و B الجزئيتين من E .

1. بين أن $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A)$
2. بين أن $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. بين أن $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ ثم استنتج أن $A = B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = \phi$.
4. بين أن $A = \phi \Leftrightarrow (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) = B$

تمرين4 :

لتكن المجموعتين A و B الجزئيتين من E حيث $A \subset B$.

- حل في $P\left(E\right)$ المعادلة $X \cap B = X \cup A$.

2. العلاقات الثنائية :

1.2 العلاقة:

تعاريف:

لتكن A و B مجموعتين.

نسمي علاقة من A في B الثلاثية $\Re = (A, B, G)$ حيث G جزء من الجداء الديكاري $A \times B$. إذا كان $(x, y) \in G$ فإننا نكتب $x\Re y$ ونقرأ x علاقة y ، إذا كان $A = B$ فإننا نقول أن $\Re$ هي علاقة ثنائية على A . المجموعة التي نشير لها بـ:

$$G = \{(x, y) \in A \times B : x\Re y\}$$

تسمى بيان العلاقة $\Re$.

إذا كانت $\Re$ علاقة ثنائية من A في B فإن العلاقة S المعرفة من B في A بالشكل :

$$\forall (y, x) \in B \times A : ySx \Leftrightarrow x\Re y$$

تسمى بالعلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ ويرمز لها بالرمز $\Re^{-1}$.

أمثلة :

لتكن E مجموعة ما.

1. العلاقة المعرفة على E والتي بيانها $G = \varnothing$ تسمى بالعلاقة الخالية .
2. العلاقة التي بيانها $G = E \times E$ تسمى بالعلاقة الخشنة . العلاقة التي بيانها :

$$G = \{(x, x), x \in E\}$$

هي المساواة في E وبيانها يسمى بقطر $E \times E$.

2.2 العلاقة المستمدة :

لتكن $\Re$ علاقة ثنائية معرفة على مجموعة E . ليكن $A \in P(E)$.

نسمي علاقة ثنائية على A مستمدة من $\Re$ ونرمز لها بالرمز $\Re_A$ العلاقة المعرّفة بالشكل

$$\forall x, y \in A : x\Re_A y \Leftrightarrow x\Re y$$

مثال :

في المجموعة Z لنعتبر العلاقة ***يقسم*** ، وليكن $A = \{2,3,5,7,11,13,...\}$ مجموعة الأعداد الأولية. عندئذ العلاقة الثنائية على A المستمدة من علاقة ***يقسم*** هي علاقة المساواة.

3.2 خواصّ العلاقات في مجموعة :

لتكن $\Re$ علاقة ثنائية على مجموعة E ، نقول أن :

1. $\Re$ انعكاسية إذا كان : $\forall x \in E : x\Re x$.

2. $\Re$ تناظرية إذا كان : $\forall x, y \in E : x\Re y \Rightarrow y\Re x$.

3. $\Re$ ضد تناظرية إذا كان : $\forall x, y \in E : (x\Re y \wedge y\Re x) \Rightarrow x = y$.

4. $\Re$ متعدية إذا كان : $\forall x, y, z \in E : (x\Re y \wedge y\Re z) \Rightarrow x\Re z$.

أمثلة :

1. لتكن E مجموعة ، و $\Re$ العلاقة الثنائية الغير خالية، المعرفة على أجزاء E بالشكل:

$$\forall A, B \in P(E) \setminus \{\varnothing\} : A\Re B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$$

إن $\Re$ انعكاسية ، تناظرية لكنها ليست متعدية إذا احتوت E على أكثر من عنصرين.

2. في Z العلاقة الثنائية $\Re$ المعرفة بالشكل : $\forall x, y \in Z : x\Re y \Leftrightarrow xy \neq 0$

إن $\Re$ تناظرية ومتعدية لكنها ليست انعكاسية .

3. في Z^* العلاقة $\Re$ المعرفة بالشكل :

$$\forall x, y \in Z^* : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in Z^* : y = kx$$

إن $\Re$ انعكاسية ومتعدية لكنها ليست تناظرية ولا ضد تناظرية .

4.2 علاقات التكافؤ :

تعريف :

نقول عن علاقة ثنائية $\Re$ معرفة على مجموعة E أنها علاقة تكافؤ ، إذا كانت انعكاسية ، تناظرية ، ومتعدية . و نقول عن عنصرين x و y مرتبطين بعلاقة التّكافؤ $\Re$ إنّهما متكافئان وفق $\Re$.
و نكتب $x \approx y$ أو $x \equiv y$.

أمثلة :

1. المساواة في مجموعة E : $(\forall x, y \in E : x\Re y \Leftrightarrow x = y)$
هي علاقة تكافؤ .

2. في Z لتكن $n \in IN$ والعلاقة :

$$\forall x, y \in Z : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in Z : x - y = kn$$

إن $\Re$ هي علاقة تكافؤ .

3. في $IN \times IN$ لتكن العلاقة :

$$\forall (p, q), (p', q') \in IN \times IN : (p, q)\Re(p', q') \Leftrightarrow p + q' = p' + q$$

هي علاقة تكافؤ .

4. في $Z \times Z^*$ لتكن العلاقة :

$$\forall (p, q), (p', q') \in Z \times Z^* : (p, q)\Re(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$

هي علاقة تكافؤ.

5.2 صنفّ التّكافؤ:

لتكن $\Re$ علاقة تكافؤ على مجموعة E .

نسمي صنف تكافؤ العنصر $x \in E$ المجموعة الجزئيّة من E و التي نشير لها عادة بـ $\bar{x}$ أو $C(x)$

والمعرفة كما يلي: $\bar{x} = \{y \in E : y\Re x\}$

يسمّى x ممثّل صنف تكافؤ $\bar{x}$.

مبرهنة :

إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ معرّفة على المجموعة E فإنّ:

1) $\bar{x} = \{y \in E : x\Re y\} \neq \varnothing \, , \forall x \in E$

2) $x\Re y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \, , \forall x, y \in E$

3) $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \varnothing \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \, , \forall x, y \in E$

4) $x \not\equiv y \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$

5) $E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$

البرهان :

1) بما أنّ العلاقة $\Re$ انعكاسيّة فإنّ $x\Re x$ من أجل كلّ $x \in E$ ، و منه $x \in \bar{x}$ إذن $\bar{x} \neq \varnothing$.

2) لدينا من جهة:

$$(\bar{x} = \bar{y}) \Rightarrow x \in \bar{y} \Rightarrow x\Re y$$

و من جهة ثانيّة $x\Re y \Rightarrow x \in \bar{y}$ ، فإذا كان $t \in \bar{x}$ نجد

$$t\Re x \wedge x\Re y \Rightarrow t\Re y \Rightarrow t \in \bar{y}$$

و منه $\bar{x} \subset \bar{y}$. و نفس الطّريقة نجد أنّ $\bar{y} \subset \bar{x}$ إذن $\bar{x} = \bar{y}$.

3) إذا كان $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ فإنّ $z\Re x$ و $z\Re y$ إذن $x\Re y$ أي $\bar{x} = \bar{y}$.

4) إذا كان x و y غير متكافئين وفق $\Re$ فإنّ المجموعتين الجزئيّتين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ منفصلتان و هذا يعني أنّه لا يوجد بين هذين الصّنفين أيّ عنصر مشترك: $\bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$ ، لأنّه لو كان z مشتركا بينهما فإنّهما سيكونان متطابقين (حسب 3)) و يكون $x\Re y$ خلافا لما فرضنا.

5) ليكن $x \in E$ بما أنّ $\Re$ انعكاسيّة فيكون $x\Re x$ و منه $x \in \bar{x} \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$ إذن $E \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$ ، وبما أنّ $\bigcup_{x \in E} \bar{x} \subset E$ فإنّ $E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$.

ملاحظة :

إنّ مجموعة صفوف التّكافؤ تشكّل تجزئة لـ E و ذلك حسب 4) و 5) من النّظريّة السّابقة.

6.2 المجموعة $E/\Re$:

مجموعة صفوف التكافؤ تسمى مجموعة حاصل القسمة للمجموعة E على $\Re$ ونرمز لذلك بالرمز $E/\Re$.

مبرهنة :

كل تجزئة للمجموعة E تعرف علاقة تكافؤ صفوفها هي عناصر التجزئة.

البرهان :

لتكن $\{E_i\}_{i\in I}$ تجزئة لـ E ، و لنعرّف على E العلاقة الثّنائيّة $\Re$ بـ: $x\Re y$ إذا و فقط إذا وجد $i_0 \in I$ بحيث يكون $x, y \in E_{i_0}$ و ذلك من أجل كلّ $x, y \in E$.

إنّ العلاقة $\Re$ انعكاسيّة لأنّ كلّ عنصر $x \in E$ ينتمي حتما إلى أحد عناصر التّجزئة، إذن

$$x \in E_i \Leftrightarrow x, x \in E_i \Rightarrow x\Re x$$

و هي تناظريّة كما هو واضح في التّعريف.

لنبرهن أنّها متعدّية. إذا كان $x\Re y$ و $y\Re z$ فإنّه يوجد $i_0, j_0 \in I$ بحيث يكون $x, y \in E_{i_0}$ و $y, z \in E_{j_0}$ و منه $y \in E_{i_0} \cap E_{j_0}$ إذن $E_{i_0} = E_{j_0}$ ، و بالتّالي $x, z \in E_{i_0}$ أي $x\Re z$.

فالعلاقة $\Re$ هي علاقة تكافؤ، ويتّضح من تعريفها، أنّ عناصر التّجزئة هي صفوف التّكافؤ.

أمثلة :

لنأخذ الأمثلة السابقة .

لدينا $\bar{x} = \{x\}$.

نعلم أن مجموعة حاصل القسمة هي $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

7.2 علاقة الترتيب :

تعريف و ترميز :

لتكن E مجموعة، نقول عن علاقة ثنائية معرفة على E أنها علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية، ضد تناظرية، متعدية.

نرمز عادة لعلاقة التّرتيب بالرمز $\leq$ أو $\prec$ وعندئذ تسمى الثنائية $(E, \prec)$ بالمجموعة المرتبة.

8.2 التّرتيب الكلّي و التّرتيب الجزئي:

تعاريف :

- نقول عن عنصرين x, y من E أنهما مقارنين إذا كان $x \prec y$ أو $y \prec x$
- نقول عن $(E, \prec)$ أنها مرتبة ترتيبا كليا إذا كانت جميع عناصر E مقارنة مثنى مثنى، وإذا كان عنصران على الأقل غير مقارنين فإننا نقول أنها مرتبة ترتيبا جزئيا .

أمثلة :

- في IN, Z, Q, IR ، الترتيب العادي هو ترتيب كلي .
- في $(IN^*, \prec)$ حيث :

$\forall a,b \in IN^* : a \prec b \Leftrightarrow \exists k \in IN^* : b = ka$ هو ترتيب جزئ .

- في $(P(E), \subset)$ حيث E مجموعة ما، الاحتواء يعرف علاقة ترتيب جزئ عندما تحوي E على أكثر من عنصر.

افتراضيّة:

تكون علاقة التّرتيب $\prec$ على المجموعة E علاقة ترتيب كلّي إذا وفقط إذا كان $G \cup G^{-1} = E^2$ ، حيث G هو بيان العلاقة $\prec$.

الإثبات:

1) لنفرض أنّ $\prec$ هي علاقة ترتيب كلّي على E ، وليكن $(x,y) \in E^2$ ، عندئذ: إمّا $x \prec y$ أو $y \prec x$. فإذا كانت $x \prec y$ فإنّ $(x,y) \in G$ و بالتّالي $(x,y) \in G \cup G^{-1}$ ، إذن $E^2 \subset G \cup G^{-1}$. وبما أنّ $G \cup G^{-1} \subset E^2$ فإنّ $G \cup G^{-1} = E^2$.

2) لنفرض أنّ $G \cup G^{-1} = E^2$ ، و ليكن $x, y \in E$ ، عندئذ $(x,y) \in G \cup G^{-1}$ و بالتّالي إمّا $(x,y) \in G$ أو $(x,y) \in G^{-1}$ ، و منه إمّا $(x,y) \in G$ أو $(y,x) \in G$ أي إمّا $x \prec y$ أو $y \prec x$ و هذا يعني أنّ التّرتيب كلّي في E .

مثال :

في المجموعة IN^* نعرف العلاقة $\prec$ كما يلي :

$\forall (x,y) \in IN^* \times IN^* : x \prec y \Leftrightarrow \exists k \in IN^* : y = kx$

- أثبت أن $\prec$ هي علاقة ترتيب على IN^* .

الحل :

ا- إن العلاقة $\prec$ هي علاقة ترتيب، بالفعل :

- انعكاسية : لدينا $\forall x \in IN^* : x = 1.x$ ، أي أن $x \prec x$.
- متعدية : ليكن $x, y, z \in IN^*$ بحيث $x \prec y, y \prec z$ إذن :

$$\begin{cases} \exists k \in IN^* : y = kx \\ \exists k' \in IN^* : z = k'y \end{cases} \Rightarrow z = kk'x$$

أي أن $x \prec z$.

- ضد تناظرية : ليكن $x, y \in IN^*$ بحيث $x \prec y, y \prec x$ إذن :

$$\begin{cases} \exists k \in IN^* : y = kx \\ \exists k' \in IN^* : x = k'y \end{cases} \Rightarrow kk' = 1 \Leftrightarrow k = k' = 1 \Rightarrow x = y$$

9.2 تمارين مقترحة:

تمرين 1:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ معرفة كما يلي :

$$\Re\left[(a,b),(c,d)\right] \Leftrightarrow ad = bc$$

- بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.

تمرين 2:

1. $\Re$ علاقة في $\mathbb{R}^*$ معرفة كمايلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow ab > 0$$

- ✓ بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.
- ✓ عين أصناف التكافؤ.

2. $\Re$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow ab \geq 0$$

بين أن $\Re$ ليست علاقة تكافؤ.

تمرين 3:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{Z}$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$$

- ✓ بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.
- ✓ عين صنف تكافؤ 1.

تمرين 4:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{N}$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow \left[a = b \;\text{أو}\; b + a = 15\right]$$

- ✓ عين بيان $\Re$.
- ✓ بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.
- ✓ عين $\mathbb{N}/\Re$.

تمرين 5:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{Z}$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow \left[a = b \;\text{أو}\; b = -1 \;\text{أو}\; a = 1\right]$$

- ✓ هل العلاقة $\Re$ انعكاسية ؟هل هي تناظرية ؟هل هي ضد تناظرية ؟هل هي متعدية ؟

تمرين 6:

نقول أن العلاقة $\Re$ في المجموعة M دائرية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\forall(a,b,c)\in M^3:[\Re(a,b)\ et\ \Re(b,c)]\Rightarrow \Re(c,a)$$

- ✓ بين أنه إذا كانت علاقة دائرية و انعكاسية فهي علاقة تكافؤ.

تمرين 7:

1. $\Re_1$ علاقة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ معرفة كمايلي :

$$\Re\left[(a,b),(c,d)\right]\Leftrightarrow\left[a\le c\ et\ b\le d\right]$$

- ✓ بين أن $\Re_1$ علاقة ترتيب، هل هذا الترتيب كليّ؟

2. $\Re_2$ علاقة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ معرفة كمايلي :

$$\Re\left[(a,b),(c,d)\right]\Leftrightarrow\left[(a<c)\ ou\ (a=c\ et\ b\le d)\right]$$

- ✓ بين أن $\Re_1$ علاقة ترتيب، هل هذا الترتيب كليّ؟

تمرين 8:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي :

$$\Re(a,b)\Leftrightarrow a^3-b^3\ge 0$$

- ✓ بين أن $\Re_1$ علاقة ترتيب.
- ✓ هل هذا الترتيب كليّ؟

3. التطبيقات:

1.3 تعاريف:

•لتكن E,F مجموعتين غير خاليّتين، تسمّى عمليّة ربط كلّ عنصر من المجموعة E بعنصر وحيد من المجموعة F تطبيقا من المجموعة E في المجموعة F.

بطريقة أخرى:

لتكن E,F مجموعتين، $\Re$ علاقة ثنائية من E في F ، نسمي $\Re$ تطبيقا من E في F إذا وفقط إذا كان من أجل كل $x \in E$ يوجد $y \in F$ واحد وواحد فقط بحيث $x\Re y$.

أو بعبارة أخرى:

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F : x\Re y$$

الرمز "$\exists !$" يعني **"يوجد واحد وواحد فقط** $y \in F$ **"** .

• تسمّى E مجموعة التّعريف (مجموعة الانطلاق)، و تسمّى F مجموعة القيم (مجموعة الوصول)، و يرمز للتّطبيق عادة بالأحرف $f, g, h, \ldots$.

• للدّلالة على أنّ f تطبيق من المجموعة E في المجموعة F نكتب:

$f : E \longrightarrow F$ أو $E \xrightarrow{f} F$.

مجموعة التطبيقات من E في F يرمز لها بالرمز F^E .

إذا كان العنصر $x \in E$ مرتبط بالعنصر $y \in F$ بواسطة التّطبيق f ، نقول عندئذ إنّ y صورة x وفق التّطبيق f و نكتب $f(x) = y$.

بيان التّطبيق f هو $G = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B \, , \, f(x) = y\}$.

2.3 نتائج :

1) إذا وجد عنصر واحد على الأقلّ ينتمي إلى المنطلق و ليس له مقابل في مجموعة الوصول فإنّ f لا يكون تطبيقا.

2) إذا وجد في المنطلق عنصر واحد على الأقلّ له أكثر من مقابل في مجموعة الوصول فإنّ f لا يكون تطبيقا.

3) يمكن أن يكون عنصر واحد من مجموعة وصول التّطبيق صورة لعدّة عناصر من المنطلق.

4) يمكن لعنصر من مجموعة وصول التّطبيق أن لا يكون صورة لأيّ عنصر من المنطلق.

3.3 الصّورة المباشرة و الصّورة العكسيّة :

•إذا كان f تطبيقا من E في F، و كانت A مجموعة جزئيّة من E و B مجموعة جزئيّة من F ، فإنّ الصّورة المباشرة لـ A وفق f تكون بالتّعريف:

$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$$

و تجدر الإشارة إلى أنّه يستعمل الرّمز $\operatorname{Im} f$ للتّعبير عن الصّورة المباشرة للمنطلق وفق f ،
أي $f(E)=\operatorname{Im} f$.
كما أنّ الصّورة العكسيّة لـ B وفق f تكون بالتّعريف:
$$f^{-1}(B)=\{x\in E : f(x)\in B\}$$

ملاحظة :

نلاحظ أنّ $f(A)\subset F$ و أنّ $f^{-1}(B)\subset E$

نتائج :

ليكن f تطبيقا من E في F ، و لنفرض أنّ $A,B\in P(F)$ و $C,D\in P(E)$ ، عندئذ:

1) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

2) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

3) $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$

4) $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$

5) $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$

6) $f^{-1}(F)=E$

7) $A\subset B\Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$

8) $C\subset D\Rightarrow f(C)\subset f(D)$

9) $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing\,,\ f(\varnothing)=\varnothing$

10) $D\neq\varnothing\Leftrightarrow f(D)\neq\varnothing$

11) إذا كان $A\neq\varnothing$ فليس من الضّروري أن يكون $f^{-1}(A)\neq\varnothing$.

12) $f^{-1}(F\setminus A)=E\setminus f^{-1}(A)$

13) $f(E\setminus D)\supset f(E)\setminus f(D)$.

4.3 **تساوي تطبيقان:**

نقول عن تطبيقين f,g معرفين من E في F أنهما متساويان و نكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان لكلّ $x\in E$ ، $f(x)=g(x)$.
أي أنّ :
$$(f=g)\Leftrightarrow(\forall x\in E\ ,\ f(x)=g(x)).$$

5.3 **التّطبيق المطابق:**

التطبيق id_E المعرف من E في E بالشكل: $\forall x\in E,\ id_E(x)=x$
يسمى بالتطبيق المطابق للمجموعة E .

6.3 التّطبيق المتباين، الغامر، المتقابل (تقابلي):

ليكن $f:E\to F$ تطبيقا ، نقول أن:

1) f متباين إذا وفقط إذا تحققت إحدى الخاصيتين المتكافئتين التاليتين:

$$1.\forall x,x'\in E: f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$$

$$2.\forall x,x'\in E: x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$$

2) f غامر إذا وفقط إذا كان:

$$\forall y\in F,\exists x\in E: y=f(x)$$

و عليه نرى أنّ f يكون غامرا إذا و فقط إذا كان $f(E)=F$.

3) f متقابل (تقابلي) إذا وفقط إذا كان متباينا وغامرا. بعبارة أخرى:

$$\forall y\in F,\exists! x\in E: y=f(x)$$

7.3 تركيب تطبيقين:

لتكن E,F,G ثلاث مجموعات و f تطبيقا من E في F ، و g تطبيقا من F في G ، نسمي تركيب f و g ، و نرمز لذلك بالرمز gof التطبيق المعرف من E في G بالشكل: $\forall x\in E,(gof)(x)=g(f(x))$

مبرهنة :

لتكن E,F,G ثلاث مجموعات f,g تطبيقين بحيث:

$$E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}G$$

إذا كان f,g متباينين (على التوالي غامرين ، متقابلين) فإن gof يكون متباينا (على التوالي غامرا ، متقابلا) .

إذا كان gof متباينا (على التوالي غامرا) فإن f متباينا (على التوالي g غامرا)

البرهان :

ا- ليكن $x_1,x_2\in E$ بحيث $f(x_1)=f(x_2)$ بما أن gتطبيق من F في G إذن :

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))\Leftrightarrow gof(x_1)=gof(x_2)$$

وحيث أن gof تطبيق متباين بالفرض فإن $x_1=x_2$ ، ومنه فإن f متباين .

ب- لدينا دوما $f(E)\subset F$ ومنه فإن:

$$gof(E)=g(f(E))\subset g(F)\subset G$$

لكن gof تطبيق غامر، إذن $gof(E)=G$ ومنه نجد أن $g(F)=G$ أي أن g غامر.

8.3 التّطبيق العكسي :

ليكن $E\xrightarrow{f}F$ تطبيقا، نقول أن f قابل للعكس إذا وفقط إذا وجد تطبيق $F\xrightarrow{g}E$ يحقق :

$$g\circ f=id_E \text{ و } f\circ g=id_F$$

مبرهنة :

ليكن $E \xrightarrow{f} F$ تطبيقا، يكون f قابلا للعكس إذا وفقط إذا كان f متقابلا (تقابليا)
ويكون عندئذ التطبيق g المعرف في التعريف السابق وحيدا يسمى بالتطبيق العكسي لـ f
ويرمز له بالرمز f^{-1} وهو تقابل من F في E ويحقق :

$$\forall (x,y) \in E \times F : x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

البرهان :

إذا كان f قابل للعكس وبما أن id_E, id_F هما تطبيقان متقابلان إذن f,g متقابلان. أيضا التطبيق g وحيد، بالفعل إذا وجد تطبيق g' يحقق التعريف فإن:

$$\begin{cases} g'of = id_E \\ fog' = id_F \end{cases} \Rightarrow g = goid_F = go(fog') = (gof)og' = id_E og' = g'$$

والعكس إذا كان f متقابلا فإنه يكون لدينا:

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

هذا الشرط يسمح لنا بتعريف التطبيق g من F في E وذلك ببعث كل $y \in F$ على العنصر الوحيد $x \in E$ والذي يحقق $y = f(x)$ ، حينئذ إذا كان $y = f(x)$ فإن $x = g(y)$ وبالتالي فإن :

$$\forall y \in F : (fog)(y) = f(x) = y$$
$$\forall x \in E : (gof)(x) = g(y) = x$$

خاصية :

ليكن $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ ، إذا كان f,g قابلين للعكس فإن gof يكون قابلا للعكس ولدينا :
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

مبرهنة :

لتكن X,Y مجموعتين منتهيتين بهما n عنصرا و f تطبيقا من X في Y.
إن القضايا أ، ب، ج، التالية متكافئة :

- التطبيق f متباينا،
- التطبيق f غامرا،
- التطبيق f متقابلا.

البرهان :

ا$\Leftrightarrow$ب حتى يكون f تطبيقا غامرا فإنه يكفي ويلزم أن يحوي $f(X)$ على n عنصرا أي نفس عدد عناصر المجموعة X أي يلزم ويكفي أن يكون f تطبيقا متباينا. ومنه النتيجة

تطبيق :

لتكن E,F مجموعتين و f تطبيقا من E في F. ليكن A_1, A_2 جزأين من E و B_1, B_2 جزأين من F.
برهن أن :

1. f متباين إذا وفقط إذا كان $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

2. f متباين إذا وفقط إذا كان $A_1 = f^{-1}\left(f(A_1)\right)$.

3. f غامر إذا وفقط إذا كان $B_1 = f\left(f^{-1}(B_1)\right)$.

<u>الحل :</u>

1. نفرض أنه من أجل كل جزأين A_1, A_2 من E يكون لدينا:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

ونبرهن أن f متباين. ليكن $x_1, x_2 \in E$ بحيث $x_1 \neq x_2$ ولنعتبر المجموعتين $A_1 = \{x_1\}$ و $A_2 = \{x_2\}$ ، لدينا وضوحا: $f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing) = \varnothing$.

من جهة أخرى لدينا: $f(A_1) = \{f(x_1)\}, f(A_2) = \{f(x_2)\}$ ، وبالتالي فإن: $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \varnothing$ ، إذن $f(x_1) \neq f(x_2)$ مما يدل على أن f متباين. نفرض الآن أن f متباين ونبرهن أنه من أجل كل جزأين A_1, A_2 من E يكون لدينا:

$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ (لأن الاحتواء $f(A_1) \cap f(A_2) \supset f(A_1 \cap A_2)$ دوما محققا) إذا وجد A_1, A_2 من E بحيث يكون $f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$ فإنه يوجد على الأقل عنصر y يحقق

لكن: $y \in f(A_1) \cap f(A_2), y \notin f(A_1 \cap A_2)$

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Leftrightarrow \left(y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists x_1 \in A_1 : y = f(x_1)\right) \wedge \left(\exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2)\right)$$

إذن حتما $x_1 \neq x_2$ (لأنه لو كان $x_1 = x_2$ فإن $x_1 \in A_1 \cap A_2$

وبالتالي فإن $f(x_1) = y \in f(A_1 \cap A_2)$) إذن f غير متباين .

2. نفرض أن f متباين ونبرهن أن $\forall A_1 \subset E : f^{-1}\left(f(A_1)\right) \subset A_1$ (لأن الاحتواء $A_1 \subset f^{-1}\left(f(A_1)\right)$ دوما محققا). ليكن A_1 جزء من E لدينا:

$$x \in f^{-1}\left(f(A_1)\right) \Leftrightarrow f(x) \in f(A_1) \Leftrightarrow \exists x_1 \in A_1 : f(x) = f(x_1)$$
$$\Rightarrow x_1 = x \in A_1$$

نفرض الآن أن $\forall A_1 \subset E : f^{-1}\left(f(A_1)\right) = A_1$ ونبرهن أن f متباين. ليكن $x_1, x_2 \in E$ بحيث $f(x_1) = f(x_2)$ ولنعتبر المجموعتين $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$ لدينا :

$$f(A_1) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(A_2)$$

من جهة أخرى لدينا فرضا: $A_1 = f^{-1}\left(f(A_1)\right),\ A_2 = f^{-1}\left(f(A_2)\right)$

وبما أن $f(A_1) = f(A_2)$ فإن: $A_1 = f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2)) = A_2$ ، أي أن $x_1 = x_2$.

3. نفرض أن f غامر ونبرهن أن: $\forall B_1 \subset F : B_1 \subset f\left(f^{-1}(B_1)\right)$ (لأن الاحتواء $f\left(f^{-1}(B_1)\right) \subset B_1$ دوما محققا) . ليكن B_1 جزء من F و $y \in B_1$ ، بما أن f غامر فإنه يوجد $x \in E$ بحيث $y = f(x)$ أي أن :

$$x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B_1)\right)$$

إذن $B_1 \subset f\left(f^{-1}(B_1)\right)$. لنبرهن الآن أنه إذا كان $\forall B_1 \subset F : B_1 = f\left(f^{-1}(B_1)\right)$ فإن f يكون غامرا . بما أن $f^{-1}(F) = E$ فإن: $f(E) = f\left(f^{-1}(F)\right) = F$ ، أي أن f غامر.

9.3 تعاريف أخرى :

التّباين النموذجي :

لتكن X مجموعة جزئيّة من مجموعة Y. عندئذ يوجد التّطبيق المتباين $j_X : X \to Y$ الّذي منطلقه X و مستقرّه Y و قاعدة ربطه كما يلي: أيّا كان $x \in X$ فإنّ $j_X(x) = x$.

يسمّى j_X بتطبيق التّباين النموذجي (أو الطّبيعي) لـ X في Y.

نلاحظ أنّه إذا كان $X = Y$ فإنّ j_Y يساوي التّطبيق المطابق لـ Y على نفسه أي $j_Y = id_Y$.

التمديد و الاقتصار :

ليكن f تطبيقا من E في F، و لتكن A مجموعة جزئيّة من E. إذا وجد التّطبيق g من A في F ، بحيث إنّه لكلّ $x \in A$، $g(x) = f(x)$، عندئذ نقول إنّ g هو اقتصار f على A و نكتب $f_{|A} = g$ و يسمّى f تمديد g إلى A .

التّطبيق الثّابت:

إذا كان b عنصرا من مجموعة F و كان $f : E \to F$ تطبيقا من E في F، معرّفا بالعلاقة $\forall x \in E \, , \, f(x) = b$ ، فإنّ f يسمّى تطبيقا ثابتا.

الالتفاف :

إذا كان $f : E \to E$ تطبيقا بحيث $f \circ f = id_E$، فإنّ f يدعى بالالتفاف.

التّبديل :

يسمّى كلّ تقابل $f : E \to E$ بتبديل المجموعة E .

التّطبيق العددي :

إذا كان كلّ من منطلق التّطبيق و مستقرّه جزءا من مجموعة أعداد مثلا الأعداد الحقيقيّة، فإنّنا ندعوه تطبيقا عدديّا أو تابعا عدديّا أو دالّة عدديّة.

التّطبيق المميّز :

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة E ، نسمي التابع المميز (أو الدّال) للمجموعة A ونرمز له بالرمز χ_A التابع العددي المعرف على E في $\{0,1\}$ بالشكل

$$\forall x \in E : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

خواص :

$$\chi_A(x) + \chi_{A^c}(x) = 1$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A . \chi_B .$$

$$\chi_{A\setminus B}=\chi_A(1-\chi_B)=Max(0,\chi_A-\chi_B)$$

$$\chi_{A\Delta B}=\chi_A+\chi_B-2.\chi_A.\chi_B=|\chi_A-\chi_B|$$

البرهان :

1-إذا كان $x\in A$ فإن $\chi_A(x)+\chi_{A^c}(x)=1$ والمساواة محققة ، وإذا كان $x\notin A$ فإن $\chi_A(x)+\chi_{A^c}(x)=1$ والمساواة تكون أيضا محققة .

2-ليكن $x\in E$ ، نميز حالتين :

$$\chi_{A\cap B}(x)=0\Leftrightarrow(x\notin A)\vee(x\notin B)\Rightarrow\chi_A(x).\chi_B(x)=0$$

والمساواة محققة . وإلا :

$$\chi_{A\cap B}(x)=1\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)\Leftrightarrow\chi_A(x).\chi_B(x)=1$$

والمساواة محققة .

3-لدينا حسب 1،2 :

$$\begin{aligned}\chi_{A\cup B}&=1-\chi_{(A\cup B)^c}=1-\chi_{A^c\cap B^c}=1-\chi_{A^c}\chi_{B^c}\\&=1-(1-\chi_A)(1-\chi_B)=1-1-\chi_A\chi_B+\chi_A+\chi_B\\&=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}\end{aligned}$$

4-ليكن $x\in E$ نميز حالتين :

$$\chi_{A\setminus B}(x)=0\Leftrightarrow x\notin(A\setminus B)\Leftrightarrow(x\notin A)\vee(x\in B)$$

وبالتالي فإن $\chi_A(x)=0,\chi_B(x)=1$ ومنه فإن $\max(0,-1)=0$ والطرفان متساويان وإلا فإن:

$$\chi_{A\setminus B}(x)=1\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\notin B)$$

وبالتالي فإن $\chi_A(x)=1,\chi_B(x)=0$ ومنه فإن $\max(0,1)=1$ والطرفان متساويان.

5-لدينا دوما :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned}\chi_{A\Delta B}&=\chi_{A\setminus B}+\chi_{B\setminus A}\\&=\max(0,\chi_A-\chi_B)+\max(0,\chi_B-\chi_A)\\&=\frac{\chi_A-\chi_B+|\chi_A-\chi_B|}{2}+\frac{\chi_B-\chi_A+|\chi_B-\chi_A|}{2}\\&=|\chi_A-\chi_B|\end{aligned}$$

10.3 تمارين مقترحة:

تمرين 1:

D مجموعة و $P(D)$ مجموعة أجزائها. f تطبيق للمجموعة $P(D)$ في نفسها معرفة كمايلي :

$f(a)=b$ حيث b هي متممة a إلى D.

- ✓ أثبت أن التطبيق f تقابلي و أن $f^{-1}=f$.

تمرين 2:

$D=\{1,2,3\}$ و $P(D)$ مجموعة أجزائها. نعتبر التطبيق f للمجموعة $P(D)$ في نفسها معرفة كمايلي :

$f(a)=a\cap\{1,2\}$.

- ✓ عين عناصر المجموعة $P(D)$.
- ✓ عين العناصر x من المجموعة $P(D)$ بحيث يكون $f(x)=\phi$.
- ✓ هل توجد في $P(D)$ عناصر x بحيث يكون $f(x)=D$؟
- ✓ استنتج مما سبق أن التطبيق f غير غامر و غير متباين .

تمرين 3:

نعتبر المجموعة $D=\{x\in\mathbb{N}, 0\le x\le 23\}$ و التطبيق f للمجموعة D في المجموعة $D=\{0,1,2,3,4\}$ معرفة كمايلي :

$f(x)=a$ حيث a هو باقي قسمة x على 5.

- ✓ هل التطبيق f غامر؟ هل هو متباين؟

تمرين 4:

نعتبر التطبيق f للمجموعة $\mathbb{R}^*$ في المجموعة $\mathbb{R}-\{3\}$ معرفة كمايلي :

$$f(x)=\frac{3x-1}{x}$$

- ✓ أثبت أن التطبيق f تقابلي، ثم عين تطبيقه العكسي f^{-1}.

تمرين 5:

نعتبر التطبيق g للمجموعة $\mathbb{R}^*-\{1\}$ في المجموعة نفسها معرفة كمايلي :

$$g(x)=\frac{x-1}{x}$$

- ✓ أثبت أن التطبيق g تقابلي، ثم عين تطبيقه العكسي g^{-1}.
- ✓ عين التطبيقات التالية : gog ، $gogog$.

تمرين 6:

نعتبر التطبيق f للمجموعة $\mathbb{N}$ في المجموعة نفسها معرفة كمايلي :

$f(x)=\dfrac{x}{2}$ إذا كان x زوجيا.

$f(x)=0$ إذا كان x فرديا.

- ✓ هل التطبيق f غامر؟ هل هو متباين؟

تمرين 7:

نعتبر التطبيقان f و g للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها.

عين التطبيقين gof ، fog في كل حالة من الحالات التالية:

- ✓ $f(x)=\frac{3}{2}x+5$ و $g(x)=4x-1$.
- ✓ $f(x)=2x^2-1$ و $g(x)=4-3x$.
- ✓ $f(x)=x^3$ و $g(x)=2x-1$.

تمرين 8:

نعتبر التطبيقان f و g للمجموعة $\mathbb{N}$ في نفسها حيث :

$f(x)=2x$

$g(x)=\frac{x}{2}$ إذا كان x زوجيا.

$g(x)=\frac{x-1}{2}$ إذا كان x فرديا.

- ✓ هل التطبيقان f ، g غامران؟ هل هما متباينان ؟
- ✓ عين التطبيقين fog و gof.

تمرين 9:

نعتبر التطبيقان f و g للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها حيث :

$f(x)=3x+5$ و $g(x)=\frac{1}{2}x-1$.

- ✓ هل التطبيقان f ، g تقابليان ؟
- ✓ عين التطبيقات التالية : f^{-1} ، g^{-1} ، $g^{-1}of^{-1}$ ، $f^{-1}og^{-1}$.
- ✓ أثبت أن التطبيقين: gof ، fog تقابليان.
- ✓ تحقق أن : $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ ، $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

4. الدوال العددية لمتغير حقيقي :

1.4 تذكير:

لتكن D مجموعة جزئية من IR.

تعريف:

نسمي دالة عددية ذات متغير حقيقي، كل تطبيق f معرف على المجموعة D من IR في المجموعة IR.
يسمى D مجموعة تعريف الدالة و نرمز لها بالرمز D_f. $D_f = \{x \in IR: f(x), \quad existe\}$.

مثال:

1. $f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right), D_f = IR^*$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ∞

$$D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -1 \ et\ x \geq 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

1.1.4 تعريف : (منحنى دالة)

المستوي منسوب إلى معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$. f دالة معرفة على جزء D_f من $\mathbb{R}$.
التمثيل البياني (أو المنحني الممثل) للدالة في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هو مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث:
$x \in D$ و $y = f(x)$
نرمز إلى منحني الدالة f بالرمز C_f.

2.1.4 تعريف : (دورية دالة)

لتكن $f: D_f \to \mathbb{R}$، نقول أن f دورية و دورها T $T \in \mathbb{R}$ إذ تحقق مايلي:

i. $\forall x \in D_f, (x + T) \in D_f$

ii. $f(x + T) = f(x)$

T هو أصغر دور و الذي يحقق ii.

ملاحظة :

أن كانت الدالة f دورية و دورها T إذن $\forall n \in \mathbb{N}: (x + nT) \in D_f, f(x + nT) = f(x)$

أمثلة :

لتكن الدالة f حيث : $f(x) = \sin(x)$.

مجموعة تعريف الدالة f هو $D_f = \mathbb{R}$,

الدالة f دورية و دورها $T = 2\pi$

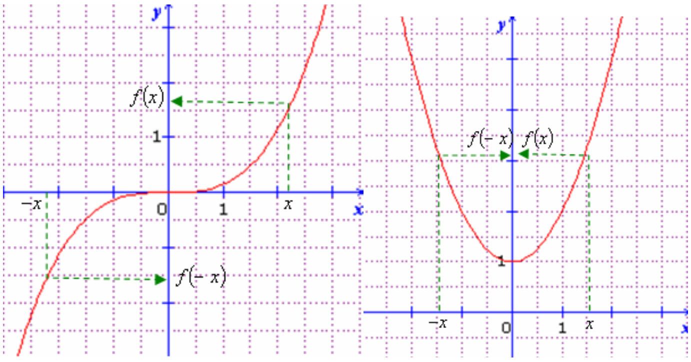
مجموعة دراسة الدالة f هي $D_E = [-\pi, \pi]$, أو كل مجال طوله 2π.

3.1.4 تعريف : (شفعية دالة)

لتكن $f:D_f \to \mathbb{R}$

i. نقول أن الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان $\forall x \in D_f \,,\, (-x) \in D_f \,; f(-x) = f(x)$

ii. نقول أن الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان $\forall x \in D_f \,,\, (-x) \in D_f \,; f(-x) = -f(x)$



بيان الدالة الزوجية في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.

بيان الدالة فردية في المستوي المنسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

أمثلة :

1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = 2x^2 + 1$ دالة زوجية، لأنّ :
مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 (بمعنى، لكلّ x من R، $-x \in R$)
ولكلّ x من $\mathbb{R}$، $f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x)$.

2. الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x) = -\frac{2}{x}$ فردية، لأنّ:
مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0
ولكلّ x من $\mathbb{R}^*$، $g(-x) = -\frac{2}{(-x)} = -\left(-\frac{2}{x}\right) = -g(x)$.

3. الدالة h المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بالعبارة $f(x) = 2x^2 + 1$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّ المجال $[0\,;+\infty[$ غير متناظر بالنسبة إلى 0 .

4. الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x) = x + 3$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّه بالرغم من أنّ مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0، لكن $u(-x) = -x + 3$ لا يساوي $u(x)$ ولا يساوي $-u(x)$.

ملاحظة:

للبرهان على أنّ f ليست دالة زوجية (أو دالة فردية)، يكفي إيجاد عنصر a من مجموعة تعريفها حيث $f(-a) \neq f(a)$ (أو $f(-a) \neq -f(a)$). ويعتبر التمثيل البياني للدّالة وسيلة للتحقّق من شفعية الدالة.

4.1.4تعريف : (محور تناظر+ مركز تناظر)

i. نقول أن منحنى الدالة f يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=a$ كمحور تناظر إذا وفقط إذا كان
$\forall x \in D_f ,\ (a-x)\in D_f ,(a+x)\in D_f\ ; f(a-x)=f(a+x).$

ii. نقول أن منحنى الدالة f يقبل النقطة,$M(a,f(a))$ كمركز تناظر إذا وفقط إذا كان
$\forall x \in D_f ,\ (a-x)\in D_f ,(a+x)\in D_f\ ; f(a-x)+f(a+x)=2f(a).$

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f زوجية (فردية أو دورية) أو منحنى الدالة f يقبل محور تناظر (مركز تناظر) ،

يمكن اقتصار مجموعة دراستها ,

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة كمالي : $f(x)=\sin(x),\ \ D_f=\mathbb{R}.$

- الدالة f دورية و دورها $T=2\pi$ إذا $D_E=[-\pi,\pi]$ حيث D_E هو اقتصار الدالة f
- الدالة f فردية إذا مجموعة دراستها $D_E=[0,\pi]$,

5.1.4تعريف : (الدالة المحدودة)

لتكن $f:D_f\to\mathbb{R}$

أ- نقول أن f محدودة من الأعلى (من الأسفل) إذا كانت صورة D_f بالدالة f محدودة من الأعلى (من الأسفل) هذا يعني :
$\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in D_f ,\ f(x)\le M$ ($\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in D_f ,\ f(x)\ge m$),

ب- نقول أن f محدودة إذا كانت صورة D_f بالدالة f محدودة هذا يعني :
$\exists m\in\mathbb{R},\ M\in\mathbb{R},\ \forall x\in D_f ,\ m\le f(x)\le M .$

أمثلة :

- $f(x)=\sin(x),\ \ D_f=\mathbb{R}.$ ، f محدودة ، $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le f(x)\le 1.$,
- $f(x)=e^x,\ \ D_f=\mathbb{R}.$ ، f محدودة من الأسفل بالعدد 0 ، $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\le e^x$.

ملاحظة :

صورة مجال محدود بتطبيق ليس محدود دوما مثلا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ \ si\ \ x\in]0,1] \\ 0\ ,\ \ \ si\ \ \ x=0\end{cases}$$

لدينا $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ لكن $f([0,1])$ غير محدودة .

2.4 تعاريف النهايات :

تعاريف و خواص:

من أجل $x_0 \in \mathbb{R}$، نسمي جوار لــ x_0 كل مجال من الشكل $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ حيث $\varepsilon>0$.

كل جوار لــ x_0 يرمز له بالرمز $V(x_0)$ أو V_{x_0} أو V.

تعريف :

لتكن الدالة f المعرفة في جوار النقطة x_0 ، أوبإستثناء x_0.

نقول أن الدالة f تقبل نهاية ℓ عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta_\varepsilon>0;\ |x-x_0|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

و نكتب : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ أو $\lim_{x_0} f(x)=\ell$.

ملاحظات:

- ✓ $|x-x_0|<\eta_\varepsilon \Leftrightarrow x_0-\eta_\varepsilon<x<x_0+\eta_\varepsilon$ يعني أن $x\in V(x_0)$.
- ✓ $|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \ell-\varepsilon<x<\ell+\varepsilon$ يعني أن $f(x)\in V(\ell)$.
- ✓ إذا كانت f معرفة عند إذن $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

1.2.4 تعريف : (النهاية من اليمين و النهاية من اليسار)

لتكن الدالة f معرفة على مجال I .

نقول أن الدالة f تقبل نهاية من اليمين ℓ عند x_0 إذا وفقط إذا :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta_\varepsilon>0;\ x_0<x<x_0+\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

و نكتب : $\lim_{x \xrightarrow[>]{} x_0} f(x)=\ell$ أو $\lim_{x_0^+} f(x)=\ell$.

نقول أن الدالة f تقبل نهاية من اليسار ℓ عند x_0 إذا وفقط إذا :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta_\varepsilon>0;\ x_0-\eta_\varepsilon<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

و نكتب : $\lim_{x \xrightarrow[<]{} x_0} f(x)=\ell$ أو $\lim_{x_0^-} f(x)=\ell$.

خاصية :

إذا كانت $\lim_{x \xrightarrow[>]{} x_0} f(x)=\ell$ و $\lim_{x \xrightarrow[<]{} x_0} f(x)=\ell$ فإن $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

البرهان:

$$\lim_{x \xrightarrow[>]{} x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \eta_1>0;\ x_0<x<x_0+\eta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{x \xrightarrow[<]{} x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \eta_2>0;\ x_0-\eta_2<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ليكن $\eta=\sup(\eta_1,\eta_2)$ إذن $x<x_0<\eta+\varepsilon$ و $\eta-\varepsilon<x_0<x$ و منه

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta=\sup(\eta_1,\eta_2); x_0-\eta<x<x_0+\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ملاحظة :

- ✓ إذا كانت $\lim_{x \xrightarrow[>]{} x_0} f(x) = \ell_1$ و $\lim_{x \xrightarrow[<]{} x_0} f(x) = \ell_2$ حيث $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة f لا تقبل نهاية عند x_0
- ✓ $\lim_{x \xrightarrow[>]{} x_0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow[<]{} x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

2.2.4تعميم على النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0; \forall x > A_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0; \forall x > -A_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > -A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall A > 0, \exists B > 0; x > -B \Rightarrow |f(x)| > -A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \forall A > 0, \exists B > 0; x > -B \Rightarrow |f(x)| > A$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \forall A > 0, \exists B > 0; x > B \Rightarrow |f(x)| > A$$

3.2.4خواص و مبرهنات :

مبرهنة 1 :

أ- الوحدانية : إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ إذن ℓ وحيدة

ب- إذا قبلت الدالة f نهاية ℓ عند x_0 إذن f محدودة في جوار x_0 بمعنى
$\forall x \in V_{x_0}, \ \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon.$

خواص : (عمليات على النهايات)

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ فإن :

أ- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$

ب- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = \ell \times \ell'$

ت- بالإضافة إلى $\ell' \neq 0$ في جوار x_0 ، $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

مبرهنة 2 :

أ- $\left.\begin{array}{l} Si \ f > 0 \ ou \ f \geq 0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq 0$

ب- $\left.\begin{array}{l} Si \ f > g \ ou \ f \geq g \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ et \ \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq \ell'$

ت- $\left.\begin{array}{l} Si \ f < h < g \ ou \ f \leq h \leq g \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ et \ \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \leq \lim_{x \to x_0} h(x) \leq \ell'$

خاصية : (Principe des gendarmes)

إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$

و كانت $f(x) < h(x) < g(x)$ في جوار x_0 فإن $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

حالات خاصة :

- ✓ إذا كانت $|f(x)| \le g(x)$ في جوار x_0 و $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- ✓ إذا كانت f دالة محدودة في جوار x_0 و $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \to x_0} (gf)(x) = 0$.
- ✓ إذا كانت $f(x) \le g(x)$ في جوار x_0 : $\begin{cases} Si \ \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \ alors \ \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \\ Si \ \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty, \ alors \ \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \end{cases}$

4.2.4 خاصية : (كثيرات الحدود و دوال ناطقة)

ليكن $P(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ كثير الحدود $(a_m \ne 0 \ , a_n \ne 0)$.

في جوار $x_0 = 0$ ، $P(x) \sim a_m x^m$ (وحيد حد بأقل درجة).

في جوار $\pm\infty$ ، $P(x) \sim a_n x^n$ (وحيد حد بأعلى درجة).

ليكن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة ناطقة ($Q(x)$ و $P(x)$ كثيرا حدود).

أمثلة :

أ- $\lim_{x \to +\infty} -2x^3 - x^2 + 7x - 2 = \lim_{x \to +\infty} -2x^3$
$= -\infty$

ب- $\lim_{x \to -\infty} -2x^3 - x^2 + 7x - 2 = \lim_{x \to -\infty} -2x^3$
$= +\infty$

ت-
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 5}{3x^2 + 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

ث-
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 5}{3x^2 + 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

تمرين :

أحسب النهايات التالية (استخدام التحليل):

-1 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 2x - 1}$ -2 $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 + 5x + 1}$ -3 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6}$

أحسب النهايات التالية(استخدام المرافق):

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ -3 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ -2 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ - 1

5.2.4خاصية : (علاقة المتتاليات و النهايات)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ إذا و فقط إذا كانت من أجل كل متتالية (x_n) التي تؤول إلى x_0

لدينا : $\lim_{x\to +\infty} f(x_n)=\ell$

البرهان:

لدينا : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta_\varepsilon>0;\ |x-x_0|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ بما أن

$\lim_{x\to +\infty} x_n=x_0$ من أجل $\eta_\varepsilon,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$ بحيث $\forall n>N$ لدينا $|x_n-x_0|<\eta_\varepsilon$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>N \Rightarrow |f(x_n)-\ell|\le\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x_n)=\ell.$$

6.2.4حالات عدم التعيين :

نسمي حالات عدم التعيين كل حالة لا يمكن فيها تطبيق المبرهنات أو الخواص المتعلقة بحساب النهايات ، و من هذه الحالات (حالات عدم التعيين) :

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\times\infty,\ -\infty+\infty\ etc...$$

مثال :

إذا كانت $f(x)=\sin(x)$ و $g(x)=x$ فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ و بالتالي $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

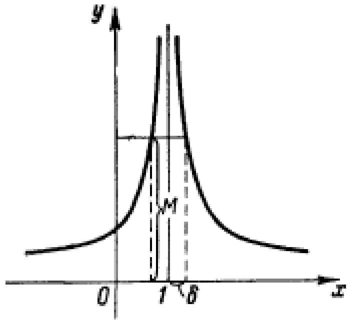
هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$، و لكن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ حسب التعريف .

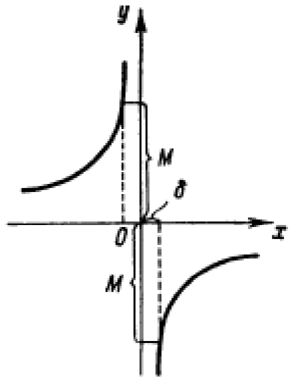
7.2.4التفسير الهندسي : المستوي منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- عندما x يأخذ قيم قريبة بالقدر الكافي من x_0 فإن المنحنى C_f يقترب من دون انقطاع من المستقيم (D) ذو معادلة: $x=x_0$. نقول أن المستقيم (D) ذو معادلة: $x=x_0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f.
-

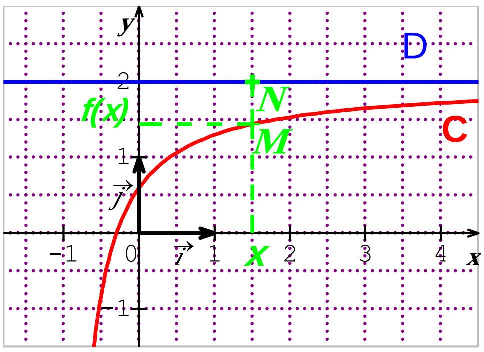
نتيجة:

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ يكافئ المستقيم (D) ذو معادلة: $x=x_0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f





- عندما x يأخذ قيم كبيرة بالقدر الكافي نحو $+\infty$ فإن المسافة MN تقترب من 0. المنحنى C_f يقترب من دون انقطاع من المستقيم (D) ذو معادلة: $y=\ell$. نقول أن المستقيم (D) هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$



نتيجة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ يكافئ المستقيم (D) ذو معادلة: $y=\ell$ هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

ملاحظة :

نحصل على نفس الشيء عند $-\infty$.

8.2.4 المستقيم المقارب المائل:

تعريف:

ليكن a، $(a\neq 0)$ و b عددان حقيقيان و C_f التمثيل البياني لدالة C_f في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

القول أن المستقيم (D) ذو معادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$).

يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ، (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$).

ملاجظة :

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل .

ملاحظات:

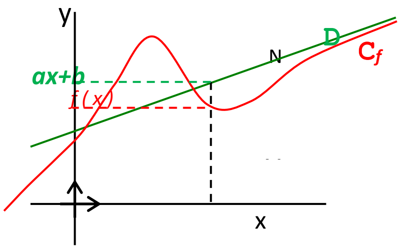
1- إذا كانت f معرفة بـ: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$) فإن المستقيم (D) ذو معادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$

(نفس الملاحظة عند $-\infty$).

2- دالة يمكن أن يكون لها نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ بدون أن يكون لمنحناها مستقيم مقارب (مثال: الدالة المربع)

9.2.4 التفسير البياني:

عندما x يؤول $+\infty$ فإن المسافة MN تقترب من 0 و بالتالي المنحنى C_f يقترب من دون انقطاع من المستقيم (D) ذو معادلة: $y = ax + b$.



نتيجة:

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ يكافئ المستقيم (D) ذو معادلة: $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ يكافئ المستقيم (D) ذو معادلة: $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f عند $-\infty$

3.4 الاستمرارية :

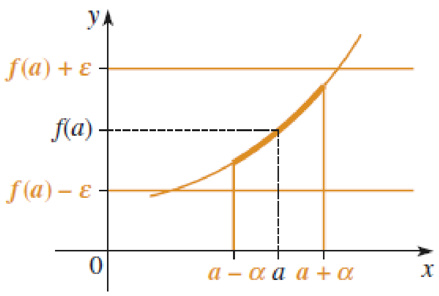
1.3.4تعريف:

f دالة معرفة على D_f و x_0 عدد حقيقي غير معزول من D_f. $f+g$

القول أن fمستمرة عند x_0 يعني أن نهاية f عند x_0 هي $f(x_0)$.

2.3.4نتيجة:

f مستمرة عند x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



3.3.4مبرهنة:

إذا كانت f مستمرة عند x_0 فإنها محدودة في جوار x_0 .

البرهان :

ليكن $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\eta > 0$ بحيث $\forall x \in D_f , |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$.

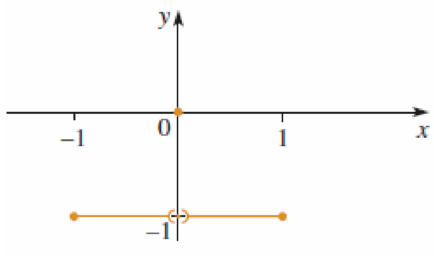
إذن f محدودة بـ $f(x_0) - \varepsilon$ و $f(x_0) + \varepsilon$ على $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ أي في جوار x_0 .

4.3.4قابلية إستمرارية دالة على يمين و يسار قيمة :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال D_f و $x_0 \in D_f$.

1. القول أن f مستمرة على يمين القيمة x_0 إذا و فقط إذا $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. القول أن f مستمرة على يسار القيمة x_0 إذا كان و فقط إذا $\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$.

أمثلة :



$$f(x) = \frac{|x|}{x} ; x_0 = 0$$

ملاحظات:

- القول أن f مستمرة على المجال $]a,b[$ يعني أن f مستمرة عند كل عدد قيمة x_0 من $]a,b[$.

- القول أن f مستمرة على المجال $[a,b]$ إذا و فقط إذا كانت f مستمرة على $]a,b[$ ومستمرة على يمين القيمة a وعلى يسار القيمة b.
- القول أن f مستمرة على المجال $[a,b[$ إذا و فقط إذا كانت f مستمرة على $]a,b[$ ومستمرة على يمين القيمة a.
- القول أن f مستمرة على المجال $]a,b]$ إذا و فقط إذا كانت f مستمرة على $]a,b[$ وعلى يسار القيمة b.

5.3.4 التفسير البياني:

تكون f مستمرة على المجال I عندما يمكن رسم تمثيلها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

6.3.4 العمليات على الدوال المستمرة:

مبرهنة :

إذا كانت f و g دالتان مستمرتان عند x_0 فإن :

$f+g$ و $f\times g$ مستمرتان عند x_0.

- إذا كانت $g(x)\neq 0$ في جوار x_0 و $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ مستمرتان عند x_0.
- إذا كانت f مستمرة عند x_0 و g مستمرة عند $f(x_0)$ فإن gof مستمرة عند x_0.

نتائج:

1) كل دالة كثير حدود هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.
2) كل دالة ناطقة هي دالة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
3) الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها مثلا $x\mapsto e^x$ مستمرة على $\mathbb{R}$، $x\mapsto \ln(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}_+^*$ و غيرها.
4) الدالتان $x\mapsto \sin(x)$ و $x\mapsto \cos(x)$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

7.3.4 نهاية متتالية و دالة مستمرة:

مبرهنة:

لتكن f مستمرة على المجال I و (u_n) متتالية حدودها في I.

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} u_n=\ell$ فإن كانت $\lim_{x\to+\infty} f(u_n)=f(\ell)$.

8.3.4 مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة:

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $(a<b)$ و ليكن λ عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ حيث $f(c)=\lambda$.

9.3.4 التفسير البياني:

منحنى الدالة f يقطع المستقيم ذو معادلة $y=\lambda$ على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .

نتيجة:

المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل على الأقل حل محصور بين a و b .

10.3.4 مبرهنة: (Bolzano)

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $(a<b)$ و كان $f(a)\times f(b)<0$

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

11.3.4 التفسير البياني:

منحنى f يقطع محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .

نتيجة:

المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حل محصور بين a و b .

12.3.4 الدوال المستمرة و الرتيبة تماما:

f دالة مستمرةرتيبة تماما على المجال $[a,b]$حيث $(a<b)$و ليكن λ عدد حقيقي محصور بين

$f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد c من المجال $[a,b]$ حيث $f(c)=\lambda$.

13.3.4 التفسير البياني:

منحنى الدالة f يقطع المستقيم ذو معادلة $y=\lambda$ في نقطة وحيدة فاصلتها cمحصورة بين a و b

نتيجة:

المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا محصور بين a و b .

14.3.4 حالة خاصة:

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$حيث $(a<b)$ و كان $f(a)\times f(b)<0$

فإنه يوجد عدد حقيقيوحيد $c\in[a,b]$بحيث $f(c)=0$.

15.3.4 التفسير البياني:

منحنى f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها cمحصورة بين a و b .

نتيجة:

المعادلة $f(x)=0$تقبل حلا وحيدا محصور بين a و b .

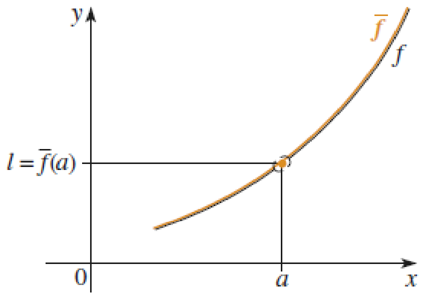
16.3.4 الإمتداد بالإستمرارية:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال Iو ليكن x_0 عدد حقيقي لا ينتمي إلى I .

نقول أن g هي أمتداد الدالة f على المجال I إذا و فقط إذا تحقق :

$$\begin{cases} \forall x\in I\setminus\{x_0\};\ g(x)=f(x) \\ g(x_0)=\ell \end{cases}$$



$g=\bar f$

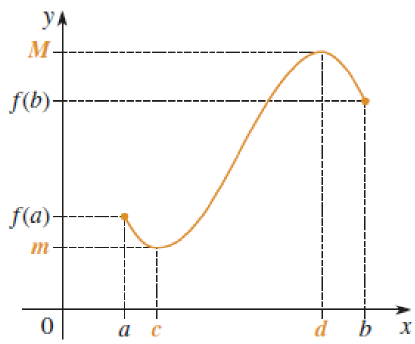
17.3.4 صورة مجال وفق دالة مستمرة

مبرهنة:

دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ هي دالة محدودة .

صورة مجال $[a,b]$ وفق دالة f مستمرة هو مجال $[m,M]$ حيث :

$$f\left([a,b]\right)=[m,M]; \qquad m=\inf_{[a,b]} f \ , \ M=\sup_{[a,b]} f$$

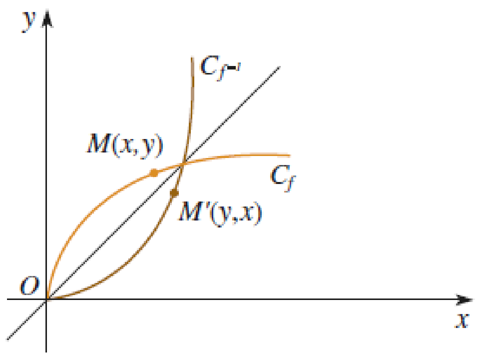


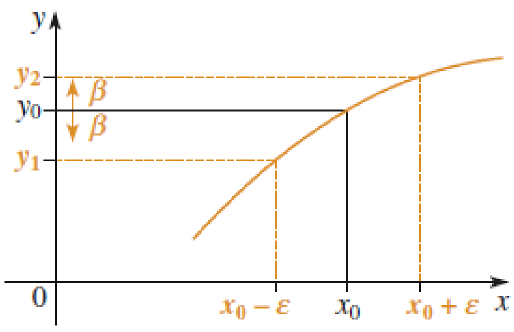
18.3.4 دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال

مبرهنة :

لتكن مستمرة و رتيبة تماما على مجال .

1. هو مجال حدوده هي نهايات في حدود المجال .
2. هي تقابل من المجال نحو المجال.
3. التقابل العكسي مستمر على المجال و رتيبة تماما و لها نفس إتجاه تغيير .





4.4 الإشتقاقية :

1.4.4 قابلية الاشتقاق:

2.4.4 تعريف العدد المشتق:

لتكن f دالة معرفة على مجال I و x_0 عدد من I.

القول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0 يعني أن النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة لما x يؤول إلى x_0. تسمى هذه النهاية بالعدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

نتيجة : بوضع $x-x_0=h$ نحصل على :

f تقبل الاشتقاق عند x_0 يعني $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ يعني $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

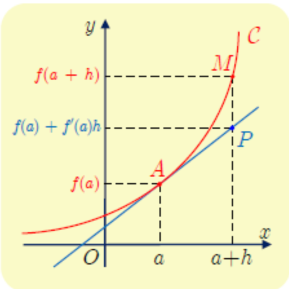
3.4.4 ملاحظات :

- ✓ تكون f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$ أو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$ أو غير موجودة.
- ✓ إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة x من المجال I نقول أن f قابلة للاشتقاق على I و الدالة : $f':x\to f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I.
- ✓ f تقبل الاشتقاق على المجال I يعني f' مستمرة على المجال I.

4.4.4 مماس لمنحنى دالة:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و قابلة للاشتقاق عند x_0 من I. C_f تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المماس للمنحنى C_f عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلة له $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



ملاحظة :

إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ فإن C_f له مماس موازي لمحور التراتيب.

5.4.4 قابلية إشتقاق دالة على يمين وعلى يسار القيمة x_0:

1. إذا كانت f دالة معرفة على الأقل مجال من الشكل $[x_0,x_0+\alpha[$ أو $[x_0,+\infty[$ حيث $\alpha>0$

كانت $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ نقول أن الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين القيمة x_0
عددها المشتق من اليمين هو $f_{>}'(x_0)=\ell$.

2. إذا كانت f دالة معرفة على الأقل مجال من الشكل $]x_0-\alpha, x_0]$ أو $]-\infty, x_0]$ حيث $\alpha>0$
كانت $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell'$ نقول أن الدالة f تقبل الإشتقاق على يسار القيمة x_0
عددها المشتق من اليمين هو $f_{<}'(x_0)=\ell'$.

6.4.4 ملاحظات :

i. إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين و على يسار القيمة x_0 و كان
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نقول أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند القيمة x_0
و عددها المشتق هو $f'(x_0)$.

ii. إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين و على يسار القيمة x_0 و كان
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نقول أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند القيمة x_0.

مثال 1 :

الدالة : $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ قابلية للاشتقاق على اليمين القيمة $x_0=0$ لأنها معرفة على $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{h\sqrt{h}}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \sqrt{h}$$
$$=0$$

مثال 2 :

الدالة: $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ غير قابلية للاشتقاق على اليسار القيمة $x_0=2$ و $f(2)=0$ لأن :

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\sqrt{-h}}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\sqrt{-h}}{-\left(\sqrt{-h}\right)^2}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{-\sqrt{-h}}$$
$$=-\infty$$

مثال 3 :

الدالة : $f : x \mapsto |x|$ قابلية الاشتقاق على اليمين القيمة $x_0=0$ لأنها معرفة على $\mathbb{R}$ و

$$\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{h}{h}$$
$$=1$$

وقابلية الاشتقاق على اليسار القيمة $x_0=0$ لأنها معرفة على $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{-h}{h}$$
$$=-1$$

7.4.4 الخلاصة :

الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين و على يسار القيمة $x_0=0$ و

$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\neq\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ إذن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند القيمة $x_0=0$.

8.4.4 الاستمرارية و قابلية الاشتقاق:

مبرهنة:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل x_0، تكون هذه الدّالة f مستمرة عند x_0.

ملاحظة:

عكس المبرهنة غير صحيح.

مثال :

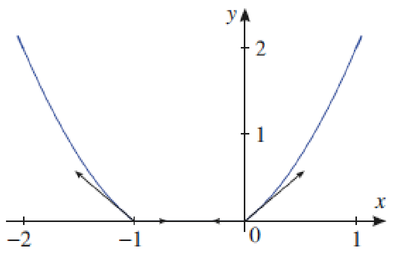
الدالة $f:x\mapsto|x-1|$ مستمرة عند القيمة $x_0=1$ لكنها غير قابلة للإشتقاق عند نفس القيمة .

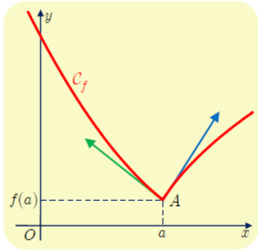
9.4.4 التفسير الهندسي :

لتكن f دالة و C_f تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين القيمة x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ من اليمين.
- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار القيمة x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ من اليسار.
- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين و على يسار القيمة x_0 و كان $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند القيمة x_0

والمنحنى C_f يقبل النقطة $A(x_0,f(x_0))$ كنقطة زاوية.



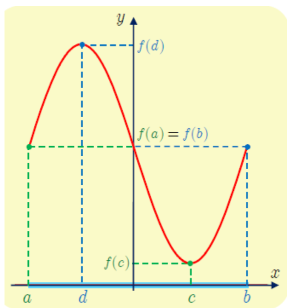


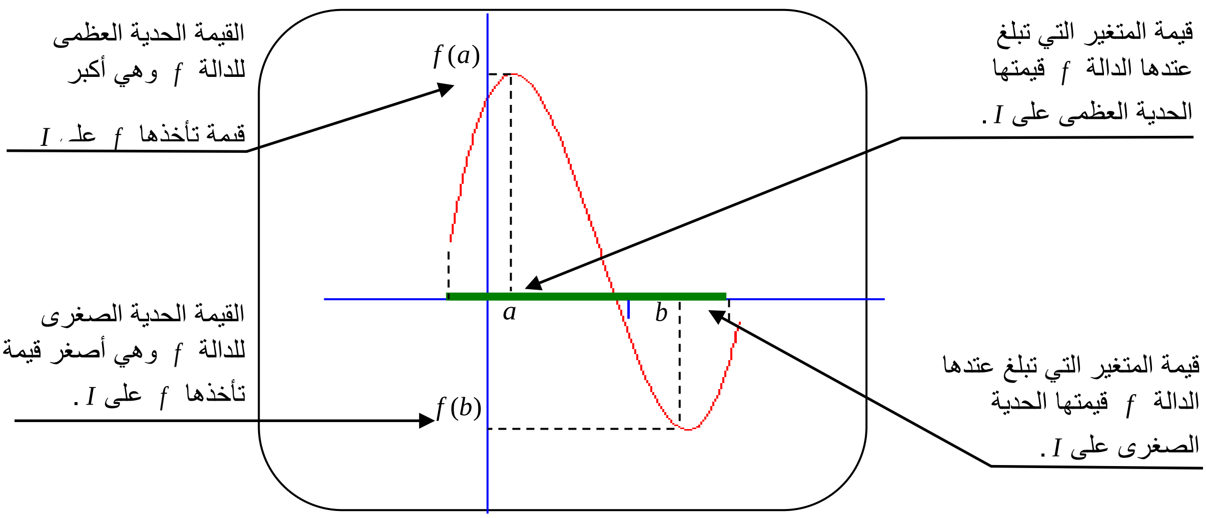
10.4.4 القيم الحدية لدالة :

- لتكن f دالة معرفة على مجال I و لتكن c قيمة من I، نقول أن $M=f(c)$ هي قيمة محليا كبرى للدالة fو التي تبلغها عند c إذا وجد مجال مفتوح J يشمل القيمة c و يحقق $\forall x \in I \cap J, f(x) \leq f(c)$.
- لتكن f دالة معرفة على مجال I و لتكن d قيمة من I، نقول أن $m=f(d)$ هي قيمة محليا صغرى للدالة fو التي تبلغها عند d إذا وجد مجال مفتوح J يشمل القيمة d و يحقق $\forall x \in I \cap J, f(x) \geq f(d)$.

ملاحظة :

نقول أن $f(a)$ قيمة حدية محليا للدالة f إذا كانت قيمة محليا صغرى أو قيمة محليا كبرى .





ملاحظة :

يمكن أن تبلغ دالة قيمتها الحدية ألعظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر واحد من المجال.

والقيمة الحدية تكون دائما عددا حقيقيا (بمعنى إنّ $+\infty$ أو $-\infty$ لا يمكن أن يكونا قيمة حدّية).

11.4.4 المشتقات المتتابعة:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I وَ f' دالتها المشتقة.

إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تدعى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و يرمز إليها بالرمز f'' حيث $f''=(f')'$. تقول أن f قابلة للاشتقاق مرتين على I.

- إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تدعى الدالة المشتقة الثالثة للدالة f و يرمز إليها بالرمز $f^{(3)}$ و $f^{(3)}=(f'')'$. تقول أن f قابلة للاشتقاق مرتين على I.
- و هكذا يمكن تعريف الدوال المشتقة التي رتبتها $4,5,6,...,n$ ، تدعى الدوال المشتقة $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)},..., f^{(n)}$ الدوال المشقة المتتابعة للدالة f و نكتب : $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

مثال :

نعتبر الدالة f ذات المتغير x المعرفة على $\mathbb{R}$بالعبارة :

$$f(x)=x^4-4x^3+12x+6$$

- عين كل من $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}$، ثم استنتج عبارة الدالة $f^{(n)}$ حيث n عدد طبيعي.

الحل :

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12$$

الدالة f' هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f''(x)=12x^2-24x$$

الدالة f'' هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(3)}(x)=24x-24$$

الدالة $f^{(3)}$ هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(4)}(x)=24$$

الدالة $f^{(4)}$ هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(5)}(x)=0$$

و هكذا الدالة $f^{(n-1)}$ هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 5,\ f^{(n)}(x)=0$$

12.4.4 المشتقات و العمليات: $n \in \mathbb{N}$

$f(x)=$	$f'(x)=$	قابلية الاشتقاق على كل مجال من	$f(x)=$	$f'(x)=$	قابلية الاشتقاق على كل مجال من
a	0	$\mathbb{R}$	$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-an}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
ax	a	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
ax^n	$a.n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

13.4.4 العمليات على المشتقات:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I و λ عدد حقيقي (الدالة g لا تنعدم على I)

- $(f+g)'=f'+g'$.
- $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$.
- $(\lambda f)'=\lambda f'$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{g\times f'-f\times g'}{g^2}$.
- $\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$.

14.4.4 مشتقة الدالة : $f: x \to u(ax+b)$

مبرهنة:

a وَ b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$ ، u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b\in I$. الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و $f'(x)=au'(ax+b)$.

أمثلة:

$f(x)=$	$f'(x)=$	قابلية الاشتقاق على كل مجال من
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a.\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

15.4.4 مشتقة الدالة المركبة:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على I و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال J (Jمحتوى فى $f(I)$) فإن الدالة gof تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$(gof)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$$

16.4.4 تطبيقات:

مشتقة الدالة: $x\to\sqrt{u(x)}$

مبرهنة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على المجال I ، فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$\left(\sqrt{u}\right)'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

البرهان:

نضع: $v(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=v\,o\,u(x)=\sqrt{u(x)}$.

الدالة v تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

و بالتالي الدالة f تقبل الاشتقاق على I

و $f'(x)=\left(v\,o\,u\right)'(x)=u'(x)v'[u(x)]=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

مشتقة الدالة: $x\to[u(x)]^n$

مبرهنة:

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$\left(u^n\right)'(x)=n.u^{n-1}(x).u'(x).$$

البرهان:

نضع: $v(x)=x^n$ و $f(x)=v\,o\,u(x)=[u(x)]^n$

الدالة vتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $v'(x)=n.x^{n-1}$ و بالتالي الدالة f تقبل الاشتقاق على I

و $f'(x)=\left(v\,o\,u\right)'(x)=u'(x)v'[u(x)]=u'(x)\times\left[n.u^{n-1}(x)\right]=n.u^{n-1}(x).u'(x)$.

مشتقة الدالة: $x\to\frac{1}{[u(x)]^n}$

مبرهنة:

n عدد طبيعي غير معدوم.
إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على I و لا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و
لدينا من أجل كل x من I: $\left(\frac{1}{u^n}\right)'(x) = -\frac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$.

البرهان:

نضع: $v(x) = \frac{1}{x^n}$ و $f(x) = (v o u)(x) = \frac{1}{u^n(x)}$

الدالة v تقبل الاشتقاق على كل مجال I من $\mathbb{R}^*$ و $v'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ و بالتالي الدالة f تقبل الاشتقاق

على I و $f'(x) = (v o u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = u'(x) \times \frac{-n}{u^{n+1}(x)} = -\frac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$

17.4.4 اتجاه تغير دالة:

f دالة معرفة على D_f و قابلة للاشتقاق على المجال I من D_f .

مبرهنة:

- إذا كان من أجل كل x من المجال I، $f'(x) > 0$ (أو $f'(x) < 0$) ماعدا عدد منته من القيم التي تنعدم f' من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماماً (أو متناقصة تماما) على I.
- إذا كان من أجل كل x من المجال I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

ملاحظة:

لدراسة تغيرات f، يكفي دراسة إشارة $f'(x)$.

18.4.4 قيمة حدية محلية:

f دالة معرفة على D_f و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من D_f و x_0 عنصر من I.

مبرهنة:

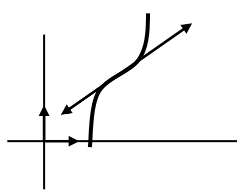
إذا انعدمت الدالة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

19.4.4 نقطة الانعطاف:

f دالة معرفة على D_f و I مجال من D_f و x_0 عنصر من I و C_f تمثيلها البياني في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

تعريف :

نسمي نقطة انعطاف للمنحنى C_f النقطة التي يخترق عندها المماس المنحنى C_f.



مبرهنة:

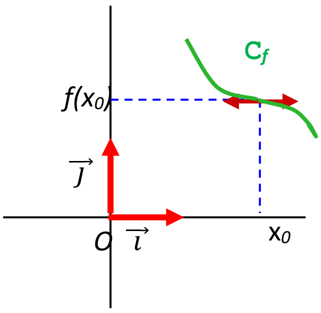
f تقبل الاشتقاق مرتين على I إذا انعدمت الدالة f'' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $M(x_0, f(x))$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f .

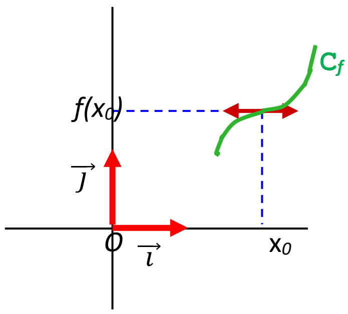
ملاحظة 01:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل x_0 و انعدمت دالتها المشتقة f' من أجل x_0 ولم تغير من إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0, f(x))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى الممثل للدالة f.

x	x_0
$f'(x)$	+0+
$f(x)$	↗ $f(x_0)$ ↗

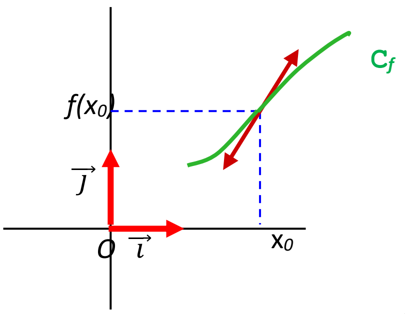
x	x_0
$f'(x)$	-0-
$f(x)$	↘ $f(x_0)$ ↘

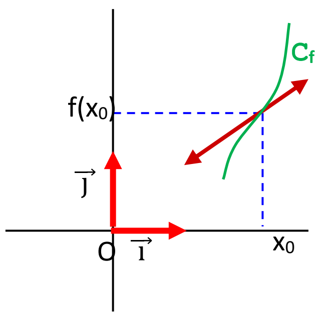




ملاحظة 02:

إشارة $f''(x_0)$ تعطينا وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمماس عند $M(x_0, f(x))$.





0 + -f ''(x)

0 -+f ''(x)

مثال:

أنشئ التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ والمستقيم (Δ)

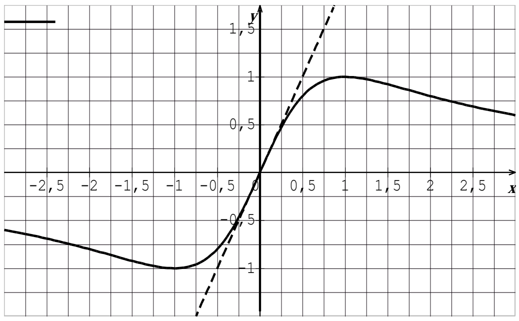
الذي معادلته : $y=2x$.

- ادرس قابلية الاشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=0$. ماذا تستنتج ؟
- ناقش بيانيا وضعية التمثيل البياني للدالة f بالنسبة للمستقيم (Δ) . تأكد من صحة النتائج حسابيا

ماذا تستنتج ؟

الحل :

- التمثيل البياني للدالة f



دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد $x_0=0$:

لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ حيث $f(0)=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h}{h^2+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h^2+1}\times\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2+1}$$

$$=2$$

وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة $x_0=0$ و عددها المشتق هو $f'(0)=2$.

- الاستنتاج :

المستقيم (Δ) يشمل المبدأ O و معامل توجيهه $f'(0)=2$ و عليه (Δ) هو المماس للمنحني (C_f)

في المبدأ O.

- وضعية التمثيل البياني (C_f) و المستقيم (Δ) بيانيا .

في المجال $]-\infty,0[$ التمثيل البياني (C_f) يقع فوق (Δ) ,

في المجال $]0,+\infty[$ التمثيل البياني (C_f) يقع تحت (Δ) .

في النقطة O التمثيل البياني (C_f) و (Δ) يتقاطعان.

- دراسة الوضعية حسابيا :

$$
\begin{aligned}
f(x)-y &= \frac{2x}{x^2+1}-2x \\
&= \frac{2x-2x^3-2x}{x^2+1} \\
&= \frac{-2x^3}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

جدول الإشارة : $f(x)-2x$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$-2x^3$	$+$	$-$
x^2+1	$+$	$+$
$f(x)-2x$	$+$	$-$

في المجال $]-\infty,0[$ التمثيل البياني (C_f) يقع فوق (Δ),

في المجال $]0,+\infty[$ التمثيل البياني (C_f) يقع تحت (Δ).

لما $x=0$ التمثيل البياني (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 وهي المبدأ O.

الاستنتاج :

المماس (Δ) يخترق التمثيل البياني (C_f) في نقطة التماس O و تدعى النقطة O نقطة انعطاف.

20.4.4 مبرهنة رول :

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث

- f مستمرة على $[a,b]$.
- f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$.
- $f(a)=f(b)$.

عندئذ يوجد $c\in[a,b]$ بحيث $f'(x)=0$.

البرهان:

بمأن الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ ، فهي تقبل قيمة عظمى M و قيمة صغرى m على المجال $[a,b]$.

لدينا حالتان:

1. $M=m$ في هذه الحالة الدالة f ثابتة و لدينا $f'(x)=0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]a,b[$.
2. $M>m$ في هذه الحالة يوجد عدد حقيقي x ينتمي إلى المجال $]a,b[$ بحيث $f(x)=M$ أو $f(x)=m$.

نفرض انه مهما تكن M : توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $f(c)=M$ بحيث M هي قيمة حدية إذن $f'(c)=0$.

ملاحظات :

- شروط نظرية رول كافية و غير لازمة .

مثال1:

لتكن الدالة $f: x \mapsto x^3$ المعرفة على المجال $[-1,1]$ حيث $f(-1)\neq f(1)$ و رغم ذلك $f(0)=0$.

- العدد في نظرية رول ليس وحيدا .

مثال2:

لتكن الدالة $f: x \mapsto \sin(x)$ المعرفة على المجال $]0,3\pi[$ هناك ثلاث نقاط ينعدم فيها المشتق.

مثال3 : (عدم تحقيق شروط مبرهنة رول)

لتكن الدوال المعرفة كما يلي:

1. $f(x)=x$ في المجال $[0,1]$.
2. $f(x)=|x|$ في المجال $[-1,1]$.
3. $f(x)=\begin{cases} 1-x & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$ في المجال $[0,1]$.

يمكن أن تلاحظ أن هذه الدوال لا تحقق شروط مبرهنة رول في المجالات المشار إليها ذلك لأن:

- الدالة الأولى لا تحقق الشرط $f(0)=f(1)$.
- الدالة الثانية لا تحقق شرط الاشتقاق إذ أن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 0.
- الدالة الثالثة لا تحقق شرط الاستمرار على المجال $[0,1]$ إذ أنها غير مستمرة عند 0

و رغم ذلك فمبرهنة رول توفّر شروطا كافية و ليست لازمة لكي توجد نقطة c من $]a,b[$ ينعدم عندها المشتق، أي: $f'(c)=0$.

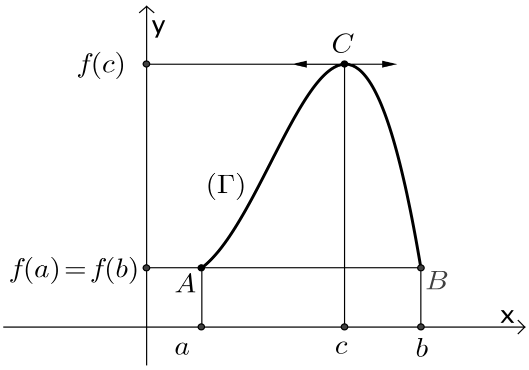
المثال التالي يبين أن شروط مبرهنة رول ليست لازمة :

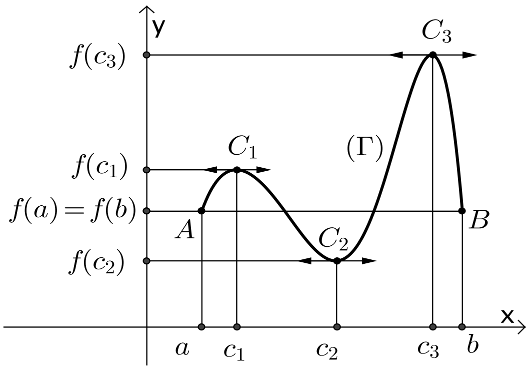
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in]-1,1[\\ 0 & : x=\pm 1 \end{cases}$$

فهذه الدالة ليست مستمرة عند طرفي المجال $[-1,1]$ ، ورغم ذلك لدينا $f'(0)=0$

21.4.4 التفسير الهندسي :

يوجد على الأقل نقطة من منحنى الدالة f يكون فيها المماس موازي لمحور الفواصل .





22.4.4 مبرهنة التزايدات المنتهية : (مبرهنة المتوسط)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث

- f مستمرة على $[a,b]$.
- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

عندئذ يوجد على الأقل $c\in]a,b[$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

البرهان:

سوف نستخدم مبرهنة رول.

نفرض وجود دالة مساعدة بحيث : $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

مشتقة هذه الدالة هي : $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

الدالة تحقق شروط الثلاثة لمبرهنة رول، إذن توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $F'(x)=0$

و بالتالي : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

23.4.4 مبرهنة التزايدات المنتهية معممة: (مبرهنة كوشي).

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث

- f مستمرة على $[a,b]$.
- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

نفرض أن $g(a)\neq g(b)$ و الدالة g لا تنعدم في المجال $]a,b[$.

إذن توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

البرهان:

نفرض وجود دالة مساعدة بحيث : $F(x)=[g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]g(x)$.

مشتقة هذه الدالة هي : $F'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x)-[f(b)-f(a)]g'(x)$.

الدالة F تحقق شروط الثلاثة لمبرهنة رول، إذن توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $F'(x)=0$

و بالتالي : $[g(b)-g(a)]f'(x)=[f(b)-f(a)]g'(x)$ ، و هذا يعني $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

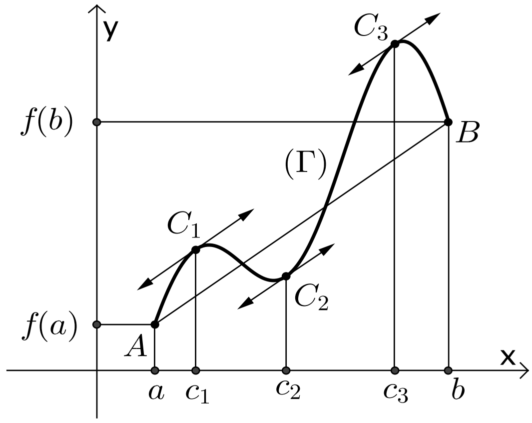
24.4.4 التفسير الهندسي :

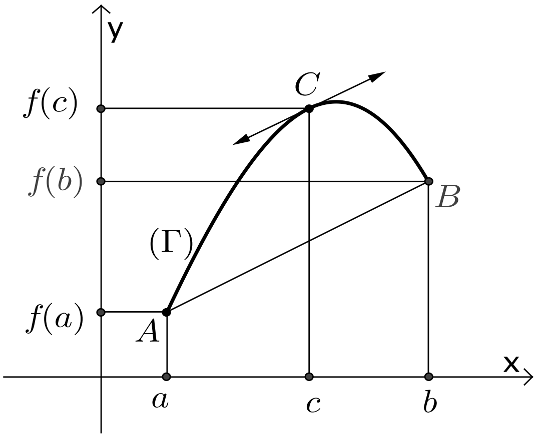
يوجد على الأقل نقطة من منحنى الدالة f يكون فيها المماس موازي للمستقيم (AB) حيث

$A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$.

ملاحظات :

نلاحظ أن النقطة c ليست عموما وحيدة لأنه بالإمكان أن يقبل بيان الدالة المعتبرة عدة مماسات توازي المستقيم (AB).





مثال:

يمكن أن نثبت بسهولة من خلال مبرهنة التزايدات المنتهية أن:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -x\leq\sin(x)\leq x$$

يكفي أن نعتبر عنصرا كيفيا $x\in\mathbb{R}$ و نطبق المبرهنة على الدالة $x\mapsto\sin(x)$ في المجال $[0,1]$:

يوجد ينتمي إلى هذا المجال بحيث:

$$\sin(x)-\sin(0)=(x-0)\cos(x)$$

و منه

$$|\sin(x)-\sin(0)|=|(x-0)\cos(x)|$$

و منه ينتج (باعتبار أن $\sin(0)=0$ و $|\cos(x)|\leq 1$)

$$\begin{aligned}|\sin(x)|&=|\sin(x)-\sin(0)|\\&=|(x-0)\cos(x)|\\&=|(x-0)||\cos(x)|\\&\leq|x|\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

25.4.4 مبرهنة : (قاعدة لوبيتال L'Hôpital)

لتكن f و g دالتان بحيث :

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.
2. يوجد جوار V للقيمة a بحيث الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $V\setminus\{a\}$.
3. الدالة g' لا تنعدم في $V\setminus\{a\}$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة.

إذن :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان:

نختار $x \neq a$ من V. نطبق مبرهنة كوشي .

لدينا : $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ حيث ξ عدد جقيقي محصور بين x و a.

لكن من الشرط 1 نعلم أن $f(a) = g(a) = 0$ و بالمقابل $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

إذا كانت $x \to a$ إذن $\xi \to a$ لان ξ عدد جقيقي محصور بين x و a.

و من جهة أخرى إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ فإن $\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ موجودة و تساوي A.

و بالمقابل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ملاحظة:

- قاعدة لوبيتال صحيحة من أجل $a = \pm\infty$ أو $f = \pm\infty$ و $g = \pm\infty$.

قاعدة لوبيتال تسمح لنا باستبدال نهاية بأخرى بحيث تكون أسهل في الحساب. هذه القاعدة تستخدم في ثلاث مراحل:

1. نتحقق أن $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ هي حالة عدم التعيين من الشكل ($0\times\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$) ، و إذا لم يتحقق الشرط فإنه لا يمكن استخدام قاعة لوبيتال.
2. نشتق كل من $f(x)$ و $g(x)$ على حدى.
3. حساب $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

مثال 1:

حساب النهاية : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

نلاحظ أن : $\lim_{x \to 0} \sin(2x) = 0$ و $\lim_{x \to 0} x = 0$.

و بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \times \cos(2x)}{1} = 2$$

مثال 2:

حساب النهاية : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

نلاحظ أن : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

و بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty .$$

مثال 3:

حساب النهاية : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x^4}$.

نلاحظ أن : $\lim_{x \to 0} e^x = 1$ و $\lim_{x \to 0} x^4 = 0^+$.

و بالتالي لا يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال.

لكن : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$.

5. الدالةالأسية ذات الأساس e

1.5 عموميات:

تعريف وَ مبرهنة:

تعريف:

توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تساوي مشتقاتها و تأخذ القيمة 1 عند 0 .
هذه الدالة نرمز لها بالرمز exp و تسمى الدالة الأسية ذات الأساس e .
لدينا: $\exp' = \exp$ و $\exp(0) = 1$.

2.5 الترميز:

اصطلاحا، من أجل كل عدد حقيقي x ، نرمز بالرمز e^x بدل $\exp(x)$.

ملاحظة:

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$.

3.5 خواص جبرية:

خواص:

من أجل كل عدد حقيقي x ، و كل عدد حقيقي y ، و كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- ✓ $e^{x+y} = e^x . e^y$.
- ✓ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- ✓ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- ✓ $(e^x)^n = e^{nx}$.
- ✓ $e^0 = 1$.

نتيجة:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = e^x$.

4.5 دراسة الدالة الأسية:

إشارة و إتجاه تغير الدالة الأسية:

- ✓ $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.
- ✓ الدالة الأسية $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، من أجل كل عددان حقيقيان a وَ b :

- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$.
- $a = 0 \Leftrightarrow e^a = 1$.
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$.
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$.
- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$.

تطبيق 1:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$(1)\ e^{2x}+3=0$ $(2)\ e^{-2x+1}-1=0$ $(3)\ e^{-2x-1}-e^{x}<0$ $(4)\ e^{2x}>2-e^{x}$

طريقة:

المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x)\geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$

إذن $S=\phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^{2}+X-2$ هما -2 و 1 و منه $X^{2}+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تطبيق 2:

حل في $\mathbb{R}$ ما يلي :

1. $e^{x^{2}+3x-3}=e^{2x-1}$.
2. $e^{5x+3}>e^{3x-1}$.
3. $e^{2x-1}=3$.
4. $e^{x+2}\geq -5$.
5. $e^{x+2}\geq 3$.

النهايات:

$\lim_{x\to -\infty} e^{x}=0$ ، $\lim_{x\to +\infty} e^{x}=+\infty$.

$\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} e^{u(x)}=+\infty$.

$\lim_{x\to x_0} u(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} e^{u(x)}=-\infty$.

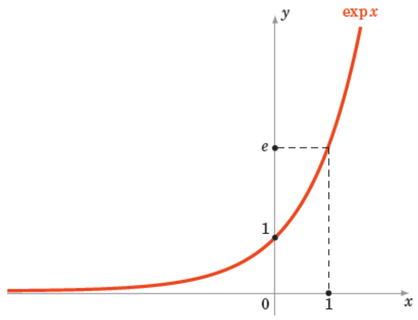
مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2}=+\infty$
أي $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to-\infty} e^X=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2}=0$
أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

<u>جدول التغيرات و رسم المنحنى:</u>

x	$-\infty \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$



5.5 <u>التزايد المقارن:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ،

✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$.

✓ $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$.

✓ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0$.

✓ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

✓ $\lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n}=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty$.

✓ $\lim_{x\to x_0}[u(x)]^n e^{u(x)}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty$.

<u>ملاحظة:</u>

من أجل x قريب من 0 : $e^x \cong x+1$.

<u>ملاحظة :</u> (اتجاه التغيرات)

<u>خاصية:</u>

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

<u>مثال:</u>

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $u(x)=x^2-1$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

بما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن الدالة f متزليدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

6.5مشتقة الدالة $x \mapsto \exp o u$:

مبرهنة:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.
الدالة I المعرفة بـ : $f(x) = e^{u(x)} = (\exp o u)(x)$ تقبل الاشتقاق على I وَ من أجل كل عدد x من I ، $f(x) = u'(x).e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " exp " قابلة للاشتقاق على $]-\infty;+\infty[$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x) = u'(x)\times(\exp)'[u(x)] = u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x) = e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- الدالة F حيث $F(x) = e^{-x^2}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = -2xe^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$.

مثال:

- الدالة $\varphi : x \mapsto e^{x^2-3x}$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ عندئذ دالتها المشتقة هي الدالة

$$\varphi : x \mapsto (3x^1 - 3)e^{x^2-3x}$$

- عين الثوابت الحقيقية $\alpha;\beta$حتى تكون الدالة $G : x \mapsto (\alpha x^2 + 4x + \beta)e^{x^3+2x^2-9x+3}$ أصلية للدالة

$$g : x \mapsto 5e^{x^3+2x^2-9x+3}$$

7.5تمرينات محلولة:

تمرين 1:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي:

$$(1)\quad e^{x^2-1} = e\,;\ (2)\quad e^{2x} - 3e^x + 2 = 0\,;\ (3)\quad (x^2-4x+3)e^x = 0$$

(5) $e^{x^2-1} > e$ ، (4) $xe^x - x^2e^x > 0$.

الحل:

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(x^2-4x+3)e^x = 0$:

$$(x^2-4x+3)e^x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 & .....(1) \\ e^x = 0 & .....(2) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) . $\Delta = 4$ و $x_1 = 3$ أو $x_2 = 1$.

و منه مجموعة الحلول المعادلة (1) هي $S = \{1,3\}$.

نحل المعادلة (2) . المعادلة لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ لان $\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$.

و بالتالي حلول المعادلة المعطاة هي

$$S = \{1,3\}$$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$:

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x \\ y > 0 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \;....(1) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1): نلاحظ أن $0 = 1-3+2$ و بالتالي $y_1 = 1$ و منه $y_2 = 2$ حلول مقبولة.

لما $y = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ و $y = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

و بالتالي مجموعة الحلول المعادلة هي $S = \{0, \ln 2\}$.

3- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{x^2-1} = e$:

$$e^{x^2-1} = e \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = -1) \text{ أو } (x = 1)$$

و بالتالي مجموعة الحلول المعادلة هي $S = \{-1,1\}$.

4- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $xe^x - x^2e^x > 0$:

$$xe^x - x^2e^x > 0 \Leftrightarrow xe^x\left(1-x\right) > 0$$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$ ، $\begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[;\ x > 0 \\ \forall x \in]-\infty,0[;\ x < 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \forall x \in]1,+\infty[;\ 1-x > 0 \\ \forall x \in]-\infty,1[;\ 1-x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
e^x	+	+		+	+		+	+
x	-	-	0	+	+		+	+
$1-x$	+	+		+	+	0	-	-
$xe^x\left(1-x\right) > 0$	-	-	0	+	+	0	-	-

و بالتالي : $S =]0,1[$

5- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x^2-1} > e$:

$$e^{x^2-1} \geq e \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$$

و بالتالي : $S = \left]-\infty; \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$

تمرين2:

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ المعرفة على المجموعة $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

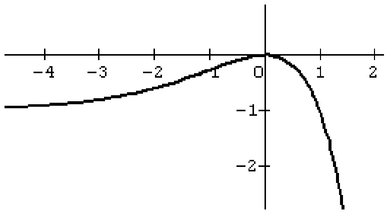
- احسب الدالة المشتقة للدالة f .
- استنتج إشارتها ثم حدد اتجاه تغيراتها.
- أنشئ التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.

الحل :

من أجل كل عدد حقيقي x ينتمي إلى $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ فإن $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}\leq 0$

لأن مشتقة الدالة $x\mapsto(1-x)e^x-1$ هي $g'(x)=-xe^x$

يعني $\qquad g(x)=(1-x)e^x-1$



ومنه $(1-x)e^x-1\leq 0$

من هنا الدالة $f:x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$ متناقصة تماما

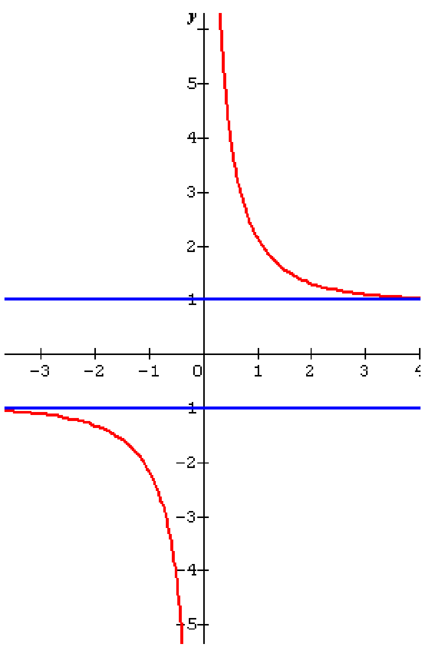
تمرين 4:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ و ليكن (C) منحنييها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل:

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.



$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1+e^{-x}\right)}{e^x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ و بما أن

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+1\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x-1\right)=0$.

نعلم أن $e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$.

يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$ ، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$.

تمارين للحل:

تمرين 1: (الهدف إثبات أن: $\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$)

أ- نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ:

$g(x)=(x-1)e^x$ ، الشكل المقابل هو

(C_g) التمثيل البياني لهافي معلم متعامد و متجانس

1. احسب $g'(x)$
2. استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;+\infty[$ (حساب النهايات غير مطلوب)
3. برر إذن أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $xe^x\geq e^x$ ماذا تستنتج بشأن النهايات؟

ب- 1. بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]-\infty;1]$: $xe^x\leq e^x$

2. استنتج $\lim_{x\to-\infty} xe^x$

تمرين 2:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $g(x)=(1-x)e^x-1$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا يطلب حساب النهايات).

ب-استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $e^x\leq\frac{1}{1-x}$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $f(x)=e^x+\ln(1-x)$

أ- اشرح لماذا الدالة f معرفة على $]-\infty;1[$ ؟

ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند 1 .

جـ- ادرس تغيرات الدالة f. (يمكن استعمال نتائج السؤال 1) ارسم بدقة المنحني (C) الممثل للدالة f.

تمرين 3:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}, \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{x}}{-x+e^{-x}}; \lim_{x\to-\infty}(x-1)\frac{e^{x}}{x}$$

تمرين 4:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f\left(x\right)=e^{2x}-3e^{x}+x+2$ و $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق (الوحدة $4cm$).

1. أ) عين نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$.

ب) بين أن المستقيم $\left(D\right)$ الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحنى $\left(C\right)$.

جـ) ادرس وضع المنحنى $\left(C\right)$ بالنسبة إلى المستقيم $\left(D\right)$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f\left(x\right)=e^{x}\left(e^{x}-3+\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{2}{e^{x}}\right)$ ثم استنتج نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$.

2. أ) احسب $f'\left(x\right)$ ثم تحقق أن : $f'\left(x\right)=\left(2e^{x}-1\right)\left(e^{x}-1\right)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'\left(x\right)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ) عين معادلة للمماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C\right)$ عند النقطة التي فاصلتها $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$. ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين $\left(T\right)$ و $\left(D\right)$؟

ب) أنشئ $\left(T\right)$ و $\left(D\right)$ و $\left(C\right)$ في نفس المعلم.

تمرين 5:

الجزء الأول:

f دالة عددية معرفة عل $\mathbb{R}$ كما يلي: $f\left(x\right)=\left(2-5x\right)e^{-x}+2$ و $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $2cm$).

1) احسب نهايات الدالة f عندما $x\to-\infty$ و عندما $x\to+\infty$.

2) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f .

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'\left(x\right)=\left(5x-7\right)e^{-x}$.

ب) ادرس أشارة $f'\left(x\right)$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) مثل الجزء من المنحني $\left(C\right)$ الذي فواصل نقطه بين 0 و 6.

4) أ) بين أن المعادلة $f\left(x\right)=1{,}5$ تقبل، في المجال $\left[0;6\right]$، حلين α و β حيث α هو الحل الأصغر.

ب)أعط قيمة مقربة لكل من الحلين α و β (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

ج) حل في المجال $\left[0;6\right]$ المتراجحة $f\left(x\right)\le 1{,}5$.

الجزء الثاني:

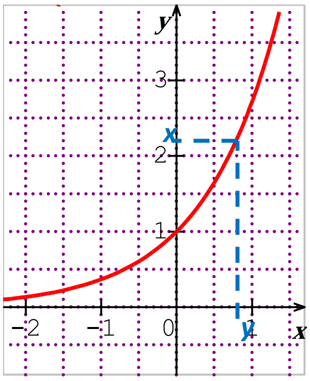
نضع $C_M = f$ حيث C_M هي الكلفة الهامشية لإنتاج سلعة X مقدرة بالطن T، و X محصور بين 0 و 6.

1. أ) ما هي قيمة السلعة التي من أجلها تكون الكلفة الهامشية أصغرية؟
ب) ما هي قيم السلعة التي من أجلها تكون الكلفة الهامشية أقل من أو تساوي $1,5$؟ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

2. الكلفة الكلية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.
تحقق أن: $C_T(x) = (5x+3)e^{-x} + 2x + k$ ثم عين k إذا علمت أن $C_T(0) = 2$.

6. الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

اللوغاريتم النيبيري:



1.6 تعاريف وَ نتائج:

الدالة الأسية $\exp$ متزايدة تماما و مستمرة على $\mathbb{R}$ ؛

بالإضافة إلى ذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

نستنتج حسب تعميم مبرهنة القيم المتوسطة، أن صورة $\mathbb{R}$

بالدالة $\exp$ هي المجال $]0,+\infty[$.

لدينا كذلك من أجل كل $x>0$ ؛ يوجد عدد حقيقي وحيد y بحيث $e^{y}=x$.

يسمى هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد x" ونرمز له بالرمز $\ln x$ ؛ و هو العدد الذي أسيته x.

لدينا: $e^{y}=x \Leftrightarrow y=\ln x$.

نتائج:

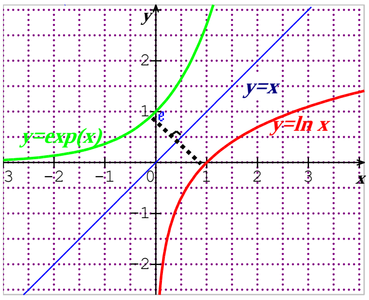
- $\ln x\in\mathbb{R}$ معناه $x>0$.
- من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $e^{\ln x}=x$.
- من أجل كل عدد حقيقي x: $\ln e^{x}=x$.
- $\ln 1=0$ وَ $\ln e=1$.

مبرهنة:

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x و من أجل كل عدد حقيقي y: $e^{y}=x \Leftrightarrow y=\ln x$.

2.6 منحنى الدالة:

خاصية:



في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، التمثيليان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتم النيبيري متناظران بالنسبة للمنصف الأول (المستقيم ذو معادلة $y=x$).

3.6 دالة اللوغاريتم النيبيري :

تعريف:

الدالة $t\mapsto\frac{1}{t}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال و تقبل بصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.

تعريف:

نسمي الدالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بالرمز " $\ln$ " الدالة الأصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة $t\mapsto\frac{1}{t}$ و التي تنعدم من أجل عند 1.

ترميز:

نرمز إلى اللوغاريتم النيبيري لعدد x من $]0;+\infty[$ بـ $\ln(x)$ و أحيانا $\ln x$.

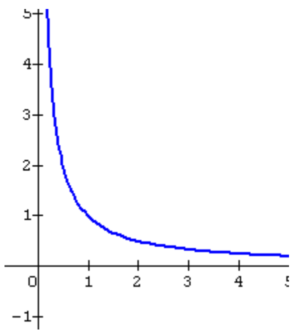
لدينا هكذا: من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

ملاحظة:

يمكننا تعريف الدالة اللوغارتمية بأنها مساحة الحيز المستوي تحت منحنى الدالة مقلوب $t \mapsto \frac{1}{t}$ بين 1 و x مع xموجب.

تطبيق (تذكير):

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{1}{x}$



1. أرسم التمثيل البياني (C_g) للدالة g في معلم متعامد و متجانس .
(الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$).
2. أثبت أن الدالة g تقبل دالة أصلية f على المجال $]0;+\infty[$.
(بما أن الدالة g ناطقة فهي دالة مستمرة على مجموعة تعريفها $]0;+\infty[$ وبالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية) .
3. ما هي إشارة العدد الحقيقي $g(x)$ على $]0;+\infty[$.
(لدينا $x>0$ و منه $\frac{1}{x}>0$ إذن $g(x)>0$) .
4. استنتج جدول تغيرات الدالة f .
(بما أن $g(x)>0$ إذن f دالة متزايدة تماما).

4.6الخواص الجبرية :

الخاصية الأساسية :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

البرهان:

a و bعددان حقيقيان موجبان تماما.

نضع: $\alpha=\ln a$ و$\beta=\ln b$ معناه $e^{\alpha}=a$ و$e^{\beta}=b$.

لدينا:

$$a\times b=e^{\alpha}\times e^{\beta}=e^{\alpha+\beta}$$ معناه $$\alpha+\beta=\ln(ab)$$

أي $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

ملاحظة:

$ab>0$معناه $(a>0$ و $b>0)$ أو $(a<0$ و $b<0)$ وبالتالي $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$.

ملاحظة:

يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:
من أجل كل أعداد حقيقية a_1، a_2، ...، a_n من $]0;+\infty[$ ، $\ln(a_1a_2...a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$.

5.6 نتائج :

نتيجة1:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

البرهان:

1. a عدد حقيقي موجب تماما لدنيا :

$$1=a\times\frac{1}{a}\Leftrightarrow \ln 1=\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0=\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

و بالتالي $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

2. a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)$$
$$=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

و بالتالي $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ملاحظة:

$ab>0$ معناه ($a>0$ و $b>0$) أو ($a<0$ و $b<0$) وبالتالي $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|$.

نتيجة2:

من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل n من $\mathbb{Z}$ ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

نتيجة3:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$: $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

نتيجة4:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $a<b \Leftrightarrow \ln a<\ln b$.

ملاحظة :

✓ $a^n>0$: $\ln(a^n)=n\ln|a|$.

✓ . إذا كان n عدد صحيح زوجي: $\ln(a^n)=n\ln|a|$.

✓ إذا كان n عدد صحيح فردي : $\ln(a^n)=n\ln a$.

ملاحظة :

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$:

✓ $\ln a=c \Leftrightarrow a=e^c$.

✓ $\ln a<c \Leftrightarrow a<e^c$.

6.6حل معادلات و متراجحات:

مثال 1 :

حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

1. $\ln(2x-1)=2$ ...... (1)
2. $\ln(x-1)\geq -3$ ...... (2)
3. $\ln(x+2)\leq 5$ ...... (3)

الحل :

1. المعادلة (1) لها معنى إذا و فقط إذا كان $2x-1>0$ أي $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$$\ln(2x-1)=2 \Leftrightarrow 2x-1=e^2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1+e^2}{2}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$.

2. المتراجحة (2) لها معنى إذا و فقط إذا كان $x-1>0$ أي $D=]1;+\infty[$.

$$\ln(x-1)\geq -3 \Leftrightarrow x-1>e^{-3}$$
$$\Leftrightarrow x>e^{-3}+1$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S=\left]1+e^{-3};+\infty\right[$.

3. المتراجحة (3)لها معنى إذا و فقط إذا كان $\ln(x+2)\leq 5$ أي $D=]-2;+\infty[$.

$$\ln(x+2)\leq 5 \Leftrightarrow x+2\leq e^5$$
$$\Leftrightarrow x\leq e^5-2$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (3) هي $S=\left]-2;e^5-2\right]$.

مثال 2 :

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

1. $\ln(x^2-1)=\ln(x)$ .... (1)
2. $\ln(x^2-1)\leq\ln(x)$ ...... (2)

<u>الحل:</u>

1. المعادلة (1) لها معنى إذا و فقط إذا كان $x^2-1>0$ و $x>0$ أي $D=]1;+\infty[$.

$$\ln\left(x^2-1\right)=\ln\left(x\right)\Leftrightarrow x^2-1=x$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D. و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. المتراجحة (2) لها معنى إذا و فقط إذا كان $x^2-1>0$ و $x>0$ أي $D=]1;+\infty[$.

$$\ln\left(x^2-1\right)\le\ln\left(x\right)\Leftrightarrow x^2-1\le x$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-1\le 0$$

مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\le 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $S=\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

<u>مثال 3 :</u>

حل المعادلتين:

1. $\ln\left(x-1\right)\left(x+2\right)=2\ln 2$ .....(1)
2. $\ln\left(x-1\right)+\ln\left(x+2\right)=2\ln 2$ .....(2).

<u>الحل:</u>

1. المعادلة (1) لها معنى إذا و فقط إذا كان $(x-1)(x+2)>0$ أي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

$$\ln\left(x-1\right)\left(x+2\right)=2\ln 2\Leftrightarrow\ln\left(x-1\right)\left(x+2\right)=\ln 4$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+2\right)=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

حلول المعادلة $x^2+x-6=0$ هما -3 و 2 ينتميان إلى D.

و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.

المعادلة (2) لها معنى إذا و فقط إذا كان $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ أي $D=]1;+\infty[$

$$\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x-1)(x+2)=\ln 4$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

حلول المعادلة $x^2+x-6=0$ هما -3 و 2 الحل 2 مقبول لأنه ينتمي إلى D و الحل -3 غير مقبول لأنه لا ينتمي إلى D.

7.6 دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري :

النهايات عند 0^+ و عند $+\infty$:

مبرهنة :

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

تعميم :

- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln(u(x)) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$.

8.6 التزايد المقارن:

من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل كل عدد طبيعي p :

مبرهنات:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0^+$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{(\ln x)^p} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x \ln x = 0^-$ ؛ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^n (\ln x)^p = 0^-$.
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

تعميم:

- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\left[\ln(u(x))\right]^p}{\left[u(x)\right]^n} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\left[u(x)\right]^n}{\left[\ln(u(x))\right]^p} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^n \left[\ln(u(x))\right]^p = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln(u(x))}{u(x)-1} = 1$.

البرهان:

تذكير: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

نضع: $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$.

- لدينا: $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0^+$.
- لدينا: $\lim\limits_{y\xrightarrow{>}0}\ln y=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}y\ln y=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$.
- لدينا: $\lim\limits_{y\to1}\ln y=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln y}{y-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$.

جدول التغيرات:

- دالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$.

x	0 0 $+\infty$
$\ln'(x)$	$+$
$\ln x$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

البرهان:

نضع: $f(x)=\ln x$

لدينا: $f(x)=\ln x \Leftrightarrow x=e^x$

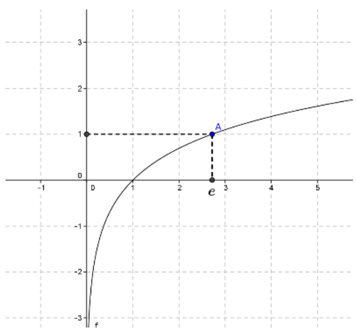
و منه

$$x=e^{f(x)}\Leftrightarrow 1=f'(x).e^{f(x)}$$
$$\Leftrightarrow 1=f'(x).x$$

وبالتالي: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\dfrac{1}{x}>0$ و منه الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

التمثيل البياني :



ليكن (C) التمثيل البياني لدالة اللوغريتم النيبيري في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

المنحني (C) الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln1=0$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta):y=x-1$.

9.6 العدد e :

الدالة " $\ln$ " مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $\ln x=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$. نرمز إلى هذا الحل بالرمز " e ".

تعريف:

العدد e هو العدد الذي لوغاريتمه النيبيري يساوي 1. $(\ln e=1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx2,718281828$.

إشارة $\ln(x)$:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

10.6 دراسة دالة $\ln\circ u$:

النهايات :

لدراسة نهاية دالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2) = -\infty$
  أي $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$
- لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to +\infty}\ln X = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x-2) = +\infty$
- أي $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

اتجاه التغيرات :

خاصية:

> إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f = \ln\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x) = \frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

11.6 المشتقة و دوال أصلية :

خاصية:

> إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:
> - الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
> - الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

البرهان:

نضع: $f(x) = (\ln\circ u)(x)$.

f مركب دالتين مستمرتين و قابلتين للاشتقاق على I و بالتالي f مستمرة و قابلة للاشتقاق على I :

$$f'(x) = u'(x)\times \ln'(u(x))$$
$$= u'(x)\times\frac{1}{u(x)}$$
$$= \frac{u'(x)}{u(x)}$$

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$ هي $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$
- الدالة F حيث $F(x)=\ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=\frac{2}{2x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ملاحظة:

في حالة ما إذا كانت الدالة uدالة مستمرة و قابلة للاشتقاق و سالبة تماما على المجال I ، الدالة $-f$ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على المجال Iوبالتالي الدالة $\ln\circ(-u)$ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال I و

$$\left(\ln\circ(-u)\right)'(x)=\frac{-u'(x)}{-u(x)}$$
$$=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

الخلاصة:

uدالة مستمرة و قابلة للاشتقاق وغير معدومة على المجال I.

الدالة fالمعرفة على I بـ: $f(x)=|u(x)|$مستمرة و قابلة للاشتقاق على I و $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

تطبيق1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـِ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند $\frac{1}{2}$ و عند $+\infty$.
2. أحسب $f'(x)$.
3. . عين معادلة لـِ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل :

1. حساب النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
2. حساب $f'(x)$: $\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[; f'(x)=1+\frac{6}{2x-1}$
3. معادلة المماس . لدينا $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ومنه $y=7x-6$.

تطبيق 2 :

عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي: $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\ln\left(x^2\right)$

الحل :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$ و منه مجموعة تعريف f هي $D_f=]-1;+\infty[$.

تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x\neq0$ و منه مجموعة تعريف g هي $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

12.6 تمارين :

التمرين الأول: أحسب مشتقة الدالة f وعين اتجاه تغيرها في الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln(x+3)$.
2) $f(x)=x-\ln(x+4)$.
3) $f(x)=x-\ln x$.
4) $f(x)=2x-5+\ln x$.
5) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$.
6) $f(x)=\ln(x^2-1)$.
7) $f(x)=-3x+\ln x$.
8) $f(x)=x+\ln(x+2)$

التمرين الثاني :

f دالة عددية معرفة على $D_f=]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$ حيث: $f(x)=\ln(x^2+4x)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2) أحسب مشتقة الدالة f وعين اتجاه تغيرها ، ثم أكتب جدول تغيراتها.
3) عين تقاطع (C_f) مع محور الفواصل .
4) أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
5) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=-2$ محور تناظر لـ (C_f).
6) أرسم (Δ) و (C_f).

التمرين الثالث :

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-\ln x$.

- أدرس تغيرات الدالة g .
- أدرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ حيث .: $f(x)=-x+\dfrac{\ln x}{x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- أحسب مشتقة الدالة f وبين أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم أكتب جدول تغيراتها
- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.
- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
- أنشئ (C_f) و (Δ) .

التمرين الرابع :

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2-1+2\ln x$.

- أدرس تغيرات الدالة g .

- أحسب $g(1)$ ثم أدرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على: $]0,+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}\ln x$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- أحسب مشتقة الدالة f وبين أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.
- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم أكتب جدول تغيراتها
- حدد الفروع اللانهائية للمنحني (C_f) .
- أنشئ (C_f) و (Δ) .

التمرين الخامس :

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=ax+b+\ln x$.

عين a و b علما ان جدول تغيرات g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على: $]0,+\infty[$ حيث: $f(x)=-x^2-2x+2x\ln x$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) أحسب مشتقة الدالة f وبين أن: $f'(x)=2g(x)$.

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم أكتب جدول تغيراتها .

د) حدد الفروع اللانهائية للمنحني (C_f) .

هـ) أنشئ (C_f) و (Δ) .

التمرين السادس :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)-3$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) حلل $f(x)$ الى جداء عاملين .

3) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$

4) أحسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f

التمرين السابع:

ليكن $P(x)$ كثير الحدود حيث : $P(x)=2x^2-5x+2$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$

2) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ حلول المتراجحة التالية : $2(\ln(x))^2-5\ln(x)+2>0$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2^{2x+1}=5\times 2^x-2$

التمرين الثامن:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ $g(x)=x+1+\ln x$

1. عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.
4. حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f

3) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. تحقق أن $f(\alpha)=-\alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين (C) و (Γ).

7. الدوال الاصلية :

1.11.8 دالة اصلية لدالة مستمرة على مجال:

تعريف:

إذ كانت f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نسمي دالة أصلية للدالة f على مجال I كل دالة F قابلية للاشتقاق على مجال I و تقبل الدّالة f مشتقاً لها على I .

F دالة أصلية للدالة f على I يكافئ F تقبل الاشتقاق على I وَالتي تحقق : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

مثال1:

- الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = x^2 - 3x + 1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x - 3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$.
- الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = x^2 - 3x - \sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x) = 2x - 3 = f(x)$.

مثال 2:

الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $F(x) = \sqrt{x} + \cos x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$.

مثال3:

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على المجال $]-3;+\infty[$ كمايلي :

$$F(x) = \frac{2x-3}{x+3} - x \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$$

أ- تحقق من أجل كل x من $]-3;+\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$

ب- اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل عدد حقيقي من $]-3;+\infty[$ ، $G'(x) = f(x)$

الحل :

أ- الدالة F تقبل الاشتقاق على $]-3;+\infty[$ بحيث :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{9}{(x+3)^2} - 1 \\ &= \frac{9-(x+3)^2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{9-(x^2+6x+9)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{-x^2+6x}{(x+3)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ب- من أجل كل عدد حقيقي من $]-3;+\infty[$ ، $G(x) = \frac{2x-3}{x+3} - x + 4$.

تطبيق :

نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=2x-3$ و $H(x)=x^2-3x+2$

- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- عين دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

2.11.8 مجموعة الدوال الأصلية لدالة مستمرة على مجال :

مبرهنة 1:

كل دالة مستمرة على المجال I ، تقبل على الأقل، دالة أصلية على المجال I.

مبرهنة 2:

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن مجموعة الدّوال الأصلية للدالة f على المجال I هي مجموعة الدّوال من الشكل: $x \mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

البرهان:

لتكن f دالة مستمرة على المجال I من $\mathbb{R}$ ، بما أن f مستمرة على I فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية F على I وليكن c عدد حقيقي ثابت. لتكن G الدالة العددية المعرفة على I بـ: $G(x)=F(x)+c$ ، بما أن F دالة أصلية للدالة f على I فإن F تقبل الاشتقاق على I و $F'(x)=f(x)$ ، و بالتالي G تقبل الاشتقاق على I و $G'(x)=F'(x)=f(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة f على I.

نتيجة:

دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال1:

الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $F(x)=x^3-2x^2$ هي دالة اصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=3x^2-4x$. و بالتالي كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto F(x)+k$ أي $x \mapsto x3-2x^2+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال2:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

3.11.8 الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا :

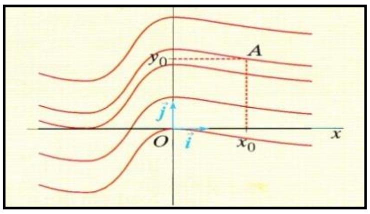
خاصية:

f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

البرهان:

بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.
إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I ، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد

حقيقي.
الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.
توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا:
$F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$.



4.11.8 التفسير البياني:

التمثيلات البيانية في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f
تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي.
واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$.

مثال1:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ و $F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$

- بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة:

لإثبات أن F دالة أصلية لـِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I
$F'(x)=f(x)$.

الحل:

F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$

لدينا: $F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$

و منه: $F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$

و بالتالي: $F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لـِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

مثال2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x-1$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(2)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^2-x+k$ حيث k عدد حقيقي.
2. لدينا من جهة $F(x)=x^2-x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(2)=-1$.

$F(2)=-1$ يعني $2^2-2+k=-1$ و منه $k=-3$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2-x-3$

مثال3:

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2}$ و $G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل:

الطريقة الأولى:

نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية:

نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

5.11.8 حسابالدوال الأصلية :

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.

يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
0	$k, k\in R$	$\mathbb{R}$
a	$ax+b$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+k$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	$]0,+\infty[$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+k$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+k$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x+k	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+k$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ (k\in\mathbb{Z})$

6.11.8 الدوال الأصلية : لـ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k \in \mathbb{R})$.

مثال1:

عين مجموعة الدوال الأصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

- $f(x)=x^3-3x+5$ على المجموعة $I=\mathbb{R}$.
- $g(x)=\dfrac{2}{x^2}$ على المجموعة $I=\mathbb{R}^*$.
- $h(x)=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ على المجموعة $I=]0,+\infty[$.

الحل:

- لتكن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـِ :

$$\begin{aligned} F(x)&=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x+c \\ &=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x+c \quad /c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

- لتكن G أصلية للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـِ :

$$\begin{aligned} G(x)&=2\left(-\frac{1}{x}\right)+c \\ &=-\frac{2}{x}+c \quad /c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

.

- لتكن دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـِ :

$$\begin{aligned} H(x)&=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x} \\ &=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}+c \quad / \ c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

تطبيق 1:

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$f(x)=x^3-5x+3$ و $I=\mathbb{R}$ ، $g(x)=\dfrac{3}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ ، $h(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$.

الحل:

دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـِ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-5\times\frac{1}{2}x^2+3x=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+3x$$

دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـِ :

$$G(x)=3\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{x}$$

دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـِ :

$$H(x)=2\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{2}{2x^2}-2\sqrt{x}$$

7.11.8 الدوال الأصلية و العمليات على الدوال:

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'u^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I ، $u(x)>0$

مثال1:

عين مجموعة الدوالالأصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

- $f(x)=(x+1)(x^2+2x+5)^2$ **على المجموعة** $I=\mathbb{R}$.
- $g(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ **على المجموعة** $I=\mathbb{R}$.

طريقة:

لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- نلاحظ أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\frac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\times[u(x)]^2$ أي أن $f=\frac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $c\in\mathbb{R}$ / $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}[u(x)]^3+c$

أي $c \in \mathbb{R}$ / $F(x)=\frac{1}{6}\left(x^2+2x+5\right)^3$.

- نلاحظ أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\frac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\frac{3}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

أي أن $g=\frac{3}{2}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$G(x)=\frac{3}{2}\times 2\sqrt{u(x)}$$
$$=3\sqrt{u(x)}$$

أي $c \in \mathbb{R}$ / $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

تطبيق 1:

عين مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$f_1(x)=\left(-2x+3\right)^4$ ، $f_2(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+3\right)^3}$ ، $f_3(x)=\frac{1}{x}\ln x$ ، $f_4(x)=2xe^{x^2}$

$f_5(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، $f_6(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

8. تكامل دالة :

1.8 تعريف التكامل :

أ- **تعريف:**

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I .
يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ ، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لـِ f
و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$. نقرأ:" التكامل من a إلى b لـِ $f(x)$ تفاضل x ".

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

ملاحظة:

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيانمن I . إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I ، $G(x)=F(x)+k$. لدينا:

$$G(b)-G(a)=\left[F(b)+k\right]-\left[F(a)+k\right]=F(b)-F(a)$$

نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I .

2.8 نتائج:

- العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود معناه f مستمرة على مجال يشمل a وَ b .
- من أجل كل عدد حقيقي a من I ، $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- من أجل كل عددان حقيقيان a و b من I ، $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- k عدد حقيقي موجب تماماً. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

مثال (1):

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_a^b \left(4x^2-3x+6\right)dx$ 2) $\int_{-1}^{1} e^{-2x+1}dx$ 3) $\int_0^{\pi}\cos x\,dx$.

الحل:

-1
$$\int_{-1}^{1}\left(4x^2-3x+6\right)dx = \left[\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}-6\right)$$
$$=\frac{20}{3}$$

$$\int_0^{-2} e^{-2x+1}dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x+1}\right]_0^{-2}$$

-2 $$= \left(\frac{-1}{2}e^{5}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)e$$

$$= \frac{-1}{2}\left(e^{5} - e\right)$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi}$$

-3 $$= (\sin \pi) - (\sin 0)$$

$$= 0$$

3.8 الدّالة الأصلية التي تنعدم من أجل قيمة معلومة للمتغير:

مبرهنة:

f دالة مستمرة على مجال I و Fدالة أصلية لها، x_0 عدد حقيقي من I.
توجد دالة أصلية وحيدة G تنعدم من أجل قيمة معلومة x_0من I معرفة بـ:

$$G(x) = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

صيغة أخرى

مبرهنة:

f دالة مستمرة على مجال I و x_0 عدد حقيقي من I.الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل x_0 هي الدالة $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

ملاحظة:

من الواضح أنه إذا كانت $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x) = f(x)$.

4.8 خواص:

لتكن f، f_1، f_2 دوال مستمرة على المجال I وَ F، F_1، F_2 دوال أصلية لها على I على الترتيب. a، b وَ c أعداد حقيقية من I.

أ- علاقة شال

خاصية:

f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

البرهان:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= [F(x)]_a^c \\ &= F(c)-F(a) \\ &= F(c)-F(b)+F(b)-F(a) \\ &= [F(x)]_b^c + [F(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

ب- الخطية:

نعلم أن: αF هي دالة أصلية للدالة αf على المجال I و $\alpha F_1+\beta F_2$ دالة أصلية للدالة $\alpha f_1+\beta f_2$ على I.

خاصية:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

البرهان:

العلاقة (1) **:**

نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.و منه:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = [F(x)+G(x)]_a^b = [F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$

$$= [F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

العلاقة (2) **:**

نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن kF دالة أصلية لـِ kf على I.

طريقة أخرى:

خاصية:

f_1 و f_2 دالتان مستمرتان على مجال Iو k عدد حقيقي.من أجل كل عددين حقيقيين αو β من $\mathbb{R}$ لدينا:

- ✓ $\int_a^b k.f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.
- ✓ $\int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]dx = \alpha\int_a^b f_1(x)\,dx + \beta\int_a^b f_2(x)dx$.

البرهان:

$$\begin{aligned}\int_a^b k.f(x)\,dx &= [k.F(x)]_a^b\\ &= k.F(b)-k.F(a)\\ &= k.[F(b)-F(a)] \quad \checkmark\\ &= k.[F(x)]_a^b\\ &= k\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}\int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]dx &= [\alpha F_1(x)+\beta F_2(x)]_a^b\\ &= [\alpha F_1(b)+\beta F_2(b)]-[\alpha F_1(a)+\beta F_2(a)]\\ &= \alpha F_1(b)+\beta F_2(b)-\alpha F_1(a)-\beta F_2(a)\\ &= \alpha F_1(b)-\alpha F_1(a)+\beta F_2(b)-\beta F_2(a) \quad \checkmark\\ &= \alpha[F_1(b)-F_1(a)]+\beta[F_2(b)-F_2(a)]\\ &= \alpha[F_1(x)]_b^a+\beta[F_2(x)]_b^a\\ &= \alpha\int_a^b f_1(x)\,dx+\beta\int_a^b f_2(x)dx\end{aligned}$$

.

تطبيق:

نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$.

1. أحسب $A+B$.
2. أحسب. $A-B$.
3. استنتج A و B .

ج- المقارنة:

خاصية:

f هي دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ، $(a\le b)$.

$\forall x\in I, f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

البرهان:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$: $f(x)\ge 0$.

F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$ يكافئ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$, $F'(x)\ge 0$ لان $F'(x)=f(x)$ و هذا يعني أن الدالة F متزايدة تماما على $[a,b]$

و منه

$$\begin{aligned} a \le b &\Leftrightarrow F(a) \le F(b) \\ &\Leftrightarrow F(b) - F(a) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \left[F(x)\right]_a^b \\ &\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \end{aligned}$$

نتائج:

f هي دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، $(a \le b)$.

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le 0$$

$$\forall x \in [a,b],\ f_1(x) \le f_2(x) \Rightarrow \int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx$$

ح- تكامل دالة زوجية – فردية - دورية:

خاصية1:

f دالة زوجية و مستمرة على المجال $[-a,a]$ و $(a \ge 0)$، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

البرهان:

f مستمرة على المجال $[-a,a]$ مع a عدد حقيقي موجب.

f زوجية معناه من أجل كل x من $[-a,a]$، $f(-x) = f(x)$.

نضع $t = -x$ يستلزم $dt = -dx$.

$x = -a$ يكافئ $t = a$ وَ $x = 0$ يكافئ $t = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_a^0 f(-t)(-dx) + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= -\int_a^0 f(t)(dx) + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(t)(dx) + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^a f(x)\,dx \end{aligned}$$

خاصية2:

f دالة فردية و مستمرة على المجال $[-a,a]$ و $(a \ge 0)$، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

البرهان:

fمستمرة على المجال $[-a,a]$ مع a عدد حقيقي موجب.

f فردية معناه من أجل كل xمن $[-a,a]$، $f(-x)=-f(x)$.

نضع $t=-x$ يستلزم $dt=-dx$.

$x=-a$ يكافئ $t=a$ وَ $x=0$ يكافئ $t=0$.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{a}^{0} f(t)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= -\int_{0}^{a} f(t)(dx) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= 0\end{aligned}$$

خاصية3:

f دالة دورية و دورها T و مستمرة على المجال $[a,a+T]$، $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

البرهان:

fدالة دورية و دورها T و مستمرة على المجال $[a,a+T]$ مع a عدد حقيقي موجب.

fدالة دورية و دورها Tعلى المجال $[a,a+T]$ معناه من أجل كل xمن $[a,a+T]$،

$f(x+T)=f(x)$.

نضع $z=x-T$ يستلزم $dz=dx$.

$x=T$ يكافئ $z=0$ وَ $x=a+T$ يكافئ $z=a$.

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx\\ &= \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{T} f(x)\,dx\end{aligned}$$

5.8 القيمة المتوسطة لدالة على مجال :

أ- **تعريف:**

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ مع $a\le b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$

6.8 حصر القيمة المتوسطة :

خاصية:

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ مع $a \le b$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$ ، $m \le f(x) \le M$ فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

7.8 المكاملة بالتجزئة:

مبرهنة:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I و a و b عددان حقيقيان من I

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

البرهان:

بما أن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I فإن الدالة $u.v$ تقبل الاشتقاق على المجال I و $(u.v)' = u'.v + u.v'$

و بالتالي: $\int_a^b (u.v)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$

أي $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

مثال:

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $I = \int_0^1 (x-1)e^x dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x \, dx$.

تطبيق1:

باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الاصلية للدالة $x \to \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم عند 1 .

ملاحظة:

الدوال الأصلية للدالة $x \to \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x \mapsto x\ln x - x + c$ و $c \in \mathbb{R}$.

و بصفة عامة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال

$x \mapsto (x+a)\ln(x+a) - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

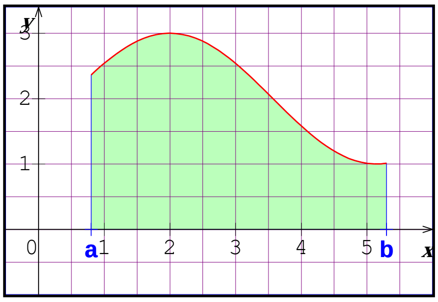
تطبيق2:

نعتبر التكامل $I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\leq 1$.
2. استنتج حصرا للعدد I.

تطبيق3:

باستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية F للدالة f المعرفة على المجال I و التي تنعدم من أجل القيمة x_0 حيث: $f(t)=e^{2t}(1+t)^2$ و $I=\mathbb{R}$ و $x_0=-1$ (استعمل المكاملة بالتجزئة مرتين)



8.8 الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن :

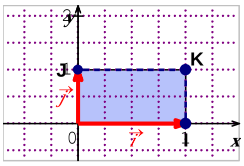
أ- خاصية :

> f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد و F دالة أصلية لِـ f على I. مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

و نكتب $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

ملاحظات:

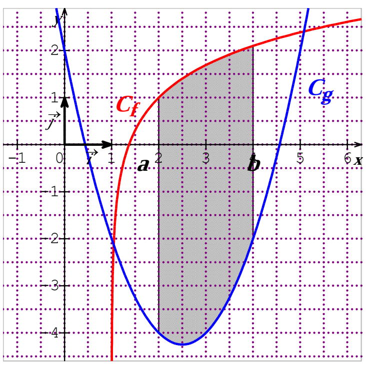
- الحيز تحت المنحني (C_f) للدالة الموجبة على المجال $[a,b]$ هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$، هذا الحيز هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حيث $a\leq x\leq b$ و $0\leq y\leq f(x)$



- وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$ في مستوى مزود بمعلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$، وحدة المساحة $(u.a)$.

تعميم:

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a,b]$ ومن أجل كل x من المجال $[a,b]$، $f(x)\leq g(x)$، (C_f) و (C_g) تمثيليهما البياني على التوالي في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.



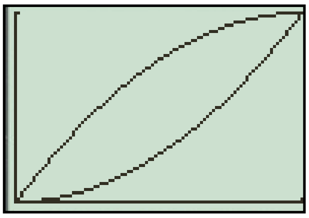
نسمي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g)

والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ و معبر عنها

بوحدة المساحة ، العدد الحقيقي $A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

تطبيق :

نعتبر دالتين f و g مستمرتين على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد $(O;I,J)$. نهدف إلى حساب، في وضعيات مختلفة، A مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$.

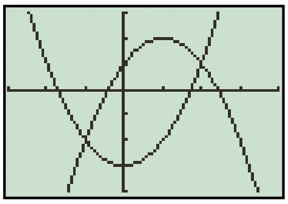


المثال الأول:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=-x^2+2x \quad \text{و} \quad g(x)=x^2$$

- مثل المنحنيين (C_f) و (C_g).
- برهن أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$
- برر النتيجة: $A=\int_0^1 [f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.



المثال الثاني:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-3 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+2x+1$$

- مثل المنحنيين (C_f) و (C_g).
- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) مع تعيين a، b فاصلتي نقطتي تقاطعهما.
- نسمي (C'_f) و (C'_g) محولتي المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $3\vec{j}$.

و ليكن (D') الحيز المحدد بالمنحنيين (C'_f)، (C'_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$

. برر لماذا للحيزين (D) و (D') نفس المساحة.

- برهن أن $A=\int_{-1}^{2}[f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.

نتيجة:

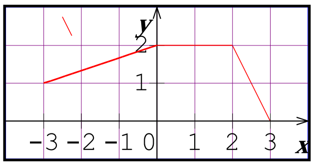
إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$ فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

ملاحظة:

يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

تطبيق 1:



التمثيل البياني المقابل هو لدالة f. أحسب التكاملات التالية:

1. $\int_{-3}^{0} f(x)dx$
2. $\int_{0}^{3} f(x)dx$.
3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=-3$ و $x=3$.

تطبيق 2:

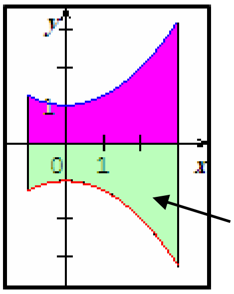
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=4-x^2$

1. أرسم المنحني (C) الممثل الدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.
2. أحسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز المحدد بـِ (C) و المستقيمات $x=-1$، $x=1$ و $y=0$.
3. نفرض ان المعلم الذي مثلت فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و $1{,}5cm$ على محور التراتيب.أحسب بـِ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

9.8 التمديد إلى دالة إشارتها كيفية :

تكامل دالة سالبة على مجال:

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها

$x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ هي $A=\int_a^b -f(x)dx$

ملاحظات: (D)

1.اذا كان A هي مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و كانت A' هي مساحة الحيز (D') المحدد بالمنحني (C_{-f}) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ فان (D) و (D') متناظران بالنسبة الى محور الفواصل و بالتالي $A=A'$

2. نقول ان $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الحيزية للحيز (D) فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

تطبيق:

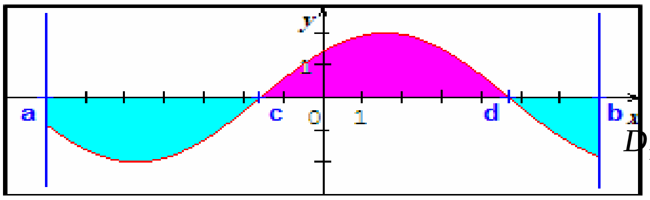
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=-e^{x-1}$

1. حدد إشارة $f(x)$.

2. انطلاقا من منحنى الدالة الأسية أرسم المنحني (C) الممثل للدالة f.

3. ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما. أحسب $a(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $0\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le 0$. أدرس نهاية $a(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$.

10.8 تكامل دالة تغير إشارتها على مجال:



f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$ D_2

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$. D_1 D_3

اذا غيرت f اشارتها على المجال $[a;b]$ بحيث: $f(c)=f(d)=0$.

و من اجل كل x من $[a;c]\cup[d,b]$: $f(x)\le 0$

و من اجل كل x من $[c;d]$: $f(x)\ge 0$ فان المساحة A للحيز المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ هي $A=A_1+A_2+A_3$

أي: $A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

11.8 مكاملة التوابع الكسرية

تستخدم هذه الطريقة في إيجاد تكامل التوابع النسبية (الكسرية)

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

حيث يتم التعبير عن هذه التوابع النسبية قي صورة مجموع كسور جزئية يسهل فيها تكامل كل كسر على حدا و لذلك نبدأ أولاً بتفريق الكسور:

1.11.8 تفريق الكسور:

و هي عملية معاكسة لعملية توحيد المقامات.

ليكن لدينا الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث أنّ كلاً من $P(x)$ $Q(x)$, كثيرة حدود.

لتفريق الكسر السابق إلى كسور جزئية

أولاً: إذا كانت درجة البسط $P(x)$ أكبر أو تساوي درجة المقام $Q(x)$ عندئذ، بتقسيم $P(x)$ على $Q(x)$ سنحصل على حاصل القسمة، وهو كثير حدود وليكن $M(x)$ وليكن باقي القسمة بالشكل الاتي:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

هنا درجة كثير الحدود $P_1(x)$ أقل تماما من درجة $Q(x)$. وبالتالي فإن:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int M(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$$

إن كثير الحدود $M(x)$ يمكن مكاملته بسهولة. وبالتالي فالمسألة ترجع إلى مكاملة الدوال الكسرية $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ التي فيها درجة البسط أقل تماما من درجة المقام، مثل هذه الدوال الكسرية تسمى بالدوال الكسرية الصحيحة.

فمثلا إذا كانت لدينا التابع الكسري:

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 11x + 5}{x^2 + 3x + 2}$$

فإننا نقسم البسط على المقام ونكتبه بالشكل:

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 11x + 5}{x^2 + 3x + 2} = x + 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

في هذه الحالة نفرق الكسر الى كسور جزئيةُ. و تفرق الكسور يعني تحليل المقام إلى حاصل ضرب كثيرات حدود خطية $ax + b$ أو تربيعية $ax^2 + bx + c$ مع احتمال تكرار كل واحدة منها إلى n من المرات أي $(ax + b)^n$ أو $\left(ax^2 + bx + c\right)^2$ حيث n عدد صحيح موجب . وهنا نلاحظ أربع حالات:

1) عندما يكون المقام على صورة حاصل جداء لعوامل من الدرجة الأولى غير مكررة أي:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)...(a_nx + b_n)$$

عندئذ يكتب الكسر على الصورة:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + ... + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

2) جميع المعاملات الخطية مكررة أي :

$$Q(x) = (ax + b)^n$$

عندئذ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + ... + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

3) جميع المعاملات تربيعية غير مكررة أي :

$$Q(x) = \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)\left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)...\left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)$$

عندئذ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

4) جميع المعاملات تربيعية مكررة أي :

$$Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)^n$$

عندئذ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\dots+\frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

حيث:

$A_i\,,B_i\,,a,b,c,a_i\,,b_i\,,c_i\,,\ i=1,2.....$ ثوابث ينبغي تعيينها.

ملاحظة :

يحلل المقام $Q(x)$ بالطرق المعروفة لتحليل كثيرات الحدود.

مثال 1 :

احسب التكامل التالي:

$$I=\int\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)}dx$$

فرق الكسر الاتي إلى كسوره الجزئية

نلاحظ أن المقام $(x-1)(x-2)(x+1)$ عبارة عن حاصل ضرب معاملات خطية غير مكررة لذلك حسب الحالة (1) نستطيع أن نكتب الكسر بالصورة الأتية:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}\qquad ......(*)$$

الأن ينبغي تحديد الثوابت B,A و C ولتحديدها توجد طريقتان:

الطريقة الأولى:

نوحد مقامات الطرف الأيمن ونطابق ما بين بسطي العلاقة الناتجة كما يلي:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-A-3C)x+(2C-B-2A)}{(x-1)(x-2)(x+1)}$$

بمطابقة بسطي العلاقة نجد:

$A+B+C=0$, $-A-3C=1$ و $2C-B-2A=3$

بالحل المشترك لهذه المعادلات الثلاث نجد أن:

$A=-2$, $B=\frac{5}{3}$ و $C=\frac{1}{3}$.

نعوّض هذه القيم في العلاقة (*) فنحصل على:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{5}{3}.\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{x+1}$$

الطريقة الثانية:

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ في $(x-1)$ فنحصل عى:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}=A+\frac{B\,(x-1)}{x-2}+\frac{C\,(x-1)}{x+1}$$

ثم نعوض كل x بـ $+1$ فنجد أن $A=-2$.

لحساب B نضرب طرفي العلاقة $(*)$ في $(x-2)$ فنحصل على:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A\,(x-2)}{x-1}+B+\frac{C\,(x-2)}{x+1}$$

ثم نعوض كل x بـ $+2$ فنجد أن $B=\frac{5}{3}$.

لحساب C نضرب طرفي العلاقة $(*)$ في $(x+1)$ فنحصل على:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\frac{A\,(x+1)}{x-1}+\frac{B\,(x+1)}{x-2}+C$$

ثم نعوض كل x بـ -1 فنجد أن $C=\frac{1}{3}$.

بالتالي

$$\begin{aligned} I&=\int\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)}\,dx\\ &=-2\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx\\ &=-2\ln|x-1|+\frac{5}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+c\ /\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

مثال 2 :

احسب التكامل التالي:

$$J=\int\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^3}dx$$

فرق الكسر الاتي إلى كسوره الجزئية

نلاحظ أن المقام $(x-2)(x-1)^3$ عبارة عن حاصل ضرب معاملات خطية غير مكررة ومعاملات خطية مكررة لذلك حسب الحالة (1) والحالة (2) نستطيع أن نكتب الكسر بالصورة الأتية:

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}\qquad ......(*)$$

الأن ينبغي تحديد الثوابت A,B,C و D ولتحديدها توجد طريقتان:

الطريقة الأولى:

نوحد مقامات الطرف الأيمن ونطابق ما بين بسطي العلاقة الناتجة كما يلي:

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^3+B(x-2)(x-1)^2+C(x-2)(x-1)+D(x-2)}{(x-2)(x-1)^3}$$

$$=\frac{(A+B)x^3+(C-3A-4B)x^2+(3A+5B-3C+D)x+(-A-2B+2C-2D)}{(x-2)(x-1)^3}$$

بمطابقة بسطي العلاقة نجد:

$A+B=0$ ، $C-3A-4B=0$ ، $3A+5B-3C+D=1$ و $-A-2B+2C-2D=2$

بالحل المشترك لهذه المعادلات الأربعة نجد أن:

$A=4$, $B=-4$, $B=-4$ و $C=-3$.

نعوّض هذه القيم في العلاقة (*) فنحصل على:

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{4}{x-2}-\frac{4}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-1)^3}.$$

الطريقة الثانية:

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة (*) في $(x-2)$ فنحصل على:

$$\frac{x+2}{(x-1)^3}=A+\frac{B(x-2)}{x-1}+\frac{C(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{D(x-2)}{(x-1)^3}$$

ثم نعوض كل x بـ $+2$ فنجد أن $A=4$.

لحساب D نضرب طرفي العلاقة (*) في $(x-1)^3$ فنحصل على:

$$\frac{x+2}{(x-2)}=\frac{A(x-1)^3}{x-2}+B(x-1)^2+C(x-1)+D$$

ثم نعوض كل x بـ $+1$ فنجد أن $D=-3$.

نعوض بقيمتي A و D في العلاقة (*) فنحصل على :

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{4}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-1)^3}\quad ......(**).$$

نعوض في (**) $x=0$ و $x=-1$ فنجد على الترتيب :

$$1=-2-B-C+3$$

$$\frac{1}{24}=-\frac{4}{3}-\frac{B}{2}+\frac{C}{4}+\frac{3}{8}$$

بحل هاتين المعادلتين نحد أن $B=C=-4$.

و بالتالي نجد أن :

$$J=\int\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^3}dx$$
$$=4\int\frac{1}{x-2}\,dx-4\int\frac{1}{x-1}dx-4\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-3\int\frac{1}{(x-1)^3}dx$$
$$=4\ln|x-2|-4\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+\frac{3}{2}.\frac{1}{(x-1)^2}+c\ /\ c\in\mathbb{R}$$

مثال3:

احسب التكامل التالي:

$$K=\int\frac{5x^3+5x^2+15x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+6)}\,dx$$

فرق الكسر الاتي إلى كسوره الجزئية

نلاحظ أنمميز كل من x^2+2x+6 و x^2+1 هو مقدار سالب لذلك نفرق الكسر مستخدمين الحالة الثالثة :

$$\frac{5x^3+5x^2+15x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+6)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+6}\quad .....(*)$$

بتوحيد المقامات نجد :

$$\frac{5x^3+5x^2+15x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+6)}=\frac{(Ax+B)(x^2+2x+6)}{x^2+1}+\frac{(Cx+D)(x^2+1)}{x^2+2x+6}$$
$$=\frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(6A+2B+C)x+(6B+D)}{(x^2+1)(x^2+2x+6)}$$

بالمطابقة بين البسطين نجد :

$A+C=5$, $2A+B+D=5$, $6A+2B+C=15$ و $6B+D=1$.

بحل المعادلات نحصل على قيم الثوابت:

$A=2$, $B=0$, $C=3$ و $D=1$.

و بالتعويض في(*) نحصل على :

$$\frac{5x^3+5x^2+15x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+6)}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x+1}{x^2+2x+6}$$

و التالي نجد :

$$
\begin{aligned}
K &= \int \frac{5x^3+5x^2+15x+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+6\right)}\,dx \\
&= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2x+6}dx \\
&= \ln\left(x^2+1\right) + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6}dx + \int \frac{x-1}{x^2+2x+6}dx \\
&= \ln\left(x^2+1\right) + \ln\left|x^2+2x+6\right| + \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+2}{x^2+2x+6}dx - \int \frac{4}{x^2+2x+6}dx\right] \\
&= \ln\left(x^2+1\right) + \ln\left|x^2+2x+6\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+6\right| - 2\int \frac{1}{x^2+2x+6}dx \\
&= \ln\left(x^2+1\right) + \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+6\right| - 2\int \frac{1}{\left(x+1\right)^2+5}dx \\
&= \ln\left(x^2+1\right) + \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+6\right| - \frac{\sqrt{5}}{10}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}} + c \ \ / \ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

12.8 تمارين متنوعة

تمرين 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـِ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\pi$ و $y=0$.

تمرين 2:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\,dx \quad \text{و} \quad I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\,dx$$

1. أحسب $I+J$.
2. باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب $I+J$.
3. استنتج I و J .

تمرين 3 :

باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب التكاملات التالية:

(1 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ **(2** $\int_1^{2} x\ln x\,dx$ **(3** $\int_0^{1}(2x+1)e^x\,dx$

(4 $\int_0^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$ **(5** $\int_1^{x}\ln x\,dx$

تمرين 4 :

باستعمال تكاملين بالتجزئة متتابعين، أحسب التكاملات التالية:

(1 $\int_{-1}^{1}(x+1)^2 e^{-x}\,dx$ **(2** $\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\,dx$ **(3** $\int_0^{\pi}e^{2x}\sin x\,dx$.

تمرين 5 :

أحسب التكاملات التالية:

(1 $\int_1^{4}\frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ **(2** $\int_0^{3}(2x+1)\left(x^2+x-1\right)^4dx$ **(3** $\int_{-1}^{1}\left(2x^3+5x\right)\left(x^4+5x^2+5\right)^5dx$

(4 $\int_0^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **(5** $\int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^4}\,dx$ **(6** $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$

(7 $\int_1^{2}\frac{3-x}{x^2-6x+2}\,dx$ **(8** $\int_{-1}^{0}\frac{1}{3x-2}\,dx$ **(9** $\int_0^{2}\frac{x^4+x^2-1}{x^2}\,dx$

$$(10\ \int_{1}^{4} \frac{1}{x^{2}} e^{\frac{1}{x}}\, dx \quad (11\ \int_{-1}^{1} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\, dx \quad (12\ \int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\, dx$$

تمرين 6 :

باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب التكاملات التالية:

$$(1\ \int_{0}^{\pi} x \sin x\, dx \quad (2\ \int_{1}^{2} x \ln x\, dx \quad (3\ \int_{0}^{1} (2x+1)e^{x}\, dx$$

$$(4\ \int_{0}^{e} \frac{\ln x}{x^{2}} dx \quad (5\ \int_{1}^{x} \ln x\, dx$$

تمرين 7 :

باستعمال تكاملين بالتجزئة متتابعين، أحسب التكاملات التالية:

$$(1\ \int_{-1}^{1} (x+1)^{2} e^{-x}\, dx \quad (2\ \int_{0}^{\pi} x^{2} \sin 2x\, dx \quad (3\ \int_{0}^{\pi} e^{2x} \sin x\, dx \ .$$

تمرين 8:

احسب التكاملات التالية:

1) $I = \int \frac{x^{4}-x^{3}-x-1}{x^{3}-x^{2}}\, dx$

2) $J = \int \frac{x^{2}+x+2}{x^{3}+x^{2}-x-1}\, dx$

3) $L = \int \frac{dx}{x^{2}+2x-3}\, dx$

4) $K = \int \frac{dx}{x^{4}-1}$

5) $F = \int \frac{x^{3}+2x^{2}+2x+1}{x(x^{2}+1)} dx$

6) $G = \int \frac{dx}{x^{4}+x^{2}+1}$

7) $H = \int \frac{x^{3}+1}{x^{4}-3x^{3}+3x^{2}-x} dx$

8) $S = \int \frac{x^{5}+x^{4}-8}{x^{3}-4x} dx$

9) $C = \int \frac{dx}{(x^{2}+x+1)^{2}}$

9. المتتاليات العددية :

1.9 تعاريف:

تعريف1:

يسمى كل تطبيق

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ **متتالية حقيقية.**

تعريف2:

متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطىالعدد $u(n)$.

2.9 مصطلحات:

- صورة عدد طبيعى n، يرمز لها بالرمز $u(n)$ او u_n.
- العدد الطبيعي n يسمى رتبة الحد u_n.
- يرمز الى المتتالية باحدى الرموز $(u_n)_{n\in N}$ او $(u_n)_{n\geq n0}$ ، $(v_n)_{n\in N}$ او $(v_n)_{n\geq n0}$ ...

مثال 1 :

لدينا بعض العبارات التي تعرف متتاليات ، حيث n عدد طبيعى:

$u_n = (-1)^n$ ، $u_n = \sqrt{n}$ ، $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ ، $u_n = -\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$.

مثال 2:

1 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة بحدها العام u_nكما يلى: $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

يمكن حساب اى حد من حدودها.

$$u_0 = \frac{0}{0^2+1} = 0 \quad u_{320} = \frac{320}{320^2+1} = \frac{320}{102401} \;,\; u_{10} = \frac{10}{10^2+1} = \frac{10}{101},$$

2 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$و المعرفة بعلاقة تراجعية كما يلى :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

من اجل $n=1$: نجد $u_2 = -5$

من اجل $n=2$ نجد: $u_2 = 16$.

وهكذا....

3 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$و المعرفة بعلاقة تراجعية كما يلى :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

من اجل $n = 0$: نجد $u_2 = 3$.

من اجل $n = 1$: نجد $u_3 = 4$.

وهكذا....

تمرين 1 :

احسب فى كل الحالات التالية الحدود الخمسة الاولى للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ والمعرفة كما يلى :

1 - $u_n = \frac{n+1}{(n^2+1)}$ من اجل $n \in \mathbb{N}$.

2 - $u_n = 2^n$ من اجل $n \in \mathbb{N}$.

3 - $u_1 = -2$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$ من اجل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 2 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة كما يلى $u_n = -3n + 5$:

اكتب بدلالة n عبارة $u_{n+1}; u_n + 1; u_{n+2}; u_{2n}; u_{2n+1}$:

3.9 اتّجاه تغيّر متتالية عددية:

1.3.9 متتالية متزايدة:

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما) إذا وفقط إذاكان من أجل كل عدد طبيعي n أكبرمن أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$) .

2.3.9 متتالية متناقصة:

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما) إذا وفقط إذاكان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$) .

3.3.9 متتالية ثابتة:

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذاكان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

4.3.9 متتالية رتيبة:

إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما) أو متزايدة (متزايدة تماما)،نقول أن المتتالية رتيبة(رتيبة تماما) .

مثال :

- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n = (-1)^n$ غير رتيبة.

- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n = \sqrt{n}$ متزايدة.

- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n = \frac{1}{n+2}$ متناقصة.

- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n=-\frac{\sqrt{n}}{n+2}$ متزايدة.

4.9 متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

1.4.9 متتالية محدودة من الأعلى:

نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا وجد ثابت M موجب بحيث:

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$

- نقول أن M عنصر حاد من الأعلى .

2.4.9 متتالية محدودة منالأسفل :

نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأسفل إذا وجد ثابت M موجب بحيث:

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq M$

- نقول أن M عنصر حاد من الأسفل .

3.4.9 متتالية محدودة :

نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا وجد ثابت M موجب بحيث:

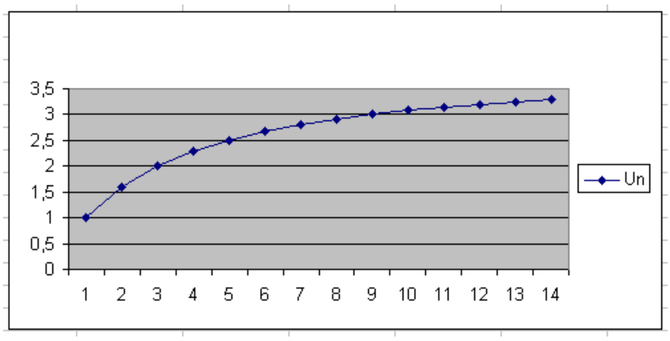
$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq M$

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل

مثال1:

لتكن المتتالية u_n المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n=\frac{4n}{n+3}$:



الرسم المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n)

نلاحظ أن المتتالية (u_n) محدودة من

الأسفل و 1 هوعنصر حاد من الأسفل .

لنبرهن ذلك.

نقارن بين $4n$ و $n+3$

$\forall n\in\mathbb{N}^*:4n-(n+3)=3n-3=3\ \ n-1$

أي $\forall n\in\mathbb{N}^*:4n-(n+3)\geq 0$.

و منه $\forall n\in\mathbb{N}:4n\geq(n+3)$ و بالتالي $\forall n\in\mathbb{N}:\frac{4n}{n+3}\geq 1$ إذن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\geq 1$.

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأسفل .

مثال2:

لتكن المتتالية u_n المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{n+2}{n}$.

- المتتالية u_n محدودة من الأعلى و 3 عنصر حاد من الأعلى .
- المتتالية u_n محدودة من الأسفل و 1 عنصر حاد من الأسفل .

و منه المتتالية u_n متتالية محدودة .

تمرين :

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{n^2+n+9}{n}$.

أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأسفل.

طريقة:

لإثبات أن متتالية u_n معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A)

يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $0;+\infty$.

الحل:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $0;+\infty$ حيث:

$$f\ x = \frac{x^2+x+9}{x} .$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'\ x = \frac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	$0 \quad 3 \quad +\infty$
$f'\ x$	$- \quad 0 \quad +$
$f\ x$	7

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n \geq 7$ ، و المتتالية u_n محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين :

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{3n^2+2}{n^2+1}$.

- أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 3.

الحل:

نحسب الفرق $u_n - 3$.

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{3n^2+2}{n^2+1} - 3 \\ &= \frac{3n^2+2-3n^2-3}{n^2+1} \\ &= \frac{-1}{n^2+1} \end{aligned}$$

و منهمن أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{-1}{n^2+4} \leq 0$.

و منهمن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 3 \leq 0$.

و بالتالي:من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 3$.

إذن المتتالية u_n محدودة من الأعلى و 3 عنصر حاد من الأعلى .

تمرين :

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}, \ n \geq 0 \end{cases}$.

- **أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأسفل.**
- **أدرس رتابة المتتالية u_n .**

5.9 تقارب متتالية عددية:

1.5.9نهاية متتالية عددية:

تعريف:

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود

المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة .
و نكتب: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ أو $\lim u_n = \ell$

تعريف:

نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **متقاربة** إذا وجد عدد ℓ بحيث $\lim_{n\to+\infty}|u_n - u| = 0$ أي
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$
و نكتب: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

ملاحظة :

- نقول عن متتالية إنها متباعدة عندما لا تكون متقاربة.
- إذا تقاربت متتالية عددية فإن نهايتها وحيدة.

ملاحظة :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

مثال:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{-n+2}{3n+1}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-x+2}{3x+1}$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{3}$ إذا $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{3}$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة:

العكس غير صحيح :

2.5.9 تعاريف:

(u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة .و نرمز: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة .و نرمز: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ و α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

تمرين:

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{2n^2-n+3}{2n^2+1}$.

- عين نهاية هذه المتتالية .

الحل:

لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية u_n و منه $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{2x^2+1}$ و المعرفة على $\mathbb{R}_+$.

بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ و منه المتتالية u_n لها نفس النهاية أي $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.

تمرين:

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

لتكن v_n المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

- أثبت أن المتتالية v_n متتالية حسابية ثم استنتج نهاية u_n .

الحل:

- نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 :

من أجل $n=0$ ، $u_0=3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 :

نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي موجب تماما. أي: $u_n\neq 1$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\neq 1$ و نبرهن بالخلف .

نفرض $u_{n+1}=1$ أي $\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}=1$ و نستنتج أن $u_n=1$ و هذا تناقض مع فرضية التراجع .إذن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

- إثبات أن v_n متتالية حسابية

لدينا $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}$ و منه $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\frac{1}{u_n-1}$

و بالتالي $\frac{1}{3}=\frac{u_n-1}{3u_n-3}=v_{n+1}-v_n$.

إذن v_n متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{2}$. $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ لأن $r>0$

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

3.5.9 مبرهنة:

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

ملاحظة:

- إذا كانت متزايدة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأعلى للمتتالية.
- إذا كانت متناقصة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأدنى للمتتالية.

4.5.9 خواص:

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متقاربتين فإن :

1. $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n$
2. $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n-\lim_{n\to+\infty}v_n$
3. $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n\times\lim_{n\to+\infty}v_n$
4. من أجل كل عدد λ (حقيقي أو عقدي) : $\lim_{n\to+\infty}(\lambda v_n)=\lambda\lim_{n\to+\infty}v_n$.
5. عندما يكون $\lim_{n\to+\infty}v_n\neq 0$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}u_n}{\lim_{n\to+\infty}v_n}$.
6. $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=\left|\lim_{n\to+\infty}u_n\right|$.
7. إذا كان ابتداء من رتبة معينة $u_n\le v_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n\le\lim_{n\to+\infty}v_n$.

ملاحظة :

نستخلص من الخاصية 7. أن :

$$u_n\le 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n\le 0$$
$$u_n\ge 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n\ge 0,$$

5.5.9 مبرهنة :(الحصر)

إذا كانت (v_n) ، (u_n) ، (w_n) متتاليات حقيقية تحقق:

$$\begin{cases} v_n\le u_n\le w_n \\ \lim v_n=\lim w_n=k \\ k\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

فإن (u_n) متقاربة ونهايتها هي k.

مبرهنة :

كل متتالية عددية **متقاربة**هي متتالية **محدودة**. والعكس غير صحيح.

أمثلة:

1. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ذات الحد العام $u_n=(-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة).
2. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ذات الحد العام $u_n=\sqrt{n}$ متباعدة.
3. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ذات الحد العام $u_n=\dfrac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0..
4. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ذات الحد العام $u_n=-\dfrac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو 3- .

6.9 المتتاليات الحسابية:

1.6.9 تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n)متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عددطبيعي n : $u_{n+1}=u_n+r$.

ملاحظة:

- تكون المتتالية (u_n)حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتا و هذا الثابت هو أساسها r.
- كل متتاليةحسابية تكون معرفة بحدها الأولو أساسها.

مثال:

نعتبرالمتتالية (u_n) بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=-3n+1$.

- برهن أن المتتالية (u_n) حسابية ،عين حدها الأول u_0.

الحل :

لنبين أن المتتالية (u_n) حسابية:

حساب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -3(n+1)+1-(-3n+1) \\ &= -3n+3+1+3n-1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

و منه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$ و حدها الأول $u_0=1$.

2.6.9 خاصية مميزة : (الوسط الحسابي)

نعتبرالمتتالية (u_n) :

$$(u_n) \text{ حسابية } \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=u_n-u_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: 2u_n=u_{n+1}+u_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: u_n=\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$$

خاصية :

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا وفقط إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$$

يعني $\forall n \in \mathbb{N} : 2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$

ملاحظة :

تكون الأعدد b,a و c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان:

$2b = a + c$.

يسمى العدد b بالوسط الحسابي للعددين c,a.

3.6.9 عبارة الحد العام:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي):

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nr$$

ملاحظة :

- إذا كان u_1 الحدها الأول المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r فإن:
  $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = u_1 + (n-1)r$.
- إذا كان u_α و u_n حدين من حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r (لايهم الترتيب) فإن:
  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_\alpha + (n-\alpha)r$.

مثال 1:

ليكن $u_{68} = 205$ و $u_{11} = 34$ حدين من حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r.

لنحسب الأساس r.

لدينا

$$u_{11} = u_{68} + (11-68)r$$

و منه $u_{11} - u_{68} = -57r$

و منه $34 - 205 = -57r$

و بالتالي و منه $r = 3$

مثال 2:

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها $r = -3$ و $u_{20} = 100$.

لنحسب الحدين u_5 و u_0.

- لدينا

$$u_5 = u_{20} + (5-20)(-3)$$
$$= 145$$

و لدينا

$$u_0 = u_5 + (0-5)(-3)$$
$$= 160$$

4.6.9 مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

(u_n)متتالية حسابية ، حدها الأول u_0، حدها الأخير u_n و أساسها r (r عدد حقيقي):

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

ملاحظة :

(u_n)متتالية حسابية ، حدها الأول u_α، حدها الأخير u_β و أساسها r:

$$S = u_\alpha + \dots\dots + u_\beta$$
$$= (\beta - \alpha + 1)\left(\frac{u_\alpha + u_\beta}{2}\right)$$

مثال 1:

(u_n)متتالية حسابية ، حدها الأول $u_0 = 3$و أساسها $r = 2$:

لنحسب الأساس$S_n = u_0 + \dots\dots + u_{n-1}$.

حساب u_{n-1}.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي r : $u_n = u_0 + nr$ و منه

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$$
$$= 2 + (n-1)3$$
$$= 3n - 1$$

لدينا

$$S_n = u_0 + \dots\dots + u_{n-1}$$
$$= \left((n-1) - 0 + 1\right)\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right)$$
$$= (n)\left(\frac{3 + 3n - 1}{2}\right)$$
$$= (n)\left(\frac{2 + 3n}{2}\right)$$

مثال 2:

ليكن $u_{68} = 205$ و $u_{11} = 34$ حدين من حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذاتالأساسها r.

لنحسب الأساس $S = u_{11} + ... + u_{68}$.

لدينا

$$
\begin{aligned}
S &= u_{11} + ... + u_{68} \\
&= (68-11+1)\left(\frac{u_{11}+u_{68}}{2}\right) \\
&= (58)\left(\frac{34+205}{2}\right) \\
&= 6931
\end{aligned}
$$

مثال 3:

حساب المجموع $S = 2+4+........+2n$.

S هو مجموع n حدا من حدود متتالية حسابية ذاتالأساسها $r = 2$.

ومنه

$$
\begin{aligned}
S &= 2+4+........+2n \\
&= (n)\left(\frac{2+2n}{2}\right) \\
&= (n)(1+n)
\end{aligned}
$$

7.9 المتتاليات الهندسية:

1.7.9 تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (qعدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقطإذاكان أن منأجل كل عددطبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

ملاحظة:

- تكون المتتالية (u_n) هندسية إذا وفقط إذا كان نسبة بين حدين متتابعين ثابتا و هذا الثابت هو أساسها q.
- كل متتالية هندسية تكون معرفة بحدها الأولو أساسها.

2.7.9 ملاحظات:

- جداء متتاليتان هندسيتان هي متتالية هندسية حدّها الأول جداء الحدين الأولين و أساسها جداء الأساسين.
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها $q \neq 0$ وحدها الأول u_0 فإن المتتالية $(u_n)^p$ ؛ مع p عدد صحيح؛ هي متتالية هندسية أساسها q^p و حدها الأول u_0^p.
- إذا كان $u_0 = 0$فإن المتتالية (u_n)معدومة و إذا كان$q = 0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = 0$.
- إذا كان الأساس$q = 1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0$.

مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 2\times 3^n$.

- برهن أن المتتالية (u_n) هندسية،عين حدها الأول u_0.

الحل :

لنبين أن المتتالية (u_n) هندسية:

حساب النسبة $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n} = 3$$

و منه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $u_0 = 2$.

3.7.9 خاصية مميزة : (الوسط الهندسي)

نعتبر المتتالية (u_n) :

((u_n) هندسية) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_n^2 = u_{n+1}\times u_{n-1}$

ملاحظة :

تكون الأعدد b,a و c غير معدومة بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:

$b^2 = a\times c$.

يسمى العدد b بالوسط الهندسي للعددين c,a.

4.7.9 عبارة الحد العام:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم).

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 \times q^n$

ملاحظة :

- إذا كان u_1 الحدها الأول المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساسها q فإن:
  $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- إذا كان u_α و u_n حدين من حدود المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساسها q (لايهم الترتيب) فإن:
  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_\alpha \times q^{n-\alpha}$.

مثال 1:

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها $r = \dfrac{1}{2}$ و الحد الأول $u_1 = 5$.

كتابة عبارة الحد العام u_n.

- لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = u_1 \times q^{n-1}$

و منه $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

مثال 2:

ليكن $u_4 = 162$ و $u_9 = 39366$ حدين من حدود المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساسها q.

لنحسب الأساس q.

لدينا

$$u_9 = u_4 \times q^{9-4}$$

و منه $39366 = 162 \times q^4$

و منه $q^4 = \frac{39366}{162}$
$= 243$

و بالتالي و منه $r = 3$

5.7.9 مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم).

إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.

إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$.

ملاحظة :

(u_n) متتالية هندسية ، حدها الأول u_α، حدها الأخير u_β و أساسها r:

$$S = u_\alpha + ... + u_\beta$$
$$= u_\alpha\left(\frac{1-q^{\beta-\alpha+1}}{1-q}\right)$$

مثال 1:

(u_n) متتالية هندسية، حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $r = 2$:

لنحسب الأساس $S_n = u_0 + ... + u_{n-1}$.

$$S_n = u_0 + ... + u_{n-1}$$
$$= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$= 3\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)$$
$$= -3(1-2^{n+1})$$

مثال 2:

حساب $S=5+5\times\frac{1}{2}++5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+....+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $S=\frac{1}{2}$ و عدد حدودها $n+1$.

إذن

$$S_n=5\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=10\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

مثال 3:

حساب المجموع $S=1+x+x^2+x^3+.......+x^n$ حيث $x\neq 1$.

S هو مجموع$n+1$ حدا من حدود متتالية هندسية ذات الأساسها $q=x$و الحد الأول 1.

ومنه

$$S=1+x+x^2+x^3+.......+x^n$$
$$=1\times\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

6.7.9نهاية متتالية هندسية :

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة
- إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q\leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

دراسة تقارب متتالية هندسية:

لتكن (u_n)متتالية هندسية حدّها الأول u_0و أساسها q حيث: $q\neq 0$، $q\neq 1$و$u_0\neq 0$.

- (u_n)متقاربة يكافئ$-1<q\leq 1$.
- (u_n)متباعدة يكافئ $1<q$ أو $q\leq -1$.

تمرين :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-5n-1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n). استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل:

- الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0، $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=-5n-1$. إذن : $v_n=-5n-1$

$v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=-5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-1-5n$. $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}\ 5+5-5n\ =\frac{n}{2}\ -2-5n$.

$v_0=u_1-u_0$ ، $v_1=u_2-u_1$ ، ... ، $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n=S+u_0$

و منه $u_n=\frac{n}{2}\ -2-5n\ +3$.

تمرين :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ،ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).
- ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n)؟
- أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S. استنتج نهاية (u_n).

الحل:

- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}\ u_n-3\ =\frac{1}{3}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

• $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• $-1<\frac{1}{3}<1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$.

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

8.9 <u>المتتاليان المتجاورتان:</u>

1.8.9 <u>مبرهنة :</u>

نقول عن متتاليتين حقيقيتين (u_n) و (v_n) أنها متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت نهاية متتالية الفرق (u_n-v_n) متقاربة نحو 0.

<u>مثال :</u>

المتتاليتان $u_n=-\frac{1}{n}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ متجاورتان لأن أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة وفرقهما (المساوي لـ $v_n-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}=\frac{2n+1}{n(n+1)}$) يؤول إلى الصفر.

2.8.9 <u>مبرهنة :</u>

إذا كانت u_n و v_n متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

<u>مثال:</u>

لتكن المتتالية u_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$.

و المتتالية v_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.

• حساب الفرق $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n+1^{\ 2}}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1^{\ 2}}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^{2}}>0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

• حساب الفرق $v_{n+1}-v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-\left(u_n+\frac{1}{n}\right) \\ &= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^{2}}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^{2}} \end{aligned}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^{2}}<0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$

$$\begin{aligned} u_n-v_n &= u_n-\left(u_n+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

الخلاصة :

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ فإن u_n و v_n متجاورتان .

تمرين :

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0=12$ ، $v_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ و $v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=u_n-v_n$ و $t_n=3u_n+8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
2) أحسب w_n بدلالة n .
3) ما هي نهاية (w_n) ؟
4) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .
5) ما هي نهاية (t_n) ؟

6) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.
7) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل:

1. إثبات أن المتتالية (w_n) هندسية.
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{u_n - v_n}{12} \end{aligned}$$

أي $w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n$.

إذنالمتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$.

2. حساب w_n.
من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

3. حساب النهاية :
بما أن $-1 < \frac{1}{12} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$
و بالتالي (w_n) متقاربة.

4. إثبات أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} \\ &= \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} \\ &= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n \\ &= 3u_n + 8v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

منه المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

5. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$$

6. إثبات أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين.

أ- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n+2v_n}{3}-u_n\\ &= \frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}\\ &= \frac{-2(u_n-v_n)}{3}\\ &= -\frac{2}{3}w_n\end{aligned}$$

و منه $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}-u_n = -\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}-u_n < 0$

وبالتاليالمتتالية (u_n)متناقصة على $\mathbb{N}$.

ب- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{u_n+3v_n}{4}-v_n\\ &= \frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}\\ &= \frac{(u_n-v_n)}{4}\\ &= \frac{1}{4}w_n\\ &= \frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{aligned}$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n > 0$.

وبالتالي المتتالية (v_n)متزايدة على $\mathbb{N}$.

ج- نعلم أن $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ و أن $w_n = u_n - v_n$.

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

إذن (u_n)متناقصة و (v_n)متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 .

و بالتالي المتتاليتان (u_n)و (v_n) متجاورتان .

7. لدينا المتتاليتان (u_n)و (v_n) متجاورتان .
إذن المتتاليتان (u_n)و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$ و منه $\lim_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 44$

نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 4$.

9.9 تمارين:

تمرين1:

(u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0=-4$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع $S=u_{26}+u_{27}+...+u_{125}$.

تمرين2:

لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1}-2u_n=9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2u_n-9$.

أ ـ أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

ب ـ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

جـ ـ جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د ـ أحسب بدلالة n المجموع $v_0+v_1+...+v_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع $u_0+u_1+...+u_n$.

تمرين3:

لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0=14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4u_n+3$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n=u_n+1$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=u_0{}^2+u_1{}^2+...+u_n{}^2$.

تمرين4:

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 علما أنّ $u_0=\frac{2}{9}$

- أحسب المجموع $S=u_3+u_4+...+u_{10}$.

تمرين5:

لتكن المتتالية (u_n) ذات الحد الأول $u_1=1$ ، وحيث من أجل كلعدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1،

$u_{n+1}=2u_n+3$.

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، نضع : $v_n=u_n+3$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$S_n=v_1+v_2+...+v_n$.

تمرين6:

(u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0=\frac{1}{6}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{5}{8}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2u_n+\frac{5}{3}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 و v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

4) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، $t_n=u_0+u_1+...+u_n$

تمرين7:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0=2\ ,\ u_1=4 \\ u_{n+1}=4u_n-u_{n-1} : n\geq 1 \end{cases}$$.

بل كل

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n=u_{n+1}-au_n$. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها b .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n=u_{n+1}-bu_n$. برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها a .

4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

تمرين8:

a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كانت a , b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$.

2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

تمرين9:

a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية . أحسب a ، b و c علما أن $\begin{cases} a+b+c=36,75 \\ abc=343 \end{cases}$.

تمرين10:

a ، b و c ثلاث أعداد حقيقية مع $a\neq 0$.

نفرض أن a ، b و c تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسة أساسها q ؛ و $3a$, $2b$, c تشكل ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية . أحسب q .عدد حقيقي معطى .

تمرين11:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1=a$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n$.

1) (v_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n=13u_n-4$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q .

2) عبر عن v_n بدلالة a و n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة a و n .

3) أحسب بدلالة a و n المجموع :

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

10. السلاسل العددية :

13.8 تعاريف و خواص:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية الأعداد الحقيقية.

- نسمي المجموع $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ بالسلسلة العددية .
- يدعى U_n, بالحد العام للسلسلة العددية .
- المجموع $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ يسمى بالجمع الجزئي ذات الرتبة n للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$.
- المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تدعىبمتتالية المجاميعللسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$.
- نقول أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كانت المتتالية $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة والعدد $S = \lim_{n\to=\infty} S_n$.
- يسمى مجموع السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ ونكتب $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$
- نسمى المتتالية $R_n = S - S_n$ بباقي السلسلة ذو الرتبة n و $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية البواقي.

ملاحظة1:

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} (S - S_n) = 0$$

ملاحظة2:

نقول أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متباعدة إذا كانت المتتالية $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة أي لا تقبل نهاية أو $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$

مثال1:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتتالية الهندسية ذات الأساس k والحد الأول U_0.

$$\forall n \in \mathbb{N};\ U_n = U_0 k^n$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 \sum_{i=0}^{n} k^i = U_0 \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$$

من أجل $|k| \prec 1$

لدينا $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \frac{U_0}{1-k} = \lim_{n\to+\infty} S_n$:

من أجل $|k| \geq 1$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$:

مثال2:

من أجل $n \geq 1$ نعتبر السلسلة ذات الحد العام $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} U_i \\ &= U_0 \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{aligned}$$

إذن: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

خواص:

خاصية1:

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ والسلسلة $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n$ حيث n_0 عدد طبيعي موجب تماما, لهما نفس الطبيعية.

مثال3:

من اجل $|q| \prec 1$

لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\cdots = \frac{1}{1-q}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=10}^{\infty} q^n &= q^{10} + q^{11} + q^{12} + \cdots\cdots \\ &= \frac{1}{1-q} - (1 + q + q^2 + \cdots + q^9) \end{aligned}$$

خاصية2:

ليكن $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ سلسلتان عدديتان متقاربتان إذن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n+V_n)$ متقاربة .

ولدينا: $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n+V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$

البرهان:

ليكن $(S_n)_{n\geq 0}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ و $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ متقاربة} \Leftrightarrow \exists S : \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n \text{ متقاربة} \Leftrightarrow \exists \lambda : \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$$

$$\begin{aligned} S_n + \lambda_n &= (U_0 + U_1 + \ldots + U_n) + (V_0 + V_1 + \ldots + V_n) \\ &= (U_0 + V_0) + (U_1 + V_1) + \ldots + (U_n + V_n) \\ &= \sum_{j=0}^{j=n} (U_j + V_j) \end{aligned}$$

و بالتالي لدينا:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (U_j + V_j) &= \lim_{n\to+\infty} (S_n + \lambda_n) \\ &= S + \lambda \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (U_j) + \sum_{j=0}^{\infty} (V_j) \end{aligned}$$

خاصية3:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة و λ عدد حقيقي فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda U_n$ متقاربة

و لدينا: $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda U_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} U_n$

14.8 مقياس كوشي :

تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي

أي: $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}/\ \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2: m\geq n\geq N_\varepsilon\Rightarrow|S_m-S_n|<\varepsilon$

مع:
$$\begin{aligned}S_m-S_n&=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_m\\&=\sum_{k=n+1}^{k=m}u_k\end{aligned}$$

ملاحظة3:

تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ متباعدة إذا و فقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ ليست متتالية كوشي

أي أن: $\exists\varepsilon>0,\ \forall N_\varepsilon\in\mathbb{N}/\ \exists(n,m)\in\mathbb{N}^2: m\geq n\geq N_\varepsilon\Rightarrow|S_m-S_n|\geq\varepsilon$

مثال4:

السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ متباعدة و بالتالي متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ ليست لكوشي أي:

$$\exists\varepsilon>0,\forall N_\varepsilon\in\mathbb{N}/\ \exists n\in\mathbb{N}: m=2n\in\mathbb{N}m\geq n\geq N_\varepsilon\wedge\left|\sum_{k=n+1}^{k=2n}u_k\right|\geq\varepsilon$$

$$\sum_{k=m+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\succ\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

من أجل $\varepsilon=\frac{1}{2}$ لدينا $(S_n)_{n\in IN}$ غير متتالية كوشي ومنه $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ متباعدة و تسمى سلسلة توافقية.

خاصية 4: (الشرط الضروري)

نعتبر حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حقيقية .

إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

البرهان:

باستعمال معيار كوشي من اجل n و $m=n+1$.

لدينا: السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي

أي: $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}/\forall n\mathbb{N}: n+1\geq n\geq N_\varepsilon\Rightarrow\left|S_{N+1}-S_n\right|<\varepsilon$

مع: $|S_{n+1}-S_n|=|u_n|<\varepsilon$

و هذا يعني أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

ملاحظة4: (العكس النقيض)

إذا كانت النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فإن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ متباعدة.

ملاحظة5:

عكس الاستلزام غير صحيح أي أنه إذا كان لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فهذا لا يعني أن السلسلة العددية $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة .

مثال5:

$\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\neq 0$

مثال6:

لنعتبر في $\mathbb{R}$ المتتالية العددية $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

لكن متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ متباعدة

لأن:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0+u_1+\ldots+u_n \\ &= 1+\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

$$S_n = \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

و منه السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ متباعدة

مثال7:

السلسلتان $\sum\limits_{n\geq 1}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ متباعدتان.

15.8 معيار تقابل أبال : (تقابل السلاسل العددية)

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$

بحيث:

1) المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ تحقق:

1. $\forall n \in \mathbb{N},\, a_n \in \mathbb{R}_+$.
2. $(a_n)_{n\geq 0}$متتالية متناقصة.
3. الحد العام للمتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$يؤول نحو الصفر لما يؤول n نحو ألما لانهاية.

2) متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n\geq 0} b_n$ محدودة .

أي: $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}; \left|\sum_{k=0}^{k=n} b_k\right| < M$

إذن السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ متقاربة

البرهان:

باستعمال معيار كوشي

و ليكن: $(n,m)\in \mathbb{N}^2$ حيث: $n<m$

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= |a_{n+1}B_{n+1} + a_{n+2}B_{n+2} + \ldots + a_m B_m| \\
&= |a_{n+1}(B_{n+1}-B_n) + a_{n+2}(B_{n+2}-B_{n+1}) + \ldots + a_m(B_{m+1}-B_{m-1})| \\
&= |-a_{n+1}B_n + (a_{n+1}-a_n)B_{n+1} + (a_{n+2}-a_{n+3})B_{n+2} + \ldots + (a_{m+1}-a_m)B_{m-1} + a_m B_m| \\
&\leq |a_{n+1}B_n| + |a_{n+1}-a_n||B_{n+1}| + |a_{n+2}-a_{n+3}||B_{n+2}| + \ldots + |a_{m+1}-a_m||B_{m-1}| + |a_m||B_m| \\
&\leq M\left(|a_{n+1}| + |a_{n+1}-a_n| + |a_{n+2}-a_{n+3}| + \ldots + |a_{m+1}-a_m| + |a_m|\right) \\
&\leq 2Ma_{n+1} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

مع:
$$\begin{aligned}
B_n &= b_0 + b_1 + \ldots + b_n \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} b_k
\end{aligned}$$

ملاحظة6:

$$\sum_{n\geq 0} a_k b_k \neq \sum_{n\geq 0} a_k \sum_{n\geq 0} b_k$$

مثال7:

السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة لأنها تحقق معيار آبال و هدا لأنه من أجل :

$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ و $b_n = (-1)^n$

لدينا:

المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ تحقق:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}_+$.
2. $(a_n)_{n\geq 0}$متتالية متناقصة.
3. الحد العام للمتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$يؤول نحو الصفر لما يؤول n نحو ألما لانهاية.

$$|B_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\right| \leq 3$$

16.8 السلاسل المتقاربة مطلقا:

تعريف:

نقول أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة مطلقا إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}|U_n|$ متقاربة

خاصية 5:

كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة ببساطة (عادية).

البرهان:

$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ متقاربة مطلقا $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}|U_n|$متقاربة.

$\sum_{n=0}^{+\infty}|U_n|$متقاربة

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\ \forall (p,q)\in \mathbb{N}^2 : p\geq q\geq N_\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=q+1}^{i=p}|U_i| < \varepsilon$$

و بما أن: $\left|\sum_{i=q+1}^{i=p} U_i\right| \leq \sum_{i=q+1}^{i=p}|U_i|$

فإن: $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة .

ملاحظة7:

العكس غير صحيح .

مثال مضاد:

$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة لكن $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ متباعدة.

17.8 جداء سلسلتين:

تعريف:

نعرف جداء السلسلتين $\sum_{n\geq 0} a_n$ و $\sum_{n\geq 0} b_n$ مع $(a_n)_{n\in IN}$ و $(b_n)_{n\in IN}$ متتاليتين ذات أعداد حقيقية

بالسلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n$ حيث: $C_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i b_{n-i}$

18.8 جداء السلاسل المتقاربة مطلقا:

مبرهنة:

إذا كانت السلسلتين $\sum_{n\geq 0} a_n$ و $\sum_{n\geq 0} b_n$ مع $(a_n)_{n\in IN}$ و $(b_n)_{n\in IN}$ متتاليتين ذات أعداد حقيقية متقاربة مطلقا

فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} c_n$ حيث: $C_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i b_{n-i}$ متقاربة مطلقا.

و لدينا: $\sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$

مثال8:

$$\sum_{n\geq 1} c_n = \left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right)$$

حيث :

$$C_1 = a_1 b_1 = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2}$$

$$C_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 = \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{2^2 2^2} + \frac{1}{2^3}$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2^i}.\frac{1}{(n-i)^2}$$

19.8 السلاسل ذات الحدود الحقيقية الموجبة :

تعريف:

تسمى السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$, سلسلة ذات حدود حقيقية موجبة إذا كانت كل حدودها موجبة

أي : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$

ملاحظة:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ ذات حدود موجبة هذا يستلزم أن متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$, متزايدة

أي $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$:

خاصية 1:

تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ ذات الحدود الحقيقية الموجبة, متقاربة إذا و فقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ محدودة من الأعلى $\exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M \Leftrightarrow$ متقاربة $\sum_{n\geq 0} U_n$

خاصية 2:(معيار المقارنة)

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين موجبتين بحيث إبتداءا من رتبة ما تتحقق المتراجحة : $U_n \leq V_n$

أي: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, U_n \leq V_n$ فإنه إذا تقاربت السلسلة $\sum_{n\geq 0} V_n$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

ملاحظة:

إذا تحققت المتراجحة $U_n \leq V_n$ من اجل كل عدد طبيعي n فإن $\sum_{n\geq 0} U_n \leq \sum_{n\geq 0} V_n$.

البرهان:

لنفرض أن $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,$$
$$U_n \leq V_n \Rightarrow U_{n_0} + U_{n_0+1} + \ldots + U_n \leq V_{n_0} + V_{n_0+1} + \ldots + V_n \leq \sum_{n\geq 0} V_n = S$$

إذن المجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ محدودة من الأعلى وبالتالي $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة

مثال:

لنعتبر السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{1+3^n}$

لدينا: $\frac{2^n}{1+3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بما أن $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ سلسلة متقاربة لأن $q=\frac{2}{3}<1$

فإن: $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{1+3^n}$ متقاربة.

2. لنعتبر السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

لدينا: $\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{n}$ و بما أن $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة .

خاصية 3:

لتكن السلسلتين ذات الحدود الحقيقية الموجبة $\sum_{n\geq 0}U_n$ و $\sum_{n\geq 0}V_n$

1. السلسلتان لهما نفس الطبيعة $\Leftarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n}=k\in IR_+^*$.
2. متقاربة $\sum_{n\geq 0}U_n \Leftarrow$ متقاربة $\sum_{n\geq 0}V_n$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=0$.
3. متباعدة $\sum_{n\geq 0}U_n \Leftarrow$ متباعدة $\sum_{n\geq 0}V_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n}=+\infty$.

20.8 قاعدة كوشي:

لتكن $\sum_{n\geq 0}U_n$ سلسلة ذات الحدود الحقيقية الموجبة حيث $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=l$

إذن:

- إذا كانت $l<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0}U_n$ متقاربة .
- إذا كانت $l>1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0}U_n$ متباعدة .

ملاحظة هامة:

إذا كانت $l=1$ فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}U_n$.

البرهان:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt[n]{U_n}-l\right|<\varepsilon$$

لدينا :

$$\left|\sqrt[n]{U_n}-l\right|<\varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon<\left(U_n\right)^{\frac{1}{n}}<l+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left(l-\varepsilon\right)^n<U_n<\left(l+\varepsilon\right)^n$$

- في حالة ما إذا اخترنا ε بحيث $q=l+\varepsilon<1$

و بما أن $\sum_{n\geq 0}\left(l+\varepsilon\right)^n=\sum_{n\geq 0}q^n$ متقاربة و $U_n<\left(l+\varepsilon\right)^n$

فإن: $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة

- في حالة ما إذا اخترنا ε بحيث $q = l - \varepsilon > 1$

و بما أن $\sum_{n\geq 0}(l+\varepsilon)^n = \sum_{n\geq 0} q^n$ متباعدةو $(l-\varepsilon)^n < U_n$ فإن $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة.

أمثلة:

لندرس طبيعة السلاسل التالية:

1) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$

$$U_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$$

و منه $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ متقاربة

2) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n^2}}$

$$U_n = \frac{1}{2^{n^2}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

و منه $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n^2}}$متقاربة.

3) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

بما أن $:U_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{2}{n}\log n} = 1$

فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

21.8قاعدة دالمبار:

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ ذات الحدود الحقيقية الموجبة. حيث: $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = l$

إذن :

- إذا كانت $l < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة .
- إذا كانت $l > 1$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة .
- إذا كانت $l = 1$ فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة .

البرهان:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\mathrm{U_{n+1}}}{\mathrm{U_n}}-l\right|<\varepsilon$$

و بالتالي لدينا و هذا من أجل $\forall\varepsilon>0,\forall n>N_\varepsilon$:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}<l+\varepsilon \Rightarrow U_{n+1}<(l+\varepsilon)U_n$$
$$\Rightarrow U_{N_{\varepsilon+1}}\leq(l+\varepsilon)U_{N_\varepsilon}$$
$$\Rightarrow U_{N_{\varepsilon+2}}\leq(l+\varepsilon)U_{N_{\varepsilon+1}}\leq(l+\varepsilon)^2U_{N_\varepsilon}$$
$$\Rightarrow U_{N_{\varepsilon+3}}\leq(l+\varepsilon)U_{N_{\varepsilon+2}}\leq(l+\varepsilon)^3U_{N_\varepsilon}$$
$$\Rightarrow U_m\leq(l+\varepsilon)^{m-N_\varepsilon}U_{N_\varepsilon}=(l+\varepsilon)^m.\frac{U_{N_\varepsilon}}{(l+\varepsilon)^{N_\varepsilon}}$$

نختار $\varepsilon=\varepsilon_0$

بحيث : $l+\varepsilon_0=q_0<1$ و منه $U_m\leq q_0^m\frac{U_{N_\varepsilon}}{(l+\varepsilon)^{N_\varepsilon}}$

و منه باستعمال معيار المقارنة نجد أن : $\sum_{n\geq0}U_n$ متقاربة

مثال1:

- $\sum_{n\geq1}U_n=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n!}$ نحسب القيمة $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$

السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n!}$ متقاربة حسب آلمبار لأن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=1$

- $\sum_{n\geq1}U_n=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ نحسب القيمة $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بما أن : $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$

إذن لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة.

مثال2:

دراسة طبيعة السلسلة:

$$\sum_{n\geq0}\frac{1\times4\times7\times\ldots\times(3n+1)}{(n+1)!}\times k^n \quad و \quad k\in\mathbb{R}_+$$

باستعمال قاعدة آلمبار

نجد :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\times4\times7\times\ldots\times(3n+1)\times(3n+4)\times k^{n+1}\times(n+1)!}{(n+2)!\times1\times4\times7\times\ldots\times(3n+1)\times k^{n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{n+2}\times k$$
$$=3k$$

- إذ ا كانت القيمة $1<3k$ أي $\frac{1}{3}<k$ فإن السلسلة متباعدة .
- إذ ا كانت القيمة $1>3k$ أي $\frac{1}{3}>k$ فإن السلسلة متقاربة .
- إذ ا كانت القيمة $\frac{1}{3}=k$ فإننا لا يمكن قول أي شيء عن طبيعة السلسلة.

22.8 مقارنة بين القاعدتين:

ملاحظة:

لتكن $\sum U_n$ سلسلة ذات حدود حقيقية موجبة ؛ فإذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ موجبة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}$ موجودة

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$

هذا يعني أن قاعدة كوشي أقوي من قاعدة دآلمبار .

مثال3:

لنعتبر السلسلة العددية $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{3+(-1)^i}{2^i}$:

1. **لنستعمل قاعدة دآلمبار** لدراسة طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{1n+1}}\times\frac{2^n}{3+(-1)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2\left[3+(-1)^n\right]}=\begin{cases}1/4 & \text{ن زوجى}n\\ 1 \quad n & \text{كان ف ردى}\end{cases}$$

- إذا كان n زوجي فحسب قاعدة آلمبار, إن السلسلة متقاربة $\left(l=\frac{1}{4}<1\right)$.
- إذا كان n فردي فإنه لا يمكن قول أي شيء عن طبيعة السلسلة $(l=1)$.

من أجل n فردى, استعمال قاعدة دآلمبار تكون بدون جدوى.

2. **لنستعمل قاعدة كوشي :**

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

حسب قاعدة كوشي فالسلسلة متقاربة وبالتالي فإن قاعدة كوشي أقوى من قاعدة دآلمبار.

23.8 معيار التكامل:

لتكن الدالة f المعرفة من $[1,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}_+$ ، ($f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+$) مستمرة ومتناقصة.
نضع $U_n = f(n)$:
إذن: $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(n)dn$ موجود .

مثال1:

لدينا السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

نضع $a_n = \frac{1}{n^2} = f(n)$.

أي
$$f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+$$
$$n\mapsto f(n)=\frac{1}{n^2}$$
.

f مستمرة و متناقصة.

و منه
$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(n)dn = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{n^2}dn$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}\right]_1^A$$
$$=1$$

و بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة .

تمرين:

أدرس حسب قيم العدد الحقيقي الموجب $\propto$ تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\propto}}$

24.8 (سلسلة ريمان) :RIEMANN

خاصية 1:

لتكن السلسلتين ذات الحدود الحقيقية الموجبة $\sum_{n\geq 0} U_n$ و $\sum_{n\geq 0} V_n$

- ✓ لهما نفس الطبيعة $\sum_n V_n$ و $\sum_n U_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n} = k \in \mathbb{R}_+^*$.
- ✓ متقارب $\sum_n U_n \Rightarrow$ متقارب $\sum_n V_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n} = 0$.
- ✓ متباعد $\sum_n U_n \Rightarrow$ متباعد $\sum_n V_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n} = +\infty$.

مثال1:

السلسلتان $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3-n}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ لهما نفس الطبيعة لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3-n}}{\frac{1}{n^3}}=1\in\mathbb{R}_+^*$$

مثال2:

دراسة طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2\log n}$ ؛ لنعتبر السلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2\log n}\times n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}=0$$

بما أن $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسلة متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2\log n}$ متقاربة.

مثال3:

لنعتبر السلسلة : $\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n+1}{2n+2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$$

$$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}<1$$

وبالتالي السلسلة متباعدة .

مثال4:

لنعتبر السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha\alpha}=1$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^\alpha=1-\frac{\alpha}{n+1}+0\left(\frac{1}{n+1}\right)\quad/\quad\frac{0\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\to 0$$ لما $n\to+\infty$

لأن النشر المحدود للتابع $x\mapsto(1+x)^\alpha$ من الرتبة n في جوار الصفر هو :

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha\frac{x}{1!}+\alpha.(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!}+...+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

- إذا كانت $\alpha < 1$ فان السلسلة متباعدة.
- إذا كانت $\alpha > 1$ فان السلسلة متقاربة.

25.8 التقارب المطلق:

تعريف:

نقول أن السلسلة ذات الحدود الحقيقية $\sum_n U_n$ متقاربة مطلقا ، إذا وفقط إذا كانت السلسلة $\sum_n |U_n|$ متقاربة ببساطة .

مثال:

$$\sum \frac{\cos n\pi}{n^2} \quad ، \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

خاصية:

$\sum_n U_n$ متقاربة مطلقا $\Leftarrow$ $\sum_n U_n$ متقاربة ببساطة

البرهان:

$\sum_n U_n$ متقاربة مطلقا $\Leftrightarrow$ $\sum_n |U_n|$ متقاربة ببساطة

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 : p,q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=p+1}^{q} |U_i| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=q+1}^{p} U_i \right| = |U_{q+1} + U_{q+2} + \ldots + U_p| \leq |U_{q+1}| + |U_{q+2}| + \ldots\ldots\ldots + |U_p|$$

$$= \sum_{i=p+1}^{q} |U_i| < \varepsilon$$

و بالتالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 : p,q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{i=p+1}^{q} U_i \right| < \varepsilon$$

و هذا يعني أن السلسلة $\sum_n U_n$ متقاربة ببساطة.

ملاحظة هامة:

إذا كانت سلسلة $\sum_n U_n$ متقاربة ببساطة ، هذا لا يعني أنها متقاربة مطلقا.

تعريف:

نقول أن السلسلة $\sum_n U_n$ شبه متقاربة إذا كانت $\sum_n U_n$ متقاربة ببساطة و ليست متقاربة مطلقا.

مثال:

$\sum \frac{\cos n\pi}{n}$ شبه متقاربة .

26.8 قاعدة التقارب المطلق لكوشي:

لتكن السلسلة العددية $\sum_{n} U_n$ فإذا كانت $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|}$ موجودة بحيث: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lambda$

فإن :

1. إذا كانت $\lambda < 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كانت $\lambda > 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متباعدة.

27.8 قاعدة التقارب المطلق دلآلمبار:

لتكن السلسلة العددية $\sum_{n} U_n$ بحيث تكون النهاية $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$ موجودةمع $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lambda$

فإنه :

1. إذا كانت $\lambda < 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كانت $\lambda > 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متباعدة.

28.8 السلاسل المتناوبة :

تعريف:

نسمي كل سلسلة من النوع $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ بالسلسلة المتناوبة بحيث حدود المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من نفس الإشارة. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 + \dots$

مثال1:

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, سلسلة متناوبة.

29.8 معيار ليبنيز: (Leibniz)

تكون السلسلة المتناوبة $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ متقاربة إذا كانت المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة, موجبة و $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

مثال1:

السلسلة المتناوبة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ سلسلة متقاربة .

خاصية1:

بنفس معطيات معيار ليبنيز لدينا باقي السلسلة المتناوبة محدود بأول حد لمتتالية البواقي:

$$\left|\sum_{n=k}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \le a_k$$

البرهان:

$$\left|\sum_{n=k}^{k+2m}(-1)^n a_n\right| = \left|(-1)^k a_k + (-1)^{k+1} a_{k+1} + \cdots + (-1)^{k+2m} a_{k+2m}\right|$$
$$= \left|(-1)^k (a_k - a_{k+1} + a_{k+2} - a_{k+3} + \cdots) + a_{k+2m}\right|$$

لأن:

$$\forall j \in \mathbb{N},\ a_j - a_{j+1} \ge 0 \quad a_k - a_{k+1} + a_{k+2} - a_{k+3} + \ldots + a_{k+2m} = a_k - (a_{k+1} - a_{k+2}) - (a_{k+3} - a_{k+3}) + \ldots - (a_{k+2m-1} - a_{k+2m})$$
$$\le a_k$$

ملاحظة:

هذا المعيار يعطي الخطأ الذي أرتكب عند تعويض السلسلة بمجموعها الجزئي.

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j a_j - \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}(-1)^j a_j\right|$$
$$= |R_{n+1}|$$
$$\le a_{n+1}$$

مثال2:

الخطأ المرتكب إذا عوضنا السلسلة المتناوبة $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{n}$ بالمجموع $\sum_{n=1}^{n=100}\frac{(-1)^n}{n}$ هو: $R_{101} \le a_{101} = \frac{1}{101}$.

خاصية2:

السلاسل المتناوبة التي تحقق معطيات معيار ليبنيز, تحقق المتراجحة:

$$S_{2p} \le S \le S_{2p+1}$$

حيث:

$$S = \sum_{n\ge0}(-1)^n a_n \ ,\quad S_{2p} = \sum_{n=0}^{n=2p}(-1)^n a_n \ \text{و}\ S_{2p+1} = \sum_{n=0}^{n=2p+1}(-1)^n a_n$$

ملاحظة:

المتتاليتان $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ و $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ متجاورتان لأن:

- $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة.

$$\begin{aligned} S_{2p+2} - S_{2p} &= (-1)^{2p+1} a_{2p+1} + (-1)^{2p+2} a_{2p+2} \\ &= a_{2p+2} - a_{2p+1} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

- $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة .

$$\begin{aligned} S_{2p+3} - S_{2p+1} &= (-1)^{2p+3} a_{2p+3} + (-1)^{2p+1} a_{2p+1} \\ &= a_{2p+1} - a_{2p+3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \lim_{p\to+\infty} \left(S_{2p+1} - S_{2p} \right) &= \lim_{p\to+\infty} \left(-U_{2p+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

30.8 الحساب التقريبي لمجموع سلسلة عددية:

لحساب القيمة التقريبية لمجموع سلسلة عددية نبحث عن n

بحيث: $|S - S_n| < \varepsilon$

تطبيق:

أوجد القيمة التقريبية بتقريب 3-10 لمجموع السلسلة عددية $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n^3}$

$$\begin{aligned} |S - S_n| < |R_{n+1}| \leq a_{n+1} \leq \varepsilon &\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq 10^{-3} \\ &\Rightarrow n \geq 9 \end{aligned}$$

و بالتالي:

$|S - S_n| < 10^{-3}$.

31.8 تمارين :

تمرين1:

أدرس طبيعة السلاسل المتتالية واحسب مجموعها في حالة التقارب:

$$1^0) U_n = \frac{1}{n^2+n}; \quad 2^0) U_n = Log\left[1 + \frac{2}{n(n+3)}\right]; \quad 3^0) U_n = Arctg\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$4^0) U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \quad 5^0) U_n = Log\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]; \quad 6^0) U_n = 3^{x^n} \cos(nx)$$

تمرين2:

لتكن $U_n \geq 0$ و $V_n \geq 0$

- بين أنه إذا كانت $\sum U_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum U_n{}^2$ متقاربة. هل العكس صحيح؟
- بين أنه إذا كانت $\sum U_n$ و $\sum V_n$ متقاربين فإن السلسلة $\sum \sqrt{U_n V_n}$ متقاربة. هل العكس صحيح؟
- بين أن السلسلتين $\sum U_n$ و $\sum Log(1+U_n)$ لهما نفس الطبيعة؟

تمرين3:

أدرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام:

$$1°)U_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\propto}};\ 2°)U_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$$

$$3°)U_n = \frac{Sin^2(n)+(-1)^n n^{\alpha}}{n^{2\alpha}}\ \propto = R;\ 4°)U_n = \frac{n^{\log(n)}}{(\log(n))^n}$$

تمرين4:

1. بين أن السلسلة ذات الحد العام $U_n = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ متقاربة و غير متقاربة مطلقا.

ملاحظة:

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ لما $n \to +\infty$

2. أدرس طبيعة السلسلة ذات الحد العام مع a عدد حقيقي.

$$U_n = (-1)n - \cos\left[\pi\left(n+\frac{a^n}{u}\right)\right]$$

تمرين5:

أدرس حسب قيم الوسيط $a \in R$ تقارب السلسلة.

$$\sum_{n-1}^{+\infty}[Cos(2na)+Sin(2na)]\frac{Log(1)}{n^{1/3}}$$

تمرين6:

أدرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام:

$$1°)-U_n=\frac{n!}{n_n};\ 2°)-U_n=\frac{2^n Sin^{2n}(a)}{n^2}/0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$$

$$3°)-U_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n2};\ 4°)-U_n=\frac{2.4.6..............2a}{n^2}$$

تمرين7:

أدرس طبيعة السلاسل التالية ذات الحد العام:

$$1°)U_n=(n^3-n)^{-1}\ 2°)U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ 3^0)U_n=Cos\frac{1}{n}$$

$$4°)U_m=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\log\frac{n}{n-2}\ 5°)U_m=(nLogn)^{-1}\ 6°)U_m=ne^{-m2}$$

تمرين8:

أدرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام المعرف ب:

$$1°)U_n=\frac{n^{Logm}}{(Logn)^m}\ 2°)U_n=e^{-\sqrt[4]{n^2+1}}\ 3°)U_n=(n+1)^{-\frac{1}{2}}(SinnLog)^2$$

$$4°)U_n=\frac{(-1)^m}{n^4 3+Cosn}\ 5°)U_n=\frac{(-1)^{m-1}n}{n^2-1}\ 6°)U_n=\frac{(-1)^n}{n^2+Sinn^2}$$

$$7°)U_n=\frac{2.4.6.........2n}{n^n}\ 8°)U_n=\frac{2^m Sin^{2n}\propto}{n^2},0\prec\propto\prec\frac{\pi}{2}$$

الحل :

1. وجه المقارنة:

أ- $\sum_{K=1}\frac{1}{2^K(2+\sin k)}$

لدينا $-1\le\sin k\le 1$

بإضافة العدد 2 نجد $1\le\sin k+2\le 3$

و منه $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin k}\le 1$

بالضرب في $\frac{1}{2^k}$ نجد $\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{3}\le\frac{1}{2^k(2+\sin k)}\le\frac{1}{2^k}$

السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ هندسية فهي متقاربة.

و بالتالي السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k(2+\sin k)}$ متقاربة.

ب- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^3+1}$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n^3+1>n^3$

و منه : $\frac{1}{n^3+1}<\frac{1}{n^3}\Rightarrow\frac{n}{n^3+1}<\frac{1}{n^3}$.

لكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة و بالتالي ا $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^3+1}$ لسلسلة متقاربة .

2. اختبار الجذر النوني:

أ– $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^n}$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}$.

نضع $U_n=\frac{2^{3n+1}}{n^n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2^{3n+1}}}{\sqrt[n]{n^n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{3n+1}{n}}}{n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n}\\&=0\\&<1\end{aligned}$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^n}$ متقاربة.

ب– $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}$.

نضع $U_n=\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)$$
$$=2>1$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n$ متباعدة .

3. اختبار المقارنة النسبي:

أ- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}=a_n$

لدينا $\frac{3n^2}{2^n\times n^2}=\frac{3}{2^n}$ نضع $b_n=\frac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n^2+5n}{2^n\times(n^2+1)}}{\frac{1}{2^n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n\times(n^2+1)}\times 2^n$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+5n}{(n^2+1)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^2}$$
$$=3$$
$$>1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة و بالتالي السلسلة (a_n) متقاربة.

ب- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$

نضع : $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ مع $b_n=\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}\times n$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$$
$$=1>0$$

لكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة و بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$ السلسلة متباعدة .

1. **اختبار النسبة :** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n}$

نضع : $a_n=\frac{4^n}{n}$ ز منه $a_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{n+1}$.

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{n+1}}{\frac{4^n}{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{4^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}4\frac{n}{n+1}\\&=4>1\end{aligned}$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n}$متباعدة

اختبار النسبة:

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$

نضع : $a_n=\frac{1}{n!}$ و منه $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\times n!\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}\\&=0\end{aligned}$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ متقاربة.

المتسلسلة باستخدام التعريف: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1\neq 0$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}$ متباعدة

اختبار التقارب المتسلسلة المتناوبة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,n}{n^2+1}$

نضع $(1)\ a_n=\frac{n}{n^2+1}$

و منه
$$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}=\frac{n+1}{n^2+2n+2}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\frac{n}{n^2+1}=\frac{(n+1)(n^2+1)-n(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n^3+n^2+n+1)-(n^3+2n^2+2n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}=\frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}=\frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\geq 0$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متناقصة .

ومن جهة أخرى .

$$(2)\ \lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$$

و بالتالي السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,n}{n^2+1}$ متقاربة.

اختبار التقارب المطلق والمشروط: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$

(1) بحث التناوب:

نضع : $(i)\ a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$

ومنه $a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$.

حساب $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\\ &= \frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}\\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n)} < 1\end{aligned}$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متناقصة .

و من جهة أخرى $(ii)\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)!} = 0$

و بالتاليالسلسلة متناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)!}$ متقاربة.

<u>اختبار رابي:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

نضع $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$ ومنه $a_{n+1} = \dfrac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$

$$\begin{aligned}\frac{a_n+1}{a_n} &= \frac{(2n+1)!\ (2n+1)!}{(2n+3)!\ (2n-1)!}\\ &= \frac{4n^2+2n}{4n^2+10n+6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{4n^2+2n}{4n^2+10n+6}\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{4n^2+10n+6-4n^2-2n}{4n^2+10n+6}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{8n+6}{4n^2+10n+6}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8n^2+6n}{4n^2+10n+6}\right)\\ &= 2 > 1\end{aligned}$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$ متقاربة .

<u>**باستخدام اختبار التكامل:**</u> $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{dn}{n}$

و منه

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{n\to+\infty} \int_2^{n} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\ln x\right]_2^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\ln n - \ln 2\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

و منه السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{dn}{n}$ متباعدة.

11. الدوال العددية لمتغيرين حقيقيين:

تعريف :

نسمي دالة عددية لمتغيرين حقيقيين معرفيين على مجموعة جزئية X من $\mathbb{R}^2$ كل تطبيق :

$$\begin{aligned} f : X \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

مثال:

الدالة

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

هي دالة عددية لمتغيرين حقيقيين x و y .

مثال:

الدالة

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \sqrt{1-x^2-y^2} \end{aligned}$$

هي دالة معرفة من أجل x و y بحيث $x^2+y^2 \le 1$.

مثال:

لدينا الدالة : $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$. أوجد $f(1,4)$. $f(0,0)$ ، $f(-1,9)$.

$f(1,4) = 5$ ، $f(0,0) = -1$ ، $f(-1,9) = 8$.

تعريف :

نسمي دالة متعددة الحدودلمتغيرين حقيقيين معرفيين على مجموعة جزئية X من $\mathbb{R}^2$ كل تطبيق :

$$\begin{aligned} p : \quad X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} a_{p,q} x^p y^q \end{aligned}$$

حيث $n,m \in \mathbb{N}$ و $a_{p,q} \in \mathbb{R}$ من أجل كل p و q.

مثال:

الدالة

$$\begin{aligned} p: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 - xy + y \end{aligned}$$

هي دالة متعددة الحدودلمتغيرين حقيقيين xو y .

تعريف :

نسمي دالة ناطقة لمتغيرين حقيقيين معرفيين على مجموعة جزئية Xمن $\mathbb{R}^2$ كل تطبيق :

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \end{aligned}$$

حيث p و qدوال متعددة الحدودلمتغيرين حقيقيين xو y و q لا تنعدم في X.

مثال:

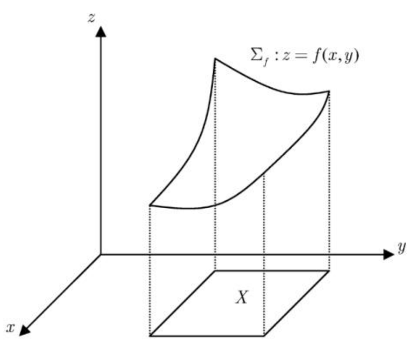
الدالة

$$\begin{aligned} f: & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x+y}{xy} \end{aligned}$$

هي دالة ناطقة لمتغيرين حقيقيين xو y .

1.11 التفسير الهندسي:

نسمي المساحة الممثلة للدالة $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المجموعة $\sum_f = \{(x,y,z) \in X \times \mathbb{R} / z = f(x,y)\}$



ملاحظات:

يمكننا التحدث عن الدالة المحدودة ، القيم الحدية لدوال ذات متغيرين حقيقيين كما هو معمول به في دوال ذات متغير حقيقي.

مثال 1:

لتكن

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

الدالة f محدودة.

باستخدام المتباينة $2|ab| \leq a^2+b^2$ نستنتج أن $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}$ وذاك من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

مثال 2:

لتكن

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2+y^2$$

الدالة f محدودة من الأسفل بـ $(0,0)$.

لدينا $f(x,y) = x^2+y^2 \geq (0,0) = f(0,0)$ وذاك من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2.11 النهايات :

تعريف :

نقول أن ℓ هي نهاية الدالة f عند (a_1,a_2).

و نكتب :

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = \ell$$

مثال 1:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+xy+y^2} = 0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{x^2+xy+y^2}=1$.

مثال 2:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}=+\infty$ لان $x^2+y^2\to 0$ مع $x^2+y^2>0$.

تمرين محلول:

1. بين انه إذا كان x و y أعداد حقيقية لدينا:

$$2|xy|\le x^2+y^2$$

2. لتكن الدالة

$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- بين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ لدينا: $|f(x,y)|\le 4\|(x,y)\|_2$.

حيث $\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.

- ثم استنتج ان f تقبل نهاية عند $(0,0)$.

الحل:

-1 لدينا:

$$\left(|x|-|y|\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2|xy|\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2|xy|$$

-2 نبين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ أن: $|f(x,y)|\le 4\|(x,y)\|_2$.

يمكن كتابة العلاقة السابقة كمايلي : $|xy|\le \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}$.

و منه نستنتج و بإستخدام المتراجحة المثلثية :

$$|f(x,y)|\le \frac{3\|(x,y)\|_2^2+\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2}\le 4\|(x,y)\|_2$$

و منه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0$

3.11الاستمرارية:

تعاريف :

- نقول أن الدالة $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ مستمرة عند (a_1,a_2) إذا و فقط إذا كانت :

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)=f(a_1,a_2).$$

- نقول أن الدالة $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ مستمرة على X إذا و فقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من X.

مثال1:

الدوال الثابتة مستمرة.

تمرين محلول2:

لتكن الدالة f معرفة على كمايلي :

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ حيث $(x,y)\neq(0,0)$

و $f(x,y)=(0,0)$ حيث $(x,y)=(0,0)$.

- هل الدالة f مستمرة عند $(0,0)$ ؟

الحل:

نضع $x=y=t$ و $t\to 0$ نجد: $f(t,t)=\dfrac{1}{2}$.

و بالتالي $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq(0,0)$ أي أن الدالة f غير مستمرة عند $(0,0)$.

4.11 الاشتقاقية:

1.4.11 المشتقات الجزئية:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقين x, y و $m_0(x_0,y_0)\in D_f$.

تعريف 1:

إذا كانت الدالة $f_x : x\mapsto f(x,y_0)$ معرفة في جوار x_0 بحيث $(x_0,y_0)\in D_f$.

- إذا قبلت الدالة f_x الاشتقاق عند x_0 نقول أن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي x عند النقطة (x_0,y_0).
- و نرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_x' أو $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ بحيث:

$$\begin{aligned} f_x'(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \end{aligned}$$

تعريف 2:

إذا كانت الدالة $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ معرفة في جوار y_0 بحيث $(x_0, y_0) \in D_f$.

- إذا قبلت الدالة f_y الاشتقاق عند y_0 نقول أن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي y عند النقطة (x_0, y_0) .
- و نرمز إلى هذه المشتقة بالرمز $f_y^{'}$ أو $\frac{\partial f}{\partial y}$ بحيث:

$$f_y^{'}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

ملاحظة:

إذا وجدت المشتقات الجزئية $f_X^{'}$ و $f_y^{'}$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق.

قاعدة:

مشتقة الدالة f هي مشتقتها بالنسبة لأحد المتغيرين مع إبقاء المتغير الثاني ثابت .

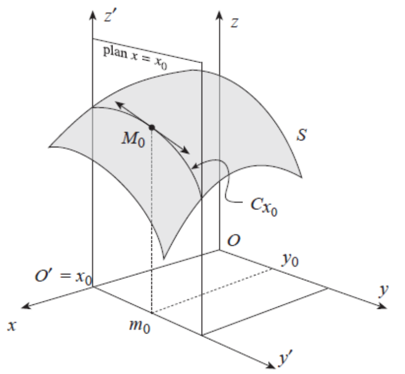
مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 y^3$.

لدينا : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^3$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^4 y^2$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 36$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12$.

2.4.11 التفسير الهندسي:

- ليكن S السطح ذو المعادلة $z = f(x, y)$ و $M_0(x_0, y_0, z_0)$ النقطة من S ذات الإحداثيات $\left(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)\right)$ في معلم O_{xyz}.
- تقاطع السطح S مع المستوي $y'O'z'$ ذو المعادلة $x = x_0$ هو منحنى $\left(C_{x_0}\right)$.
- في هذا المستوي $\left(C_{x_0}\right)$ هو منحنى الدالة $z = f_y(y) = f(x_0, y)$ و $f_y^{'}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ هو ميل المماس للمنحنى $\left(C_{x_0}\right)$ في النقطة M_0 .



أمثلة:

1. لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2$.

لدينا: $f_x'(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ ، $f_y'(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$.

2. لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=5x+y^3-2z^2$.

لدينا: $f_x'(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=5$ ، $f_y'(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3y^2$ ، $f_z'(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-4z$.

3. لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ كمايلي: $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$.

$$
\begin{aligned}
f_x'(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\
&=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-(2x+y)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
&=\frac{2x^2+2y^2-4x^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
&=\frac{-2x^2+2y^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y'(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
&=\frac{\left(x^2+y^2\right)-(2x+y)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
&=\frac{x^2+y^2-4xy-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
&=\frac{x^2-y^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

3.4.11 المشتقات الجزئية من رتب أعلى:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقين y, x تقبل الاشتقاق مرتين ، فإننا نعرف المشتقات

الجزئية من الرتبة الثانية كمايلي:

-1 $f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x} f$.

-2 $f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y\right) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y} f$.

-3 $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f$.

-4 $f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x\right) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f$.

مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 y^3$.

لدينا : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^3$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^4 y^2$.

4.4.11 مبرهنة شوارتز:

إذا قبلت الدالة f في جوار (x_0, y_0) مشتقات جزئية f''_{xy} و f''_{yx} مستمرة ، فهي متساوية : $f''_{xy} = f''_{yx}$

ملاحظة:

يمكن تعميم المبرهنة لعدة متغيرات و مشتقات جزئية ذات رتب اكبر من 2.

مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + xyz + xyz^3 + z^2$.

لدينا: $f^{(3)}_{z^2x}(x, y, z) = 6yz = f^{(3)}_{xz^2}(x, y, z)$.

5.4.11 معادلة لابلاس:

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فمعادلة لابلاس هي : $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$.

مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = e^{-2y} Cos(2x)$.

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4e^{-2y}\cos(2x).$$ و منه $$f'_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2e^{-2y}\sin(2x)$$

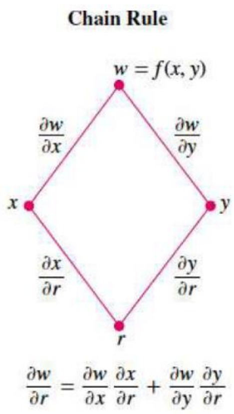
ومن جهة أخرى

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4e^{-2y}\cos(2x).$$ و منه $$f'_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2e^{-2y}\cos(2x)$$

و بالتالي: $f''_{xx}+f''_{yy}=4e^{-2y}\cos(2x)-4e^{-2y}\cos(2x)=0$.

و منه الدالة حققت معادلة لابلاس.

6.4.11 المشتقات الدوال المألوفة: (قاعدة السلسلة)



إذا كانت $w=f(x,y)$ حيث $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$ فإن:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \text{ و } \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

مثال :

إجاد $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}$ بدلالة r و s حيث: $w=x^2+y^2$، $x=r-s$، $y=r+s$.

لدينا $w'_x(x,y)=2x=2r-2s$ و $w'_y(x,y)=2y=2r+2s$.

$\frac{\partial x}{\partial r}=1$ ، $\frac{\partial x}{\partial s}=-1$ ، $\frac{\partial y}{\partial r}=1$ ، $\frac{\partial y}{\partial s}=1$.

ومنه $\frac{\partial w}{\partial r}=(2r-2s)\times 1+(2r+2s)\times 1=4r$.

و $\frac{\partial w}{\partial s}=(2r-2s)(-1)+(2r+2s)\times 1=4s$

5.11 تمارين :

تمرين 1:

أحسب f''_{x^2} ، f''_{x^2}، f''_{y^2}، f''_{xy}، f''_{yx} للدوال التالية :

-1 $f(x,y)=\ln(xy)$.

-2 $f(x,y)=x^2e^{3y}$.

3- $f(x,y)=e^{xy}$.

تمرين 2:

أثبت أن $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ للدوال التالية :

-1 $w(x,y)=\cos(x+y)+\sin(x-y)$.

-2 $w(x,y)=\cos(2x-2y)+e^{x}\sin(\alpha y)$.

تمرين 3:

بين أن للدوال التالية تحقق معادلة لابلاس :

1. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y)=e^{-3x}\sin(3y)$.

تمرين 4:

اثبت أن $f''_{xy}=f''_{yx}$ لكل مايلي :

1. $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$.
2. $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$
3. $f(x,y)=e^{-3x}\sin(3y)$.

تمرين 5:

باستخدام $f''_{xy}=f''_{yx}$ أوجد قيمة الثابت a و التي توجد من أجله الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون $f'_x=axy+3y^2$

و $f'_y=x^2+6xy$.

تمرين 6:

إذا كانت $w=f(x,y)$ حيث $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$ ، باستخدام قاعدة السلسلةأحسب $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}$.

1. $w=f(x,y,z)=xyz$ حيث $x=t$ ، $y=t^2$ و $z=t^3$.
2. $w=f(x,y)=x^2-y^2$ حيث $x=\cos t$ و $y=\sin t$.
3. $w=f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ حيث $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$.

12. المراجع:

المراجع العربية:

1. سعود محمود، التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
2. بابا حامد ،محاضرات في التحليل ، ديوان المطبوعات الجامعية، 1988.
3. بن عيسى لخضر ، التحليل الرياضي ، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
4. حسن رجب محمد، أساسيات الرياضيات الجبر والهندسة التحليلية والإحصاء، دار الفجر للنشر و التوزيع، مصر، 2000.
5. أ.علي حميدة,التحليلدروسوتمارينمحلولةالجزء 2-3، جامعةمنتوريقسنطينة.

المراجع الأجنبية:

1. Classes prépas1er année MATHS MPSI par Pr Marie ALLANO-CHEVALIER et Pr Xavier OUDOT (HACHETTE supérieur).
2. Tous les exercices d'analyse PC-PSI Par Pr EL-HAJ LAAMRI ; Pr PHILIPPE CHATEAUX , Pr GÉRARD EGUETHER , Pr ALAIN MANSOUX , Pr DAVID RUPPRECHT et Pr LAURENT SCHWALD.
3. Analyse 2éme année PC-PC*-PSI-PSI*(HACHETTE supérieur).
4. Analyse Mathématique 1 UMONS université de Mons.
5. Allab K. : Eléments d’analyse, Office des Publications Universitaires, Alger, 1979.
6. Boukra M., Djadane A., Medjadi D. & Sadallah B.-K. : analyse mathématique, Office des Publications Universitaires, Alger, 1992.
7. Kolmogorov, Fomine : Éléments de la théorie des fonctions et de l’analyse fonctionnelle, Ed. Mir, 1976
8. AnalyseDEUG Sciences 2e année G. A. Sedogbo ; Docteur en mathématiques.
9. Calcul des primitives, Bernard Ycart; Université Joseph Fourier, Grenoble.
10. Cours d'Analyse1; Laurent Schwartz-Professeur à l'école polytechniques et à la Faculté des sciences de Paris HERMANN,Paris 1967.
11. problèmes d'analyse I (nombres réels,suites et séries)exercices corrigés WieslawaJ, Kaczor et MariaT, Nowak.2008, EDP Sciences,
12. problèmes d'analyse III (intégration)exercices corrigés WieslawaJ, Kaczor et MariaT, Nowak. 2008, EDP Sciences.
13. Mathématiques en économie-gestion , Stéphane rossignol - openbook DUNOD 2015.

الفهرس