الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالـي و البحـث العلمـي
جامعــة ابــن خلــدون – تيارت –
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير
قســم العلــوم الاقتصـاديـــة

مطبــوعـــة بعنـــــــوان

محاضــرات فــي مقيــاس رياضيــات المؤسســة مدعمــة بأمثلــة محلولـــة

موجهــة لطلبة السنة الثانية التخصصات التاليـة:

- العلوم الاقتصادية
- العلوم التجاريـــة
- علوم التسييــــر

مـن اعـداد

الدكتــور: ستــي حميــد

السنــة الجامعيــة: 2016 – 2017

الفهـرس

مقـدمــة:

المطبوعة التي بين يديك و المعنون تحت عنوان " **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة مدعمة بأمثلة محلولة** " عبارة عن المولود الثالث ضمن سلسلة من المطبوعات التي تم إصدارها و سوف يتم اصدارها من قبل المؤلف في العديد من المقاييس. تهدف هذه المطبوعة إلى تدعيم ما هو متواجد من مراجع في هذا المقياس. تحتوي المطبوعة على العديد من الدروس مدعمة بأمثلة محلولة موزعة على ثلاثة محاور تضمنت ثمانية فصول التالية:

- **المحـور الأول: البرمجــة الخطيــــــــــة**
  1. صياغة المسألة (المشكلة)
  2. الحل البياني
  3. عرض الحل بطريقة السمبلكس
  4. المسألة الثنائية و تحليل الحساسية
- **المحـور الثاني: مشاكـــل النقــــل**
  5. صياغة المسألة (المشكلة)
  6. تمثيل مشكلة النقل بطريقة الشبكة
  7. عرض الحل بطريقة الشبكة
- **المحـور الثالث: مدخـل للبرمجـة غيـر الخطيـة بقيـود أو بغيـر قيــود**
  8. مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بغير قيود

هذه المطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية التخصصات التالية:

- العلوم الاقتصادية.
- العلوم التجارية.
- علوم التسيير.

بالإضافة إلى كل يريد الاطلاع و دراسة مقياس رياضيات المؤسسة.

هذا العمل المتواضع هو ثمرة تجربة متواضعة من تدريس هذا المقياس لعدة سنوات.

في الأخير لا يسعنا إلا أن نطلب من أي متصفح لهذه المطبوعة أستاذا أو طالبا أن لا يبخل علينا بأي ملاحظة أو انتقاد حول محتوى هذه المطبوعة.

تيـارت فـي فيفــري 2017

المؤلـف

المحور الأول : البــرمجـــــة الخطيـــــــة

الفصـــل 🕮 الأول

صياغـــــة المسألـــــة (المشكلـــــة)

Formulation du problème

أهــــداف الفصــــل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بما يلـي:

1. ماذا نعني بنموذج البرمجـة الخطيـة
2. الخطوات المتبعة في صياغة نموذج البرمجـة الخطيـة
3. مختلف مكونات و عناصر بنموذج البرمجـة الخطيـة
4. معرفـة مختلف فرضيات البرمجـة الخطيـة
5. مختلف استخدامات البرمجـة الخطيـة

01.01 – تمهيـد:

تواجه المؤسسات سواء الإنتاجية أو الخدماتية العديد من المشاكل، هناك نوع منها يتم حله باستخدام الطرق العلمية عن طريق نمذجة هذا النوع من المشاكل أي عن طريق صياغته في شكل رياضي في مرحلة أولى ثم يتم حله في مرحلة ثانية بغرض الوصول إلى الحل الأمثل. سوف يتم التطرق من خلال هذا الفصل إلى كيفية نمذجة بعض النوع من المسائل .

02.01 – النمذجـة :

تعني النمذجة على أنها عملية كتابة أو صياغة مشكلة أو مسألة ما في شكل رياضي، أي في شكل معادلات و متراجحات.

03.01 – النمـوذج:

تسمى الصيغة الرياضية الناتجة عن عملية النمذجة بالنموذج، و عليه يمكن تعريف النموذج على أنه التعبير أو الصياغة الرياضية لمشكل أو مسألة ما.

04.01 – البرمجـــة:

لا نعني بها البرمجة المتعلقة بالحاسوب و إنما نعني بها التخطيط لتحقيق هدف معين يتمثل في الحل الأمثل.[1] أما كلمة "الخطية" فتعني أن العلاقة بين متغيرات النموذج هي علاقة خطية و التي تعني أن درجة أو أس هذه المتغيرات يساوي الواحد.

05.01 – البرمجـة الخطيـــة:

تعرف البرمجة الخطية على أنها أسلوب أو أداة رياضية تسمح لنا بمعالجة المسائل التي تقوم على تحقيق هدف معين تحت مجموعة من القيود. هذا الهدف قد يكون تعظيم هامش ربح أو تدنئة التكاليف، أما القيود فتتمثل في محدودية الموارد المتاحة و التي عادة تكون مواد أولية، يد عاملة، رأس المال ...الخ.

06.01 – منهجيــة النمذجـة فـي البرمجـة الخطيــة:

نعني بمنهجية النمذجة، الخطوات و المراحل المتبعة في صياغة المشكل أو المسألة موضوع الدراسة في شكل رياضي أو في شكل صيغة رياضية. هذه الخطوات هي:

1. تحديد و تعريف متغيرات القرار.
2. صياغة دالة الهدف أو الدالة الاقتصادية.
3. صياغة القيود الوظيفية.
4. صياغة قيود عدم سلبية المتغيرات.

سوف نتناول بالتفصيل هذه الخطوات من خلال المثال التالي:

مثـــال 01.01:

[1] سوف يتم التعرف على ماذا نعني بالحل الأمثل من خلال الفصل الثاني.

أسس أحد المستمرين مؤسسة لإنتاج الأثاث، و كانت خطة المستثمر أن يبدأ بعدد محدود من المنتجات تتمثل في الكراسي و الطاولات لارتفاع الطلب عليهما و بساطة الإنتاج و رخص التكاليف. عند إجراء دراسة للعملية الإنتاجية تبين أن كل من إنتاج الكرسي الواحد يحتاج أو يستخدم 02 قطع من الخشب و 04 قطع حديد و عند بيعه يحقق ربح قدره 180 دج في حين أن إنتاج طاولة يحتاج أو يستخدم 05 قطع من الخشب و 6 قطع من الحديد و عند بيعه يحقق ربح قدره 400 دج. إنتاج هذين المنتجين يتطلب مرورهما على مستوى ورشة عمل حيث أن إنتاج الكرسي الواحد يتطلب 00.50 ساعة عمل و إنتاج طاولة واحدة يتطلب 01.50 ساعة علما أن صاحب المؤسسة لا يتوفر إلا على 160 قطع من الخشب و 240 قطع من الحديد و الوقت المتاح على مستوى الثروة يقدر بـ: 500 ساعة. المستثمر يهدف إلى تعظيم ربحه الناتج عن إنتاج الكراسي و الطاولات

– **المطلـــوب:**

- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج (أي الكراسي و الطاولات) بحيث يحقق المستثمر هدفه الممثل في تعظيم الربح.

بغرض صياغة المشكل أعلاه في شكل نموذج برمجة خطية أي في شكل رياضي نتبع مجموعة الخطوات المذكورة أعلاه:

1. **تحديد و تعريف متغيرات القرار:** بما أن المستثمر ينتج منتجين فإن عدد متغيرات القرار هو اثنان هما:

نسمي X_1 عدد (كمية) الكراسي التي سوف ينتجها المستثمر و تحقق له أعظم ربح. علما أن X_1 مجهولة يجب تحديد قيمتها.

نسمي X_2 عدد (كمية) الطاولات التي سوف ينتجها المستثمر و تحقق له أعظم ربح. علما أن X_2 مجهولة يجب تحديد قيمتها.

2. **صياغة دالة الهدف:**

بما أن هدف المستثمر هو تعظيم ربحه. فإنه عليه أولا أن يقوم **بتحديد** ربحه ثم يقوم **بتعظيمه** ثانيا.

أولا: تحديد ربح المستثمر:

الربح الإجمالي الذي يتحصل عليه المستثمر مترتب عن عملية إنتاج (بيع) المنتجين الكراسي و الطاولات، بمعنى أن هناك ربحين، ربح مترتب عن إنتاج الكراسي و ربح مترتب عن إنتاج الطاولات. السؤال الذي يطرح، ما هو الربح المترتب عن كل منتج؟

1. **الربح المترتب عن المنتج الأول الممثل في الكراسي:**

تبعا لمعطيات المشكل فإنتاج كرسي واحد يترتب عليه ربح مقداره 180 دج و هذا يمكن التعبير عنه بالكتابة التالية:

– إنتاج 01 كرسي يحقق ربح مقداره $01 \times 180 = 180$ دج.

– إنتاج 02 كرسي يحقق ربح مقداره $02 \times 180 = 360$ دج.

– إنتاج 03 كرسي يحقق ربح مقداره $03 \times 180 = 540$ دج.

- ....
- ....

بما أن من المستثمر سوف ينتج كمية أو عدد من الكراسي مقداره X_1 فإن الربح المترتب عن هذه الكمية المنتجة هو $180X_1$ دج. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

- إنتاج X_1 كرسي يحقق ربح مقداره $180 \times X_1 = 180X_1$ دج.

2. الربح المترتب عن المنتج الثاني الممثل في الطاولات:

تبعا لمعطيات المشكل، فإنتاج طاولة واحدة يترتب عنه تحقيق ربح مقداره 400 دج و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

- إنتاج 01 طاولة يحقق ربح مقداره $01 \times 400 = 400$ دج.
- إنتاج 02 طاولة يحقق ربح مقداره $02 \times 400 = 800$ دج.
- إنتاج 03 طاولة يحقق ربح مقداره $03 \times 400 = 1200$ دج.
- ....
- ....

بما أن من المستثمر سوف ينتج كمية أو عدد من الطاولات مقداره X_2 فإن الربح المترتب عن هذه الكمية المنتجة هو $400X_2$ دج. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

- إنتاج X_2 طاولة يحقق ربح مقداره $400 \times X_2 = 400X_1$ دج.

بالكتابة $Z = 180X_1 + 400X_2$ نكون قد صغنا الربح الذي سوف يحققه المستثمر في شكل معادلة رياضية.

<u>ثانيا: تعظيم ربح المستثمر:</u>

بعد عملية تحديد ربح المستثمر و الذي يساوي $Z = 180X_1 + 400X_2$ نقوم بعملية تعظيم هذا الربح، و من أجل ذلك يكفي إضافة كلمة تعظيم *Maximisation* للعلاقة الرياضية التي تعبر على ربح المستثمر، و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$Maximisation \quad Z = 180X_1 + 400X_2$$

أو

$$Max \quad Z = 180X_1 + 400X_2$$

بالكتابة $Max \quad Z = 180X_1 + 400X_2$ نكون قد عبرنا عن هدف المستثمر في شكل علاقة (معادلة) رياضية.

بما أن هذه العلاقة تعبر عن هدف المستثمر، فإنها تسمى **دالـة الهدف** أو **الدالـة الاقتصاديـة**.

3. صياغـة القيـود الوظيفيـة:

على المؤسسة عند تعظيمها لربحها أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية و الممثلة في كل من الخشب و الحديد. و بالتالي المتاح من هاتين المادتين الأوليتين يعتبر قيد على المؤسسة احترامه و أخذه بعين الاعتبار.

- **قيـد الخشـب:**

الكمية الإجمالية للخشب اللازمة أو التي سوف تستخدمها المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي تساوي مجموع ما يلي:

– كمية الخشب اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1

– كمية الخشب اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2

1–/ كمية الخشب اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1 :

- لإنتاج 1 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $01 \times 02 = 02$ وحدة خشب
- لإنتاج 2 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $02 \times 02 = 04$ وحدة خشب
- لإنتاج 3 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $03 \times 02 = 06$ وحدة خشب
- ....
- ....
- لإنتاج X_1 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $X_1 \times 02 = 02X_1$ وحدة خشب

2–/ كمية الخشب اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2 :

- لإنتاج 1 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $01 \times 05 = 05$ وحدة خشب
- لإنتاج 2 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $02 \times 05 = 10$ وحدة خشب
- لإنتاج 3 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $03 \times 05 = 15$ وحدة خشب
- ....
- ....
- لإنتاج X_2 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $X_2 \times 05 = 05X_2$ وحدة خشب

و بالتالي فإن الكمية الإجمالية للخشب اللازمة أو التي سوف تستخدمها المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي تساوي مجموع ما يلي:

$$02X_1 + 05X_2$$

و بما أن هذه الكمية الإجمالية للخشب اللازمة أو التي سوف تستخدمها المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي يجب أن لا تتعدى (أي أقل أو تساوي) ما هو متاح من خشب في المؤسسة الذي هو 160 و بالتالي يصبح القيد على الشكل التالي:

$$02X_1 + 05X_2 \leq 160$$

- **قيـد الحديـد:**

الكمية الإجمالية للحديد اللازمة أو التي سوف تستخدمها المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي تساوي مجموع ما يلي:

– كمية الحديد اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1

– كمية الحديد اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2

1–/ كمية الحديد اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1 :

- لإنتاج 1 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $01 \times 04 = 04$ وحدة حديد
- لإنتاج 2 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $02 \times 04 = 08$ وحدة حديد
- لإنتاج 3 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $03 \times 04 = 12$ وحدة حديد
- ....
- ....
- لإنتاج X_1 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $X_1 \times 04 = 04X_1$ وحدة حديد

2–/ كمية الحديد اللازمة أو المستخدمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2 :

- لإنتاج 1 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $01 \times 06 = 06$ وحدة حديد
- لإنتاج 2 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $02 \times 06 = 12$ وحدة حديد
- لإنتاج 3 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $03 \times 06 = 18$ وحدة حديد
- ....
- ....
- لإنتاج X_2 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $X_2 \times 06 = 06X_2$ وحدة حديد

و بالتالي فإن الكمية الإجمالية للحديد اللازمة أو التي سوف تستخدمها المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي تساوي مجموع ما يلي:

$$04X_1 + 06X_2$$

و بما أن هذه الكمية الإجمالية للحديد اللازمة أو التي سوف تستخدمها المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي يجب أن لا تتعدى (أي أقل أو تساوي) ما هو متاح من حديد في المؤسسة الذي هو 240 و بالتالي يصبح القيد على الشكل التالي:

$$04X_1 + 06X_2 \leq 240$$

- **قيد الوقت المتاح على مستوى الورشة:**

الوقت الإجمالي على مستوى الورشة اللازم أو التي سوف تستخدمه المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي تساوي مجموع ما يلي:

– الوقت اللازم أو المستخدم لإنتاج الكراسي بكمية X_1

– الوقت اللازم أو المستخدم لإنتاج الطاولات بكمية X_2

1–/ الوقت اللازم أو المستخدم لإنتاج الكراسي بكمية X_1 :

- لإنتاج 1 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $01\times00.50=00.50$ ساعة
- لإنتاج 2 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $02\times00.50=01.00$ ساعة
- لإنتاج 3 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $03\times00.50=01.50$ ساعة
- ....
- ....
- لإنتاج X_1 وحدة من الكراسي يلزمنا أو نستخدم $00.50\times X_1=00.50X_1$ ساعة

2-/ الوقت اللازم أو المستخدم لإنتاج الطاولات بكمية X_2 :

- لإنتاج 1 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $01\times01.50=01.50$ ساعة
- لإنتاج 2 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $02\times01.50=03.00$ ساعة
- لإنتاج 3 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $03\times01.50=04.50$ ساعة
- ....
- ....
- لإنتاج X_2 وحدة من الطاولات يلزمنا أو نستخدم $01.50\times X_2=01.50X_2$ ساعة

و بالتالي فإن الوقت الإجمالي على مستوى الورشة اللازم أو التي سوف تستخدمه المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي تساوي مجموع ما يلي:

$$00.50X_1+01.50X_2$$

و بما أن هذا الوقت الإجمالي اللازم أو التي سوف تستخدمه المؤسسة لإنتاج المنتجين الممثلين في الكراسي و الطاولات بكميات X_1 و X_2 على التوالي يجب أن لا يتعدى (أي أقل أو تساوي) ما هو متاح من وقت في الورشة هو 500 و بالتالي يصبح قيد الوقت على الشكل التالي:

$$00.50X_1+01.50X_2\leq500$$

4. صياغة قيود عدم سلبية المتغيرات:

- بما أن الكمية التي سوف تنتج من الكراسي X_1 لا يمكن أن تكون سالبة معنى ذلك أنها تكون موجبة أو معدومة و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$X_1\geq0$$

- بما أن الكمية التي سوف تنتج من الطاولات X_2 لا يمكن أن تكون سالبة معنى ذلك أنها تكون موجبة أو معدومة و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$X_2\geq0$$

بتجميع العلاقات الرياضية المتوصل إليها في كل خطوة أعلاه نحصل على الصياغة الرياضية لمشكل المستثمر. هذه الصياغة الرياضية تسمى **نموذج البرمجـة الخطيـة.**

$$Max \quad Z = 180X_1 + 400X_2$$ دالة الهدف

Soumise Aux Contraintes

$$02X_1 + 05X_2 \leq 160$$ قيد الخشب المتاح

$$04X_1 + 06X_2 \leq 240$$ قيد الحديد

$$00.50X_1 + 01.50X_2 \leq 500$$ قيد الوقت

$$X_1 \geq 0$$ قيد عدم سلبية المتغيرة X_1

$$X_2 \geq 0$$ قيد عدم سلبية المتغيرة X_2

07.01 – استخـدامـات البرمجـة الخطيــة:

هناك العديد من المجالات التي يتم فيها تطبيق البرمجة الخطية، نذكر على سبيل المثال لا الحصر ما يلي:

01.07.01 – مسائل الإنتاج:

في مسائل الإنتاج يكون المشكل هو تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج باستخدام مجموعة من الموارد (مواد أولية، آلات . . . الخ) التي تتوفر بكميات محدودة بحيث يتم تحقيق أعظم ربح أو إيراد.

مثـــال 02.01:

مؤسسة لإنتاج المنتجات البلاستيكية، تركز على إنتاج منتجين P1 و P2 خلال السنة القادمة و ذلك لكثرة الطلب على هذين المنتجين من جهة و رخص تكاليف إنتاج من جهة أخرى. تستخدم المؤسسة لإنتاج هذين المنتجين مادتين خام Mat-1 و Mat-2 بكميات متفاوتة. بالإضافة إلى المادتين الخام، تستخدم المؤسسة آلتين Machine-01 و Machine-02. الجدول أدناه يقدم الاستهلاك الوسطية لكل منتج من كل مادة خام و كذا الوقت على مستوى كل آلة.

	Mat-01	Mat-02	Machine-01	Machine-02
المنتج P1	01	05	02	00
المنتج P2	01	06	01	03

المؤسسة لا تتوفر إلا على 400 وحدة من المادة الخام الممثلة Mat-01 ، أما المادة الخام الأخرى فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 600 و 900 ساعة.

حسب مدير المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب إنتاج على الأقل 150 وحدة من المنتج P1 فيما يخص الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي 300 و 200 دج.

– المطلـوب:

- حدد الكميات الواجب إنتاجها من المنتجين بغرض تحقيق أعظم ربح.

1. تحديد و تعريف متغيرات القرار:

- X_1 : تمثل عدد الوحدات من المنتج الأول P1 التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح. حيث أن X_1 مجهولة يجب تحديد قيمتها.
- X_2 : تمثل عدد الوحدات من المنتج الثاني P2 التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح. حيث أن X_2 مجهولة يجب تحديد قيمتها.

2. صياغة دالة الهدف:

الهدف هو تعظيم الربح و عليه فإن دالة الهدف هي التالية:

$$Max \quad Z = 300X_1 + 200X_2$$

3. صياغة القيود الوظيفية:

تتمثل القيود الوظيفية لهذا المشكل في:

- الوقت المتاح أو الطاقة القصوى على مستوى الآلة الأولى Machine-01
- الوقت المتاح أو الطاقة القصوى على مستوى الآلة الثانية Machine-01
- الكمية المتاحة من المادة الأولية الأولى Mat-01
- الكمية الواجب إنتاجها من المنتج الأول P1

- قيد الوقت المتاح أو الطاقة القصوى على مستوى الآلة الأولى Machine-01:

$$02X_1 + 01X_2 \quad \leq \quad 600$$

- قيد الوقت المتاح أو الطاقة القصوى على مستوى الآلة الثانية Machine-01:

$$00X_1 + 03X_2 \quad \leq \quad 900$$

- قيد الكمية المتاحة من المادة الأولية الأولى Mat-01:

$$01X_1 + 01X_2 \quad \leq \quad 400$$

- قيد الكمية الواجب إنتاجها من المنتج الأول P1:

$$X_1 \quad \geq \quad 150$$

4. صياغة قيود عدم سلبية المتغيرات: $X_1 \geq 0$ ، $X_2 \geq 0$

بتجميع العلاقات الرياضية المتوصل إليها في كل خطوة أعلاه نحصل على نموذج البرمجة الخطية

$$Max \quad Z = 300X_1 + 200X_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} &02X_1 + 01X_2 \leq 600 \\ &00X_1 + 03X_2 \leq 900 \\ &01X_1 + 01X_2 \leq 400 \\ &01X_1 \geq 150 \\ &X_1 \geq 0 \\ &X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

02.07.01 – مسائل المزيج الإنتاجي:

في العديد من عمليات الإنتاج يتم مزج مجموعة من العناصر بكميات متفاوتة للحصول على منتجا جديدا نجد هذه الحالة كثيرا في عملية إنتاج الأدوية . . . إلخ. المشكل في هذا النوع من المسائل هو تحديد الكميات الواجب استخدامها من كل عنصر لإنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفة ممكنة.

مثـــال 03.01:

تحصلت مؤسسة كميائية على طلبية تقدر بـ: 1000 كلغ من خليط مكون من ثلاث مركبات A، B و C شريطة أن هذا الخليط يتضمن المواصفات التالية:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 100 كلغ من المركب A .
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل على 200 كلغ من المركب B .
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل على 100 كلغ من المركب C .

علما أن تكلفة شراء المركبات الثلاث هي 20 دج، 30 دج و 40 دج.

- المطلـــوب:

- قدم نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد عدد الوحدات من المركبات C،B،A المادتين الغذائيتين الواجب اقتنائها من قبل المؤسسة بغرض تحضير الخليط بأقل تكلفة ممكنة.

1. تحديد و تعريف متغيرات القرار:

1. X_1 : تمثل عدد الوحدات أو الكمية من المركب A التي سوف تقتنيها أو تشتريها المؤسسة. حيث أن X_1 مجهولة يجب تحديد قيمتها.
2. X_2 : تمثل عدد الوحدات أو الكمية من المركب B التي سوف تقتنيها أو تشتريها المؤسسة. حيث أن X_2 مجهولة يجب تحديد قيمتها.
3. X_3 : تمثل عدد الوحدات أو الكمية من المركب C التي سوف تقتنيها أو تشتريها المؤسسة. حيث أن X_3 مجهولة يجب تحديد قيمتها.

2. صياغة دالـة الهدف:

هدف المؤسسة يتمثل في تدنئة التكلفة الإجمالية المترتبة عن عملية شراء أو اقتناء المركبات A,B,C بالكميات المجهولة X_1, X_2, X_3 على التوالي. هذه التكلفة الإجمالية تساوي مجموع ما يلي:

- التكلفة المترتبة عن شراء المركب A بكمية X_1 : $20 \times X_1$
- التكلفة المترتبة عن شراء المركب B بكمية X_2 : $30 \times X_2$
- التكلفة المترتبة عن شراء المركب C بكمية X_3 : $40 \times X_3$

و عليه فإن التكلفة الإجمالية المترتبة عن عملية شراء أو اقتناء المركبات A,B,C بالكميات المجهولة X_1, X_2, X_3 على التوالي تساوي: $Z = 20X_1 + 30X_2 + 40X_3$

و بما أن المؤسسة تهدف إلى تدنئة هذه التكلفة الإجمالية، فإن دالة الهدف تأخذ الصيغة التالية:

$$Min \quad Z = 20X_1 + 30X_2 + 40X_3$$

3. صياغة القيود الوظيفيـة:

انطلاقا من معطيات المسألة فإن القيود الوظيفية للمسألة تتمثل فيما يلي:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 100 كلغ من المركب A: $X_1 \leq 100$
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل على 200 كلغ من المركب B: $X_2 \geq 200$
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل على 100 كلغ من المركب C: $X_3 \geq 100$
- تحصلت مؤسسة كميائية على طلبية تقدر بـ 1000 كلغ : $X_1 + X_2 + X_3 \geq 1000$

4. صياغة قيود عدم سلبيـة المتغيرات: $X_1 \geq 0$ ، $X_2 \geq 0$ ، $X_3 \geq 0$

بتجميع العلاقات الرياضية المتوصل إليها في كل خطوة أعلاه نحصل على نموذج البرمجة الخطية

$$Min \quad Z = 20X_1 + 30X_2 + 40X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} &X_1 \leq 100 \\ &X_2 \geq 200 \\ &X_3 \geq 100 \\ &X_1 + X_2 + X_3 \geq 1000 \\ &X_1 \geq 0 \\ &X_2 \geq 0 \\ &X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

03.07.01 – مسائل الدعاية و الإشهار:

في مسائل الدعاية و الإشهار المشكل هو تحديد عدد مرات إجراء الحملة الإشهارية في كل وسيلة إعلان من بين مختلف وسائل الإعلان المتاحة و ذلك تحت مجموعة من القيود مثل الغلاف المالي أو الميزانية المخصصة للعملية الإشهارية.

مثـــال 04.01:

بغرض فتح مطعم جديد أراد صاحب المطعم إجراء حملة إشهار عبر مختلف وسائل الإعلام فمن أجل هذه العملية تم رصد غلاف مالي يقدر بـ: 500.000 دج. من خلال العروض الممكنة و المقدمة هناك أربع إمكانيات لإجراء الحملة الإشهارية و هي:

1. الإشهار عن طريق التلفزيون.
2. الإشهار عن طريق الراديو.
3. الإشهار عن طريق الجريدة.
4. الإشهار عن طريق وضع نص الإشهار في صناديق البريد.

صاحب المطعم يريد بحملته الاشهارية هذه الوصول أو مس الأفراد ذوي الدخل الشهري الذي يفوق أو يقل عن 40.000 دج.

من الخبرة السابقة تبين لصاحب المطعم بأن عدد الأفراد الذين يمكن الوصول إليهم عن طريق كل عملية إشهار عبر مختلف الوسائل أو الإمكانيات الأربع أعلاه هي موضحة في الجدول أدناه:

طريقة الإعلان	عدد العائلات ذات الدخل الشهري أقل من 40.000	عدد العائلات ذات الدخل الشهري أكبر من 40.000
التلفزيون	4.000	1500
الراديو	1.000	600
الجريدة	800	500
صناديق البريد	30	40

تكاليف عملية الإشهار يقدمها الجدول أدناه:

طريقة الإعلان	تكلفة الإشهار
التلفزيون	5.000
الراديو	2.000
الجريدة	600
صناديق البريد	10

صاحب المطعم يضع قيودا على حملته الإشهارية و ذلك حتى تكون هذه الأخيرة متوازنة :

1. الميزانية المخصصة أو الممنوحة للإشهار عن طريق الجريدة و صناديق البريد لا تتجاوز 10 % من الغلاف المالي المخصص لعملية الإشهار.
2. يجب مس على الأقل 5.000 فرد الذين دخلهم السنوي يفوق 40.000 دج و مس على الأقل 1.000 فرد الذين دخلهم يقل عن 40.000 دج .
3. عدد الإعلانات عن طريق التلفزيون لا يفوق ثلاث مرات.
4. عدد الإعلانات عن طريق الجريدة يجب أن يساوي عدد الإعلانات في التلفزيون و الراديو مجتمعة

يهدف صاحب المطعم إلى تعظيم عدد الأفراد الذين يمسهم الإشهار أو بعبارة أخرى مس أكبر عدد ممكن من الأفراد عن طريق الإعلانات عبر مختلف الوسائل.

- المطلـوب:

- صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة الذي يحقق هدف صاحب المطعم.

1. تحديد و تعريف متغيرات القرار:

- X_1 : تمثل عدد مرات إجراء الحملة الإشهارية عن طريق التلفزيون
- X_2 : تمثل عدد مرات إجراء الحملة الإشهارية عن طريق الراديو
- X_3 : تمثل عدد مرات إجراء الحملة الإشهارية عن طريق الجريدة

- X_4 : تمثل عدد مرات إجراء الحملة الإشهارية عن طريق وضع نص الإشهار في صناديق البريد.

2. صياغة دالة الهدف:

هدف صاحب المطعم هو الوصول أو مس أكبر عدد من الأفراد ذوي الدخل الشهري الذي يفوق أو يقل عن 40.000 دج.

إن العدد الإجمالي للأفراد الذين تمسهم الحملة الإشهارية مترتب عن إجراء الحملة الإشهارية في مختلف وسائل الإعلام الأربع. و عليه فإن العدد الإجمالي للأفراد ما هو إلا مجموع عدد الأفراد المترتب عن كل وسيلة

- عدد الأفراد المترتب عن الحملة الإشهارية عن طريق التلفزيون: يساوي $X_1 \times (4000+1500)$
- عدد الأفراد المترتب عن الحملة الإشهارية عن طريق الراديو: يساوي $X_2 \times (1000+600)$
- عدد الأفراد المترتب عن الحملة الإشهارية عن طريق الجريدة: يساوي $X_3 \times (800+500)$
- عدد الأفراد المترتب عن الحملة الإشهارية عن طريق صناديق البريد: يساوي $X_4 \times (30+40)$

و بالتالي يصبح العدد الإجمالي للأفراد الذين تمسهم الحملة الإشهارية و التي نسميه Z يساوي ما يلي:

$$Z = (4000+1500)X_1 + (1000+600)X_2 + (800+500)X_3 + (30+40)X_4$$

$$Z = 5500X_1 + 1600X_2 + 1300X_3 + 70X_4$$

و بما أن هدف صاحب المطعم هو تعظيم العدد الإجمالي للأفراد، فإن دالة الهدف هي التالية:

$$Max \quad Z = 5500X_1 + 1600X_2 + 1300X_3 + 70X_4$$

3. صياغة القيود الوظيفية:

- قيد الميزانية المخصصة للحملة الإشهارية: $5000X_1 + 2000X_2 + 600X_3 + 10X_4 \le 500000$
- الإشهار عن طريق الجريدة و صناديق البريد لا تتجاوز 10 % من الغلاف المالي المخصص لعملية الإشهار.

$$600X_3 + 10X_4 \le 10\% \times (500000)$$

$$600X_3 + 10X_4 \le 0.10 \times (500000)$$

$$600X_3 + 10X_4 \le 50000$$

- يجب مس على الأقل 5.000 فرد الذين دخلهم السنوي يفوق 40.000 دج

$$4000X_1 + 1000X_2 + 800X_3 + 30X_4 \ge 5000$$

- يجب مس على الأقل 1.000 فرد الذين دخلهم يقل عن 40.000 دج

$$1500X_1 + 600X_2 + 500X_3 + 50X_4 \ge 1000$$

- عدد الإعلانات عن طريق التلفزيون لا يفوق ثلاث مرات: $X_1 \le 3$
- عدد الإعلانات عن طريق الجريدة يجب أن يساوي عدد الإعلانات في التلفزيون و الراديو مجتمعة

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_3 - X_1 - X_2 = 0$$

4. صياغة قيود عدم سلبية المتغيرات: $X_4 \geq 0$ ، $X_3 \geq 0$ ، $X_2 \geq 0$ ، $X_1 \geq 0$

بتجميع العلاقات الرياضية المتوصل إليها في كل خطوة أعلاه نحصل على نموذج البرمجة الخطية

$$Max \quad Z = 5500X_1 + 1600X_2 + 1300X_3 + 70X_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}
&5000X_1 + 2000X_2 + 600X_3 + 10X_4 \leq 500000 \\
&600X_3 + 10X_4 \leq 50000 \\
&4000X_1 + 1000X_2 + 800X_3 + 30X_4 \geq 5000 \\
&1500X_1 + 600X_2 + 500X_3 + 50X_4 \geq 1000 \\
&01X_1 \leq 03 \\
&X_3 - X_1 - X_2 = 0 \\
&X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0
\end{aligned}$$

04.07.01 – مسائــل النقــل:

في مسائل النقل المشكل هو تحديد تحديد الكميات و التي نسميها X_{ij} التي ننقلها المؤسسة من كل مركز إنتاج C_i حيث أن $i = 1,2,3,.......$ إلى كل مركز توزيع D_j حيث أن $j = 1,2,3,.......$ و ذلك بأقل تكلفة.

مثـــال 05.01:

تتوفر مؤسسة على 03 **مراكز إنتاج** $C1, C2, C3$ مختلفة و متباعدة و 05 **مراكز توزيع** $D1, D2, D3, D4, D5$ تتواجد في مناطق مختلفة، هذه المؤسسة تنتج منتج معين و ليكن P على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة ليتم بعد ذلك **نقلـه** إلى مختلف مراكز التوزيع الخمسة أين يتم تموين مختلف زبائن المؤسسة. نشير إلى أن مراكز الإنتاج الثلاثة تتوفر على كمية معينة من المنتج P، أما بالنسبة لمراكز التوزيع الخمسة فلها طلبات معينة. الجدول أدناه يوضح الكميات المتاحة أو المعروضة و التي نسميها a_i على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة $C1, C2, C3$.

الوحدة: طن

مركز الإنتـاج	$C1$	$C2$	$C3$	مجموع العرض
الكمية المتاحة (العرض) a_i	$a_1 = 240$	$a_2 = 160$	$a_3 = 260$	660

الجدول أدناه يوضح الكميات المطلوبة و التي نسميها d_j من قبل مراكز التوزيع الخمسة $D1, D2, D3, D4, D5$.

الوحدة: طن

مركز التـوزيع	D1	D2	D3	D4	D5	مجموع الطلب
الكمية المطلوبة(الطلب) d_j	$d_1 = 120$	$d_2 = 130$	$d_3 = 145$	$d_4 = 125$	$d_5 = 145$	660

كما نشير إلى أن عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة $C1,C2,C3$ إلى مراكز التوزيع الخمسة $D1,D2,D3,D4,D5$ يترتب عليها تحمل تكلفة، هذه التكلفة تسمى **تكلفـة النقـل**. الجدول (المصفوفة) أدناه يقدم التكاليف الوحدوية C_{ij} أي تكلفة نقل الوحدة الواحدة أي الطن الواحد من كل مركز إنتاج من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى كل مركز توزيع من مراكز التوزيع الخمسة. حيث أن:

C_{ij}: تمثل تكلفة النقل الوحدوية من مركز الإنتاج رقم i إلى مركز التوزيع رقم j ، أي تكلفة نقل الطن الواحد من مركز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

الوحدة: وحدة نقدية

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$
$C1$	$C_{11}=100$	$C_{12}=800$	$C_{13}=100$	$C_{14}=500$	$C_{15}=400$
$C2$	$C_{21}=500$	$C_{22}=500$	$C_{23}=300$	$C_{24}=600$	$C_{25}=700$
$C3$	$C_{31}=200$	$C_{32}=900$	$C_{33}=500$	$C_{34}=900$	$C_{35}=800$

– **المطلـوب:**

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكل جدول النقل الموافق لهذه المسألة.
2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه في السؤال 1.

1. نموذج النقل الموافق:

بغرض كتابة مسألة النقل في شكل نموذج رياضي يسمى نموذج النقل Modèle de Transport.

و بغرض بلوغ ذلك نتبع الخطوات التالية:

1-/ تحديد و تعريف متغيرات القرار:

نسمي X_{ij} حيث أن $(i=1,2,3),(j=1,2,3,4,5)$ الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مختلف مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مختلف مراكز التوزيع الخمسة. هذه الكميات مجهولة يجب تحديد قيمتها.

بما أن عدد المنابع الممثلة في مراكز الإنتاج تساوي $m=03$ و عدد المصبات الممثلة في مراكز التوزيع تساوي $n=05$ فإن عدد متغيرات القرار يساوي $3\times5=15$ هي:

X_{11} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 01 إلى مركز التوزيع رقم 01.

X_{12} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 01 إلى مركز التوزيع رقم 02.

....

....

X_{15} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 01 إلى مركز التوزيع رقم 05.

X_{21} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 02 إلى مركز التوزيع رقم 01.

X_{22} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 02 إلى مركز التوزيع رقم 02.

....

....

X_{25} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 02 إلى مركز التوزيع رقم 05.

X_{31} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 03 إلى مركز التوزيع رقم 01.

X_{32} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 03 إلى مركز التوزيع رقم 02.

....

....

X_{35} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 03 إلى مركز التوزيع رقم 05.

2-/ صياغة دالـة الهدف:

$$\begin{aligned} Min \quad Z = {} & 100X_{11} + 800X_{12} + 100X_{13} + 500X_{14} + 400X_{15} + \\ & 500X_{21} + 500X_{22} + 300X_{23} + 600X_{24} + 700X_{25} + \\ & 200X_{31} + 900X_{32} + 500X_{33} + 900X_{34} + 800X_{35} + \end{aligned}$$

3-/ صياغة القيـود الوظيفيـة:

قيود العرض

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} &= 240 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} &= 160 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} &= 260 \end{aligned}$$

قيود الطلب

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 120 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 130 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 145 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 125 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} &= 140 \end{aligned}$$

4-/ صياغة قيود عدم سلبيـة المتغيرات: $(j = 1,2,3,4,5)$, $(i = 1,2,3)$, $\quad X_{ij} \geq 00$

بتجميع العلاقات أعلاه نحصل على نموذج النقل التالي:

$$\begin{aligned} Min \quad Z = {} & 100X_{11} + 800X_{12} + 100X_{13} + 500X_{14} + 400X_{15} + \\ & 500X_{21} + 500X_{22} + 300X_{23} + 600X_{24} + 700X_{25} + \\ & 200X_{31} + 900X_{32} + 500X_{33} + 900X_{34} + 800X_{35} + \end{aligned}$$

Soumise Aux Contraintes :

قيود العرض

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} &= 240 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} &= 160 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} &= 260 \end{aligned}$$

قيود الطلب

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 120 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 130 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 145 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 125 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} &= 140 \end{aligned}$$

$$X_{ij} \geq 00 \quad ,(i=1,2,3)\ ,\ (j=1,2,3,4,5)$$

05.07.01 – مسائل التخصيص (التعيين):

في مسائل التخصيص المشكل هو تخصيص و تعيين لكل عمل أو وظيفة من بين n وظيفة، الشخص أو الآلة من بين n آلة التي تنجز هذا العمل أو الوظيفة و هذا **بأقل تكلفـة إنجـاز ممكنة**.

مثـــال 06.01:

تتوفر مؤسسة على 04 ألآت $(M1, M2, M3, M4)$ لإنجاز 04 أعمال أو وظائف $(T1, T2, T3, T4)$، علما أن كل آلة يمكنها أن تنجز أي من الأعمال الأربعة. غير أنه يشترط أن كل آلة يجب أن تنجز عمل واحد و واحد فقط بمعنى أن كل عمل يجب أن ينجز من طرف آلة واحدة و واحدة فقط. كما نشير إلى أن عملية إنجاز هذه الأعمال الأربعة من قبل الآلات الأربع يترتب عليها تحمل تكلفة من قبل المؤسسة. الجدول (المصفوفة) أدناه يقدم التكاليف المترتبة عن إنجاز كل آلة من الآلات الأربع لكل عمل من الأعمال الأربعة.

الوحدة: 10^2 و.ن

	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$M1$	$C_{11}=30$	$C_{12}=50$	$C_{13}=90$	$C_{14}=40$
$M2$	$C_{21}=60$	$C_{12}=30$	$C_{23}=70$	$C_{24}=40$
$M3$	$C_{31}=20$	$C_{32}=50$	$C_{33}=80$	$C_{34}=50$
$M4$	$C_{41}=80$	$C_{42}=20$	$C_{43}=60$	$C_{44}=10$

– **المطلـوب:**

- قدم نموذج التخصيص الموافق لمشكل التخصيص أعلاه.

مشكل المؤسسـة هو التالــي:

ترغب أو تريد المؤسسة انجاز الأعمال الأربعة معا و في آن واحد و ذلك عن طريق تخصيص لكل عمل من الأعمال الأربعة آلة من الآلات الأربع، عملية انجاز هذه تتم **بأقل تكلفة ممكنـة**. أو بعبارة أخرى تهدف المؤسسة إلى:

1. **تخصيص لكل عمل من الأعمال الأربعة آلـة من الآلات الأربـع بغرض انجـازه.**
2. **تدنئـة و تخفيض تكلفـة انجاز الأعمـال الأربعـة (تكلفـة التخصيص).**

1. نموذج التخصيص الموافق لمشكل التخصيص:

$$\begin{aligned} Min\ \ Z = {} & 30\times X_{11} + 50\times X_{12} + 90\times X_{13} + 40\times X_{14} + \\ & 60\times X_{21} + 30\times X_{22} + 70\times X_{23} + 40\times X_{24} + \\ & 20\times X_{31} + 50\times X_{32} + 80\times X_{33} + 50\times X_{34} + \\ & 80\times X_{41} + 20\times X_{42} + 60\times X_{43} + 10\times X_{44} \end{aligned}$$

Soumise Aux Contraintes

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=01$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=01$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=01$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}=01$$

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=01$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=01$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=01$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}=01$$
$$X_{ij}=01 \quad Ou \quad 00 \quad , \ (i=1,2,3,4),(j=1,2,3,4)$$

و الذي يمكن كتابته على الصيغة المختصرة كما يلي:

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}X_{ij}$$

Soumises Aux Contraintes :

$$\sum_{j=1}^{4}X_{ij}=1 \ , \ (i=1,2,3,4)$$
$$\sum_{i=1}^{4}X_{ij}=1 \ , \ (j=1,2,3,4)$$
$$X_{ij}=01 \quad Ou \quad 00 \quad , \ (i=1,2,3,4),(j=1,2,3,4)$$

06.07.01 – مسائل تخطيط الاستثمارات:

في هذا النوع من المسائل المشكل هو تحديد المبلغ المالي الذي سوف يتم استثماره في كل بديل استثماري من بين البدائل الاستثمارية المتاحة بحيث يتم تحقيق أعظم عائد

مثـــال 07.01:

يتوفر شخص على مبلغ مالي يقدر بـ: 1.000.000 دج. أمام هذا الشخص مجموعة من الأسهم يمكن له الاستثمار فيها.الجدول أدناه يقدم هذه الأسهم و كذا العائد السنوي لكل سهم.

اسم السهم	مكان السهم	تصنيف السهم	العائد السنوي
Dash Associates	U.S.A	T	5.3 %
Llog France	France	T	6.2 %
France Télécom	France	T	5.1 %
Général Motors	U.S.A	N	4.9 %
Elf	France	N	6.5 %
BNP Paris Bas	France	N	4.3 %

الشخص قد وضع مجموعة من القيود نوردها فيما يلي:

- يود استثمار على الأقل 10.000 دج في كل سهم.

- يود استثمار على الأكثر 40.000 دج في كل سهم.
- يود استثمار نصف المبلغ في الأسهم الفرنسية.
- يود استثمار على الأكثر 30% في الأسهم المصنفة في الصنف T.

– **المطلـوب:**

1. شكل النموذج الرياضي لهذا المشكل.

1. تحديد و تعريف متغيرات القرار:

يرغب الشخص تحديد المبلغ الذي يستثمره في كل سهم بحيث أنه يحقق أعظم عائد. لذلك فإن عدد متغيرات القرار سوف يساوي عدد الأسهم المتاحة أمام الشخص. و عليه فإنه لدينا ست متغيرات قرار هي التالية:

1. X_1 : تمثل المبلغ الذي سوف يتم استثماره في السهم Dash Associates

2. X_2 : تمثل المبلغ الذي سوف يتم استثماره في السهم Llog France

3. X_3 : تمثل المبلغ الذي سوف يتم استثماره في السهم France Télécom

4. X_4 : تمثل المبلغ الذي سوف يتم استثماره في السهم Général Motors

5. X_5 : تمثل المبلغ الذي سوف يتم استثماره في السهم Elf

6. X_6 : تمثل المبلغ الذي سوف يتم استثماره في السهم BNP Paris Bas

2. صياغة دالـة الهدف:

حتما أن الشخص يهدف إلى تعظيم العائد الإجمالي لمختلف المبالغ المستثمرة في مختلف الأسهم. العائد الإجمالي للشخص مترتب عن مختلف المبالغ المستثمرة في مختلف الأسهم المتاحة أمام الشخص و بالتالي فالعائد الإجمالي يساوي إلى مجموع ما يلي:

- العائد المترتب عن المبلغ X_1 الذي سوف يتم استثماره في السهم Dash Associates: $5.3\times X_1$
- العائد المترتب عن المبلغ X_2 الذي سوف يتم استثماره في السهم Llog France: $6.2\times X_2$
- العائد المترتب عن المبلغ X_3 الذي سوف يتم استثماره في السهم France Télécom: $5.1X_3$
- العائد المترتب عن المبلغ X_4 الذي سوف يتم استثماره في السهم Général Motors: $4.9X_4$
- العائد المترتب عن المبلغ X_5 الذي سوف يتم استثماره في السهم Elf: $6.5X_5$
- العائد المترتب عن المبلغ X_6 الذي سوف يتم استثماره في السهم BNP Paris Bas: $4.3X_6$

و عليه يصبح العائد الإجمالي الذي يحصل عليه الشخص من جراء استثماره لمختلف المبالغ في مختلف الأسهم يساوي ما يلي: $Z = 5.3X_1 + 6.2X_2 + 5.1X_3 + 4.9X_4 + 6.5X_5 + 4.3X_6$

و بما أن الشخص يهدف إلى تعظيم هذا العائد، فإن دالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Max \quad Z = 5.3X_1 + 6.2X_2 + 5.1X_3 + 4.9X_4 + 6.5X_5 + 4.3X_6$$

3. صياغة القيـود الوظيفيـة: تتمثل القيود الوظيفية للمسألة فيما يلي:

- مجموع المبالغ المستثمرة في مختلف الأسهم يجب أن لا يتعدى المبلغ الإجمالي الذي بحوزة الشخص و هذا ما يعبر عنه بالقيد التالي: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 1.000.000$

يود استثمار على الأقل 10.000 دج في كل سهم:

- $X_1 \geq 10.000$
- $X_2 \geq 10.000$
- $X_3 \geq 10.000$
- $X_4 \geq 10.000$
- $X_5 \geq 10.000$
- $X_6 \geq 10.000$

- يود استثمار على الأكثر 40.000 دج في كل سهم:

- $X_1 \leq 40.000$
- $X_2 \leq 40.000$
- $X_3 \leq 40.000$
- $X_4 \leq 40.000$
- $X_5 \leq 40.000$
- $X_6 \leq 40.000$

- يود استثمار نصف المبلغ في الأسهم الفرنسية: $X_2 + X_3 + X_5 + X_6 \leq 500.000$
- يود استثمار على الأكثر 30% في الأسهم المصنفة في الصنف T:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 0.3 \times 1.000.000 = 300.000 \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 \leq 300.000$$

4. صياغة قيود عدم سلبيـة المتغيرات: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

بتجميع العلاقات الرياضية المتوصل إليها في كل خطوة أعلاه نحصل على نموذج البرمجة الخطية

$$Max \quad Z = 5.3X_1 + 6.2X_2 + 5.1X_3 + 4.9X_4 + 6.5X_5 + 4.3X_6$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}
&X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 1.000.000 \\
&X_1 \geq 10.000 \\
&X_2 \geq 10.000 \\
&X_3 \geq 10.000 \\
&X_4 \geq 10.000 \\
&X_5 \geq 10.000 \\
&X_6 \geq 10.000 \\
&X_1 \leq 40.000 \\
&X_2 \leq 40.000 \\
&X_3 \leq 40.000 \\
&X_4 \leq 40.000
\end{aligned}$$

$$X_5 \leq 40.000$$
$$X_6 \leq 40.000$$
$$X_2 + X_3 + X_5 + X_6 \leq 500.000$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 300.000$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

08.01 – الصيغـــة العامـــة لنمـــوذج البرمجـــة الخطيـــة:

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تقدم على الشكل التالي:

$$Max\ (Min)\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_jX_j + ... + C_nX_n$$

Soumise Aux Contraintes

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1j}X_j + ... + a_{1n}X_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2j}X_j + ... + a_{2n}X_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3j}X_j + ... + a_{3n}X_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_3$$

....

....

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{in}X_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_i$$

....

....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mj}X_j + ... + a_{mn}X_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n \geq 0$$

حيث أن:

- $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n$: تمثل متغيرات قرار نموذج البرمجة الخطية.
- $C_1, C_2, C_3, ..., C_j, ..., C_n$: تمثل معاملات متغيرات القرار على مستوى دالة الهدف.
- $Max\ (Min)\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_jX_j + ... + C_nX_n$: تمثل دالة الهدف أو الدالة الاقتصادية لنموذج البرمجة الخطية.

- $a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{in}X_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_i$: تمثل القيود الوظيفية لنموذج البرمجة الخطية حيث أن $(i = 1,2,3,......,m)$.
- $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{ij}, ..., a_{mn}$: تمثل معاملات متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية، هذه المعاملات تسمى المعاملات التكنولوجية حيث أن المعامل a_{ij} يمثل الكمية اللازمة من المورد i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج j .
- $b_1, b_2, b_3, ..., b_i, ..., b_m$: تمثل الطرف الثاني للقيود الوظيفية للنموذج و التي تعبر عن المتاح من الموارد.
- $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n \geq 0$: تمثل قيود عدم سلبية المتغيرات لنموذج البرمجة الخطية.

09.01 – فرضيـــات البرمجـــة الخطيـــة:

لنماذج البرمجة الخطية مجموعة من الفرضيات نوردها فيما يلي:

- فرضية الخطية.
- فرضية استمرارية المتغيرات.
- فرضية المعرفة التامة لمعاملات النموذج.
- فرضية التناسب.
- فرضية التجميع.

سوف يتم التطرق بقدر من التفصيل إلى مجموعة الفرضيات أعلاه

01.09.01 – فرضيـــة الخطيـــة:

إن الفرضية الأساسية لأي نموذج برمجة خطية هي فرضية الخطية و التي تعني أن كل من دالة الهدف و القيود الوظيفية تكون في شكل صيغة خطية أي أن:

- أس متغيرات القرار يساوي الواحد.
- المتغيرات فيما بينها لا تحتوي على الجداء فيما بينها مثل: $X_1 \times X_2$ أو $X_1 \times X_3$ أو $X_2 \times X_3$

02.09.01 – فرضيـــة استمراريـــة المتغيـــرات:

نعني بفرضية استمرارية المتغيرات ما يلي:

- متغيرات القرار يمكن لها أن تأخذ قيم صحيحة و قيم كسرية.
- الكمية المستخدمة من الموارد يمكن أن تساوي قيمة صحيحة أو قيمة كسرية

03.09.01 – فرضيـــة المعرفـــة التامـــة لمعامـــلات النمـــوذج:

نعني بفرضية المعرفة التامة لمعاملات النموذج أن معاملات النموذج الممثلة في كل من C_j ، a_{ij} و b_i تكون معروفة بيقين أي بصفة تامة

04.09.01 – فرضيــة التناســب:

نعني بخاصية التناسب أن:

- الربح (التكلفة) المترتب (المترتبة) عن منتج معين و الذي يوافق متغيرة قرار معينة و لتكن X_j متناسب مع قيمة هذه المتغيرة، فمثلا بالنسبة للمثال 01.01 أعلاه فإن:

– الربح المترتب عن إنتاج المنتج الأول الممثل في الكراسي بكمية X_1 يساوي قيمة المتغيرة X_1 و التي تمثل عدد الكراسي المنتجة **مضروبـة** بالربح الوحدوي للكرسي الواحد.

– الربح المترتب عن إنتاج المنتج الثاني الممثل في الطاولات بكمية X_2 يساوي قيمة المتغيرة X_2 و التي تمثل عدد الطاولات المنتجة **مضروبــة** بالربح الوحدوي للطاولة الواحدة.

- الكمية من أي مورد اللازمة لإنتاج منتج معين و ليكن X_j متناسب مع قيمة هذه المتغيرة، فمثلا بالنسبة للمثال 01.01 أعلاه فإن:

– الكمية من المورد الأول الممثل في الخشب تساوي اللازمة اللازمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1 تساوي قيمة المتغيرة X_1 و التي تمثل عدد الكراسي المنتجة **مضروبــة** بكمية الخشب اللازمة لإنتاج الكراسي الواحد.

– الكمية من المورد الثاني الممثل في الحديد تساوي اللازمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2 تساوي قيمة المتغيرة X_2 و التي تمثل عدد الطاولات المنتجة **مضروبــة** بكمية الحديد اللازمة لإنتاج الطاولة الواحدة.

05.09.01 – فرضيــة التجميــع: نعني بخاصية التجميع أن:

- الربح (التكلفة) الإجمالي (الإجمالية) يساوي إلى مجموع الأرباح (التكاليف) المتأتية أو المترتبة من مختلف المنتجات $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n$. فمثلا بالنسبة للمثال 01.01 أعلاه فإن:

– الربح الإجمالي الذي يتحصل عليه أو يحققه المستثمر يساوي الربح المترتب عن إنتاج المنتج الأول الممثل في الكراسي بكمية X_1 **مضـــاف** إليه الربح المترتب عن إنتاج المنتج الثاني الممثل في الطاولات بكمية X_2.

- الكمية الإجمالية من أي مورد اللازمة لإنتاج المنتجات $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n$ تساوي مجموع الكميات المستخدمة لإنتاج مختلف المنتجات. فمثلا بالنسبة للمثال 01.01 أعلاه فإن:

– الكمية الإجمالية من المورد الأول الممثل في الخشب تساوي كمية الخشب اللازمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1 **مضــاف** إليها كمية الخشب اللازمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2.

– الكمية الإجمالية من المورد الثاني الممثل في الحديد تساوي كمية الحديد اللازمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1 **مضــاف** إليها كمية الحديد اللازمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2.

– الكمية الإجمالية من المورد الثالث الممثل في الوقت تساوي كمية الوقت اللازمة لإنتاج الكراسي بكمية X_1 **مضــاف** إليها كمية الوقت اللازمة لإنتاج الطاولات بكمية X_2.

10.01 – الشكــل النموذجـــي (القانـوني) لنمـــاذج البرمجـــة الخطيـــة:

نقول عن نموذج البرمجة الخطية أنه على الشكل النموذجي La Forme Canonique أو الشكل المتناظر La Forme Symétrique إذا تحقق في آن واحد الشرطين التاليين:

1. جميع متغيرات النموذج X_j غير سالبة أي جميع المتغيرات موجبة أو معدومة، و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية: $X_j \geq 0$
2. جميع القيود الوظيفية للنموذج من النوع :
   - **أقل أو يساوي** في حالة النموذج من النوع تعظيم Maximisation
   - **أكبر أو يساوي** في حالة النموذج من النوع تدنئه Minimisation

تبعا لما ذكر أعلاه نميز الحالتين التاليتين:

1. **الحالة الأولى:** تتعلق بمتغيرات النموذج و التي قد لا تكون موجبة أو معدومة و هذا يعني أنه قد تكون:
   - سالبة و هذا ما يعبر عنه رياضيا بما يلي: $X_j < 0$
   - غير محددة الإشارة أي موجبة أو معدومة أو سالبة و هذا ما يعبر عنه بما يلي: $X_j \in R$
2. **الحالة الثانية:** تتعلق بالقيود الوظيفية للنموذج و التي قد تكون:
   - بإشارة تساوي تماما (=) سواء في حالة نموذج من النوع تعظيم أو من نوع تدنئة.
   - بإشارة **أكبر أو يساوي** في حالة نموذج من النوع تعظيم.
   - بإشارة **أقل أو يساوي** في حالة نموذج من النوع تدنئة.

سوف نتطرق إلى كيفية معالجة الحالات المذكورة أعلاه.

01.10.01– حالة المتغيرات غير محددة الإشارة : $X_j \in R$

فتبعا للشرط الأول للشكل النموذجي لنموذج البرمجة الخطية، فإنه يشترط أن جميع المتغيرات (متغيرات القرار و متغيرات الفجوة) تكون موجبة أو معدومة (أكبر أو تساوي الصفر). فبغرض تحقيق هذا الشرط بالنسبة للمتغيرات الغير محددة الإشارة $X_j \in R$ يتعين علينا كتابة كل متغيرة X_j غير محددة الإشارة على أنها الفرق بين متغيرتين موجبتين و لتكونان X_j' و X_j'' و هذا ما يعبر عنه رياضيا بالكتابة التالية:

$$X_j = X_j' - X_j''$$

حيث أن:

- $X_j' \geq 0$
- $X_j'' \geq 0$

إذا كان:

- $X_j' \geq X_j''$ هذا يعني أن: $X_j' - X_j'' \geq 0$ و عليه فإن: $X_j \geq 0$
- $X_j' \leq X_j''$ هذا يعني أن: $X_j' - X_j'' \leq 0$ و عليه فإن: $X_j \leq 0$

مما سبق ذكره نقوم بتعويض كل متغيرة غير محددة الإشارة $X_j \in R$ بالفرق بين متغيرتين موجبتين أو معدومتين $X_j = X_j' - X_j''$ ، وهذا على مستوى كل من دالة الهدف و قيود النموذج.

مثـــال 08.01: أكتب على الشكل النموذجي نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 08X_1 + 07X_2 + 10X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} 01X_1 + 02X_2 + 01X_3 &\le 100 \\ 03X_1 + 04X_2 + 02X_3 &\le 120 \\ 02X_1 + 06X_2 + 04X_3 &\le 200 \\ X_1 \ge 0 \ , \ X_2 \in R \ , \ X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

بما أن المتغيرة الثانية غير محددة الإشارة $X_2 \in R$ ، فيجب تعويضها بالفرق بين متغيرتين موجبتين X_2' و X_2'' موجبتين و هذا ما يعبر عنه رياضيا بالكتابة التالية: $X_2 = X_2' - X_2''$

حيث أن: $X_2' \ge 0$ و $X_2'' \ge 0$

بالتعويض في نموذج البرمجة الخطية أعلاه نحصل على ما يلي:

$$Max \quad Z = 08X_1 + 07(X_2' - X_2'') + 10X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} 01X_1 + 02(X_2' - X_2'') + 01X_3 &\le 100 \\ 03X_1 + 04(X_2' - X_2') + 02X_3 &\le 120 \\ 02X_1 + 06(X_2' - X_2'') + 04X_3 &\le 200 \\ X_1 \ge 0 \ , \ X_2' \ge 0 \ , \ X_2'' \ge 0 \ , X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

$$Max \quad Z = 08X_1 + 07X_2' - 07X_2'' + 10X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} 01X_1 + 02X_2' - 02X_2'' + 01X_3 &\le 100 \\ 03X_1 + 04X_2' - 04X_2' + 02X_3 &\le 120 \\ 02X_1 + 06X_2' - 06X_2'' + 04X_3 &\le 200 \\ X_1 \ge 0 \ , \ X_2' \ge 0 \ , \ X_2'' \ge 0 \ , X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

02.10.01– حالة المتغيرات أقل من الصفر $X_j < 0$:

يمكن لمتغيرات القرار X_j أن تأخذ قيم سالبة و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية $X_j < 0$. فبغرض تحقيق شرط عدم سلبية المتغيرات يتعين علينا كتابة كل متغيرة X_j سالبة على أنها تساوي متغيرة $-X_j'$ ، حيث أن X_j' متغيرة موجبة أو معدومة، وهذا ما يعبر عنه بـ: $X_j = -X_j'$

حيث أن: $X_j' \ge 0$

مثـــال 09.01

أكتب على الشكل النموذجي نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min \quad Z = 100X_1 + 300X_2 + 800X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} 10X_1 + 20X_2 + 15X_3 &\ge 1200 \\ 02X_1 + 08X_2 + 10X_3 &\ge 2000 \\ 12X_1 + 23X_2 + 20X_3 &\ge 2500 \\ X_1 \ge 0 \ , \ X_2 \ge 0 \ , \ X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

المتغيرة X_3 لا تحقق قيد عدم السلبية لذلك وجب تحويلها حتى تصبح أكبر أو يساوي و من ثم تحقيق الشرط

عملية التحويل تتم بإجراء التعديل التالي على هذه المتغيرة X_3 : نضع: $X_3 = -X_3'$ حيث أن $X_3' \geq 0$

بالتعويض في كل من دالة الهدف و قيود النموذج نحصل على ما يلي:

$$\begin{array}{lcl} Min \quad Z = 100X_1 + 300X_2 + 800(-X_3') & & Min \quad Z = 100X_1 + 300X_2 - 800X_3' \\ \text{Soumise Aux Contraintes} & & \text{Soumise Aux Contraintes} \\ 10X_1 + 20X_2 + 15(-X_3') \geq 1200 & & 10X_1 + 20X_2 - 15X_3' \geq 1200 \\ 02X_1 + 08X_2 + 10(-X_3') \geq 2000 & \Longrightarrow & 02X_1 + 08X_2 - 10X_3' \geq 2000 \\ 12X_1 + 23X_2 + 20(-X_3') \geq 2500 & & 12X_1 + 23X_2 - 20X_3' \geq 2500 \\ X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 & & X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \end{array}$$

+03.10.01 – حالـة قيد بإشـارة أكبـر أو يسـاوي في نمـوذج من النـوع Max :

قد تحتوي نماذج البرمجة الخطية من النوع تعظيم Max على قيد أو أكثر من القيود الوظيفية بإشارة **أكبر أو يساوي** أي قيود وظيفية من الشكل: $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \geq b_1$. حتى يحقق هذا القيذ شرط الشكل النموذجي يجب أن يكون بإشارة أقل أو يساوي و حتى يتم ذلك يكفي أن نضرب طرفيه بـ (-1) كما يلي:

$-(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3) \leq -(b_1)$ و عليه نحصل على: $-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 \ \ \leq \ -b_1$

مثـــال 09.01: أكتب على الشكل النموذجي نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 08X_1 + 07X_2 + 10X_3$$

$$\begin{array}{c} \text{Soumise Aux Contraintes} \\ 01X_1 + 02X_2 + 01X_3 \leq 100 \\ 03X_1 + 04X_2 + 02X_3 \leq 120 \\ 02X_1 + 06X_2 + 04X_3 \geq 200 \\ X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \end{array}$$

القيد الوظيفي الثالث لا يحقق الشرط الثاني للشكل النموذجي لذلك وجب تحويله حتى يصبح بإشارة أقل أو يساوي $(\leq)$. عملية التحويل تتم بضرب طرفي القيد بالمقدار (-1) كما يلي:

$$-(02X_1 + 06X_2 + 04X_3) \geq -(200) \Rightarrow -02X_1 - 06X_2 - 04X_3 \leq -200$$

و عليه يصبح النموذج في شكله النموذجي كما يلي:

$$Max \quad Z = 08X_1 + 07X_2 + 10X_3$$

$$\begin{array}{c} \text{Soumise Aux Contraintes} \\ 01X_1 + 02X_2 + 01X_3 \leq 100 \\ 03X_1 + 04X_2 + 02X_3 \leq 120 \\ -02X_1 - 06X_2 - 04X_3 \leq -200 \\ X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \end{array}$$

04.10.01 – حالـة قيد بإشـارة أقـل أو يسـاوي فـي نمـوذج من النـوع Min :

قد تحتوي نماذج البرمجة الخطية من النوع تدنئة Min على قيد أو أكثر من القيود الوظيفية بإشارة **أقـل أو يسـاوي** أي قيود وظيفية من الشكل: $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b_1$

القيد أعلاه لا يحقق الشرط الثاني للشكل النموذجي لنموذج البرمجة الخطية، لذلك نقزم بضرب طرفيه بـ (-1)

$$-\left(a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3\right)\leq-\left(b_1\right)\Rightarrow -a_{11}X_1-a_{12}X_2-a_{13}X_3\geq -b_1$$

مثـــال 10.01: أكتب على الشكل النموذجي نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\quad Z=10X_1+30X_2+80X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}01X_1+03X_2+05X_3&\geq120\\20X_1+15X_2+30X_3&\leq200\\02X_1+04X_2+01X_3&\geq250\\X_1\geq0\ ,\ X_2\geq0\ ,\ X_3&\geq0\end{aligned}$$

القيد الثاني لا يحقق هذا الشرط لذلك يتم ضرب طرفيه بالمقدار (-1) كما يلي:

$$-\left(20X_1+15X_2+30X_3\right)\leq-\left(200\right)\Rightarrow -20X_1-15X_2-30X_3\geq-200$$

و عليه يصبح النموذج في شكله النموذجي كما يلي:

$$Min\quad Z=10X_1+30X_2+80X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}01X_1+03X_2+05X_3&\geq120\\-20X_1-15X_2-30X_3&\geq-200\\02X_1+04X_2+01X_3&\geq250\\X_1\geq0\ ,\ X_2\geq0\ ,\ X_3&\geq0\end{aligned}$$

05.10.01 – حالة قيد بإشارة يساوي في نموذج من النوع Max أو Min :

هناك بعض النماذج التي تحتوي على قيود وظيفية بإشارة تساوي. أي من الشكل: $a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3=b_1$. في هذه الحالة يتم كتابة القيد على شكل متراجحتين كما يلي:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3=b_1\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3\leq b_1\quad ....(01)\\ \\a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3\geq b_1\quad ....(02)\end{cases}$$

نميز حالتين:

- حالة نموذج من النوع تعظيم Max: في هذه الحالة القيد 02 هو الذي لا يحقق شرط الشكل النموذجي و من أجل ذلك نضرب طرفي هذا القيد بالمقدار (-1).
- حالة نموذج من النوع تدنئة Min: في هذه الحالة القيد 01 هو الذي لا يحقق شرط الشكل النموذجي و من أجل ذلك نضرب طرفي هذا القيد بالمقدار (-1).

مثـــال 11.01 : أكتب على الشكل النموذجي نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\quad Z=100X_1+250X_2+450X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$10X_1+20X_2+40X_3\leq5500$$

$$15X_1+10X_2+12X_3\le 6500$$
$$02X_1+04X_2+01X_3=2500$$
$$X_1\ge 0\ ,\ X_2\ge 0\ ,\ X_3\ge 0$$

نلاحظ أن القيد الثالث بإشارة تساوي. لذلك وجب تحويله إلى متراجحتين ثم ضرب احداهما بـ (-1) فنحصل:

$$\begin{array}{l} Max\ \ Z=100X_1+250X_2+450X_3 \\ \text{Soumise Aux Contraintes} \\ 10X_1+20X_2+40X_3\le 5500 \\ 15X_1+10X_2+12X_3\le 6500 \\ 02X_1+04X_2+01X_3\le 2500 \\ 02X_1+04X_2+01X_3\ge 2500 \\ X_1\ge 0\ ,\ X_2\ge 0\ ,\ X_3\ge 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} Max\ \ Z=100X_1+250X_2+450X_3 \\ \text{Soumise Aux Contraintes} \\ 10X_1+20X_2+40X_3\le 5500 \\ 15X_1+10X_2+12X_3\le 6500 \\ 02X_1+04X_2+01X_3\le 2500 \\ -02X_1-04X_2-01X_3\le -2500 \\ X_1\ge 0\ ,\ X_2\ge 0\ ,\ X_3\ge 0 \end{array}$$

11.01 – متغيـــــرات الفجـــــوة :

عند تحويل القيود الوظيفية من شكل متراجحات إلى شكل معادلات يتم الاستعانة بمتغيرات جديدة تسمى **متغيرات الفجوة** أو **متغيرات الفرق** حيث:

- تضاف هذه الاخيرة في حالة القيد بإشارة أقل أو يساوي كما يلي:

القيد على شكل متراجحة: $a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+........+a_{1j}X_j+.......+a_{1n}X_n\le b_1$

القيد على شكل معادلـــة: $a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+........+a_{1j}X_j+.......+a_{1n}X_n+S_1=b_1$

- و تطرح في حالة القيد بإشارة أكبر أو يساوي كما يلي:

القيد على شكل متراجحة: $a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+a_{i3}X_3+........+a_{ij}X_j+.......+a_{in}X_n\ge b_i$

القيد على شكل معادلـــة: $a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+a_{i3}X_3+........+a_{ij}X_j+.......+a_{in}X_n-S_i=b_i$

حيث أن S_1 تمثل متغيرة الفجوة و هي عبارة عن مقدار موجب أو معدوم أي $S_1\ge 0$

12.01– الشكل المعياري لنمـاذج البرمجـة الخطيـة:

نقول عن نموذج البرمجة الخطية أنه مقدم أو مكتوب على الشكل المعياري La Forme Standard إذا حقق الشروط التالية:

1. القيود الوظيفية للنموذج معطاة أو مقدمة في شكل معادلات.
2. الطرف الأيمن (b_i) للقيود الوظيفية يجب أن يكون غير سالب أي يجب أن يكون معدوم أو أكبر من الصفر و هذا ما يعبر عنه بـ: $b_i\ \ge\ 0$
3. جميع متغيرات النموذج يجب أن تكون غير سالبة، أي أن كل متغيرات النموذج يجب أن تكون موجبة أو معدومة و هذا ما يعبر عنه بـ: $X_j\ \ge\ 0$

و بغرض توضيح أكثر الشكل المعياري للنموذج نأخذ المثال التالي:

مثـــال 12.01: أكتب على الشكل المعياري نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ \ Z = 100X_1 + 250X_2 + 450X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$10X_1 + 20X_2 + 40X_3 \le 5500$$
$$15X_1 + 10X_2 + 12X_3 = 6500$$
$$02X_1 + 04X_2 + 01X_3 \le -2500$$
$$21X_1 + 12X_2 + 03X_3 \ge 3800$$
$$01X_1 + 32X_2 + 06X_3 \ge -4200$$
$$02X_1 + 05X_2 + 03X_3 = -9100$$
$$X_1 \ \ge\ 0\ ,\ X_2\ \ge\ 0\ ,\ X_3\ \ge\ 0$$

ما يلاحظ عن النموذج أعلاه أن:

- متغيرات النموذج تحقق الشرط الثالث للشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية.
- القيد الوظيفي رقم 02 يحقق الشرط الأول و الشرط الثاني. لذلك سوف يترك كما هو أي لا يخضع لأي تغيير أو تعديل.
- القيد الوظيفي السادس أي الأخير يحقق الشرط الأول و لا يحقق الشرط الثاني لذلك نقوم بضرب طرفيه بالمقدار (-1): $-02X_1 - 05X_2 - 03X_3 = 9100$
- القيود الوظيفية رقم 01 و 04 لا تحقق الشرط الأول و لكن تحقق الشرط الثاني. لذلك نقوم بالاستعانة بمتغيرات الفجوة: $10X_1 + 20X_2 + 40X_3 + S_1 = 5500$

$$21X_1 + 12X_2 + 03X_3 - S_4 = 3800$$

- القيود الوظيفية رقم 03 و 05 لا تحقق الشرط الأول و لا تحقق الشرط الثاني. لذلك نقوم بما يلي:
  - الاستعانة بمتغيرات الفجوة في مرحلة أولى: $02X_1 + 04X_2 + 01X_3 + S_3 = -2500$

$$01X_1 + 32X_2 + 06X_3 - S_5 = -4200$$

  - الضرب بالمقدار (-1) في مرحلة ثانية: $-02X_1 - 04X_2 - 01X_3 - S_3 = 2500$

$$-01X_1 - 32X_2 - 06X_3 + S_5 = 4200$$

و عليه يصبح الشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية أعلاه هو التالي:

$$Max\ \ Z = 100X_1 + 250X_2 + 450X_3 + 0S_1 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5$$

Soumise Aux Contraintes

$$10X_1 + 20X_2 + 40X_3 + S_1 = 5500$$
$$15X_1 + 10X_2 + 12X_3 = 6500$$
$$02X_1 + 04X_2 + 01X_3 + S_3 = -2500$$
$$21X_1 + 12X_2 + 03X_3 - S_4 = 3800$$
$$-01X_1 - 32X_2 - 06X_3 + S_5 = 4200$$
$$-02X_1 - 05X_2 - 03X_3 = 9100$$

المحور الأول : البـــرمجــــة الخطيـــــــة

الفصـــــل 🕮 الثانـــــي

الحـــل البيـــانـــي

La solution Graphique

أهــــداف الفصـــــل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بما يلـي:

- معرفة ماذا تعني المفاهيم التاليـة:
  1. الحل
  2. الحل المقبول (الممكن)
  3. الحل الغير مقبول (الغير ممكن)
  4. منطقة الحلول المقبولة
  5. الحل المقبول الأمثل
- حل مختلف نماذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية (بيانيا أوهندسيا)
- معرفة ماذا نعنى بما يلـي:
  1. القيد المشبع و القيد الغير مشبع
  2. التفسير الهندسي للقيود المشبعة و القيود الغير مشبعة
- تحديد مختلف أنواع الحلول
  1. الحل الأمثل الوحيد
  2. الحلول المثلى المتعددة
  3. لا يوجد حل أمثل محدد
  4. لا يوجد منطقة حلول مقبولة و بالتالي لا يوجد حل أمثل

01.02 – تمهيــــد:

نعني **بحل نموذج البرمجة الخطية**، إيجاد قيم متغيرات القرار للنموذج التي تعطي لدالة الهدف أمثل و أحسن قيمة، أي أعظم و أكبر قيمة بالنسبة للنموذج من النوع (Max) أو أدنى و أقل قيمة في حالة نموذج من النوع (Min)، و تراعي قيود النموذج، أما باستخدام الطريقة البيانية، فنعني بها عن طريق الرسم البياني (بيانيا أو هندسيا). تستخدم الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية ذات متغيرتي قرار فقط. و بما أن أغلب المسائل أو أغلب نماذج البرمجة الخطية تحتوي على أكثر من متغيرتي قرار، فإن الطريقة البيانية قليلة الاستعمال، غير أن هذه الطريقة **تسمح لنا بمعرفة و فهم بعض المفاهيم و المصطلحات** التي سوف نستخدمها عند التطرق إلى الطرق المستخدمة في حل نماذج البرمجة الخطية التي تحتوي على أكثر من متغيرتي قرار.

03.02 – خطـــوات الحـــل باستخـــدام الطريقـــة البيانيـــة:

بغرض الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية، هناك مجموعة من الخطوات يجب إتباعها. هذه الخطوات هي:

1. التمثيل البياني للقيود.
   - التمثيل البياني للقيود الوظيفية.
   - التمثيل البياني لقيود عدم سلبية المتغيرات.
2. تحديد منطقة الحلول المقبولة.
3. تقييم دالة الهدف عند منطقة الحلول المقبولة.
4. استنتاج الحل الأمثل.

و بغرض معرفة بالتفصيل مضمون كل خطوة من الخطوات المذكورة أعلاه نأخذ المثال التالي:

مثـــال 02.02 :

ليكن نموذج البرمجة الخطية المكون من متغيرتي قرار. و الذي يمثل الصياغة الرياضية لمشكل مؤسسة تقوم بإنتاج منتجين P1 و P2 بكميات مجهولة X_1 و X_2 و تريد تحديد هذه الكميات التي تعظم ربح المؤسسة.

$$Max \quad Z = 660X_1 + 840X_2$$

Soumise Aux Contraintes

$03X_1 + 04X_2 \leq 4200$	القيد رقم 01 (مادة أولية 1)
$01X_1 + 03X_2 \leq 2250$	القيد رقم 02 (ساعات عمل)
$02X_1 + 02X_2 \leq 2600$	القيد رقم 03 (مادة أولية 2)
$01X_1 + 00X_2 \leq 1100$	القيد رقم 04
$X_1 \geq 0$	القيد رقم 05

القيد رقم 06 .... $X_2 \geq 0$

حتى يتسنى لنا حل نموذج البرمجة الخطية أعلاه نتبع الخطوات المذكورة أعلاه:

01.03.02 – التمثيل البياني للقيود:

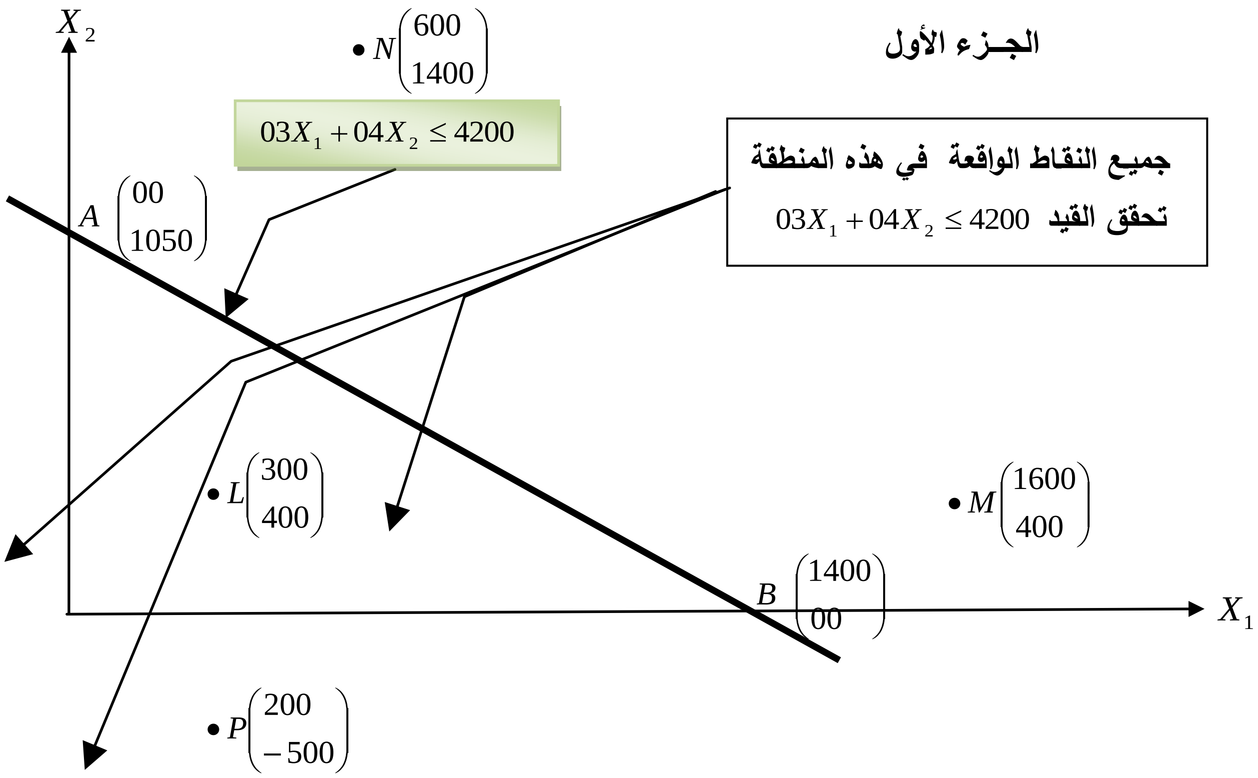
نعني بهذه الخطوة رسم قيود (الوظيفية و عدم سلبية المتغيرات) النموذج على معلم متعامد متجانس.

01- **رسم القيد رقم 01 :** $03X_1 + 04X_2 \leq 4200$

بغرض رسم هذا القيد نقوم برسم المستقيم ذو المعادلة $03X_1 + 04X_2 = 4200$، و من أجل ذلك يجب أو يكفي تحديد نقطتين A و B كما يلي:

- $X_1 = 0 \Rightarrow 3(0) + 4X_2 = 4200 \Rightarrow 4X_2 = 4200 \Rightarrow X_2 = \dfrac{4200}{4} = 1050 \Rightarrow A \begin{pmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 1050 \end{pmatrix}$
- $X_2 = 0 \Rightarrow 3X_1 + 4(0) = 4200 \Rightarrow 3X_1 = 4200 \Rightarrow X_1 = \dfrac{4200}{3} = 1400 \Rightarrow B \begin{pmatrix} X_1 = 1400 \\ X_2 = 0 \end{pmatrix}$

بعد تحديد النقطتين A و B نقوم برسم و تحديد هاتين النقطتين على معلم متعامد متجانس كما يلي:



تعليق:

رسم المستقيم ذو المعادلة $03X_1 + 04X_2 = 4200$ يقسم المستوي (Plan) إلى جزأين (Deux Demi-Plans) هما:

– **الجزء الأول: يقع على يمين المستقيم**

هذا الجزء يحتوي على عدد لا نهائي من النقاط. لو أخذنا أي نقطة من بين نقاط هذا الجزء و عوضنا إحداثياتها في القيد أو المتراجحة $03X_1 + 04X_2 \leq 4200$ نجد أن هذه النقطة لا تحقق القيد. فعلى سبيل المثال لو أخذنا النقطة $N \begin{pmatrix} X_1 = 600 \\ X_2 = 1400 \end{pmatrix}$ و عوضناها في القيد نحصل على $03(600)+04(1400)=7400>4200$.

عملية التعويض أسفرت على أن النقطة N لا تحقق القيد و بالتالي هذه النقطة لا تعتبر حل لهذا القيد أو المتراجحة. بذالك نخلص إلى أن :

بما أن النقطة $N \begin{pmatrix} X_1 = 600 \\ X_2 = 1400 \end{pmatrix}$ و التي هي نقطة ممثلة لنقاط الجزء الأول فنخلص إلى أن جميع نقاط هذا الجزء لا تحقق القيد أو المتراجحة و بالتالي نقول عن نقاط هذا الجزء أنها لا تعتبر حل للقيد أو المتراجحة.

– الجزء الثانـي: يقع على يسار و على المستقيم

هذا الجزء يحتوي على عدد لا نهائي من النقاط. لو أخذنا أي نقطة من بين نقاط هذا الجزء و عوضنا إحداثياتها في القيد أو المتراجحة $03X_1 + 04X_2 \leq 4200$ نجد أن هذه النقاط تحقق القيد. فعلى سبيل المثال لو أخذنا النقطة $L \begin{pmatrix} X_1 = 200 \\ X_2 = 400 \end{pmatrix}$ و التي تقع على يسار المستقيم أو النقطة $A \begin{pmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 1050 \end{pmatrix}$ التي تقع على المستقيم أو النقطة $P \begin{pmatrix} X_1 = 200 \\ X_2 = -500 \end{pmatrix}$ و عوضناها في القيد نحصل على ما يلي:

- $03(200)+04(400)=2200<4200$
- $03(00)+04(1050)=4200=4200$
- $03(200)+04(-500)=-1400<4200$

عملية التعويض أسفرت على أن النقاط P,A,L تحقق القيد و بالتالي هذه النقاط تعتبر حل لهذا القيد.

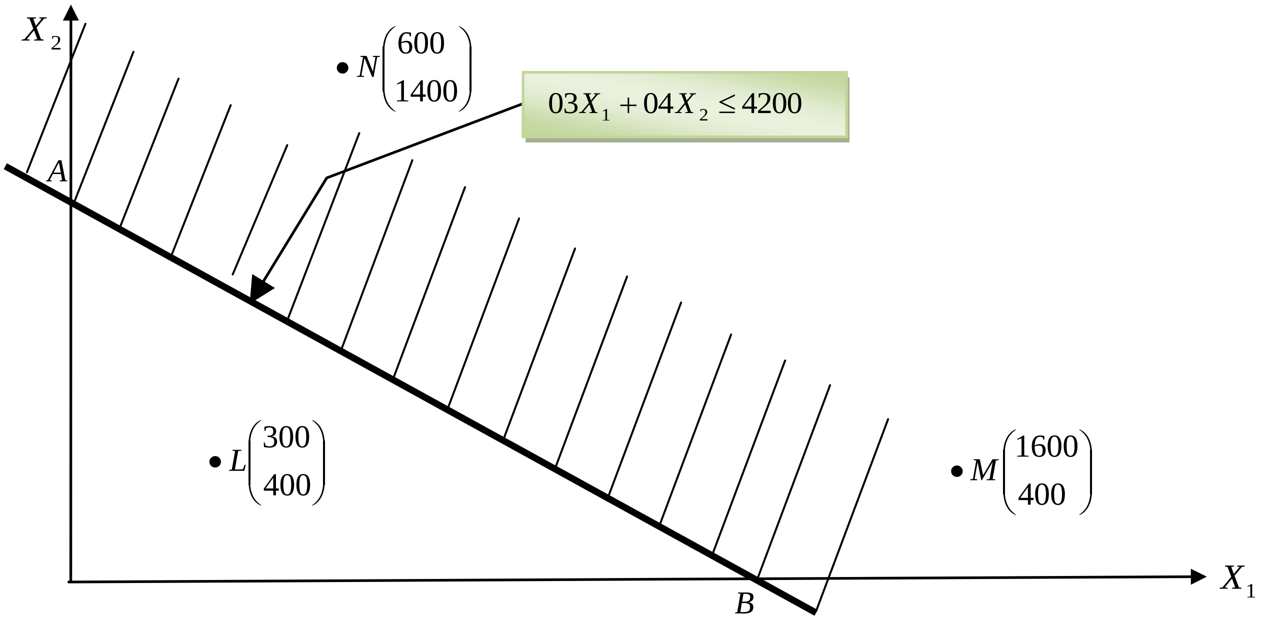
بما أن النقاط P,A,L هي نقاط ممثلة لنقاط الجزء الثاني فنخلص إلى أن جميع نقاط هذا الجزء تحقق القيد أو المتراجحة و بالتالي نقول عن نقاط هذا الجزء أنها تعتبر حل للقيد أو المتراجحة.

ملاحظة: 01.02:

نشير إلى أن الجزء الثاني الذي يقع على يسار و على المستقيم يحتوي على عدد لانهائي من النقاط. هذه النقاط تتوزع كما يلي:

1. نقاط تقع على المستقيم، **تحقق القيد أو المتراجحة بإشارة تساوي تماما** (=) مثل النقاط $A \begin{pmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 1050 \end{pmatrix}$ ، $B \begin{pmatrix} X_1 = 1400 \\ X_2 = 0 \end{pmatrix}$
2. نقاط تقع على يسار (تحت) المستقيم ، **تحقق القيد أو المتراجحة بإشارة أقل تماما** (>) مثل النقاط $L \begin{pmatrix} X_1 = 200 \\ X_2 = 400 \end{pmatrix}$ ، $P \begin{pmatrix} X_1 = 200 \\ X_2 = -500 \end{pmatrix}$

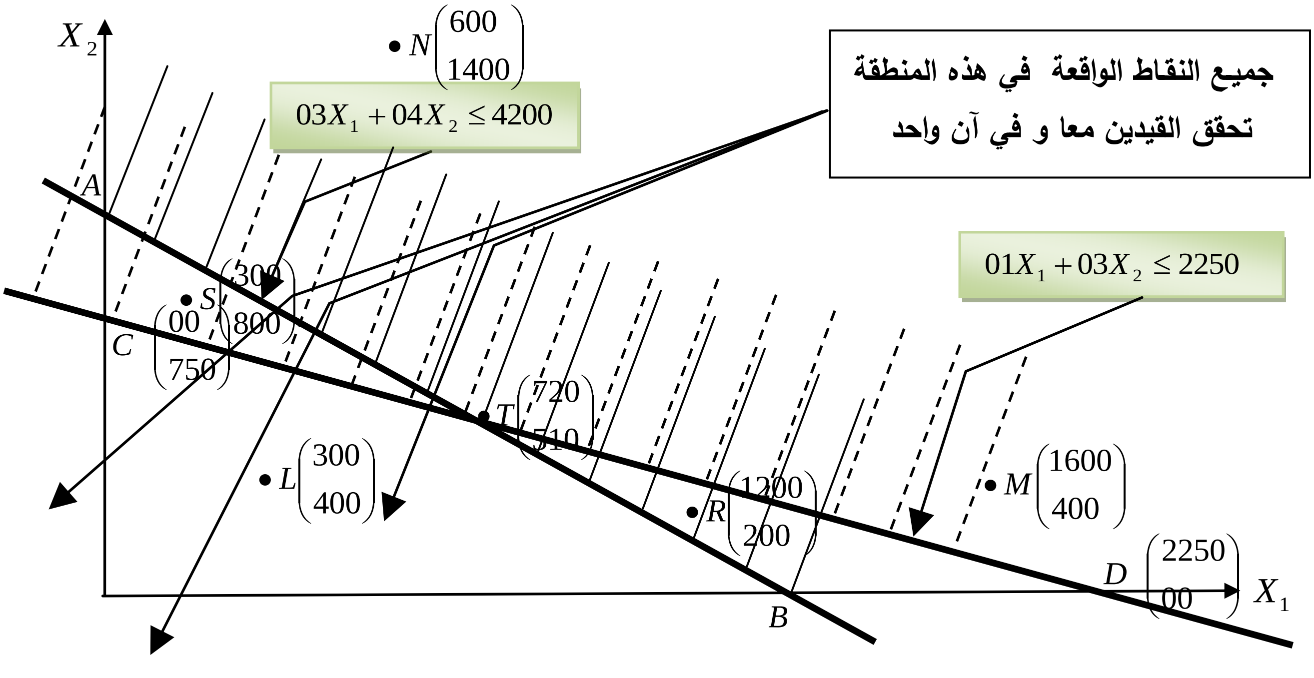
ما يهمنا هو الجزء الثاني الذي يحتوي على النقاط ذات الإحداثيات التي تحقق القيد أما الجزء الأول الذي يحتوي على النقاط ذات الإحداثيات (X_1, X_2) التي لا تحقق القيد فلا يهمنا لذلك نقوم بتشطيبه كما هو مبين أدناه:



02- رسم القيد رقم 02 : $01X_1 + 03X_2 \le 2250$

$$X_1 = 0 \Rightarrow 1(0) + 3X_2 = 2250 \Rightarrow 3X_2 = 2250 \Rightarrow X_2 = \frac{2250}{3} = 750 \Rightarrow C \ (X_1 = 0 \ \ X_2 = 750)$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow 1X_1 + 3(0) = 2250 \Rightarrow X_1 = 2250 \Rightarrow D \ (X_1 = 2250 \ \ X_2 = 0)$$



تعليق:

رسم المستقيم ذو المعادلة $01X_1 + 03X_2 = 2250$ يقسم المستوي (Plan) إلى جزأين:

– **الجزء الأول: يقع على يمين المستقيم**

يحتوي على عدد لا نهائي من النقاط التي لا تحقق القيد $01X_1 + 03X_2 \le 2250$ و بالتالي هذه النقاط لا تعتبر حلول للقيد. وبما أن هذه النقاط لا تحقق القيد (أي ليست حلول للقيد) فإنها لا تهمنا و يتم شطبها كما هو موضح أعلاه.

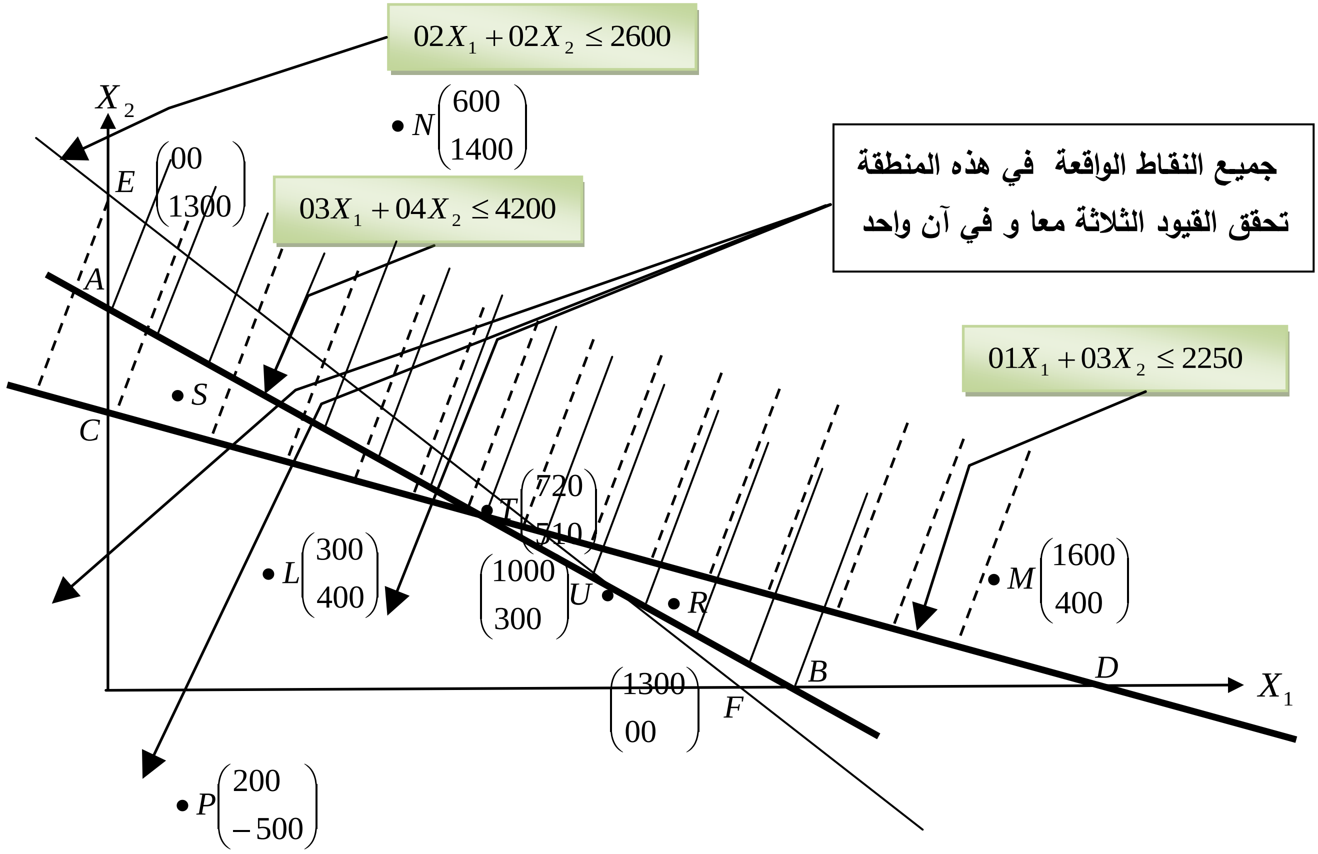
– **الجزء الثانـي: يقع على يسار و على المستقيم**

يحتوي على عدد لا نهائي من النقاط التي تحقق القيد $01X_1+03X_2 \leq 2250$ و بالتالي هذه النقاط تعتبر حلول للقيد. وبما أن هذه النقاط تحقق القيد (أي حلول للقيد) فإنها تهمنا و بالتالي لا يتم شطبها.

-03 رسم القيد رقم 03 : $02X_1+02X_2 \leq 2600$

- $X_1=0 \Rightarrow 1(0)+2X_2=2600 \Rightarrow 2X_2=2600 \Rightarrow X_2=\frac{2600}{2}=1300 \Rightarrow E \begin{pmatrix} X_1=0 \\ X_2=1300 \end{pmatrix}$
- $X_2=0 \Rightarrow 2X_1+2(0)=2600 \Rightarrow 2X_1=2600 \Rightarrow X_1=\frac{2600}{2}=1300 \Rightarrow F \begin{pmatrix} X_1=1300 \\ X_2=0 \end{pmatrix}$

بعد تحديد النقطتين E و F نقوم برسم و تحديد هاتين النقطتين على نفس المعلم كما هو موضح في الشكل أسفله:



تعليـق:

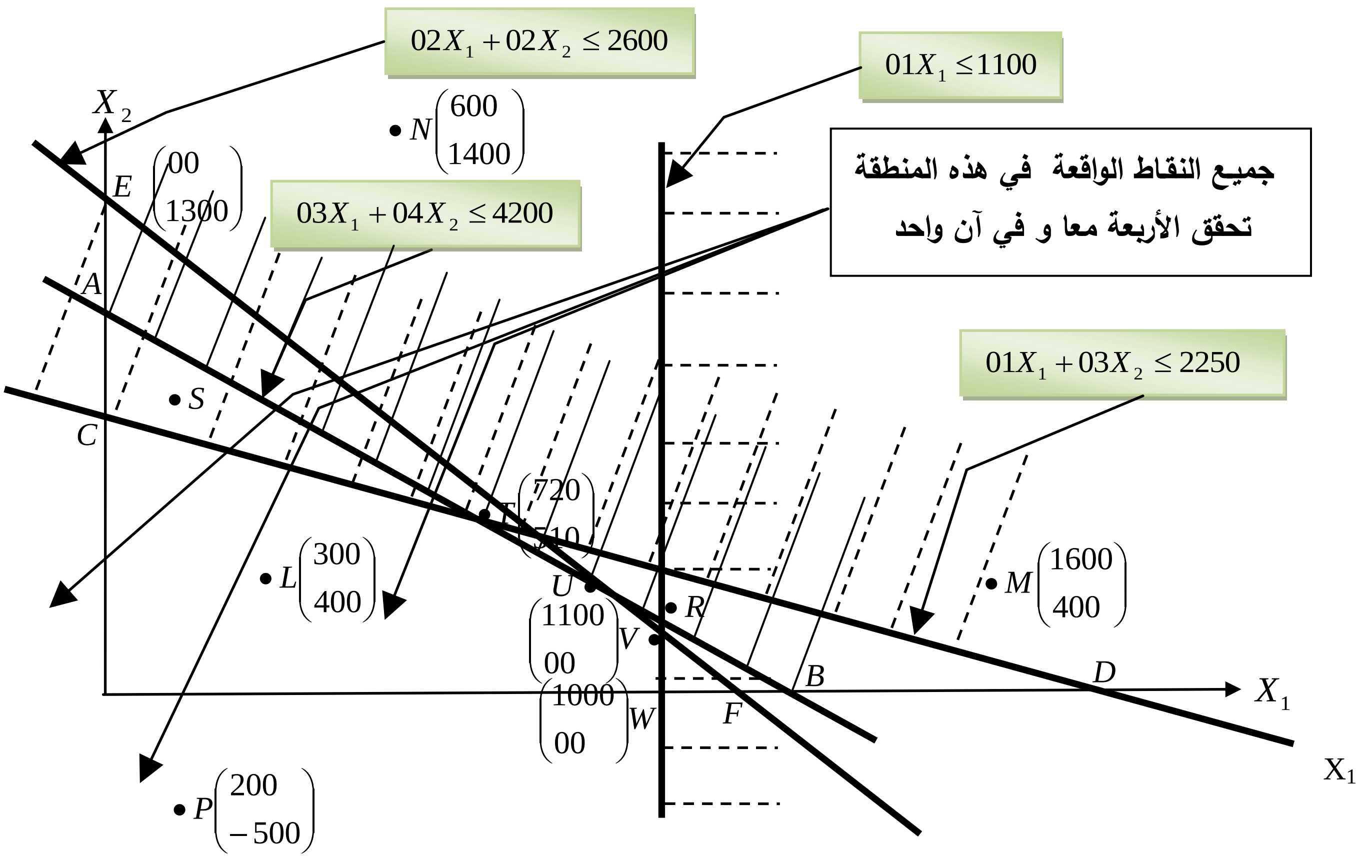
رسم المستقيم ذو المعادلة $02X_1+02X_2=2600$ يقسم المستوي (Plan) إلى جزأين الأيمن يحقق القيد و الأيسر لا يحقق كما سبق و أن ذكرنا سابقا.

ما يهمنا لحد الآن (أي إلى غاية رسم القيود رقم 01 ، رقم 02 و رقم 03) هو تحديد و تعيين النقاط ذات الإحداثيات (X_1, X_2) التي تحقق القيود الثلاثة معا و في آن واحد. إن النقاط التي تحقق القيود الثلاثة في آن واحد هي تلك النقاط التي تقع تحت (على يسار) القيود الثلاثة مع بعض. و هذه النقاط ما هي إلا تلك الواقعة على و تحت القطع المستقيمة التي تصل النقاط $C-T-U-V$.

04- **رسم القيد رقم 04 :** $01X_1 \leq 1100$

بغرض رسم هذا القيد نقوم برسم المستقيم ذو المعادلة $01X_1 = 1100$ ، و من أجل رسم هذا المستقيم يجب أو يكفي تحديد النقطة W ذات الإحداثيات $W\begin{pmatrix} X_1 = 1100 \\ X_2 = 0 \end{pmatrix}$

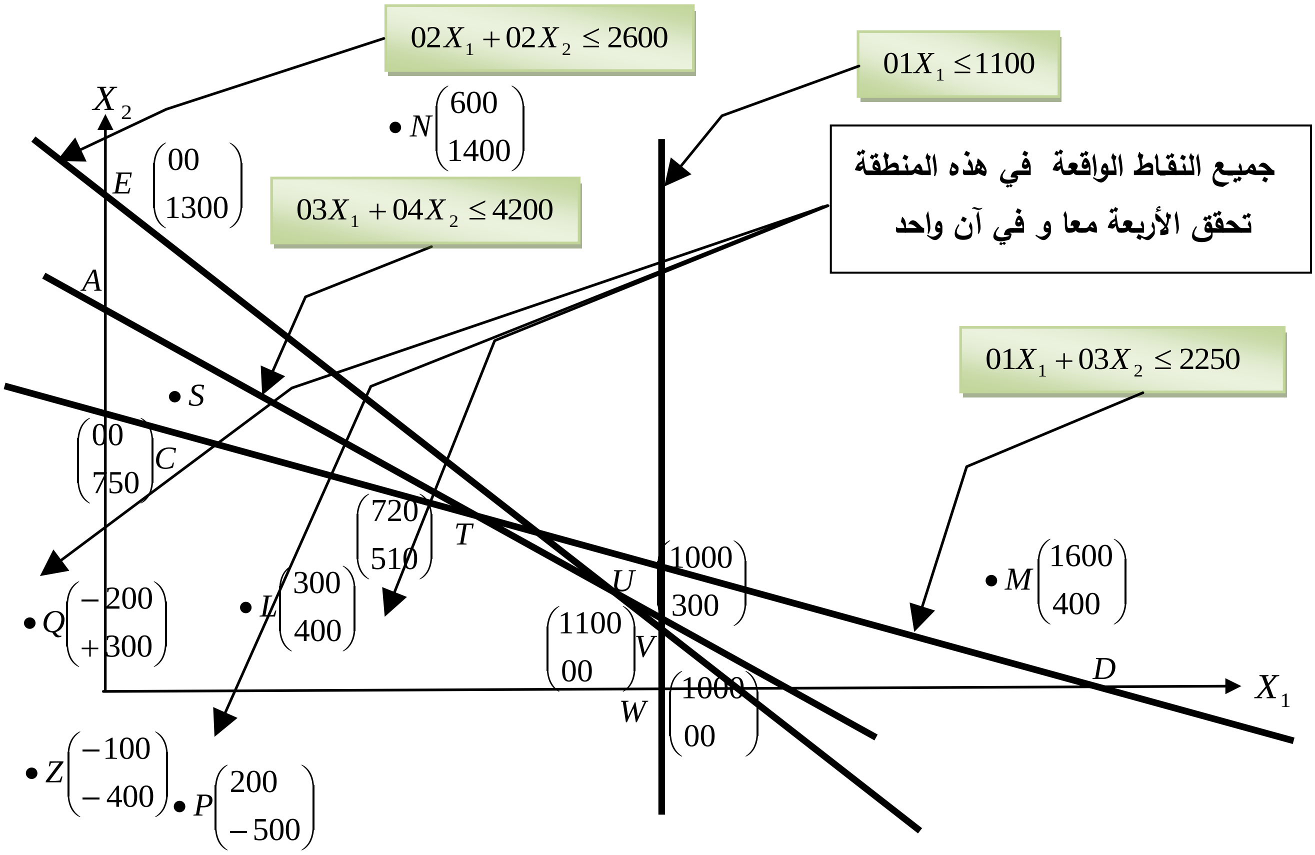
بعد تحديد النقطتين W نقوم برسم و تحديد هذه النقطة على نفس المعلم كما هو موضح في الشكل أسفله:



تعليق:

رسم المستقيم ذو المعادلة $01X_1 = 1100$ يقسم المستوي (Plan) إلى جزأين الأيمن يحقق القيد و الأيسر لا يحقق كما سبق و أن ذكرنا سابقا.

ما يهمنا لحد الآن (أي إلى غاية رسم القيود رقم 01 ، رقم 02 ، رقم 03 و رقم 04) هو تحديد و تعيين النقاط ذات الإحداثيات (X_1, X_2) التي تحقق القيود الأربعة (القيود الوظيفية) معا و في آن واحد . إن النقاط التي تحقق القيود الوظيفية في آن واحد. هي تلك النقاط التي تقع (على يسار) القيود الثلاثة مع بعض. و هذه النقاط ما هي إلا تلك الواقعة على و على يسار (تحت) القطع المستقيمة التي تصل النقاط $-C-T-U-V-W$ كما هو موضح في الشكل أدناه.



النقاط الواقعة على و على يسار القطع المستقيمة التي تصل النقاط $C-T-U-V-W$. كما هو موضح في الشكل. تحقق القيود الوظيفية مع بعض و في آن واحد و بالتالي هذه النقاط تعتبر حلول (أنظر التعريف01.02) ما يلاحظ أو ما يقال عن هذه النقاط أو هذه الحلول أن:

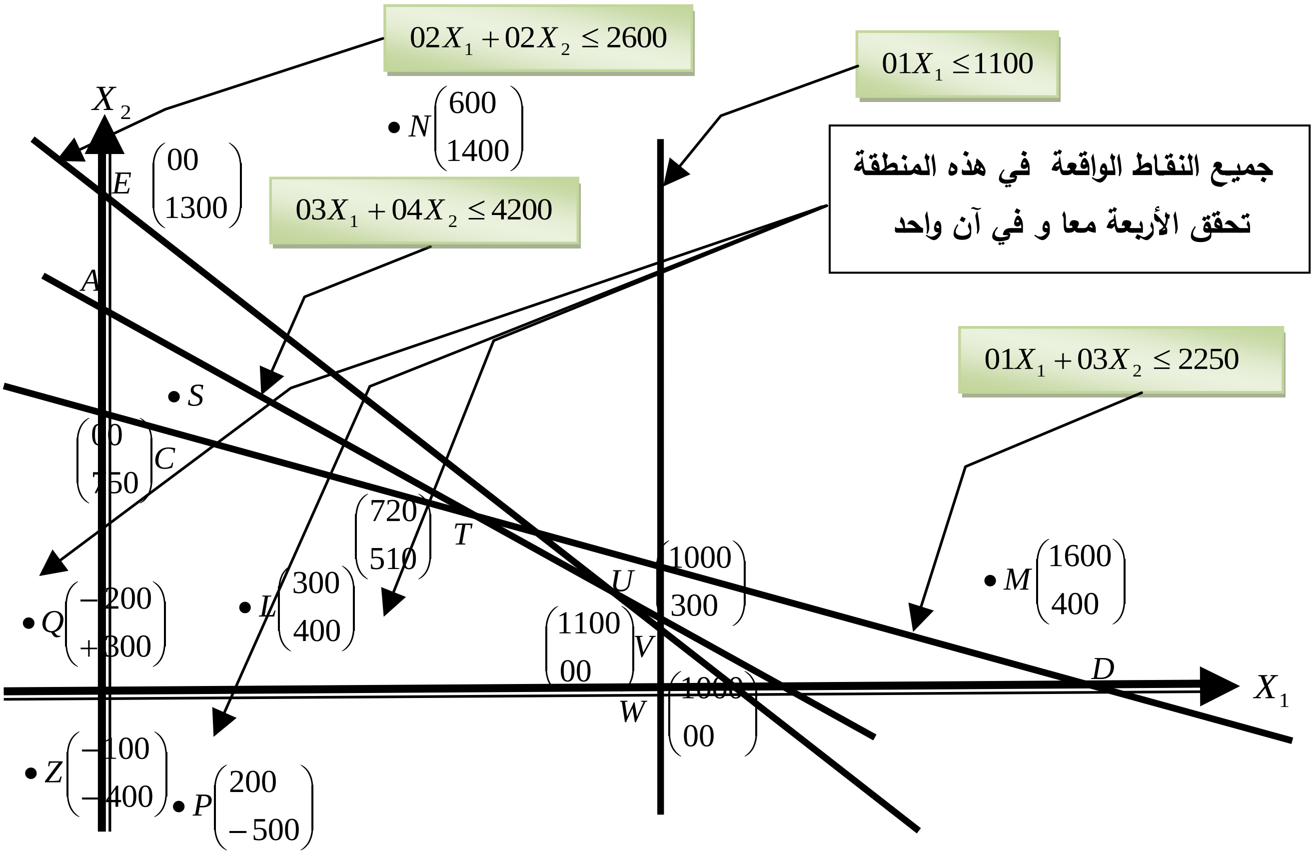
1. من بين هذه النقاط ذات إحداثيات **موجبة** أي قيم X_1 و X_2 التي تمثل الكميات المنتجة **موجبة** مثل النقطة $L\begin{pmatrix}X_1=+200\\X_2=+400\end{pmatrix}$ و O,C,T,U,V,W بالإضافة إلى نقاط أخرى. و بالتالي هذه النقاط تعتبر **حلول موجبة** أي تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات وبالتالي هذه النقاط تعتبر **حلول مقبولة**

2. من بين هذه النقاط ذات إحداثيات **سالبة** أي قيم X_1 و X_2 التي تمثل الكميات المنتجة **سالبة** مثل النقاط $Q\begin{pmatrix}X_1=-200\\X_2=+300\end{pmatrix}$ ، $Z\begin{pmatrix}X_1=-100\\X_2=-400\end{pmatrix}$ ، $P\begin{pmatrix}X_1=+200\\X_2=-500\end{pmatrix}$ و بالتالي هذه النقاط تعتبر **حلول سالبة** أي لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات وبالتالي هذه النقاط تعتبر **حلول غير مقبولة.**

ما يهمنا هو النقاط ذات الإحداثيات الموجبة أي الحلول الموجبة أو المقبولة في حين أن النقاط ذات الإحداثيات السالبة أي الحلول السالبة أو الغير مقبولة لا تهمنا و بغرض استبعاد الحلول الغير مقبولة نقوم برسم قيود عدم سلبية المتغيرات $X_1 \geq 0$ و $X_2 \geq 0$.

-05 رسم قيود عدم سلبية المتغيرات: $X_1 \geq 0$ **و** $X_2 \geq 0$:

بغرض رسم هذين القيدين نقوم برسم المستقيمين $X_1 = 0$ $X_2 = 0$. كما هو موضح في الشكل أدناه:



رسم قيود عدم سلبية المتغيرات يستثني و يبعد الحلول الغير مقبولة (النقاط ذات الإحداثيات السالبة) و تتحدد الحلول المقبولة (النقاط ذات الإحداثيات الموجبة) ضمن المنطقة التي تحصرها القطع المستقيمة التي تصل النقاط التالية: O,C,T,U,V,W

02.03.02 – تحديد منطقة الحلول المقبولة:

المنطقة O,C,T,U,V,W تحتوي و تتضمن النقاط التي تحقق القيود الوظيفية و بالتالي هذه النقاط تعتبر حلول بالإضافة إلى ذلك هذه النقاط تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات و بالتالي هذه النقاط تعتبر حلول مقبولة. بذلك نخلص إلى أن هذه المنطقة تحتوي على الحلول المقبولة لذلك تسمى هذه المنطقة **بمنطقة الحلول المقبولة أو منطقة الحلول الممكنة**. بذالك نخلص إلى تقديم أو استنتاج تعريف للمفهوم الخامس من مفاهيم البرمجة الخطية، ألا و هو **منطقة الحلول المقبولة (الممكنة)**

التعريف 05.02: المتعلق بمنطقة الحلول المقبولة

منطقة الحلول المقبولة هي المنطقة التي تتضمن جميع الحلول المقبولة للنموذج أو بعبارة أخرى تتضمن جميع النقاط ذات الإحداثيات التي تحقق في آن واحد كل من:

1. **القيود الوظيفية لنموذج البرمجة الخطية.**
2. **قيود عدم سلبية المتغيرات لنموذج البرمجة الخطية**

منطقة الحلول المقبولة O,C,T,U,V,W تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط (من الحلول المقبولة) تتوزع كما يلي

1. نقاط أو حلول مقبولة تقع داخل منطقة الحلول المقبولة
2. نقاط أو حلول مقبولة تقع على حدود (على القطع المستقيمة) منطقة الحلول المقبولة
3. نقاط أو حلول مقبولة تقع على النقاط الرأسية (الركنية) O,C,T,U,V,W لمنطقة الحلول المقبولة

من أجل كل نقطة (كل حل مقبول) من نقاط منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف $Z = 660X_1 + 840X_2$

الهدف هو من بين هذا العدد اللانهائي من الحلول المقبولة إيجاد و استخراج الحل المقبول الذي يعطي لدالة الهدف Z أكبر و أعظم قيمة لأن هدف المؤسسة هو تعظيم الربح. و هذا هو موضوع الفقرة (الخطوة) الموالية.

03.03.02 – تحديد الحل الأمثل:

من أجل كل حل مقبول من منطقة الحلول المقبولة، يوجد قيمة لدالة الهدف. السؤال المطروح ما هو الحل المقبول من بين هذا العدد اللانهائي من الحلول المقبولة الذي يعطي لدالة الهدف أكبر و أعظم قيمة. الحل المقبول الذي يعطي لدالة الهدف أعظم قيمة يسمى **بالحل الأمثل**. بذالك نخلص إلى تقديم أو استنتاج تعريف للمفهوم آخر من مفاهيم البرمجة الخطية، ألا و هو **الحل الأمثـل**.

التعريف 07.02: المتعلق بالحـل الأمثـل

الحل الأمثل هو حل مقبول يعطي لدالة الهدف أمثل و أحسن قيمـة، أي:

- **أعظم (أكبر) قيمـة فـي حالـة دالـة الهدف من النـوع تعظيم** (Max)
- **أدنــى(أقل) قيمـة فـي حالـة دالـة الهدف من النـوع تدنئــة** (Min)

بغرض استخراج الحل المقبول الذي يعطي لدالة الهدف أعظم قيمة (أي الحل الأمثل) من بين العدد اللانهائي من الحلول المقبولة نستعين بمضمون النظرية التالية:

– النظرية الأساسية للبرمجة الخطيـة:

مضمون النظرية الأساسية للبرمجة الخطية هو التالي:

إذا كـان نموذج البرمجـة الخطيـة يقبل على الأقل حل أمثل. فإن واحد من بين هذه الحلـول المثلـى يوافق أو يقـع على أحد النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبـولـة.

انطلاقا من مضمون هذه النظرية، يتضح أن الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة لذلك وجب علينا القيام بما يلي:

- إيجاد و حساب إحداثيات النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة كخطوة أولى
- إيجاد قيمة دالة الهدف عند هذه النقاط الرأسية كخطوة ثانية.

– تحديد (حساب) إحداثيات النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة:

النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة هي: O,C,T,U,V,W

- **تحديد إحداثيات النقطة** O: النقطة O ذات الإحداثيات: $O\begin{pmatrix} X_1 = 00 \\ X_2 = 00 \end{pmatrix}$
- **تحديد إحداثيات النقطة** C: النقطة C ذات الإحداثيات: $C\begin{pmatrix} X_1 = 00 \\ X_2 = 750 \end{pmatrix}$
- **تحديد إحداثيات النقطة** V: النقطة V ذات الإحداثيات: $V\begin{pmatrix} X_1 = 1100 \\ X_2 = 200 \end{pmatrix}$
- **تحديد إحداثيات النقطة** T: النقطة T تمثل نقطة تقاطع المستقيمين التاليين:
  - المستقيم ذو المعادلة: $03X_1 + 04X_2 = 4200$
  - المستقيم ذو المعادلة: $01X_1 + 03X_2 = 2250$

إحداثيات النقطة T يتم إيجادها إما عن طريق إسقاط هذه النقطة على المحورين و من ثم قراءة الإحداثيات أو عن طرق حل جملة المعادلتين السابقتين كما يلي:

$$\begin{cases} 03X_1 + 04X_2 = 4200 \ \ .... \ (01) \\ 01X_1 + 03X_2 = 2250 \ \ .... \ (02) \end{cases}$$

بضرب المعادلة رقم 02 للجملة بـ: -03 كما يلي:

$$\begin{cases} 03X_1 + 04X_2 = 4200 \\ -3(01X_1 + 03X_2 = 2250) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +03X_1 + 04X_2 = +4200 \\ -03X_1 - 09X_2 = -6750 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نحصل على ما يلي:

$$\begin{cases} +03X_1 + 04X_2 = +4200 \\ -03X_1 - 09X_2 = -6750 \end{cases}$$

$$-05X_2 = -2550 \Rightarrow X_2 = \frac{2550}{5} = 510$$

بغـرض إيجـاد قيمـة X_1 نقـوم بتعـويض قيمـة $X_2 = 510$ فـي إحـدى المعـادلتين و لـتكن الثانيـة $01X_1 + 03X_2 = 2250$ فنحصل على $X_1 = 720$، إذن النقطة T ذات الإحداثيات التالية: $T\begin{pmatrix} X_1 = 720 \\ X_2 = 510 \end{pmatrix}$

- **تحديد إحداثيات النقطة** U: النقطة U ذات الإحداثيات التالية: $U\begin{pmatrix} X_1 = 1000 \\ X_2 = 300 \end{pmatrix}$

تحديد إحداثيات النقطة W: من الرسم يتضح أن النقطة W ذات الإحداثيات: $W\begin{pmatrix} X_1 = 1100 \\ X_2 = 00 \end{pmatrix}$

– تقييم دالـة الهدف عند النقاط الرأسيـة (الركنيـة) لمنطقـة الحلول المقبولـة:

نعني بهذه الخطوة تحديد و إيجاد قيمة دالـة الهدف $Z = 660X_1 + 840X_2$ عند النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة. و من أجل ذلك يكفي أو نقوم بتعويض الإحداثيات (X_1, X_2) لكل نقطة رأسية في دالـة الهدف كما هو موضح في الجدول أدناه:

رقم النقطة الرأسيـة	النقـطة الرأسيـة	الإحداثيـات (X_1, X_2)	قيمـة دالـة الهدف $Z = 660X_1 + 840X_2$
01	O	$(00,00)$	$Z_O = 660(00) + 840(00) = 00$
02	C	$(00,750)$	$Z_C = 660(00) + 840(750) = 630000$
03	T	$(750,510)$	$Z_T = 660(750) + 840(510) = 903600$
04	U	$(1000,300)$	$Z_U = 660(1000) + 840(300) = 912000$
05	V	$(1100,200)$	$Z_V = 660(1100) + 840(200) = 894000$
06	W	$(1100,00)$	$Z_O = 660(1100) + 840(00) = 726000$

نلاحـظ أن النقطـة U ذات الإحـداثيات $\begin{pmatrix} X_1 = 1000 \\ X_2 = 300 \end{pmatrix}$ U، هـي النقطـة الرأسـية التـي تعطـي لدالـة الهـدف Z **أعظم و أحسن و أمثـل قيمة و هي** $Z = 912000$. لذالك تعتبر النقطة U نقطة الحل الأمثل.

بعد إيجاد الحل الأمثل و الذي هو $(X_1 = 1000, X_2 = 300)$ للنموذج أعلاه، نقول أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو :

* $X_1 = 1000$: أي على المؤسسة إنتاج 1000 وحدة من المنتج الأول P1
* $X_2 = 300$: أي على المؤسسة إنتاج 300 وحدة من المنتج الثاني P2

و يترتب عن ذلك تحقيق المؤسسة لربح مقداره: 912000 وحدة نقدية.

04.03.02 – تحقيق قيـود النموذج:

نعني بهذه الخطوة فيما إذا كان الحل الأمثل $X_1 = 1000$, $X_2 = 300$ يحقق قيود النموذج أم لا.

و بغرض معرفة ذلك نقوم بتعويض الحل الأمثل في القيود الوظيفية و عدم سلبية المتغيرات. يتم ذلك كما يلي:

القيد رقم 01 (مادة أولية 1) محقق $03(1000) + 04(300) = 4200 = 4200$ ....

القيد رقم 02 (ساعات عمل) محقق $01(1000) + 03(300) = 1900 < 2250$ ....

القيد رقم 03 (مادة أولية 2) محقق $02(1000) + 02(300) = 2600 = 2600$ ....

القيد رقم 04 محقق $01(1000) = 1000 < 1100$ ....

القيد رقم 05 محقق $X_1 = 1000 > 0$ ....

القيد رقم 06 محقق $X_2 = 300 \geq 0$ ....

من خلال عملية التعويض أعلاه نلاحظ بأن الحل الأمثل يحقق جميع القيود أو بعبارة أحسن جميع قيود النموذج محققة.

04.02- القيود المشبعة (النشطة) و القيود الغير مشبعة (الغير نشطة):

من خلال الفقرة السابقة، اتضح أن جميع قيود النموذج محققة، غير أن درجة تحقيق هذه القيود تختلف من قيد إلى آخر. فالقيدين رقم 01 و رقم 03 **محققة بإشارة تساوي تماما** (=)، ففي هذه الحالة يقال عن هذين القيدين أنهما **مشبعين أو نشطين،** أما القيدين رقم 02 و رقم 04 **محققة بإشارة أقل تماما (>)،** ففي هذه الحالة يقال عن هذين القيدين أنهما **غير مشبعين أو غير نشطين.** بذلك نخلص إلى التعريفين التاليين:

التعريف 08.02: المتعلق بالقيد المشبـع

نقول عن قيد أنـه قيد مشبـع أو نشط إذا كـان هذا القيد محقق بإشارة تساوي تمـاما

التعريف 09.02: المتعلق بالقيد الغير مشبـع

نقول عن قيد أنـه قيد غير مشبـع أو غير نشط إذا كان هذا القيد غير محقق بإشـارة تسـاوي تمـاما

05.02 – التفسير الاقتصادي للقيود المشبعة و القيود الغير مشبعة:

حتى يتسنى لنا الوصول إلى المعنى و التفسير الاقتصادي للقيود المشبعة و القيود الغير مشبعة، نرى أنه من الضروري التذكير بشرح مكونات قيد من القيود الوظيفية للنموذج أعلاه، و ليكن القيد رقم 01.

القيد رقم 01 (مادة أولية 1) .... $03X_1 + 04X_2 \leq 4200$

القيد أعلاه يتكون من طرفين هما:

01 – الطرف الأيمن: 4200 و يمثل المتاح و المتوفر على مستوى المؤسسة من المادة الأولية الأولى و المقدر بـ 4200 وحدة.

02 – الطرف الأيسر: $03X_1 + 04X_2$ و يتكون هذا الطرف من جزأين هما:

– **الجزء الأول:** $03X_1$: يمثل عدد الوحدات المستخدمة من المادة الأولية الأولى لإنتاج كمية مقدارها X_1 وحدة من المنتج الأول P1

– **الجزء الثاني:** $04X_2$: يمثل الكمية المستخدمة من المادة الأولية الثانية لإنتاج كمية مقدارها $\mathbf{X_2}$ وحدة من المنتج الأول P2

بالتالي الطرف الأيسر $03X_1 + 04X_2$ يمثل الكمية أو عدد الوحدات المستخدمة من المادة الأولية الأولى لإنتاج كمية X_1 وحدة من المنتج الأول P1 و كمية X_2 وحدة من المنتج الثاني P2.

حسب التعريف 08.02 المتعلق بالقيد المشبع هو القيد المحقق بإشارة تساوي تماما، هذا يعني أن الطرف الأيسر للقيد يساوي الطرف الأيمن و تبعا لمعنى أو ما يمثله كل طرف المتطرق إليه أعلاه فإن تساوي الطرفين يعني أن الكمية المستخدمة أو المستخدم من المورد الأول (المادة الأولية الأولى) تساوي إلى الكمية المتاحة أو

المتاح من هذا المورد الأول (المادة الأولية الأولى)، هذا يعني أن الكمية المتبقية (المتبقي) أو الكمية الغير مستخدمة (الغير مستخدم) من المورد الأول (المادة الأولية الأولى) **معدوم**، أي تم استخدام كل الكمية المتاحة (المتاح) من المورد الأول (المادة الأولية الأولى).

تباعا لما سبق شرحه أعلاه، نصل إلى المعنى و التفسير الاقتصادي للقيد المشبع و القيد غير المشبع

إذا كان القيد مشبع يعني ذلك أن المستخدم من المورد يساوي المتاح من هذا المورد أي تم استخدام هذا المورد كليتا ، يعني هذا أنه لا يوجد متبقى أو لا يوجد غير مستخدم من هذا المورد.

إذا كان القيد غير مشبع يعني ذلك أن المستخدم من المورد لا يساوي المتاح من هذا المورد و بالضبط المستخدم أقل من المتاح أي لم يتم استخدام هذا المورد كليتا ، يعني هذا أنه يوجد متبقى أو يوجد غير مستخدم من هذا المورد.

– الكمية الغير مستخدمة (المتبقية أو العاطلة) من مورد معين:

من المعلوم أن الكمية الغير مستخدمة من مورد ما و ليكن المورد الثاني الممثل في ساعات العمل (القيد رقم 02) تساوي الكمية المتاحة من هذا المورد و المقدرة بـ: 2250 ساعة عمل **ناقص** الكمية المستخدمة من هذا المورد و المقدرة بـ: $01X_1 + 03X_2 = 1(1000) + 3(300) = 1900$ أي أن الكمية الغير مستخدمة تساوي إلى الفرق بين الكمية المتاحة (المتاح) و الكمية المستخدمة (المستخدم) و هذا ما يعبر عنه كما يلي:

الكمية الغير مستخدمة = الكمية المتاحة – الكمية المستخدمة

الكمية الغير مستخدمة = $2250 - 01X_1 + 03X_2$

الكمية الغير مستخدمة = $2250 - 01(1000) + 03(300)$

الكمية الغير مستخدمة = $2250 - 1900 = 350$

تسمى الكمية الغير مستخدمة (الغير مستخدم) من مورد ما بالكمية العاطلة لأنها لم يتم استخدامها و تسمى كذلك بالكمية المتبقية (المتبقى).

06.02 – التفسير الهندسي للقيود المشبعة و القيود الغير مشبعة:

حتى يتسنى لنا الوصول إلى التفسير الهندسي للقيود المشبعة و القيود الغير مشبعة، نتفحص شكل الحل الأمثل أعلاه. عملية التفحص تبين ما يلي:

- القيد رقم 01: $03X_1 + 04X_2 \leq 4200$ قيد مشبع **يمر** بنقطة الحل الأمثل U
- القيد رقم 02: $01X_1 + 03X_2 \leq 2250$ قيد غير مشبع **لا يمر** بنقطة الحل الأمثل U
- القيد رقم 03: $02X_1 + 02X_2 \leq 2600$ قيد مشبع **يمر** بنقطة الحل الأمثل U
- القيد رقم 04: $01X_1 \leq 1100$ قيد غير مشبع **لا يمر** بنقطة الحل الأمثل U

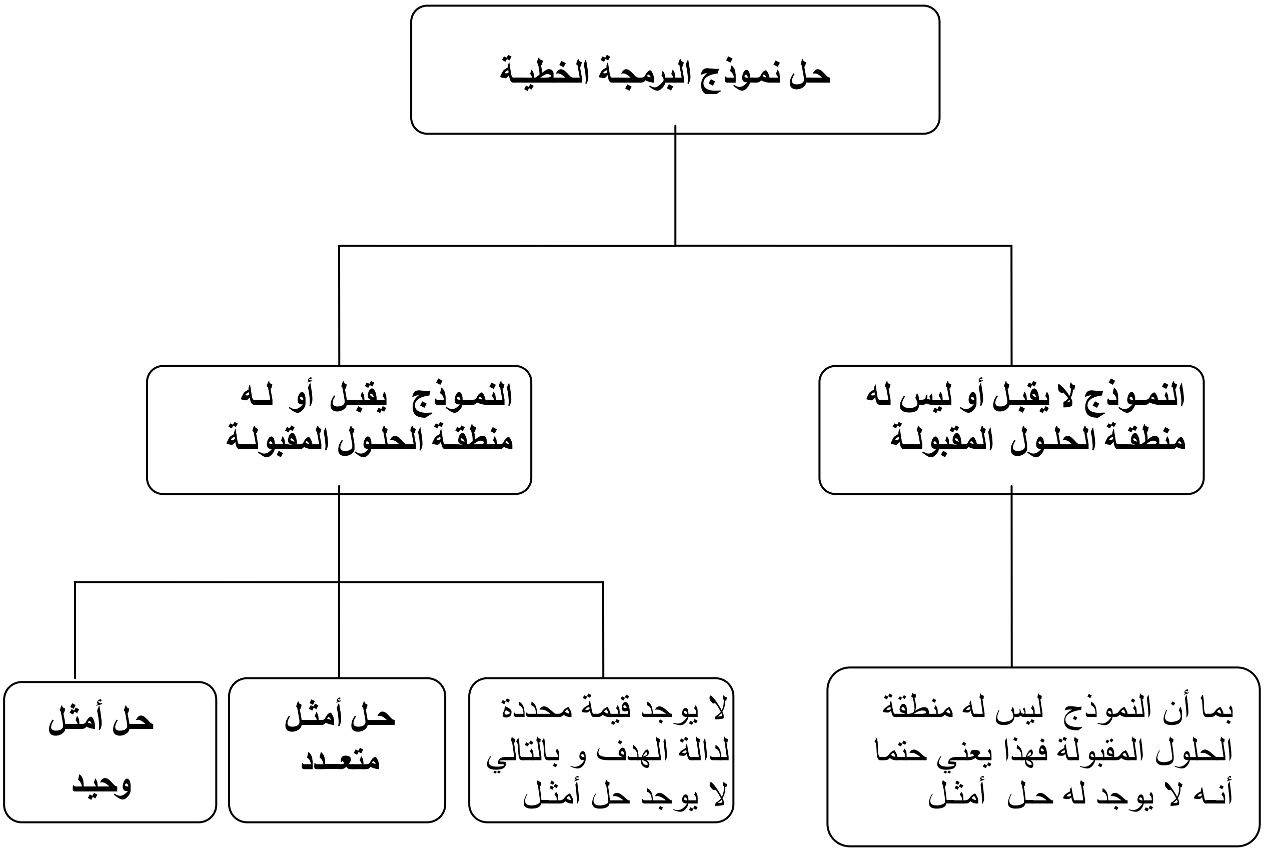
بذلك نخلص إلى أن:

– القيد مشبع يمر على نقطة الحل الأمثل

– القيد مشبع يمر على نقطة الحل الأمثل

07.02 – أنـواع الحلـول:

عند حل أي نموذج برمجة خطية باستخدام الطريقة البيانية أو طريقة أخرى، قد نحصل أو نتوصل إلى إحدى الحلول التي نعرضها من خلال المخطط التالي:



01.07.02 – الحـل الأمثـل الوحيـد:

نقول أن نموذج البرمجة الخطية يقبل حل أمثل وحيد إذا كان للنموذج حل أمثل واحد فقط مثل ما هو الحال بالنسبة لنموذج البرمجة الخطية للمثال 01.02 أعلاه. و بغرض التوضيح أكثر نأخذ المثال التالي

مثـــــال 03.02: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min \quad Z = 3000X_1 + 4000X_2$$

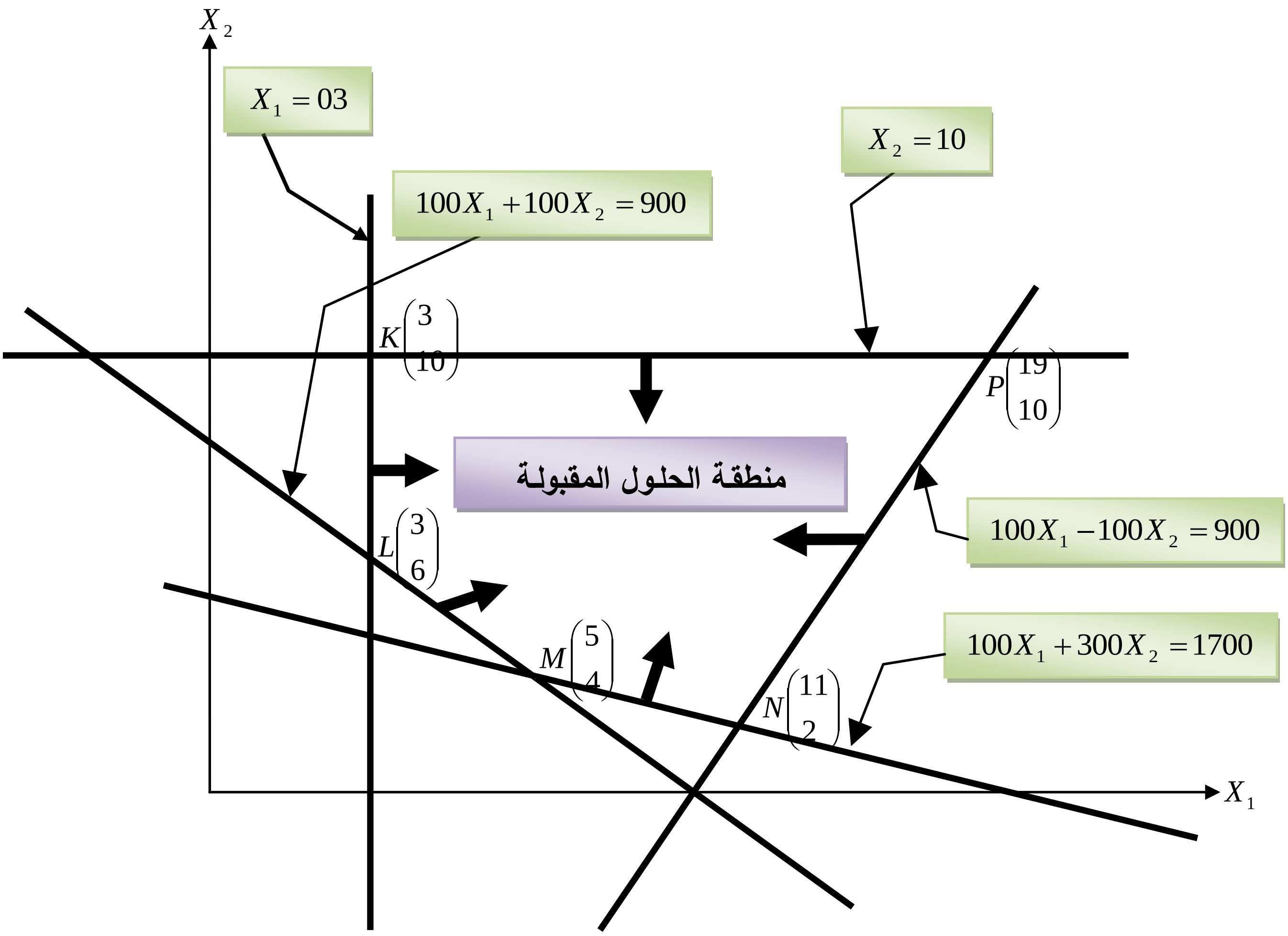
Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}
100X_1 + 100X_2 &\geq 900 \\
100X_1 - 100X_2 &\leq 900 \\
100X_1 + 300X_2 &\geq 1700 \\
01X_1 + 00X_2 &\geq 03 \\
00X_1 + 100X_2 &\leq 1000 \\
X_1 &\geq 0 \\
X_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

بغرض إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية نتبع الخطوات المذكورة أعلاه

1- التمثيل البياني للقيود:

- **رسم القيد** $100X_1+100X_2 \geq 900$: $A\begin{pmatrix}X_1=00\\X_2=09\end{pmatrix}$ ، $B\begin{pmatrix}X_1=09\\X_2=00\end{pmatrix}$
- **رسم القيد** $100X_1-100X_2 \leq 900$: $C\begin{pmatrix}X_1=00\\X_2=-09\end{pmatrix}$ ، $D\begin{pmatrix}X_1=09\\X_2=00\end{pmatrix}$
- **رسم القيد** $100X_1+300X_2 \geq 1700$: $E\begin{pmatrix}X_1=00\\X_2=\frac{17}{3}\end{pmatrix}$ ، $F\begin{pmatrix}X_1=17\\X_2=00\end{pmatrix}$
- **رسم القيد** $01X_1 \geq 03$: نقوم برسم مستقيم عمودي على القيمة $X_1=03$
- **رسم القيد** $100X_2 \leq 1000$: نقوم برسم مستقيم عند القيمة $X_2=\frac{1000}{100}=10$



2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

كم هو موضح في الشكل أعلاه فإن منطقة الحلول المقبولة هي التالية:

K, L, M, N, P

3- تحديد الحل الأمثل:

– **إيجاد إحداثيات النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة:**

$$K\begin{pmatrix}X_1=03\\X_2=10\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}X_1=03\\X_2=06\end{pmatrix},\ M\begin{pmatrix}X_1=05\\X_2=04\end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix}X_1=11\\X_2=02\end{pmatrix},\ P\begin{pmatrix}X_1=19\\X_2=10\end{pmatrix}$$

– **تقييم دالة الهدف عند النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة:**

قيمة دالة الهدف $Z=3000X_1+4000X_2$	الإحداثيات (X_1,X_2)	النقطة الرأسية	رقم النقطة الرأسية
• $Z_K=3000(03)+4000(10)=49000$	$(03,10)$	K	01
• $Z_L=3000(03)+4000(06)=33000$	$(03,06)$	L	02
• $Z_M=3000(05)+4000(04)=31000$	$(05,04)$	M	03
• $Z_n=3000(11)+4000(02)=41000$	$(11,02)$	N	04
• $Z_P=3000(19)+4000(10)=97000$	$(19,10)$	P	05

أدنى أي أمثل قيمة لدالة الهدف Z هي القيمة 31000، و عليه فإن النقطة ذات الإحداثيات $M\begin{pmatrix}X_1=05\\X_2=04\end{pmatrix}$ تمثل نقطة الحل الأمثل و عليه فإن هذا الأخير: $X_1=05\ ,\ X_2=04$

نلاحظ أن النموذج له حل أمثل واحد فقط و بالتالي يقال أن نموذج البرمجة الخطية يقبل حل أمثل وحيد.

مثـــــال 04.02: ليكن نموذج البرمجة الخطية المقدم من خلال المثال 03.02 أعلاه غير أن دالة الهدف هي $Max\ \ Z=3000X_1+4000X_2$ بدلا من $Min\ \ Z=3000X_1+4000X_2$

أعظم أي أمثل قيمة لدالة الهدف Z هي القيمة 97000، و عليه فإن هذه النقطة ذات الإحداثيات $P\begin{pmatrix}X_1=19\\X_2=10\end{pmatrix}$ تمثل نقطة الحل الأمثل و عليه فإن هذا الأخير: $X_1=19\ ,\ X_2=10$

نلاحظ أن النموذج له حل أمثل واحد فقط و بالتالي يقال أن نموذج البرمجة الخطية يقبل حل أمثل وحيد.

02.07.02 – لا يوجد منطقة الحلول المقبولـة:

في هذه الحالة لا توجد منطقة الحلول المقبولة و بالتالي لا يوجد حل أمثل مثلما يوضحه المثال أدناه:

مثـــــال: 05.02 ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned}&Max\ \ Z=8250X_1+11240X_2\\&\text{Soumise Aux Contraintes}\\&1250X_1+1000X_2\le 5000\\&700X_1+1000X_2\le 7000\\&X_1\ge 0\\&X_2\ge 0\end{aligned}$$

بغرض حل النموذج أعلاه باستخدام الطريقة البيانية نتبع الخطوات السابقة الذكر

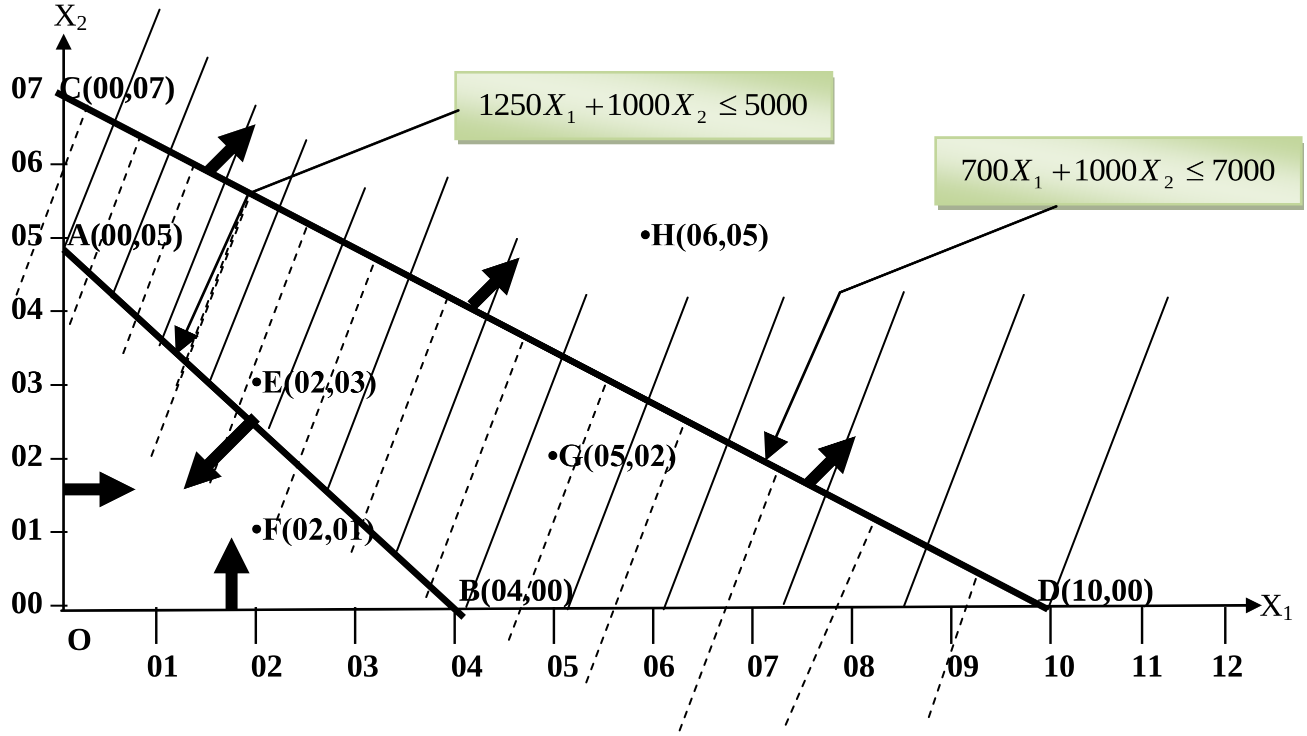
1- التمثيل البياني للقيود:

- **رسم القيد رقم 01 :** $1250X_1 + 1000X_2 \le 5000$: $A\begin{pmatrix} X_1 = 00 \\ X_2 = 05 \end{pmatrix}$ ، $B\begin{pmatrix} X_1 = 04 \\ X_2 = 00 \end{pmatrix}$

النقاط التي تقع **على و على يسار** المستقيم ذو المعادلة $1250X_1 + 1000X_2 = 5000$ تحقق القيد و بالتالي هي حلول لهذا القيد. أما النقاط التي تقع **على يمين** هذا المستقيم **لا تحقق** القيد لذلك نقوم باستبعادها و ذلك عن طريق تشطيبها كما هو موضح في الشكل أسفله بخطوط مستمرة.

- **رسم القيد رقم 02 :** $700X_1 + 1000X_2 \le 7000$: $C\begin{pmatrix} X_1 = 00 \\ X_2 = 07 \end{pmatrix}$ ، $D\begin{pmatrix} X_1 = 10 \\ X_2 = 00 \end{pmatrix}$

النقاط التي تقع **على و على يسار** المستقيم ذو المعادلة $700X_1 + 1000X_2 = 7000$ **لا تحقق** القيد لذلك نقوم باستبعادها و ذلك عن طريق تشطيبها كما هو موضح في الشكل أسفله بخطوط متقطعة. أما النقاط التي تقع **على يمين** هذا المستقيم **تحقق** القيد و بالتالي هي حلول لهذا القيد.



2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

- النقاط الواقعة على يمين و على القيد $700X_1 + 1000X_2 \le 7000$ منها $C(X_1 = 00 \;\; X_2 = 07)$، $D(X_1 = 10 \;\; X_2 = 00)$، $H(X_1 = 06 \;\; X_2 = 05)$ **تحقق** هذا القيد بالإضافة إلى قيود عدم سلبية المتغيرات. في حين أن هذه النقاط **لا تحقق** القيد $1250X_1 + 1000X_2 \le 5000$
- النقاط الواقعة على يسار القيد $700X_1 + 1000X_2 \le 7000$ و على يمين **(فوق)** القيد $1250X_1 + 1000X_2 \le 5000$ منها $E(X_1 = 02 \;\; X_2 = 03)$، $G(X_1 = 05 \;\; X_2 = 02)$ **لا تحقق** القيدين معا بعض في حين أنها تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

- النقاط الواقعة على يسار (تحت) و على القيد $1250X_1+1000X_2 \leq 5000$ منها $A\begin{pmatrix} X_1=00 \\ X_2=05 \end{pmatrix}$، $B\begin{pmatrix} X_1=04 \\ X_2=00 \end{pmatrix}$، $F\begin{pmatrix} X_1=02 \\ X_2=01 \end{pmatrix}$، $O\begin{pmatrix} X_1=00 \\ X_2=00 \end{pmatrix}$ **تحقق** القيد $1250X_1+1000X_2 \leq 5000$ بالإضافة قيود عدم سلبية المتغيرات غير أنها لا تحقق القيد $700X_1+1000X_2 \leq 7000$.

من خلال التعليق أعلاه بالإضافة إلى الشكل أعلاه، يتضح أنه لا توجد أي نقطة تحقق جميع القيود مع بعض و في آن واحد و بالتالي لا توجد منطقة الحلول المقبولة. و بما أنه لا توجد منطقة الحلول المقبولة فيترتب عن ذلك عدم وجود حل أمثل.

03.07.02 – الحلول المثلى المتعددة:

في هذه الحالة نموذج البرمجة الخطية لا يقبل حل أمثل واحد فقط و إنما يقبل العديد من الحلول المثلى مثلما يوضحه المثال التالي:

مثـــــال: 06.02: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 630X_1 + 840X_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} 03X_1 + 04X_2 &\leq 4200 \\ 01X_1 + 03X_2 &\leq 2250 \\ 02X_1 + 02X_2 &\leq 2600 \\ 01X_1 + 00X_2 &\leq 1100 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

المثال أعلاه ما هو إلا المثال 02.02 مع تغير في دالة الهدف التي هي $Max\ Z = 630X_1 + 840X_2$ بدلا من $Max\ Z = 660X_1 + 840X_2$. بغرض الوصول إلى الحل للنموذج أعلاه نتبع نفس خطوات حل المثال 02.02، غير أن الخطوة التي تتغير هي **خطوة تقييم دالة الهدف عند النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة** لأن النموذجين ليس لهما نفس دالة الهدف. و عليه تصبح هذه الخطوة كما يلي:

قيمة دالة الهدف $Z = 630X_1 + 840X_2$	الإحداثيات (X_1, X_2)	النقطة الرأسية	رقم النقطة الرأسية
• $Z_O = 630(00) + 840(00) = 00$	$(00,00)$	O	01
• $Z_C = 630(00) + 840(750) = 6300000$	$(00,750)$	C	02
• $Z_T = 630(720) + 840(510) = 882000$	$(720,510)$	T	03
• $Z_U = 630(1000) + 840(300) = 882000$	$(1000,300)$	U	04
• $Z_V = 630(1100) + 840(200) = 861000$	$(1100,200)$	V	05
• $Z_W = 630(1100) + 840(00) = 693000$	$(1100,00)$	W	06

أعظم قيمة لدالة الهدف Z هي القيمة 882000، هذه القيمة تم الحصول عليها عند النقطتين الرأسيتين T و U و هذا يعني أن النموذج أعلاه له حلين أمثلين هما:

1. **الحل الأمثل الأول:** هو النقطة الرأسية $T\begin{pmatrix} X_1 = 720 \\ X_2 = 510 \end{pmatrix}$ و الذي يعني أن على المؤسسة إنتاج :

* $X_1 = 720$: أي على المؤسسة إنتاج 720 وحدة من المنتج الأول P1

* $X_2 = 510$: أي على المؤسسة إنتاج 510 وحدة من المنتج الثاني P2

2. **الحل الأمثل الثاني:** هو النقطة الرأسية $U\begin{pmatrix} X_1 = 1000 \\ X_2 = 300 \end{pmatrix}$ و الذي يعني على المؤسسة إنتاج :

* $X_1 = 1000$: أي على المؤسسة إنتاج 1000 وحدة من المنتج الأول P1

* $X_2 = 300$: أي على المؤسسة إنتاج 300 وحدة من المنتج الثاني P2

كلا الحلين الأمثلين يحققان ربح أعظم (أمثل) يقدر بـ: 882000 وحدة نقدية، و بالتالي المؤسسة أما حلين أمثلين و لها الاختيار بينهما.

بتفحص الشكل الأخير للحل الأمثل فإن النقطتين T و U اللتان تمثلان الحل الأمثل، نلاحظ أنهما تقعان على نفس المستقيم و بالضبط مستقيم القيد الأول: $03X_1 + 04X_2 \le 4200$ ذو الميل $-\frac{3}{4}$ الذي يمثل نفس الميل لدالة الهدف $Z = 630X_1 + 840X_2$ الذي هو $-\frac{630}{840} - \frac{3}{4}$

انطلاقا من الحلين الأمثلين أعلاه T و U يمكن استنتاج حلول مثلى أخرى بتطبيق العلاقة التالية:

$$X_{OPTN} = K \times X_{OPT1} + (1-K) \times X_{OPT2}$$

حيث أن:

- K : عدد ثابت محصور بين 0 و 1 أي أن: $0 < K < 1$
- X_{OPTN} : يمثل الحل الأمثل الجديد المراد استنتاجه.
- X_{OPT1} : يمثل الحل الأمثل الأول.
- X_{OPT2} : يمثل الحل الأمثل الثاني.

– فمن أجل $K = 0.3$ فإن الحل الأمثل الجديد يساوي ما يلي:

$$X_{OPTN} = 0.3 \times X_{OPT1} + (1-0.3) \times X_{OPT2}$$

$$X_{OPTN} = 0.3 \times X_{OPT1} + 0.7 \times X_{OPT2}$$

بتعويض كل من:

- $X_{OPT1} = \begin{pmatrix} X_1 = 720 \\ X_2 = 510 \end{pmatrix}$ و $X_{OPT2} = \begin{pmatrix} X_1 = 216 \\ X_2 = 153 \end{pmatrix}$

نحصل على ما يلي:

$$X_{OPTN} = 0.3\begin{pmatrix} X_1 = 720 \\ X_2 = 510 \end{pmatrix} + 0.7\begin{pmatrix} X_1 = 1000 \\ X_2 = 300 \end{pmatrix}$$

$$X_{OPTN} = \begin{pmatrix} X_1 = 0.3 \times 720 \\ X_2 = 0.3 \times 510 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 = 0.7 \times 1000 \\ X_2 = 0.7 \times 300 \end{pmatrix}$$

$$X_{OPTN}=\begin{pmatrix}X_1=216\\X_2=153\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}X_1=700\\X_2=210\end{pmatrix}\Rightarrow X_{OPTN}=\begin{pmatrix}X_1=216+700\\X_2=153+210\end{pmatrix}\Rightarrow X_{OPTN}=\begin{pmatrix}X_1=916\\X_2=363\end{pmatrix}$$

إذن الحل الجديد هو التالي: $X_{OPTN}=\begin{pmatrix}X_1=916\\X_2=363\end{pmatrix}$

بتعويض قيم هذا الحل الجديد المستنتج في دالة الهدف $Z=630X_1+840X_2$ نحصل على ما يلي:

$$Z=630(916)+840(363)=882000$$

نلاحظ بأن قيمة دالة الهدف للحل الجديد المستنتج هي نفسها القيمة المتحصل عليها من أجل الحلين الأمثلين أعلاه، و بالتالي الحل الجديد المستنتج هو حل أمثل أخر أو ثالث.

– فمن أجل $K=0.8$ فإن الحل الأمثل الجديد يساوي ما يلي:

$$X_{OPTN}=0.8\times X_{OPT1}+(1-0.8)\times X_{OPT2}$$

$$X_{OPTN}=0.8\times X_{OPT1}+0.2\times X_{OPT2}$$

بتعويض كل من: $X_{OPT1}=\begin{pmatrix}X_1=720\\X_2=510\end{pmatrix}$ و $X_{OPT2}=\begin{pmatrix}X_1=216\\X_2=153\end{pmatrix}$

نحصل على ما يلي: $X_{OPTN}=0.8\begin{pmatrix}X_1=720\\X_2=510\end{pmatrix}+0.2\begin{pmatrix}X_1=1000\\X_2=300\end{pmatrix}\Rightarrow X_{OPTN}=\begin{pmatrix}X_1=776\\X_2=468\end{pmatrix}$

بتعويض قيم هذا الحل الجديد المستنتج في دالة الهدف $Z=630X_1+840X_2$ نحصل على ما يلي:

$$Z=630(776)+840(468)=882000$$

نلاحظ بأن قيمة دالة الهدف للحل الجديد المستنتج هي نفسها القيمة المتحصل عليها من أجل الحلين الأمثلين أعلاه، و بالتالي الحل الجديد المستنتج هو حل أمثل أخر أو رابع.

نشير إلى أن هذان الحلين الأمثلين الجديدين يمثلان إحداثيات لنقطتين تقعا على القطعة المستقيمة $T-U$.

من أجل أي قيمة للثابت K محصورة بين 0 و 1 يمكن استنتاج حل أمثل آخر للنموذج أعلاه. و بما أن هناك قيم متعددة أو عديدة للثابت K ضمن هذا المجال 0 و 1 فإنه سوف يتم استنتاج حلول مثلى متعددة و بالتالي النموذج أعلاه له أو يقبل حلول مثلى متعددة

ملاحظة: 02.02:

- هذه الحلول المثلى المتعددة تمثل إحداثيات نقاط تقع على القطعة المستقيمة التي تربط النقطتين U و T أي $T-U$ و بالتالي نخلص إلى أن:

جميع النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة التي تصل نقطتي الحل الأمثل تمثل حل أو حلول مثلى.

04.07.02 – لا يوجد حل أمثل محدد (منتهي):

في هذا النوع من الحلول يمكن تعظيم و تحسين دالة الهدف إلى ما لا نهاية. غير أنه من الناحية العملية هذا النوع من الحلول غير موجود، فلا توجد أو لا يمكن لمؤسسة أن تعظم ربحها إلى ما لا نهاية. هذا

النوع من الحلول قد ينتج من سوء الصياغة الرياضية لمشكل المؤسسة سواء كنسيان قيد من القيود أو خطأ في إشارة قيد أو خطأ في إشارة معامل من معاملات متغيرات القرار.

مثـــال: 08.02 ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 1500X_1 + 2800X_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$-400X_1 + 400X_2 \le 1200$$

$$000X_1 + 100X_2 \ge 150$$

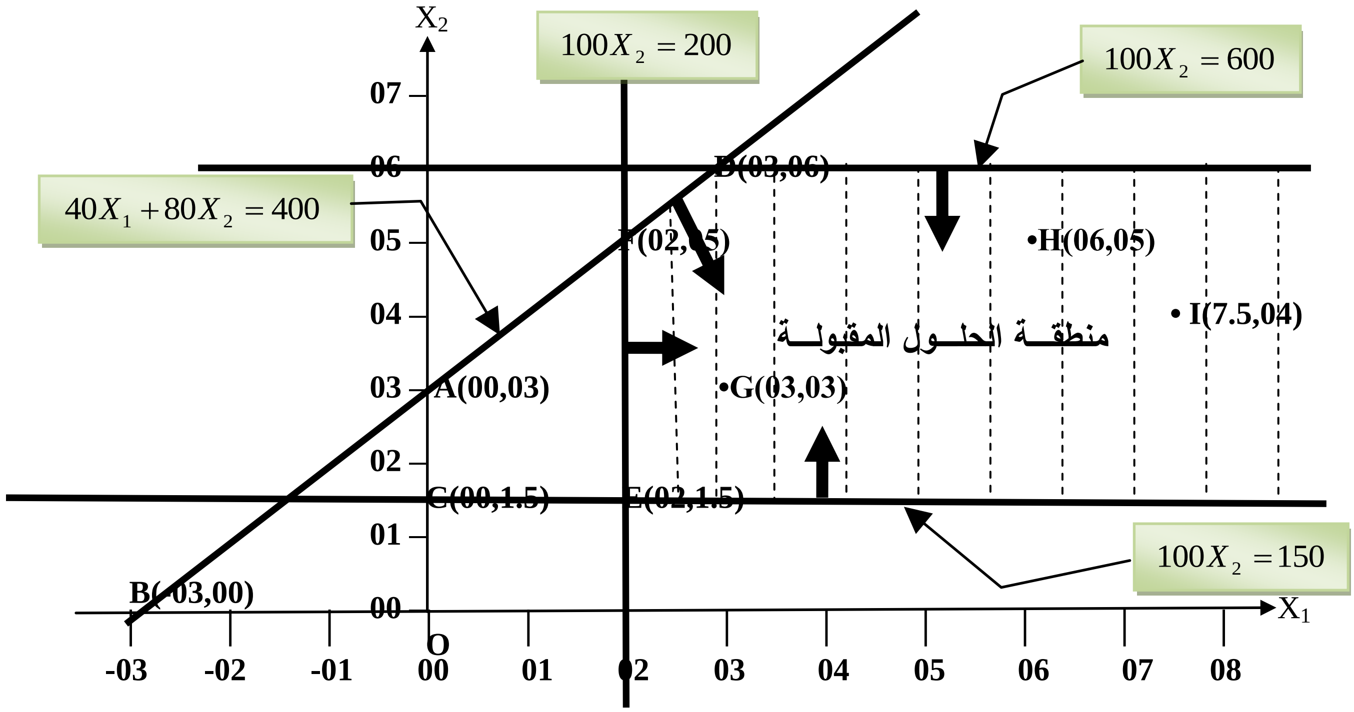
$$000X_1 + 100X_2 \le 600$$

$$100X_1 + 000X_2 \ge 200$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

بغرض حل النموذج أعلاه باستخدام الطريقة البيانية نتبع الخطوات السابقة الذكر

1 – التمثيل البيانـي للقيود:



2 – تحديـد منطقـة الحلـول المقبولـة:

من خلال الشكل البياني أعلاه، يتضح أن منطقة الحلول المقبولة هي تلك المنطقة المشطبة بخطوط متقطعة $E-F-D$ كما يوضحه الشكل أعلاه. ما يقال عن هذه المنطقة أنها مفتوحة أي غير محددة أو غير محصورة

– تحديد الحل الأمثل:

من أجل أي نقطة (حل مقبول) من منطقة الحلول المقبولة المتوصل إليها في الفقرة السابقة هناك قيمة لداله الهدف $Z = 1500X_1 + 2800X_2$، غير أنه ما يهمنا هو من بين نقاط (الحلول المقبولة) هذه المنطقة إيجاد النقطة التي تعطي لدالة الهدف أعظم قيمة. لو كانت منطقة الحلول المقبولة مغلقة أي غير مفتوحة لكانت

عملية إيجاد الحل الأمثل سهلة حيث يتم إيجاد إحداثيات النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة ثم بعد ذلك نقوم بتقييم دالة الهدف عند كل نقطة رأسية و يتم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لدالة الهدف أعظم قيمة. بما أن منطقة الحلول المقبولة مفتوحة أي غير محدودة فنلاحظ أنه كلما انتقلنا أو تحركنا إلى اليمين داخل هذه المنطقة هناك نقطة (حل مقبول) يعطي لدالة الهدف قيمة أكبر، فمثلا

- عند النقطة $\begin{pmatrix} X_1 = 03 \\ X_2 = 03 \end{pmatrix}$ G قيمة دالة الهدف $Z = 1500(03) + 2800(03) = 12900$
- عند النقطة $\begin{pmatrix} X_1 = 07.50 \\ X_2 = 04 \end{pmatrix}$ I قيمة دالة الهدف $Z = 1500(7.5) + 2800(04) = 22450$
- عند النقطة $\begin{pmatrix} X_1 = 06 \\ X_2 = 05 \end{pmatrix}$ H قيمة دالة الهدف $Z = 1500(06) + 2800(05) = 23000$

لو ننتقل إلى يمين النقطة I توجد ما لا نهاية من النقاط (الحلول المقبولة) الأخرى تعطي لدالة الهدف قيم أكبر من تلك عند النقاط I ، H و G و بالتالي نلاحظ أنه يمكن تعظيم قيمة دالة الهدف إلى ما لا نهاية، أي ليس هناك **قيمة محددة أو قيمة منتهية** لدالة الهدف أو بعبارة أخرى النموذج **ليس له حل أمثل محدد أو منتهي**.

ملاحظة: 03.02:

يتم الحصول على هذا النوع من الحلول أي عدم وجود حل أمثل محدد أو منتهي عند يكون لدينا في وقت أو في آن واحد ما يلي:

1. منطقة الحلول المقبولة مفتوحة.
2. دالة الهدف من النوع تعظيم Max.

فقد نتحصل على منطقة الحلول المقبولة مفتوحة غير أن دالة الهدف من النوع تدنئة Min ففي هذه الحالة لا يمكن الوقوع في هذا النوع من الحلول كما يوضحه المثال التالي:

مثـــال: 09.02 ليكن نموذج البرمجة الخطية المقدم من خلال المثال 08.02 أعلاه غير أن دالة الهدف هي $Min\ Z = 1500X_1 + 2800X_2$ بدلا من $Max\ Z = 1500X_1 + 2800X_2$

1- التمثيل البياني للقيود: التمثيل البياني للقيود يسمح بالحصول على نفس الشكل للمثال 08.02 أعلاه

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة: منطقة الحلول المقبولة هي نفسها تلك المتحصل عليها في المثال 08.02 و هي عبارة عن منطقة مفتوحة ذات النقاط الرأسية التالية: $D-E-F$

3- تحديد الحل الأمثل: إحداثيات النقاط الرأسية: * E $\begin{pmatrix} X_1 = 02 \\ X_2 = 1.5 \end{pmatrix}$ *F $\begin{pmatrix} X_1 = 02 \\ X_2 = 05 \end{pmatrix}$ * D $\begin{pmatrix} X_1 = 03 \\ X_2 = 06 \end{pmatrix}$

النقـطة الرأسيـة	الإحداثيـات (X_1, X_2)	قيمـة دالـة الهـدف $Z = 1500X_1 + 2800X_2$
D	$(03,06)$	• $Z_D = 1500(03) + 2800(06) = 21300$
F	$(02,05)$	• $Z_F = 1500(02) + 2800(06) = 19800$
E	$(02,1.5)$	• $Z_E = 1500(02) + 2800(1.5) = 7200$

أدنى و أقل قيمة لدالة الهدف Z هي القيمة 7200، هذه القيمة تم الحصول عليها عند النقطة E و هذا يعني أن هذه النقطة تتضمن الحل الأمثل الذي هو: $X_1 = 02, X_2 = 1.5$

المحور الأول : البــرمجـــــة الخطيـــــــة

الفصــل 🕮 الثالـــث

عـــرض الحــــل بطريقـــة السمبلكـــس

Présentation de la solution par la méthode du simplexe

أهداف الفصل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بمـا يلـي:

- الحصول أو الانتقال من حل أساس مقبول إلى حل أساس مقبول أخر أحسن. Obtention d'Une Solution de Base Meilleure à Partir d'Une Solution de Base Réalisable
- معرفة ماذا نعني بالمتغيرة الداخلة La Variable Entrante
- معرفة ماذا نعني بالمتغيرة الخارجة La Variable Sortante
- معيار اختيار المتغيرة الداخلة Critère Du Choix De La Variable Entrante
- معيار اختيار المتغيرة الخارجة Critère Du Choix De La Variable Sortante
- معيار اختيار أمثلية الحل Critère D'Optimalité
- حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس –الشكل الجدولي– Résolution Des Modèles De Programmation Linéaire Par La Méthode Du Simplexe -Forme Tableau-

01.03- تمهيـد:

تهدف طريقة السمبلكس الى ايجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية، مبدأ هذه الطريقة هو، انطلاقا من حل أساس مقبول أول ننتقل أو نحصل على حل أساس مقبول آخر أو جديد مجاور (أحسن من الأول)، و ذلك عن طريق تحويل متغيرة خارج أساس معدومة إلى متغيرة أساس موجبة، و في نفس الوقت تحويل متغيرة أساس إلى متغيرة خارج الأساس. عملية التحويل هذه، تتم وفقا لبعض المعايير.

02.03- خطوات الحل باستخدام طريقة السمبـلكس:

بغرض الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس على الشكل الجدولي نتبع مجموعة الخطوات:

1. كتابة النموذج على الشكل المعياري.
2. إيجاد أو حل أساس مقبول للانطلاق.
3. تحسين الحل.
4. اختبار أمثلية الحل.

بغرض توضيح أكثر كيفية إتباع هذه الخطوات في حل نماذج البرمجة الخطية، نأخذ المثال التالي:

مثال 01.03:

نموذج البرمجة الخطية أدناه يمثل الصياغة الرياضية لمشكل مؤسسة تهدف إلى تعظيم الربح المترتب عن إنتاجها لثلاثة منتجات $\mathrm{Prod}-01, \mathrm{Prod}-02, \mathrm{Prod}-03$ بكميات X_1, X_2, X_3 على التوالي و ذلك باستخدام أربعة مواد أولية أو موارد.

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ Z = 200X_1 + 150X_2 + 160X_3 \\
& \text{Soumise Aux Contraintes} \\
& \quad 03X_1 + 04X_2 + 02X_3 \le 2400 \\
& \quad 02X_1 + 03X_2 + 05X_3 \le 3000 \\
& \quad 08X_1 + 10X_2 + 12X_3 \le 9800 \\
& \quad 05X_1 + 07X_2 + 07X_3 \le 5100 \\
& \quad X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

1-/ الخطوة 01: كتابة النموذج على الشكل المعياري: الشكل المعياري هو التالي:

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ Z = 200X_1 + 150X_2 + 160X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 \\
& \text{Soumise Aux Contraintes} \\
& \quad 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 2400 \\
& \quad 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 3000 \\
& \quad 8X_1 + 10X_2 + 12X_3 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0S_4 = 9800 \\
& \quad 5X_1 + 7X_2 + 7X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1S_4 = 5100 \\
& \quad X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, S_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ Z = 200X_1 + 150X_2 + 160X_3 \\
& \text{Soumise Aux Contraintes} \\
& \quad 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_1 = 2400 \\
& \quad 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + S_2 = 3000 \\
& \quad 8X_1 + 10X_2 + 12X_3 + S_3 = 9800 \\
& \quad 5X_1 + 7X_2 + 7X_3 + S_4 = 5100 \\
& \quad X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, S_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

2-/ الخطوة 02: إيجاد أو حل أساس مقبول للانطلاق:

بغرض الحصول على أول حل أساس مقبول للانطلاق نقوم بعدم متغيرات القرار

• متغيرات خارج الأساس المعدومة:	$X_1 = 00, X_2 = 00, X_3 = 00$
• متغيرات الأساس الموجبة:	$S_1 = 2400, S_2 = 3000, S_3 = 9800, S_4 = 5100$

قيمة دالة الهدف Z الموافقة لأول حل أساس مقبول للانطلاق تساوي ما يلي:

$$Z = 200(00) + 150(00) + 160(00) + 00(2400) + 00(3000) + 00(9800) + 00(5100)$$

3-/ الخطوة 03: تشكيل جدول السمبلكس الأول:

بغرض تشكيل جدول السمبلكس الأول نقوم بتفريغ معطيات الشكل المعياري للنموذج في جدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	$\uparrow X_1$	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
00	S_1	03	04	02	01	00	00	00	2400
00	S_2	02	03	05	00	01	00	00	3000
00	S_3	08	10	12	00	00	01	00	9800
00	S_4	05	07	07	00	00	00	01	5100
Z_j		00	00	00	00	00	00	00	
$C_j - Z_j$		200	150	160	00	00	00	00	$Z = 00$

جدول السمبلكس في صورته الحالية دون السطرين الأخيرين Z_j و $C_j - Z_j$ يعكس الشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية. قيم السطرين الأخيرين Z_j و $C_j - Z_j$ يتم حسابها انطلاقا من قيم الجدول كما يلي:

1-/ حساب المقدار Z_j: يحسب وفقا للعلاقة $Z_j = C_B \times a_j = \sum_{i \in B} C_i \times a_{ij}$

$$Z_1 = C_B \times a_1 = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03 \\ 02 \\ 08 \\ 05 \end{pmatrix} = 00 \times 03 + 00 \times 02 + 00 \times 08 + 00 \times 05 = 00$$

$$Z_2 = C_B \times a_2 = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 04 \\ 03 \\ 10 \\ 07 \end{pmatrix} = 00 \times 04 + 00 \times 03 + 00 \times 10 + 00 \times 07 = 00$$

$$Z_3 = C_B \times a_3 = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 02 \\ 05 \\ 12 \\ 07 \end{pmatrix} = 00 \times 02 + 00 \times 05 + 00 \times 12 + 00 \times 07 = 00$$

$$Z_4 = C_B \times a_4 = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 00$$

$$Z_5 = 00 \times 00 + 00 \times 01 + 00 \times 00 + 00 \times 00 = 00$$
$$Z_6 = 00 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 01 + 00 \times 00 = 00$$
$$Z_7 = 00 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 01 = 00$$

بالنسبة للمعنى الاقتصادي للمقدار Z_j سوف يتم التطرق إليه لاحقا.

– **حساب المقدار** $C_j - Z_j$: يساوي الفرق بين قيم السطر C_j و قيم السطر Z_j.

5-/ الخطوة 05: تحسين الحل (إيجاد حل أساس مقبول ثاني -آخر- أحسن)

بعد تشكيل جدول السمبلكس الأول الذي هو موضوع الخطوة السابقة، ننتقل إلى خطوة موالية و الممثلة في **تحسيـن الحـل** التي تشكل موضوع هذه الخطوة. نعني بعملية تحسين الحل هو الانتقال أو الحصول على حل أساس مقبول ثاني أحسن و أفضل من الأول أي حل أساس مقبول أخر يعطي لدالة الهدف Z قيمة أحسن من الأول. و هذا تبعا لمبدأ طريقة السمبلكس الذي يقوم على الانتقال أو الحصول على حل أساس مقبول ثاني أو آخر انطلاقا من الحل الأساس المقبول الأول أو السابق، غير أن ما يميز حل الأساس المقبول الثاني عن الأول هو أن الثاني يعطي لدالة الهدف Z قيمة أحسن و أفضل من الأول، أي يعطي لدالة الهدف Z قيمة **موجبـة** بعدما كانت معدومة في حل الأساس المقبول الأول.

بتفحص صيغة دالة الهدف Z نلاحظ أنها معطاة بدلالة متغيرات القرار X_1, X_2, X_3 حيث أن $Z = 200X_1 + 150X_2 + 160X_3$.

حتى تأخذ دالة الهدف Z قيمة موجبة **يجب على إحدى** متغيرات القرار X_1, X_2, X_3 و التي هي متغيرات خارج أساس معدومة أن تأخذ قيم موجبة. و حتى تأخذ X_1 أو X_2 أو X_3 قيم موجبة يجب على احداهم أن تتحول من **متغيرة خـارج أساس معدومـة** إلى **متغيرة أساس موجبـة**. إذن يجب على:

- إحدى متغيرات خارج الأساس المعدومة X_1 أو X_2 أو X_3 أن تتحول و تصبح متغيرة أساس موجبة. هذه المتغيرة تسمى: **المتغيـرة الداخلـة**
- إحدى متغيرات الأساس الموجبة S_1 أو S_2 أو S_3 أو S_4 أن تتحول و تصبح متغيرة خارج أساس (معدومة). هذه المتغيرة تسمى: **المتغيرة الخـارجـة**

– **تحديد المتغيرة الداخلـة:**

المتغيـرة الداخلـة هـي المتغيـرة خـارج الأسـاس المعدومـة التـي تتحـول لتصبـح متغيـرة أسـاس موجبـة.

القاعدة 01.03 : المتعلقـة بمعيـار تحديد المتغيرة الداخلـة في حالـة نموذج من النـوع تعظيم Max:

المتغيـرة خـارج الأسـاس المعدومـة التـي يتـم اختيـارها لتصبـح متغيـرة أسـاس موجبـة أي متغيـرة داخلـة هـي المتغيـرة خـارج الأسـاس X_k **ذات المعامـل** $C_k - Z_k$ **الـذي يعتبـر <u>أكبـر معامـل موجـب</u> من بين جميـع المعامـلات** $C_j - Z_j$ **الموجبـة لمتغيـرات خـارج الأسـاس علـى مستـوى دالـة الهـدف. و هـذا مـا يعبـر عنـه رياضيـا بالكتابـة التاليـة:**

$$X_k : C_k - Z_k = Max\left[(C_j - Z_,) \ , \ (C_j - Z_,) > 0 \ , \ \ j \in H \right]$$

حيث أن: $j \in H$: تعني أن المؤشر j خاص بمتغيرات خارج الأساس

بتطبيق مضمون القاعدة 01.03 أعلاه على المثال 02.03 لتحديد المتغيرة الداخلة نحصل على ما يلي:

$$Max[(C_j - Z_,)] = Max\left[(C_1 - Z_1) \ , \ (C_2 - Z_2) \ , \ (C_3 - Z_3) \right]$$

$$= Max\left[(C_1 - Z_1) = +200, \ (C_2 - Z_2) = +150, \ (C_3 - Z_3) = +160 \right]$$

$$Max[(C_j - Z_j)] = (C_1 - Z_1) = +200$$

و عليه فإن المتغيرة الداخلة هي X_1 و يشار إليها بسهم ↑ كما هو موضح في جدول السمبلكس أدناه.

القاعدة 02.03 : المتعلقـة بمعيـار تحديد المتغيرة الداخلـة في حالـة نموذج من النوع تدنئـة Min :

المتغيرة خارج الأساس المعدومة التي يتم اختيارها لتصبح متغيرة أساس موجبة هي المتغيرة خارج الأساس X_k ذات المعامل $C_k - Z_k$ الـذي يعتبـر <u>أقـل معامـل سالـب</u> من بين جميـع المعامـلات $C_j - Z_j$ السالبـة لمتغيـرات خـارج الأسـاس علـى مستـوى دالـة الهـدف. و هذا ما يعبر عنـه رياضيا بالكتابـة التاليـة:

$$X_k : C_k - Z_k = Min \ \left[(C_j - Z_,) \ , \ (C_j - Z_,) < 0 \ , \ \ j \in H \right]$$

حيث أن: $j \in H$: تعني أن المؤشر j خاص بمتغيرات خارج الأساس

– تحديد المتغيرة الخـارجـة:

المتغيرة الخارجـة هي متغيرة الأساس الموجبـة التـي تتحـول لتصبـح متغيـرة خـارج أسـاس معدومـة

لتحديد المتغيرة الخارجة نقوم بما يلي:

1. قسمة قيم العمود B على القيم الموجبة فقط لعمود المتغيرة الداخلة.
2. اختيار أقل حاصل قسمة.
3. تحديد متغيرة الأساس التي تقابل أقل حاصل قسمة تم التوصل إليه في الخطوة 2.

القاعدة 03.03: المتعلقـة بمعيـار تحديد المتغيرة الخارجـة:

متغيرة الأسـاس الموجبـة التـي يتـم اختيـارها لتصبـح متغيـرة خـارج الأسـاس معدومـة أي متغيرة خارجـة هـي متغيـرة الأسـاس التـي توافـق و تقابـل أقـل حاصـل قسمـة القيـم b_iأي قيـم العمـود B علـى المعامـلات الموجبـة للمتغيـرة الداخلـة علـى مستـوى القيـود الوظيفيـة لنمـوذج البرمجـة الخطيـة أي علـى قيـم عمـود المتغيـرة الداخلـة.

– تحديد أو استنتاج عنصر الارتكاز: Pivot

عنصر الارتكاز عبارة عن قيمة من قيم جدول السمبلكس التي تمثل تقاطع عمود المتغيرة الداخلة و سطر المتغيرة الخارجة. و عليه فإن القيمة التي تمثل ذلك هي القيمة 03، و عليه فإن $Pivot = 03$.
يستخدم عنصر الارتكاز في إجراء العمليات الحسابية للانتقال إلى جدول سمبلاكس أخر أو موالي. يتم الإشارة لعنصر الارتكاز بدائرة أو بقوسين كما هو موضح في جدول السمبلكس أدناه.

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00		
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	$X_1 \uparrow$	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B	R_i
00	$\leftarrow S_1$	**(03)**	04	02	01	00	00	00	2400	800
00	S_2	02	03	05	00	01	00	00	3000	1500
00	S_3	08	10	12	00	00	01	00	9800	1225
00	S_4	05	07	07	00	00	00	01	5100	1020
Z_j		00	00	00	00	00	00	00		
$C_j - Z_j$		200	150	160	00	00	00	00		

– تشكيل جدول السمبلكس الجديد (الثانـي)

عملية تشكيل جدول السمبلكس الجديد أي الثاني تتم كما يلي:

1. رسم جدول يتم من خلاله وضع المتغيرة X_1 مكان المتغيرة S_1 كما يلي:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1								
00	S_2								
00	S_3								
00	S_4								
Z_j									
$C_j - Z_j$									

2. من جدول السمبلكس الأول متغيرات الأساس تشكل مع بعضها البعض مصفوفة الوحدة أي أن متغيرة الأساس عندما تتقاطع مع نفسها نضع الواحد و عندما تتقاطع مع متغيرات الأساس الأخرى نضع الصفر كما هو موضح في جدول السمبلكس أدناه. فـ:

– متغيرة الأساس X_1 عندما تتقاطع مع نفسها X_1 نضع القيمة 01 أما عندما تتقاطع مع متغيرات الأساس الأخرى S_2 ، S_3 ، S_4 نضع القيمة 00

– متغيرة الأساس S_2 عندما تتقاطع مع نفسها S_2 نضع القيمة 01 أما عندما تتقاطع مع متغيرات الأساس الأخرى X_1 ، S_3 ، S_4 نضع القيمة 00

– متغيرة الأساس S_3 عندما تتقاطع مع نفسها S_3 نضع القيمة 01 أما عندما تتقاطع مع متغيرات الأساس الأخرى X_1 ، S_2 ، S_4 نضع القيمة 00

– متغيرة الأساس S_4 عندما تتقاطع مع نفسها S_4 نضع القيمة 01 أما عندما تتقاطع مع متغيرات الأساس الأخرى X_1 ، S_2 ، S_3 نضع القيمة 00

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	**01**				**00**	**00**	**00**	
00	S_2	**00**				**01**	**00**	**00**	
00	S_3	**00**				**00**	**01**	**00**	
00	S_4	**00**				**00**	**00**	**01**	
Z_j									
$C_j - Z_j$									

3. القيم الجديدة لسطر عنصر الارتكاز تساوي القيم القديمة للسطر عنصر الارتكاز مقسومة على عنصر الارتكاز.

200	X_1	01	$4/3$	$2/3$	$1/3$	00	00	00	$2400/3$

و عليه يصبح جدول السمبلكس كما يلي:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	$4/3$	$2/3$	$1/3$	00	00	00	800
00	S_2	00				01	00	00	
00	S_3	00				00	01	00	
00	S_4	00				00	00	01	
Z_j									
$C_j - Z_j$									

4. باقي القيم $a',b',c',d',e',f',g',h',i'\,j',k',l'$ و الموضحة في الجدول أدناه:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	$4/3$	$2/3$	$1/3$	00	00	00	800
00	S_2	00	a'	b'	c'	01	00	00	d'
00	S_3	00	e'	f'	g'	00	01	00	h'
00	S_4	00	i'	j'	k'	00	00	01	l'
Z_j									
$C_j - Z_j$									

تحسب باستخدام المعطيات التالية و وفقا للعلاقة التالية:

كل قيمة جديدة من القيم الجديدة المذكورة أعلاه تحسب بدلالة و باستخدام أربعة معطيات هي:

- القيمة القديمة لها.
- القيمة Y.
- القيمة Z.
- عنصر الارتكاز Pivot.

وفقا للعلاقة التالية:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur = l'Ancinne \quad Valeur - \frac{La \quad Valeur \quad Y \times La \quad Valeur \quad Z}{Pivot}$$

بغرض حساب باقي القيم لجدول السمبلكس نستعين بجدول السمبلكس الأول بغرض استخدام القيم القديمة لهذه القيم الجديدة المراد حسابها حيث أن:

- القيمة الجديدة a' قيمتها القديمة هي: $a = 03$
- القيمة الجديدة b' قيمتها القديمة هي: $b = 05$
- القيمة الجديدة c' قيمتها القديمة هي: $c = 00$
- القيمة الجديدة d' قيمتها القديمة هي: $d = 3000$
- القيمة الجديدة e' قيمتها القديمة هي: $e = 10$
- القيمة الجديدة f' قيمتها القديمة هي: $f = 12$
- القيمة الجديدة g' قيمتها القديمة هي: $g = 00$
- القيمة الجديدة h' قيمتها القديمة هي: $h = 9800$
- القيمة الجديدة i' قيمتها القديمة هي: $i = 07$
- القيمة الجديدة j' قيمتها القديمة هي: $j = 07$
- القيمة الجديدة k' قيمتها القديمة هي: $k = 00$
- القيمة الجديدة l' قيمتها القديمة هي: $l = 5100$

كل قيمة قديمة يمر عليها

- سطر من القيم و في هذا السطر هناك قيمة تقابل عنصر الارتكاز نسميها Y
- عمود من القيم و في هذا العمود هناك قيمة تقابل عنصر الارتكاز نسميها Z

فمثلا القيمة القديمة $a = 03$ يمر عليها

- سطر من القيم و الذي هو سطر متغيرة الأساس S_2 و الذي يحتوي على القيمة 02 تقابل عنصر الارتكاز نسميها Y أي أن $Y = 02$
- عمود من القيم و الذي هو عمود المتغيرة X_2 في هذا العمود هناك قيمة تقابل عنصر الارتكاز و هي القيمة 04 نسميها Z أي أن $Z = 04$

فمثلا القيمة القديمة $c = 00$ يمر عليها

- سطر من القيم و الذي هو سطر متغيرة الأساس S_2 و الذي يحتوي على القيمة 02 تقابل عنصر الارتكاز نسميها Y أي أن $Y = 02$
- عمود من القيم و الذي هو عمود المتغيرة S_1 في هذا العمود هناك قيمة تقابل عنصر الارتكاز و هي القيمة 01 نسميها Z أي أن $Z = 01$

فمثلا القيمة القديمة $l = 5100$ يمر عليها

- سطر من القيم و الذي هو سطر متغيرة الأساس S_4 و الذي يحتوي على القيمة 05 تقابل عنصر الارتكاز نسميها Y أي أن $Y = 05$
- عمود من القيم و الذي هو العمود B في هذا العمود هناك قيمة تقابل عنصر الارتكاز و هي القيمة 2400 نسميها Z أي أن $Z = 2400$

بتطبيق العلاقة أعلاه في حساب القيم الجديدة نحصل على ما يلي:

- $a' = a - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 3 - \frac{2 \times 4}{3} = \frac{1}{3}$
- $b' = b - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 5 - \frac{2 \times 2}{3} = \frac{11}{3}$
- $c' = c - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 0 - \frac{2 \times 1}{3} = -\frac{2}{3}$
- $d' = d - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 3000 - \frac{2 \times 2400}{3} = 1400$
- $e' = e - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 10 - \frac{8 \times 4}{3} = -\frac{2}{3}$
- $f' = f - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 12 - \frac{8 \times 2}{3} = \frac{20}{3}$
- $g' = g - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 0 - \frac{8 \times 1}{3} = -\frac{8}{3}$
- $h' = h - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 9800 - \frac{8 \times 2400}{3} = 3400$
- $i' = i - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 7 - \frac{5 \times 4}{3} = \frac{1}{3}$
- $j' = j - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 7 - \frac{5 \times 2}{3} = \frac{11}{3}$
- $k' = k - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 0 - \frac{5 \times 1}{3} = -\frac{5}{3}$
- $l' = l - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 5100 - \frac{5 \times 2400}{3} = 1100$

بعد حساب القيم الجديدة نقوم بتسجيلها أو بوضعها في جدول السمبلكس فنحصل على ما يلي:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	$4/3$	$2/3$	$1/3$	00	00	00	800
00	S_2	00	$1/3$	$11/3$	$-2/3$	01	00	00	1400
00	S_3	00	$-2/3$	$20/3$	$-8/3$	00	01	00	3400
00	S_4	00	$1/3$	$11/3$	$-5/3$	00	00	01	1100
Z_j									
$C_j - Z_j$									

5. حساب القيم Z_j

- $Z_1 = C_B \times a'_1 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 200 \times 01 + 00 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 00 = 200$

- $$Z_2 = C_B \times a'_2 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\frac{4}{3} \\ +\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 200 \times \frac{4}{3} + 00 \times \frac{1}{3} + 00 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 00 \times \frac{1}{3} = \frac{800}{3}$$

- $$Z_3 = C_B \times a'_3 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix} = 200 \times \frac{2}{3} + 00 \times \frac{11}{3} + 00 \times \frac{20}{3} + 00 \times \frac{11}{3} = \frac{400}{3}$$

- $$Z_4 = C_B \times a'_4 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = 200 \times \frac{1}{3} + 00 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 00 \times \left(-\frac{8}{3}\right) + 00 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{200}{3}$$

- $$Z_5 = C_B \times a'_5 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 200 \times 00 + 00 \times 01 + 00 \times 00 + 00 \times 00 = 00$$

- $$Z_6 = C_B \times a'_6 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \\ 01 \\ 00 \end{pmatrix} = 200 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 01 + 00 \times 00 = 00$$

- $$Z_7 = C_B \times a'_7 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \\ 00 \\ 01 \end{pmatrix} = 200 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 00 + 00 \times 01 = 00$$

6. حساب القيم $C_j - Z_j$: تساوي الفرق بين قيم السطر C_j و قيم السطر Z_j.

7. **حسا قيمة دالة الهدف** Z:

$$Z_0 = C_B \times X_B = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 800 \\ 1400 \\ 3400 \\ 1100 \end{pmatrix} = 200 \times 800 + 0 \times 1400 + 0 \times 3400 + 0 \times 1100 = 160000$$

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	$4/3$	$2/3$	$1/3$	00	00	00	800
00	S_2	00	$1/3$	$11/3$	$-2/3$	01	00	00	1400
00	S_3	00	$-2/3$	$20/3$	$-8/3$	00	01	00	3400
00	S_4	00	$1/3$	$11/3$	$-5/3$	00	00	01	1100
Z_j		200	$800/3$	$400/3$	$200/3$	00	00	00	
$C_j - Z_j$		00	$-350/3$	$80/3$	$-200/3$	00	00	00	$Z = 160000$

انطلاقا من جدول السمبلكس الثاني أعلاه، يمكن قراءة حل الأساس المقبول الثاني كما يلي:

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: $S_1 = 00, X_2 = 00, X_3 = 00$
- متغيرات الأساس الموجبة: $X_1 = 800, S_2 = 1400, S_3 = 2400, S_4 = 1100$

قيمة دالة الهدف Z الموافقة لحل الأساس المقبول الثاني: $Z = 160000$

بعد الحصول على حل أساس مقبول ثاني أحسن من الأول فإن السؤال الذي يطرح هو التالي:

☜ **هل بالإمكان أو هل هناك إمكانية لتحسين الحل أو بعبارة أخرى هل بالإمكان الحصول على حل أساس مقبول ثالث (آخر) أحسن و أفضل من الثاني؟** الإجابة على هذا السؤال هي موضوع الخطوة الموالية.

- **الخطوة 06: اختبـار أمثليـة الحل:**

نعني بهذه الخطوة، اختبار فيما إذا كان حل الأساس المقبول المتحصل عليه هو حل أمثل أم لا و من أجل ذلك، نقوم بتفحص المعاملات $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس لدالة الهدف. بتفحص هذه المعاملات لمتغيرات خارج الأساس X_2 ، X_3 و S_1 لجدول السمبلكس الأخير (الثاني) المتحصل عليه نلاحظ أن:

- معامل متغيرة خارج الأساس X_2 يساوي $(C_2 - Z_2) = -\frac{350}{3}$ و الذي يعني أن اختيار هذه المتغيرة كمتغيرة داخلة يؤدي إلى **تخفيض** قيمة Z بـ: $\frac{350}{3}$ لكل كل وحدة تأخذها المتغيرة الداخلة X_2
- معامل متغيرة خارج الأساس X_3 يساوي $+\frac{80}{3}$ و الذي يعني أن اختيار هذه المتغيرة كمتغيرة داخلة يؤدي إلى **زيادة و ارتفاع** قيمة Z بـ: $\frac{80}{3}$ لكل كل وحدة تأخذها المتغيرة الداخلة X_3 .
- معامل متغيرة خارج الأساس S_1 يساوي $(C_4 - Z_4) = -\frac{200}{3}$ و الذي يعني أن اختيار هذه المتغيرة كمتغيرة داخلة يؤدي إلى **تخفيض** قيمة Z بـ: $\frac{200}{3}$ لكل كل وحدة تأخذها المتغيرة الداخلة S_1 .

مما سبق يتضح هناك إمكانية لتحسين حل الأساس المقبول الثاني و بالتالي العودة إلى خطوة تحسين الحل. بما أن هناك إمكانية لتحسين حل الأساس المقبول الثاني معنى ذلك أن هذا الأخير لا يعتبر حل أمثل.

القـاعدة 05.03: المتعلقة بمعيار أمثلية الحل في حالة نموذج من النوع تعظيم Max :

نقول عن حل الأساس المقبول أنه حل أساس مقبول أمثل إذا تحقق ما يلي:

- **جميع المعاملات** $C_j - Z_j$ **لمتغيرات خارج الأساس لدالة الهدف سالبة أو معدومة و هذا ما يعبر عنه بالعلاقة التالية:** $j \in H \quad , \quad (C_j - Z_j) \leq 0$

حيث أن $j \in H$: تعني أن المؤشر خاص بمتغيرات خارج الأساس

القـاعدة 06.03: المتعلقة بمعيار أمثلية الحل في حالة نموذج من النوع تدنئة Min :

نقول عن حل الأساس المقبول أنه حل أساس مقبول أمثل إذا تحقق ما يلي :

- **جميع المعاملات** $C_j - Z_j$ **لمتغيرات خارج الأساس لدالة الهدف موجبة أو معدومة و هذا ما يعبر عنه بالعلاقة التالية:** $j \in H \quad , \quad (C_j - Z_j) \geq 0$

حيث أن $j \in H$: تعني أن المؤشر خاص بمتغيرات خارج الأساس

بالعودة إلى المثال 01.03 أعلاه فإنه تم التوصل إلى أن حل الأساس المقبول الثاني ليس بحل أساس مقبول أمثل و بالتالي هناك إمكانية لتحسين الحل معنى ذلك العودة إلى الخطوة 4 الممثلة في تحسين الحل.

– **تحسين الحل:** بغرض تحسين الحل يجب القيام بالعمليات التالية:

1. تحديد المتغيرة الداخلة: هي المتغيرة خارج الأساس ذات أكبر معامل $C_j - Z_j$ **موجب:** X_3
2. تحديد المتغيرة الخارجة: هي التي تقابل أقل حاصل قسمة قيم العمود B على القيم الموجبة لعمود X_3

أي: $$Min\left[R_i = \frac{b_i}{a_{i3}}\right] = Min\left[R_1 = 1200, R_2 = \frac{4200}{11}, R_3 = 510, R_4 = 300\right] = R_4 = 300$$

3. تحديد عنصر الارتكاز: $Pivot = \frac{11}{3}$
4. تشكيل جدول السمبلكس الجديد: نقوم بمايلي

- رسم جدول سمبلكس الجديد
- وضع مصفوفة الوحدة أي أي أن متغيرة الأساس عندما تتقاطع مع نفسها نضع الواحد و عندما تتقاطع مع متغيرات الأساس الأخرى نضع الصفر كما هو موضح في جدول السمبلكس أدناه
- القيم الجديدة لسطر عنصر الارتكاز تساوي القيم القديمة مقسومة على عنصر الارتكاز.

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	a'''	00	b'''	00	00	c'''	d'''
00	S_2	00	e'''	00	f'''	01	00	g'''	h'''
00	S_3	00	i'''	00	j'''	00	01	k'''	l'''
160	X_3	00	$1/11$	01	$-5/11$	00	00	$3/11$	300
Z_j									
$C_j - Z_j$									$Z =$

بتطبيق علاقة المستطيل أعلاه في حساب القيم الجديدة نحصل على ما يلي:

- $a''' = a'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = \frac{4}{3} - \frac{2/3 \times \frac{1}{3}}{11/3} = \frac{42}{33}$
- $b''' = b'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = \frac{1}{3} - \frac{2/3 \times (-5/3)}{11/3} = \frac{21}{33}$
- $c''' = c'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 00 - \frac{2/3 \times 1}{11/3} = -\frac{2}{11}$
- $d''' = d'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 800 - \frac{2/3 \times 1100}{11/3} = 600$
- $e''' = e'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = \frac{1}{3} - \frac{11/3 \times \frac{1}{3}}{11/3} = 00$
- $f''' = f'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = -\frac{2}{3} - \frac{11/3 \times (-5/3)}{11/3} = 01$
- $g''' = g'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 00 - \frac{11/3 \times 1}{11/3} = -01$
- $h''' = h'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 1400 - \frac{11/3 \times 1100}{11/3} = 300$
- $i''' = i'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = -\frac{2}{3} - \frac{20/3 \times 1/3}{11/3} = -\frac{42}{33}$
- $j''' = j'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = -\frac{8}{3} - \frac{20/3 \times (-5/3)}{11/3} = \frac{12}{33}$
- $k''' = k'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 00 - \frac{20/3 \times 01}{11/3} = -\frac{20}{11}$
- $l''' = l'' - \frac{Y \times Z}{Pivot} = 3400 - \frac{20/3 \times 1100}{11/3} = 1400$

بعد حساب القيم الجديدة نقوم بتسجيلها و وضعها في جدول السمبلكس فنحصل على ما يلي:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	$42/33$	00	$21/33$	00	00	$-2/11$	600
00	S_2	00	00	00	01	01	00	-01	300
00	S_3	00	$-42/33$	00	$12/33$	00	01	$-20/11$	1400
160	X_3	00	$1/11$	01	$-5/11$	00	00	$3/11$	300
Z_j									
$C_j - Z_j$									$Z =$

حساب القيم Z_j:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 200 \times 01 + 00 \times 00 + 00 \times 00 + 160 \times 00 = 200$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 200 & 00 & 00 & 160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42/33 \\ +00 \\ -42/33 \\ +1/11 \end{pmatrix} = 200 \times \frac{42}{33} + 00 \times 00 + 00 \times \left(-\frac{42}{33}\right) + 160 \times \frac{1}{11} = \frac{8880}{33}$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix}200 & 00 & 00 & 160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}00\\00\\00\\01\end{pmatrix} = 200\times00+00\times00+00\times00+160\times01=160$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix}200 & 00 & 00 & 160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+21/33\\+01\\+12/33\\-5/33\end{pmatrix} = 200\times\frac{21}{33}+00\times01+00\times\frac{12}{33}+160\times\left(-\frac{5}{11}\right)=\frac{1800}{33}$$

$$Z_5 = \begin{pmatrix}200 & 00 & 00 & 160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}00\\01\\00\\00\end{pmatrix} = 200\times00+00\times01+00\times00+160\times00=00$$

$$Z_6 = \begin{pmatrix}200 & 00 & 00 & 160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}00\\00\\01\\00\end{pmatrix} = 200\times00+00\times00+00\times01+160\times00=00$$

$$Z_7 = \begin{pmatrix}200 & 00 & 00 & 160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/11\\-01\\-20/11\\+3/11\end{pmatrix} = 200\times\left(-\frac{2}{11}\right)+00\times(-01)+00\times\left(-\frac{20}{11}\right)+160\times\frac{3}{11}=\frac{80}{11}$$

حساب المقدار $C_j - Z_j$: تساوي الفرق بين قيم السطر الأول C_j و قيم السطر ما قبل الأخير Z_j

حساب قيمة دالة الهدف Z:

$$Z_0 = C_B\times X_B = \begin{pmatrix}200 & 0 & 0 & 160\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600\\300\\1400\\300\end{pmatrix} = 200\times600+0\times300+0\times1400+160\times300=168000$$

بعد عملية تعويض القيم نحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		200	150	160	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
200	X_1	01	$42/33$	00	$21/33$	00	00	$-2/11$	600
00	S_2	00	00	00	01	01	00	-01	300
00	S_3	00	$-42/33$	00	$12/33$	00	01	$-20/11$	1400
160	X_3	00	$1/11$	01	$-5/11$	00	00	$3/11$	300
Z_j		200	$8880/33$	160	$1800/33$	00	00	$80/11$	
$C_j - Z_j$		00	$-8430/33$	00	$-1800/33$	00	00	$-80/11$	$Z=168000$

حل الأساس المقبول الثالث الموافق لهذا الجدول. و عليه فإن حل الأساس المقبول الثالث هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: $X_2 = 00,\ S_1 = 00,\ S_4 = 00$
- متغيرات الأساس الموجبة: $X_1 = 600,\ X_3 = 300,\ S_2 = 300,\ S_3 = 1400$

قيمة دالة الهدف Z الموافقة لحل الأساس المقبول الثالث: $Z = 168000$

- اختبار أمثلية الحل:

بتطبيق مضمون القاعدة 05.03 المتعلقة باختبار أمثلية الحل فإن: جميع المعاملات $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة أو معدومة و عليه فإن حل الأساس المقبول الثالث المتوصل إليه في الخطوة السابقة يعتبر حلا أمثلا.

03.03- طريقة الجزاء:

طريقة السمبلكس تسمح بالحصول على الحل الأمثل لأي نموذج برمجة خطية **انطلاقا من حل أساس مقبول يسمى بأول حل أساس مقبول للانطلاق** و عليه فإن هذه الطريقة تشترط بغرض تطبيقها توفر و أول حل أساس مقبول، هذا الأخير قد يكون سهل الحصول عليه، مثل في حالة نماذج البرمجة الخطية ذات القيود من النوع **أقل أو يساوي**$(\leq)$ ، في هذه الحالة يتم إضافة متغيرات الفجوة التي تعتبر متغيرات الأساس موجبة و باقي متغيرات النموذج (متغيرات القرار) تعتبر متغيرات خارج الأساس معدومة.أما في حالة نماذج البرمجة الخطية ذات القيود من النوع **أكبر أو يساوي** $(\geq)$ أو ذات القيود من النوع **يساوي** $(=)$ أو ذات القيود من النوع المختلط $(\geq,\leq,=)$، فإنه يصعب أو من الصعب الحصول على أول حل أساس مقبول للانطلاق و بالتالي لا يمكن حل النموذج عن طريق تطبيق طريقة السمبلكس. عندما يكون من الصعب الحصول على أول حل أساس مقبول مباشرة، نلجأ إلى إيجاد و توفير هذا الأخير عن طريق إجراء بعض التغيرات على النموذج، هذه التغيرات تتمثل في إضافة إلى النموذج في شكله المعياري متغيرات جديدة تسمح لنا و تساعدنا على الحصول على أول حل أساس مقبول، هذه المتغيرات الجديدة تسمى بالمتغيرات المساعدة (الوهمية) أو المتغيرات الاصطناعية و عليه فإن هذه المتغيرات تضاف فقط للحصول على أول حل أساس مقبول للانطلاق و من ثم تطبيق طريقة السمبلاكس.

04.03 – خطوات الحل باستخدام طريقة الجزاء M

بغرض حل نماذج البرمجة الخطية وفقا لطريقة الجزاء M نتبع الخطوات التالية:

1. كتابة نموذج البرمجة الخطية على الشكل المعياري.
2. إضافة المتغيرات الاصطناعية **حسب الحاجة**
3. إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف بمعامل M يضمن عدم وجودها في الحل، حيث أن M معامل كبير جدا و هنا نميز حالتين:

– المتغيرات الاصطناعية تأخذ على مستوى دالة الهدف معامل $+M$ في حالة دالة الهدف من النوع تدنئة Min.

– المتغيرات الاصطناعية تأخذ على مستوى دالة الهدف معامل $-M$ في حالة دالة الهدف من النوع تعظيم Max.

4. استنتاج أول حل أساس مقبول.

5. تشكيل الجدول الأول للسمبلاكس.

6. اختبار أمثلية الحل : نعني بهذه الخطوة اختبار فيما إذا كان حل الأساس المقبول المتحصل عليه في الخطوة 4. هو حل أمثل أم لا ، و يتم ذلك باستخدام معيار أمثلية الحل أو معيار الأمثلية *Critère d'Optimalité* . فإذا كان معيار الأمثلية محقق هذا يعني أن الحل المتوصل أليه في الخطوة السابقة (الخطوة 4. أو الخطوة 7.) هو حل أمثل، أما إذا كان معيار الأمثلية غير محقق، فهذا يعني أن الحل المتوصل إليه في الخطوة السابقة (الخطوة 4. أو الخطوة 7.) ليس بحل أمثل و بالتالي هناك إمكانية لتحسين الحل أي المرور إلى الخطوة الموالية أي الخطوة 6.

7. تحسين الحل : نعني بهذه الخطوة محاولة المرور أو الوصول إلى حل أساس مقبول أخر أجسن من ذلك المتوصل إليه في الخطوة 4. و يتم ذلك بتطبيق طريقة السمبلاكس. بعد ذلك نعود إلى الخطوة 6. في هذه المرحلة نميز العديد من الحالات التي سوف نتطرق إليها من خلال الفقرة 04.07

05.03 – التغيرات المجرات على القيود و دالـة الهدف:

بغرض معرفة التغيرات التي تجرى على القيود من حيث إضافة متغيرات الفجوة و المتغيرات الاصطناعية إليك الجدول التالي:

إشارة القيد	التغيرات المجراة على القيد	التغيرات المجراة على دالة الهدف
أقل أو يساوي $(\leq)$	– إضافة متغيرة الفجوة	– معاملها على مستوى دالة الهدف صفر (0)
أكبر أو يساوي $(\geq)$	– إضافة متغيرة الفجوة – إضافة متغيرة اصطناعية	– معاملها على مستوى دالة الهدف صفر (0) – معاملها على مستوى دالة الهدف • $+M$ إذا كانت دالة الهدف من النوع Min • $-M$ إذا كانت دالة الهدف من النوع Max
يساوي $(=)$	– إضافة متغيرة اصطناعية	– معاملها على مستوى دالة الهدف • $+M$ إذا كانت دالة الهدف من النوع Min • $-M$ إذا كانت دالة الهدف من النوع Max

بغرض استيعاب ما سبق ذكره نورد المثال التالي:

مثال 02.03 : ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$500X_1 + 200X_2 + 100X_3 \geq 8000$$
$$300X_1 + 300X_2 + 300X_3 \geq 6000$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بغرض الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة الجزاء M نتبع الخطوات السابقة الذكر:

1. كتابة النموذج على الشكل المعياري:

الشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية أعلاه هو التالي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3 + 00S_1 + 00S_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$500X_1 + 200X_2 + 100X_3 - 01S_1 = 8000$$
$$300X_1 + 300X_2 + 300X_3 - 01S_2 = 6000$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

2. إيجاد أول حل أساس مقبول:

نموذج البرمجة الخطية أعلاه يحتوي على 05 متغيرات و معادلتين و بغرض الحصول على حل الأساس نقوم بعدم 03 متغيرات (متغيرات القرار) X_1, X_2, X_3 و عليه فإن حل الأساس هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_1 = 00, X_2 = 00, X_3 = 00$
- متغيرات الأساس: $S_1 = -8000, S_2 = -6000$

ما يقال عن حل الأساس أعلاه أنه حل أساس غير مقبول لأن متغيرتي الفجوة S_1, S_2 لا تحقق قيدي عدم سلبية المتغيرات $S_1 \geq 0$ و $S_2 \geq 0$. بغرض إيجاد أول حل أساس مقبول نقوم بالاستعانة بالمتغيرات الاصطناعية و ذلك عن طريق إضافتها على مستوى كل قيد كما يلي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3 + 00S_1 + 00S_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$500X_1 + 200X_2 + 100X_3 - 01S_1 + 01T_1 = 8000$$
$$300X_1 + 300X_2 + 300X_3 - 01S_2 + 01T_2 = 6000$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, T_1, T_2 \geq 0$$

إن المتغيرات الاصطناعية تظهر على مستوى دالة الهدف Z بمعامل كبير $+M$ كما يلي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3 + 00S_1 + 00S_2 + MT_1 + MT_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$500X_1 + 200X_2 + 100X_3 - 01S_1 + 01T_1 = 8000$$
$$300X_1 + 300X_2 + 300X_3 - 01S_2 + 01T_2 = 6000$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, T_1, T_2 \geq 0$$

النموذج الأخير المتحصل عليه يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3 + 00S_1 + 00S_2 + M(T_1 + T_2)$$

Soumise Aux Contraintes

$$500X_1 + 200X_2 + 100X_3 - 01S_1 + 01T_1 = 8000$$
$$300X_1 + 300X_2 + 300X_3 - 01S_2 + 01T_2 = 6000$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, T_1, T_2 \geq 0$$

بعد إضافة المتغيرات الاصطناعية أصبح نموذج البرمجة الخطية أعلاه يتضمن 07 متغيرات و معادلتين و عليه يتم الحصول على أول حل أساس مقبول عن طرق عدم 05 متغيرات هي: X_1, X_2, X_3, S_1, S_2

- متغيرات خارج الأساس: $X_1 = 00, X_2 = 00, X_3 = 00, S_1 = 00, S_2 = 00$
- متغيرات الأساس: $T_1 = +8000, T_2 = +6000$

– تشكيل جدول السمبلاكس الأول:

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	M	M	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	$X_1 \uparrow$	X_2	X_3	S_1	S_2	T_1	T_2	B
M	$\leftarrow T_1$	**(500)**	200	100	-01	00	01	00	8000
M	T_2	300	300	300	00	-01	00	01	6000
Z_j		$800M$	$500M$	$400M$	$-M$	$-M$	M	M	
$C_j - Z_j$		$300-800M$	$240-500M$	$180-400M$	M	M	M	M	$Z = 14000M$

– اختبار أمثلية الحل:

بما أن نموذج البرمجة الخطية أعلاه من نوع تدنئة Min و تبعا للقاعدة 05.05 المتعلقة بمعيار أمثلية الحل فإن ليست جميع المعاملات $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة و بالتالي الجدول أعلاه ليس بجدول الحل الأمثل بمعنى أن هناك إمكانية لتحسين الحل أي المرور إلى الخطوة الموالية.

– تحسين الحل:

– المتغيرة الداخلة:

تبعا للقاعدة 02.05 المتعلقة بتحديد المتغيرة الداخلة في حالة النموذج من نوع تدنئة Min فإن المتغيرة الداخلة هي المتغيرة خارج الأساس X_k ذات أقل معامل $C_k - Z_k$ سالب أي:

$$X_k : C_k - Z_k = Min \left[(C_j - Z_j) \ , \ (C_j - Z_j) < 0 \ , \ j \in H \right]$$

$$Min \ \left[(C_1 - Z_1) = 300 - 800M, (C_2 - Z_2) = 240 - 500M, (C_3 - Z_3) = 180 - 400M \right]$$

$$= (C_1 - Z_1) = 300 - 800M$$

و عليه فإن المتغيرة الداخلة هي المتغيرة خارج الأساس X_1

– المتغيرة الخارجة:

تبعا للقاعدة 04.05 المتعلقة بتحديد المتغيرة الخارجة فإن هذه الأخيرة هي متغيرة الأساس التي توافق أو تقابل أقل حاصل قسمة قيم العمود الأخير B على القيم الموجبة لعمود المتغيرة الداخلة X_1.

$$Min\ \left[R_i = \frac{b_1}{a_{i2}}\ ,a_{i2} > 0\right]$$

$$Min\ \left[R_1 = \frac{8000}{500} = 16, R_2 = \frac{6000}{300} = 20\right] = R_1 = 16$$

و عليه فإن المتغيرة الخارجة هي متغيرة الأساس T_1.

- عنصر الارتكاز: 500
- جدول السمبلاكس الجديد (الثاني):

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	M	M	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	$X_3 \uparrow$	S_1	S_2	T_1	T_2	B
300	X_1	01	$2/5$	$1/5$	$-1/500$	00	$1/500$	00	16
M	$\leftarrow T_2$	00	180	**(240)**	$3/5$	-01	$3/5$	01	1200
Z_j		300	$120+180M$	$60+240M$	$\frac{3}{5}M-\frac{3}{5}$	$-M$	$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}M$	M	
$C_j - Z_j$		00	$120-180M$	$120-240M$	$\frac{3}{5}-\frac{3}{5}M$	M	$\frac{2}{5}M-\frac{3}{5}$	M	$Z = 4800+1200M$

- حل الأساس المقبول الجديد (الثاني)
  - متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, X_3 = 00, S_1 = 00, S_2 = 00, T_1 = 00$
  - متغيرات الأساس : $X_1 = 16, T_2 = 1200$
  - قيمة دالة الهدف Z: $Z = 4800 - 1200M$

- **اختبار أمثلية الحل:**

بما أن نموذج البرمجة الخطية أعلاه من نوع تدنئة Min و تبعا للقاعدة 05.05 المتعلقة بمعيار أمثلية الحل فإن ليست جميع المعاملات $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة و بالتالي الجدول أعلاه ليس بجدول الحل الأمثل بمعنى أن هناك إمكانية لتحسين الحل أي المرور إلى الخطوة الموالية.

- **تحسين الحل:**

-المتغيرة الداخلة: X_3

تبعا للقاعدة 02.05 المتعلقة بتحديد المتغيرة الداخلة في حالة النموذج من نوع تدنئة Min فإن المتغيرة الداخلة هي المتغيرة خارج الأساس X_k ذات أقل معامل $C_k - Z_k$ سالب أي:

$$X_k : C_k - Z_k = Min\ \left[\left(C_j - Z_,\right)\ ,\ \left(C_j - Z_,\right) < 0\ ,\ \ j \in H\right]$$

$$Min\ \left[\left(C_2 - Z_2\right) = -510 - 180M, \left(C_3 - Z_3\right) = 120 - 240M, \left(C_4 - Z_4\right) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}M\right] =$$

$$=(C_3 - Z_3) = 120 - 240M$$

و عليه فإن المتغيرة الداخلة هي المتغيرة خارج الأساس X_3

– المتغيرة الخارجة:

تبعا للقاعدة 04.05 المتعلقة بتحديد المتغيرة الخارجة فإن هذه الأخيرة هي متغيرة الأساس التي توافق أو تقابل أقل حاصل قسمة قيم العمود الأخير B على القيم الموجبة لعمود المتغيرة الداخلة X_3.

$$Min\left[R_i = \frac{b_i}{a_{i3}} \quad , a_{i3} > 0\right]$$

$$Min\left[R_1 = \frac{16}{1/5} = 80, R_2 = \frac{1200}{240} = 05\right] = R_2 = 05$$

و عليه فإن المتغيرة الخارجة هي متغيرة الأساس T_2.

– عنصر الارتكاز: 240

– جدول السمبلاكس الجديد (الثالث)

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	M	M	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	T_1	T_2	B
300	X_1	01	$1/4$	00	$-1/400$	00			15
180	X_3	00	$3/4$	01	$1/400$	$-1/240$			05
Z_j		300	210	180	$-3/10$	$-1/2$			
$C_j - Z_j$		00	30	00	$3/10$	$1/2$			$Z = 5400$

– حل الأساس المقبول الجديد (الثالث)

- متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, S_1 = 00, S_2 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_1 = 15, X_3 = 05$
- قيمة دالة الهدف Z: $Z = 5400$

– **اختبار أمثلية الحل:**

1. بما أن نموذج البرمجة الخطية أعلاه من نوع تعظيم Min و تبعا للقاعدة 04.05 المتعلقة بمعيار أمثلية الحل فإن جميع المعاملات $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس X_2, S_1, S_2 موجبة فإن الجدول أعلاه يمثل جدول الحل الأمثل.

المحور الأول : البــــرمجـــــة الخطيـــــــة

الفصـــل 🕮 الرابـــع

المســـألـــة الثنـائيـــة و تحليـــل الحساسيـــة

Dualité et analyse de sensibilité

أهداف الفصل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بمـا يلـي:

- تشكيل النموذج الثنائي لأي نموذج برمجة خطية.
- تقديم التفسير الاقتصادي للنموذج الثنائي و من ثم التفسير الاقتصادي للمتغيرات الثنائية.
- العلاقات الموجودة بين النموذج الأولي و النموذج الثنائي.
- استنتاج الحل الأمثل لأحد النموذجين انطلاقا من الحل الأمثل لأحدهما. و ذلك بتطبيق مضمون نظرية الفجوات المكملة.
- التحقق من حل معطى فيما إذا كان حلا أمثلا أم لا و ذلك بتطبيق مضمون نظرية الفجوات المكملة.
- قراءة قيم متغيرات أحد النموذج انطلاقا من جدول الحل الأمثل لأحدهما.
- استخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس لحل بعض نماذج البرمجة الخطية.
- ماذا نعني بتحليل الحساسية أو تحليل ما بعد أمثلية الحل.
- معرفة الأثر على الحل الأمثل لتغير أحد مكونات النموذج التالية:
  1. معامل متغيرات القرار على مستوى دالة الهدف.
  2. الطرف الثاني للقيود.

أولا: المسألـــة الثنـائيـــة

انطلاقا من أي نموذج برمجة خطية سواء كان من النوع تعظيم أو من نوع تدنئة يمكن استنتاج أو تشكيل نموذج برمجة خطية آخر. هذا النموذج المستنتج يسمى **النموذج الثنائي** أو **النموذج المرافق** أو **النموذج المقابل**، أما النموذج الذي تم استنتاج منه النموذج الثنائي يسمى **النموذج الأولي** أو **النموذج الأصلي**. السؤال الذي قد يطرح هو التالي: كيف يتم استنتاج و تشكيل النموذج الثنائي انطلاقا من نموذج البرمجة الخطية ؟ الإجابة على هذا السؤال تشكل موضوع الفقرة الموالية.

01.04 – تشكيل النموذج الثنائي :

سوف يتم التطرق من خلال هذه الفقرة إلى كيفية تشكيل النموذج الثنائي لنموذج البرمجة الخطية سواء من النوع تعظيم *Max* أو من النوع تدنئة *Min* .

01.01.04 – النموذج الثنائي للنموذج من النوع تعظيم *Max*

ليكن نموذج البرمجة من النوع *Max* في شكله النموذجي خلال المثال التالي:

$$Max\ \ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 \ldots\ldots + C_jX_j + \ldots\ldots + C_nX_n$$

Soumise Aux Contraites

$$\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1j}X_j + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \le b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2j}X_j + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n \le b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3j}X_j + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}X_n \le b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{ij}X_j + \ldots\ldots\ldots + a_{in}X_n \le b_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mj}X_j + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n \le b_m \\
\qquad X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_j, \ldots\ldots X_n \ge 0
\end{array} \quad \ldots\ldots (01.04)$$

و الذي يمكن كتابته على الشكل المصفوفاتي المختصر كما يلي:

$$Max\ \ Z = CX$$

Soumise Aux Contraites

$$AX \le B$$

$$X \ge 0$$

حيث أن:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13}+.........+a_{1j}+.........+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}+.........+a_{2j}+........+a_{2n} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}+.........+a_{3j}+........+a_{3n} \\ .... \\ a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+..........+a_{ij}+..........+a_{in} \\ .... \\ a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+.........+a_{mj}+........+a_{mn} \end{pmatrix}_{(m,n)} ,X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ .. \\ X_j \\ .. \\ X_n \end{pmatrix}_{(n,1)} ,B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ .. \\ b_i \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}_{(m,1)} ,C^T=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ . \\ C_j \\ .. \\ C_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

النموذج الثنائي لنموذج البرمجة الخطية 01.04 أعلاه هو التالي:

$$Min\ W=b_1\mathrm{Y}_1+b_2\mathrm{Y}_2+b_3\mathrm{Y}_3\ \ldots\ldots+b_iY_i+\ldots\ldots+b_\mathrm{m}\mathrm{Y}_\mathrm{m}$$

Soumise Aux Contraites

$$\begin{array}{l} a_{11}Y_1+a_{21}Y_2+a_{31}Y_3+............+a_{i1}Y_i+..........+a_{m1}Y_m\geq C_1 \\ a_{12}Y_1+a_{22}Y_2+a_{32}Y_3+...........+a_{i2}Y_i+..........+a_{m2}Y_m\geq C_2 \\ a_{13}Y_1+a_{23}Y_2+a_{33}Y_3+...........+a_{i3}Y_i+..........+a_{m3}Y_m\geq C_3 \\ .... \\ .... \\ a_{1j}Y_1+a_{2J}Y_2+a_{3J}Y_3+............+a_{ij}Y_i+............+a_{mj}Y_m\geq C_j \\ .... \\ .... \\ a_{1n}Y_1+a_{2n}Y_2+a_{3n}Y_3+...........+a_{in}Y_i+..........+a_{mn}Y_m\geq C_n \\ \qquad Y_1,Y_2,Y_3,.......,Y_i,.......,Y_m\geq 0 \end{array}$$

و الذي يمكن كتابته على الشكل المصفوفاتي كما يلي:

$$\begin{array}{l} Min\ W=YB \\ Soumise\ Aux\ Contraites \\ \qquad YA\geq C^T \\ \qquad Y\geq 0 \end{array}$$

حيث أن:

$$Y=\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & . & . & . & . & Y_i & . & . & . & . & Y_m \end{pmatrix}$$

مثال 01.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ \ Z=600X_1+700X_2+800X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{array}{l} 01X_1+02X_2+01X_3\leq 100 \\ 03X_1+04X_2+02X_3\leq 120 \\ 02X_1+06X_2+04X_3\leq 200 \\ 03X_1+01X_2+02X_3\leq 350 \\ X_1,X_2,X_3\geq 0 \end{array}$$

النموذج الثنائي لنموذج البرمجة الخطية من النوع *Max* في شكله النموذجي هو التالي:

$$Min \quad W = 100Y_1 + 120Y_2 + 200Y_3 + 350Y_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$01Y_1 + 03Y_2 + 02Y_3 + 03Y_4 \geq 600$$
$$02Y_1 + 04Y_2 + 06Y_3 + 01Y_4 \geq 700$$
$$01Y_1 + 02Y_2 + 04Y_3 + 02Y_4 \geq 800$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

02.01.04 – النموذج الثنائي للنموذج من النوع تدنئة Min :

سوف يتم التطرق من خلال هذه الفقرة إلى كيفية تشكيل النموذج الثنائي لنموذج البرمجة الخطية من النوع تدنئة Min في شكله النموذجي من خلال المثال التالي:

مثال 02.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min \quad Z = 150X_1 + 100X_2 + 250X_3 + 200X_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$05X_1 + 10X_2 + 02X_3 + 06X_4 \geq 5500$$
$$10X_1 + 15X_2 + 25X_3 + 30X_4 \geq 15000$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

النموذج الثنائي لنموذج البرمجة الخطية الأولي أعلاه هو التالي:

$$Max \quad W = 5500Y_1 + 15000Y_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$05Y_1 + 10Y_2 \geq 150$$
$$10Y_1 + 15Y_2 \geq 100$$
$$02Y_1 + 25Y_2 \geq 250$$
$$06Y_1 + 30Y_2 \geq 200$$
$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

02.04: – العلاقات الأساسية بين النموذج الأولي و النموذج الثنائي:

1. إذا كانت دالة الهدف للنموذج الأولى من النوع تعظيم Max فإن دالة الهدف للنموذج الثنائي تكون من النوع تدنئة Min.
2. إذا كانت دالة الهدف للنموذج الأولى من النوع تدنئة Min فإن دالة الهدف للنموذج الثنائي تكون من النوع تعظيم Max.
3. المعاملات C_j التي تمثل معاملات متغيرات القرار $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n$ على مستوى دالة الهدف للنموذج الأولي **تتحول** إلى معاملات الطرف الثاني لقيود النموذج الثنائي.
4. المعاملات b_j التي تمثل الطرف الثاني لقيود النموذج الأولي **تتحول** إلى معاملات متغيرات القرار $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_i, ..., Y_m$ على مستوى دالة الهدف للنموذج الثنائي.
5. المعاملات a_{ij} لمتغيرات القرار $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n$ a_{ij} للمتغيرات (الثنائية) على

مستوى القيود الوظيفية للنموذج الثنائي ما هي إلا المعاملات a_{ij} للمتغيرات (الأولية) على مستوى القيود الوظيفية للنموذج الأولي و لكن مرتبة بصورة مختلفة (معاملات السطر i=k للنموذج الأولي تتحول إلى معاملات العمود j=k للنموذج الثنائي).

6. من أجل كل قيد وظيفي للنموذج الأولي، يوافقه متغيرة على مستوى النموذج الثنائي.
7. من أجل كل متغيرة للنموذج الأولي يوافقها قيد على مستوى النموذج الثنائي.
8. تبعا للعلاقات 5 و 6 أعلاه فإن عدد متغيرات النموذج الثنائي يساوي عدد قيود النموذج الأولي و عدد قيود النموذج الثنائي يساوي عدد متغيرات النموذج الأولي.
9. النموذج الثنائي للنموذج الثنائي هو النموذج الأولي.

03.04 – القواعد العامة لتشكيل (تكوين) النموذج الثنائـي:

كما هو معلوم، نماذج البرمجة الخطية لا تقدم دائما على الشكل النموذجي، فقد تقدم بقيود من النوع أقل أو يساوي (≤) أو بقيود من النوع أكبر أو يساوي (≥) أو بقيود من النوع تساوي (=)، ويسمى هذا النوع من النماذج بالنماذج ذات القيود المختلطة. هذا بالنسبة للقيود، أما بالنسبة للمتغيرات فقد تكون هذه الأخيرة غير محددة الإشارة أي كيفية $(X_j \in R)$ أو قد تكون أقل أو تساوي الصفر $(X_j < 0)$. من خلال هذه الفقرة سوف نقدم القواعد العامة لتشكيل النموذج الثنائي للنماذج المختلطة. نشير إلى أنه يتم تمييز الحالات التالية:

I–/ بالنسبة للنموذج من النوع تعظيم *Max* :

1. وجود قيد بإشارة أكبر أو يساوي (≥) في نموذج من النوع تعظيم *Max*
2. وجود قيد بإشارة تساوي (=) في نموذج من النوع تعظيم *Max*
3. وجود متغيرة سالبة أو معدومة (أقل أو تساوي الصفر) $(X_j \leq 0)$
4. وجود متغيرة كيفية $(X_j \in R)$

II–/ بالنسبة للنموذج من النوع تدنئة *Min* :

5. وجود قيد بإشارة أقل أو يساوي (≤) في نموذج من النوع تدنئة *Min*
6. وجود قيد بإشارة تساوي (=) في نموذج من النوع تدنئة *Min*
7. وجود متغيرة سالبة أو معدومة (أقل أو تساوي الصفر) $(X_j \leq 0)$
8. وجود متغيرة كيفية $(X_j \in R)$

القاعدة 01.04 : المتعلقـة بإيجـاد النموذج الثنـائي لنموذج من النـوع تعظيـم *Max*
في حالـة وجود القيـد رقـم *i* بإشـارة أكبـر أو يسـاوي

وجود أو ظهور إشارة أكبر أو يساوي في القيد رقم *i* للنموذج الأولي من النوع تعظيم *Max* تنعكس في النموذج الثنائي أن المتغيرة رقم *i* تكون أقل أو يساوي الصفر أي $Y_i \leq 0$.

القـاعـدة 02.04 : المتعلقـة بإيجـاد النموذج الثنـائي لنموذج مـن النوع Max و من النوع Min فـي حالـة وجود القيـد رقـم i بإشـارة تسـاوي $(=)$:

وجود أو ظهور إشارة تساوي في القيد رقم i للنموذج الأولي من النوع تعظيم Max أو من النوع تدنئة Min النموذج من النوع تنعكس في النموذج الثنائي أن المتغيرة رقم i تكون غير محددة الإشارة (كيفية أو تنتمي إلى R) أي $Y_i \in R$.

القـاعدة 03.04 : المتعلقـة بإيجاد النموذج الثنـائي لنموذج من النـوع تعظيـم Max فـي حالـة وجود متغيرة رقم j أقـل أو تسـاوي الصفر $X_j \le 0$:

وجود أو ظهور المتغيرة رقم j أقل أو تساوي الصفر في النموذج الأولي من النوع تعظيم Max تنعكس في النموذج الثنائي أن القيد رقم j يكون بإشارة أقل أو يساوي.

القـاعدة 04.04 : المتعلقـة بإيجاد النموذج الثنـائي لنموذج من النـوع Max و من النوع Min في حالـة وجود متغيـرة رقـم j غيـر محددة الإشـارة $(X_j \in R)$:

وجود أو ظهور المتغيرة رقم j غير محددة الإشارة (كيفية) $(X_j \in R)$ في النموذج الأولي من النوع تعظيم Max تنعكس في النموذج الثنائي على القيد رقم j يكون بإشارة تساوي $(=)$.

القـاعدة 05.04 : المتعلقـة بإيجـاد النمـوذج الثنـائي لنمـوذج مـن النـوع تدنئـة Min فـي حالـة وجود القيـد رقـم i بإشـارة أقـل أو يسـاوي

وجود أو ظهور إشارة أقل أو يساوي في القيد رقم i للنموذج الأولي من النوع تدنئة Min تنعكس في النموذج الثنائي أن المتغيرة رقم i تكون أقل أو يساوي الصفر أي $Y_i \le 0$

القـاعدة 06.04 : المتعلقـة بإيجاد النموذج الثنـائي لنموذج من النوع تدتئـة Min فـي حالـة وجود متغيرة رقم j أقل أو تساوي الصفر $X_j \le 0$:

وجود أو ظهور المتغيرة رقم j أقل أو تساوي الصفر في النموذج الأولي من النوع تدتئـة Min تنعكس في النموذج الثنائي أن القيد رقم j يكون بإشارة أكبر أو يساوي.

يمكن تلخيص القواعد العامة لتشكيل النموذج الثنائي المتوصل إليها في الجدول أدناه: $Max\ Z\ \ Min\ W$

النموذج الأولي (أو النموذج الثنائي)		**النموذج الثنائي (أو النموذج الأولي)**
دالة الهدف من النوع $Max\ Z\ (ou\ \ W)$		دالة الهدف من النوع $Min\ W\ (ou\ \ Z)$
• القيد رقم i أقل أو يساوي$(\le)$ • القيد رقم i أكبر أو يساوي $(\ge)$ • القيد رقم i يساوي $(=)$		المتغيرة رقم i (Y_i) أكبر أو تساوي الصفر $(Y_i \ge 0)$. المتغيرة رقم i (Y_i) أقل أو تساوي الصفر $(Y_i \le 0)$. المتغيرة رقم i (Y_i) غير محددة الإشارة $(Y_i \in 0)$.

بغرض توضيح مضمون القواعد أعلاه المتعلقة بتشكيل النموذج الثنائي للنماذج المختلطة نأخذ المثال التالي:

مثـال 12.04: ليكن النموذجين التاليين

01 -/ $Max\ Z = 120X_1 + 150X_2 + 300X_3 + 500X_4$

Soumise aux Contraintes

$$03X_1 + 10X_2 + 01X_3 + 02X_4 \leq 64$$
$$04X_1 + 05X_2 + 07X_3 + 03X_4 \leq 72$$
$$02X_1 + 06X_2 + 05X_3 + 04X_4 = 81$$
$$01X_1 + 05X_2 + 07X_3 + 05X_4 \geq 72$$
$$02X_1 + 04X_2 + 08X_3 + 06X_4 \leq 92$$

$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \in R\ ,\ X_3 \geq 0\ ,\ X_4 \leq 0$$

02 -/ $Min\ Z = 03X_1 + 05X_2 + 08X_3$

Soumise aux Contraintes

$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 \geq 06$$
$$05X_1 + 07X_2 + 12X_3 = 07$$
$$01X_1 + 02X_2 + 04X_3 \geq 08$$
$$01X_1 + 02X_2 + 04X_3 \leq 10$$

$$X_1 \in R,\ X2 \geq 0,\ X_3 \leq 0$$

المطلـوب: قدم النموذج الثنائي لكلا النموذجين

$$Min\ \ W = 64Y_1 + 72Y_2 + 81Y_3 + 72Y_4 + 92Y_5$$

Soumise Aux Contraintes

$$03Y_1 + 04Y_2 + 02Y_3 + 01Y_4 + 02Y_5 \geq 120$$
$$10Y_1 + 05Y_2 + 06Y_3 + 05Y_4 + 04Y_5 = 150$$
$$01Y_1 + 07Y_2 + 05Y_3 + 07Y_4 + 08Y_5 \geq 300$$
$$02Y_1 + 03Y_2 + 04Y_3 + 05Y_4 + 06Y_5 \leq 500$$

$$Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \in R, Y_4 \leq 0, Y_5 \geq 0$$

$$Max\ \ W = 06Y_1 + 07Y_2 + 08Y_3 + 10Y_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$01Y_1 + 05Y_2 + 01Y_3 + 01Y_4 = 03$$
$$03Y_1 + 07Y_2 + 02Y_3 + 02Y_4 \leq 05$$
$$02Y_1 + 12Y_2 + 04Y_3 + 04Y_4 \geq 08$$

$$Y_1 \geq 0, Y_2 \in R, Y_3 \geq 0, Y_4 \leq 0$$

04.04:– الخصائص (المميزات) الأساسية بين النموذج الأولي و النموذج الثنـائي:

01.04.04:– نظرية الثنائيـة الضعيفـة:

تتعلق هذه النظرية بالقيم العددية لدالتي الهدف للنموذجين الأولي و الثنائي، مضمونها ما يلي:

ليكن النموذج الأولي P و P^D النموذج الثنائي الموافق له.

من أجل أي حل أساس مقبول $X'=(X_1', X_2', X_3',..., X_j',..., X_n')$ للنموذج الأولي P و من أجل أي حل أساس مقبول $Y'=(Y_1', Y_2', Y_3',..., Y_i',..., Y_m')$ للنموذج الثنائي P^D فإن:

I. إذا كان النموذج الأولي P من النوع تعظيم Max فإن:

قيمة دالة الهدف Z للنموذج الأولي P من أجل حل الأساس المقبول $X'=(X_1', X_2', X_3',..., X_j',..., X_n')$ تكون دائما **أقل أو يساوي** قيمة دالة الهدف W للنموذج الثنائي P^D من أجل حل الأساس المقبول $Y'=(Y_1', Y_2', Y_3',..., Y_i',..., Y_m')$ أي: $Z(X')\leq W(Y')$ أي

$$Z(X_1', X_2', X_3',..., X_j',..., X_n') \ \leq\ W(Y_1', Y_2', Y_3',..., Y_i',..., Y_m')$$

أي:

$$C_1X_1'+C_2X_2'+C_3X_3'+...+C_jX_j'+...+C_nX_n' \ \leq\ b_1Y_1'+b_2Y_2'+b_3Y_3'+...+b_iY_i'+...+b_mY_m'$$

أي:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X'_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i Y'_i$$

II. إذا كان النموذج الأولي P من النوع تدنئة Min فإن:

قيمة دالة الهدف Z للنموذج الأولي P من أجل حل الأساس المقبول $X'=(X_1', X_2', X_3',..., X_j',..., X_n')$ تكون دائما **أكبر أو يساوي** قيمة دالة الهدف W للنموذج الثنائي P^D من أجل حل الأساس المقبول $Y'=(Y_1', Y_2', Y_3',..., Y_i',..., Y_m')$ أي: $Z(X')\geq W(Y')$ أي

أي:

$$Z(X_1', X_2', X_3',..., X_j',..., X_n') \leq W(Y_1', Y_2', Y_3',..., Y_i',..., Y_m')$$

أي:

$$C_1X_1'+C_2X_2'+C_3X_3'+...+C_jX_j'+...+C_nX_n' \leq b_1Y_1'+b_2Y_2'+b_3Y_3'+...+b_iY_i'+...+b_mY_m'$$

أي:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X'_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i Y'_i$$

02.04.04 – نظرية الثنائية القوية:

تتعلق هذه النظرية بالقيم العددية لدالتي الهدف للنموذجين الأولي و الثنائي، مضمونها ما يلي:

ليكن النموذج الأولي P و P^D النموذج الثنائي الموافق له.

إذا كان:

1. $X^*=(X_1^*, X_2^*, X_3^*,..., X_j^*,..., X_n^*)$ حل أساس مقبول للنموذج الأولي P.
2. $Y^*=(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*,..., Y_i^*,..., Y_m^*)$ حل أساس مقبول للنموذج الثنائي P^D.
3. و حقق الحلين الأساسيين المقبولين تساوي قيم دالتي الهدف أي:

$$Z(X^*) = W(Y^*)$$

أي:

$$W(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*,..., Y_i^*,..., Y_m^*) = Z(X_1^*, X_2^*, X_3^*,..., X_j^*,..., X_n^*)$$

أي:

$$C_1X_1^*+C_2X_2^*+C_3X_3^*+...+C_jX_j^*+...+C_nX_n^* = b_1Y_1^*+b_2Y_2^*+b_3Y_3^*+...+b_iY_i^*+...+b_mY_m^*$$

أي:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i^*$$

فـــــإن:

- **حل الأساس المقبول X^* يعد حلا أمثلا لنموذج البرمجة الخطية الأولي P.**
- **حل الأساس المقبول Y^* يعد حلا أمثلا لنموذج البرمجة الخطية الثنائي P^D.**

03.04.04 – نظرية الفجوات المكملـة:

إن العلاقة الموجودة بين النموذج الأولي و النموذج الثنائي لا تقتصر على تساوي دالتي الهدف للنموذجين عند الحل الأمثل، و لكن تتعدى إلى أكثر من ذلك، حيث أنه يكفي حل أحد النموذجين باستخدام أي طريقة من طرق الحل، ثم بعد ذلك نقوم باستنتاج الحل الأمثل للنموذج الآخر و هذا انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج التي تم حله. يتم استنتاج الحل الأمثل للنموذج الآخر باستخدام مضمون نظرية الفجوات المكملة، التي تعتبر موضوع هذه الفقرة. مضمون هذه النظرية هو التالي:

1. المضمـــون الأول:

جداء متغيرة الفجوة رقم i للنموذج الأولي (S_i) بمتغيرة القرار رقم i للنموذج الثنائي (Y_i) يساوي الصفر أي:

$$S_i \times Y_i = 0$$

حتى يكون الجداء يساوي الصفر $S_i \times Y_i' = 0$ يجب أن يكون أحد الحدين يساوي الصفر و الآخر لا يساوي الصفر و عليه نميز الحالتين التاليتين:

1. **إذا كان** $S_i = 0$ **فإن** $Y_i' \neq 0$ **و بالضبط فإن** $Y_i' > 0$
2. **إذا كان** $Y_i = 0$ **فإن** $S_i \neq 0$ **و بالضبط فإن** $S_i > 0$

2. المضمــون الثاني:

جداء متغيرة القرار رقم j للنموذج الأولي (X_j) بمتغيرة الفجوة رقم i للنموذج الثنائي (k_j) يساوي الصفر أي:

$$k_j \times X_j' = 0$$

حتى يكون الجداء يساوي الصفر أي $k_j \times X_j = 0$ يجب أن يكون أحد الحدين يساوي الصفر و الآخر لا يساوي الصفر و عليه نميز الحالتين التاليتين:

1. **إذا كان** $k_j = 0$ **فإن** $X_j' \neq 0$ **و بالضبط فإن** $X_j' > 0$
2. **إذا كان** $X_j = 0$ **فإن** $k_j \neq 0$ **و بالضبط فإن** $k_j > 0$

بغرض توضيح استخدام مضمون نظرية الفجوات المكملة نأخذ المثال التالي:

مثـــال 12.04: ليكن النموذج الأولي P التالي:

$$Max \quad Z = 5000X_1 + 6000X_2$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{gathered} 100X_1 + 50X_2 \le 2000 \\ 20X_1 + 30X_2 \le 600 \\ 10X_1 + 00X_2 \le 340 \\ 00X_1 + 10X_2 \le 140 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{gathered}$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأولي P أعلاه هو التالي: $X_1=15, X_2=10$ و قيمة دالة الهدف تساوي $Z=135000$

- **استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي P^D انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأولي P باستخدام مضمون نظرية الفجوات المكملة.**

بغرض استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي نقوم بما يلي:

1. استنتاج قيم متغيرات الفجوة للنموذج الأولي: يتم ذلك انطلاقا من الشكل المعياري كما يلي:

$$\begin{aligned}
100X_1+50X_2+01S_1&=2000\\
20X_1+30X_2+01S_2&=600\\
10X_1+00X_2+01S_3&=340\\
00X_1+10X_2+01S_4&=140
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1&=2000-100X_1-50X_2=2000-100(15)-50(10)=00\\
S_2&=600-20X_1-30X_2=600-20(15)+30(10)=00\\
S_3&=340-10X_1-00X_2=340-10(15)-00(10)=190\\
S_4&=140-00X_1-10X_2=140-00(15)-10(10)=40
\end{aligned}$$

2. استنتاج النموذج الثنائي:

$$Min\ \ W=2000Y_1+600Y_2+340Y_3+140Y_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}
100Y_1+20Y_2+10Y_3+00Y_4&\geq 5000\\
50Y_1+30Y_2+00Y_3+10Y_4&\geq 6000\\
Y_1,Y_2,Y_3,Y_4&\geq 0
\end{aligned}$$

3. كتابة النموذج الثنائي على الشكل المعياري:

$$Min\ \ W=2000Y_1+600Y_2+340Y_3+140Y_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}
100Y_1+20Y_2+10Y_3+00Y_4-01k_1&=5000\\
50Y_1+30Y_2+00Y_3+10Y_4-01k_2&=6000\\
Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,k_1,k_2&\geq 0
\end{aligned}$$

4. استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي باستخدام مضمون نظرية الفجوات المكملة:

يتم ذلك كما يلي:

- $S_i\times Y_i'=0$

✓ بما أن: $S_1=00$ فإن $Y_1\neq 00$ و بالضبط $Y_1>00$.

✓ بما أن: $S_2=00$ فإن $Y_2\neq 00$ و بالضبط $Y_2>00$.

✓ بما أن: $S_3=190\neq 00$ فإن $Y_3=00$.

✓ بما أن: $S_4=40\neq 00$ فإن $Y_4=00$.

انطلاقا من الشطر الأول لمضمون نظرية الفجوات المكملة تم:

- استنتاج قيم المتغيرات Y_3, Y_4 حيث أن: $Y_3 = 00$ و $Y_4 = 00$.
- معرفة أن: $Y_1 > 00$ و $Y_2 > 00$

- $k_j \times X_j' = 0$

✓ بما أن: $X_1 = 15 \neq 00$ فإن $k_1 = 00$.

✓ بما أن: $X_2 = 10 \neq 00$ فإن $k_2 = 00$.

انطلاقا من الشطر الثاني لمضمون نظرية الفجوات المكملة تم:

- استنتاج قيم متغيرات الفجوة للنموذج الثنائي k_1, k_2 حيث أن: $k_1 = 00$ و $k_2 = 00$.

بتطبيق مضمون نظرية الفجوات المكملة تم التوصل إلى القيم التالية لمتغيرات النموذج الثنائي:

$$Y_3 = 00 \ , \ Y_4 = 00 \ , \ k_1 = 00 \ , \ k_2 = 00$$

و بغرض استنتاج قيم المتغيرات المتبقية أي قيم Y_1 و Y_2 نقوم بتعويض $Y_3 = 00, Y_4 = 00, k_1 = 00, k_2 = 00$ في القيود الوظيفية على الشكل المعياري للنموذج الثنائي.

$$100Y_1 + 20Y_2 + 10Y_3 + 00Y_4 - 01k_1 = 5000 \qquad 100Y_1 + 20Y_2 + 10(00) + 00(00) - 01(00) = 5000$$
$$50Y_1 + 30Y_2 + 00Y_3 + 10Y_4 - 01k_2 = 6000 \qquad 50Y_1 + 30Y_2 + 00(00) + 10(00) - 01(00) = 6000$$

$$100Y_1 + 20Y_2 = 5000 \ \ldots\ldots\ldots\ (01)$$
$$50Y_1 + 30Y_2 = 6000 \ \ldots\ldots\ldots\ (02)$$

بعد عملية التعويض تم الحصول على جملة معادلتين بمجهولين.

نضرب المعادلة رقم (02) بـ: (-1) فنحصل على الجملة التالية:

$$100Y_1 + 20Y_2 = 5000$$
$$-100Y_1 - 60Y_2 = -12000$$

بالجمع نحصل على: $-40Y_2 = -7000$ و عليه فإن: $Y_2 = \frac{-7000}{-40} = 175$ و بتعويض $Y_2 = 175$ في إحدى المعادلتين نحصل على: $Y_1 = 15$ و بتعويض كل من $Y_1 = 15, Y_2 = 175, Y_3 = 00, Y_4 = 00$ في دالة الهدف للنموذج الثنائي نحصل ما يلي: $W = 2000(15) + 600(175) + 340(00) + 140(00) = 135000$

و بما أن قيمة دالة الهدف للنموذج الثنائي تساوي قيمة دالة الهدف للنموذج الأولي، فإن الحل المستنتج للنموذج الثنائي هو حل أمثل.

05.04 – القيم الحدية للموارد المتاحة:

كما هو معلوم كل مورد متاح يتوفر أو يتواجد بكمية محدودة يوافقه قيد في النموذج الأولي. و كل قيد في النموذج الأولي توافقه متغيرة في النموذج الثنائي (هذه المتغيرة تسمى المتغيرة الثنائية) بدليل أن عدد متغيرات النموذج الثنائي يساوي عدد قيود النموذج الأولي.

السؤال الذي يطرح هو التالي:

ما هو التفسير الاقتصادي لهذه المتغيرة الثنائية.

كما هو معلوم قيمة دالة الهدف للنموذج الأولي تعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$Z = C_B X_B = C_B A_B^{-1} b = Yb = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + ... + y_i b_i + ... + y_m b_m$$

بالنسبة للمورد رقم i أي b_i، فإن تغير هذا الأخير بوحدة واحدة أي $\Delta b_i = 01$ مع ثبات الموارد الأخرى، يؤدي إلى تغير دالة الهدف Z بالمقدار ΔZ قد يكون موجب أو معدوم أي $\Delta Z \geq 0$.

حيث أن:

$$\Delta Z = y_i(\Delta b_i) = y_1(1) = y_i$$

معنى ذلك أنه رفع بوحدة واحدة كمية المتاح من المورد رقم i **الذي تم كليتا استخدامه**، يؤدي إلى رفع قيمة دالة الهدف أي يؤدي إلى رفع ربح المؤسسة بـ: $\Delta Z = y_i$.

مقدار ارتفاع قيمة دالة الهدف Z الذي هو y_i يسمى **القيمة الحدية** للمورد رقم i الذي تم رفعه بوحدة واحدة. معنى ذالك أن قيمة المتغيرة الثنائية رقم i و التي هي y_i تمثل القيمة الحدية للمورد رقم i، و التي تمثل مقدار تغير دالة الهدف Z نتيجة تغير المتاح من المورد رقم i بوحدة واحدة مع بقاء المتاح من الموارد الأخرى على حاله.

ملاحظة 01.04:

- **الموارد الغير متبقية أي التي تم استخدامها كليتا فقط لها قيم حدية.**
- **الموارد المتبقية أي التي لم يتم استخدامها كليتا ليس لها قيم حدية، أو بعبارة أخرى لها قيم حدية معدومة.**

06.04 – الخوارزمية الثنائية للسمبلكس:

تشترط طريقة السمبلكس بغرض تطبيقها توفر أول حل أساس مقبول للانطلاق، غير أن توفر هذا الأخير قد يكون من الصعب الحصول عليه بسهولة في نماذج البرمجة الخطية ذات القيود من النوع يساوي (=) أو أكبر أو يساوي (≥)، الأمر الذي استدعى إضافة المتغيرات الاصطناعية بغرض توفير أول حل أساس مقبول للانطلاق و من ثم استخدام طريقة المرحلتين أو طريقة الجزاء بغرض إيجاد الحل الأمثل.

هناك أسلوب أو طريقة أخرى يمكن استخدامها لحل هذا النوع من نماذج البرمجة الخطية التي لا يمكن أن نجد لها أول حل أساس مقبول بسهولة، و ذلك بدون إضافة المتغيرات الاصطناعية من جهة و من جهة أخرى تسمح لنا هذه الطريقة بتقليص مسار الوصول إلى الحل الأمثل أي بتخفيض عدد جداول السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل. هذا الأسلوب أو الطريقة تسمى **بالطريقة أو الخوارزمية الثنائية للسمبلكس.**

مبدأ هذه الطريقة هو الوصول أو إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية و هذا انطلاقا من أول حل أساس غير مقبول (أي قيم متغيرات الأساس سالبة) و هذا كعملية مرحلية، ثم إجراء سلسلة من التغيرات (التحسينات في الحل) بين متغيرات الأساس و متغيرات خارج الأساس للوصول أو للحصول على حل أساس مقبول (متغيرات أساس موجبة) ثم بعد ذلك الحصول على حل أساس مقبول أمثل. و يتم ذلك حسب الخطوات التالية

- **خطوات الحل باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلكس:**

01- كتابة نموذج البرمجة الخطية على الشكل المعياري سواء بإضافة أو بطرح متغيرات الفجوة من القيود.

02- ضرب بـ: (-1) فقط القيود التي تم طرح منها متغيرة الفجوة. نستثني القيود التي تم إضافة إليها متغيرة فجوة

03- الحصول على حل أساس للانطلاق

- مع $C_j - Z_j \le 0$ $(j = 1,2,3,...,n)$ في حالة نموذج من النوع تعظيم (Max).
- مع $C_j - Z_j \ge 0$ $(j = 1,2,3,...,n)$ في حالة نموذج من النوع تدنئة (Min).

04- تحسين الحل:

لقد سبق و أن تطرقتا إلى عملية تحسين الحل عندما تم تناول الحل بطريقة السمبلاكس حيث يتم تحسين الحل وفقا لهذه الأخيرة عن طريق تحديد المتغيرة الداخلة أولا ثم بعد ذلك يتم تحديد المتغيرة الخارجة ليتحدد بعد ذلك عنصر الارتكاز. وفقا للطريقة الثنائية للسمبلاكس يتم تحديد المتغيرة الخارجة أولا ثم بعد ذلك يتم تحددي المتغيرة الداخلة ثانيا

- **تحديد المتغيرة الخارجة:**

المتغيرة الخارجة في حالة الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس هي متغيرة الأساس X_k التي تأخذ أو تساوي أقل قيمة سالبة. أي متغيرة الأساس ذات القيمة الأكثر سالبيه و عليه يتم تقديم معيار اختيار المتغيرة الخارجة في الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس كما يلي:

$$X_k = Min \left[X_i = b_i \;\; , \;\; b_i < 0 \right]$$

حيث أن i مؤشر متغيرات الأساس

- **تحديد المتغيرة الداخلة:**

المتغيرة الداخلة في حالة الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس هي المتغيرة خارج الأساس X_r التي توافق أو تقابل أقل حاصل قسمة معاملات متغيرات خارج الأساس $(C_j - Z_j)$ على المعاملات a_{kj} السالبة $a_{kj} < 0$ المقابلة لمتغيرات خارج الأساس

في سطر المتغيرة الداخلة و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

* في حالة نموذج من النوع تدنئة (Min)

$$X_r = Min\left[\frac{-(C_j - Z_j)}{a_{kj}}\ ,\ a_{kj} < 0\right]$$

* في حالة نموذج من النوع تعظيم (Max)

$$X_r = Min\left[\frac{(C_j - Z_j)}{a_{kj}}\ ,\ a_{kj} < 0\right]$$

ملاحظة: إذا كانت جميع المعاملات a_{kj} لسطر المتغيرة الخارجة X_k موجبة أي a_{kj} فإن النموذج ليس له منطقة حلول مقبولة و بالتالي ليس له حل أمثل.

- **تحديد عنصر الارتكاز:**

عنصر الارتكاز هو القيمة التي تمثل تقاطع سطر المتغيرة الخارجة و عمود المتغيرة الداخلة أي أن: $Pivot = a_{kr}$

- **تشكيل جدول السمبلاكس الموالي:**

يتم ذلك بنفس القواعد المتبعة في الطريقة الأولية للسمبلاكس

05- اختبار أمثلية الحل:

و نعني بهذه الخطوة فيما إذا كان حل الأساس المتوصل إليه في الخطوة 04 هو حل أمثل أم لا. يتم الحصول أو الوصول إلى حل أساس مقبول أمثل إذا تحقق الشرطين التاليين في آن واحد أو معا:

- جميع قيم متغيرات الأساس موجبة و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$X_i \geq 0$$

حيث أن i مؤشر متغيرات الأساس

- جميع المعاملات $(C_j - Z_j)$ لمتغيرات خارج الأساس

✓ سالبة أو معدومة في حالة النموذج من النوع تعظيم (Max) و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية: $(C_j - Z_j) \leq 0$

✓ موجبة أو معدومة في حالة النموذج من النوع تدنئة (Min) و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية: $(C_j - Z_j) \geq 0$

06- إذا حل الأساس المتحصل عليه غير مقبول فهنا نعود إلى الخطوة 04.

بغرض توضيح أكثر الخطوات أعلاه نأخذ المثال التالي:

مثال 14.04 :

إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أدناه باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس:

$$Min \quad Z = 100X_1 + 120X_2 + 200X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 \geq 600$$
$$02X_1 + 04X_2 + 06X_3 \geq 700$$
$$01X_1 + 02X_2 + 04X_3 \geq 800$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بغرض الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس نتبع الخطوات السابقة الذكر:

1. كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Min \quad Z = 100X_1 + 120X_2 + 200X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 - 01S_1 = 600$$
$$02X_1 + 04X_2 + 06X_3 - 01S_2 = 700$$
$$01X_1 + 02X_2 + 04X_3 - 01S_3 = 800$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2. ضرب بـ: (-1) القيود التي تم طرح منها متغيرة فجوة:

$$Min \quad Z = 100X_1 + 120X_2 + 200X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$-01X_1 - 03X_2 - 02X_3 + 01S_1 = -600$$
$$-02X_1 - 04X_2 - 06X_3 + 01S_2 = -700$$
$$-01X_1 - 02X_2 - 04X_3 + 01S_3 = -800$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

3. تشكيل جدول السمبلكس الأول:

$C_j \rightarrow$		100	120	200	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	$X_3 \uparrow$	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	-01	-03	-02	-01	00	00	-600
00	S_2	-02	-04	-06	00	-01	00	-700
00	$\leftarrow S_3$	-01	-02	**(- 04)**	00	00	-01	-800
Z_j		00	00	00	00	00	00	
$C_j - Z_j$		100	120	200	00	00	00	$Z = 00$
$\frac{-(C_j - Z_j)}{a_{ij}}$		$\frac{-100}{-01} = 100$	$\frac{-120}{-02} = 60$	$\frac{-200}{-04} = 50$	/	/	/	

حل الأساس الموافق لجدول السمبلاكس هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس : $X_1 = 00, X_2 = 00, X_3 = 00$
- متغيرات الأساس : $S_1 = -600, S_2 = -700, S_3 = -800$
- قيمة دالة الهدف Z: $Z = 00$

تحسين الحـل: لتحسين الحل نقوم بما يلي:

- تحديد المتغيرة الخارجة:
- تحديد المتغيرة الداخلة:
- استنتاج عنصر الارتكاز:
- تشكيل جدول السمبلاكس الموالي:

- **تحديـد المتغيـرة الخارجـة:**

المتغيرة الخارجة في الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس هي متغيرة الأساس X_k التي تأخذ أقل قيمة سالبة أي متغيرة الأساس الأكثر سالبية. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التاليـة:

$$X_k = Min\ \left[X_i = b_i \ \ ,\ \ b_i < 0 \right] = Min\ \left[S_1 = -600\ \ ,\ \ S_2 = -700\ \ ,\ \ S_3 = -800 \right] = S_3$$

و عليه فإن المتغيرة الخارجة هي متغيرة الأساس S_3 كما هي موضحة بسهم $(\leftarrow)$ في جدول السمبلاكس الأول أعلاه.

- **تحديـد المتغيـرة الداخلـة:**

المتغيرة الداخلة في الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس هي المتغيرة خارج الأساس X_r التي توافق أو تقابل أقل حاصل قسمة المعاملات $-(C_j - Z_j)$ لمتغيرات خارج الأساس X_1, X_2, X_3 على المعاملات a_{3j} السالبة $(a_{3j} < 0)$ المقابلة لمتغيرات خارج الأساس في سطر المتغيرة الداخلة S_3 و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$Min\left[\frac{-(C_j - Z_j)}{a_{3j}}, a_{3j} < 0 \right] = Min\left[\frac{-(C_1 - Z_1)}{a_{31}}, \frac{-(C_2 - Z_2)}{a_{32}}, \frac{-(C_3 - Z_3)}{a_{33}} \right]$$

$$Min\left[\frac{-100}{-1}, \frac{-120}{-2}, \frac{-200}{-4} \right] = Min[100,60,50] = 50$$

أقل $\left[\frac{-(C_j - Z_j)}{a_{3j}}, a_{3j} < 0 \right]$ هي $50 = \frac{-200}{-4} = \left[\frac{-(C_3 - Z_3)}{a_{33}} \right]$ و هذا يوافق المتغيرة خارج الأساس X_3 و عليه فإن المتغيرة الداخلة هي المتغيرة خارج الأساس X_3 كما هي موضحة بسهم $(\uparrow)$ في جدول السمبلاكس الأول.

- **استنتـاج عنصر الارتكـاز:**

عنصر الارتكاز كما سبق و أن ذكرنا هو القيمة التي تمثل تقاطع سطر المتغيرة الداخلة و عمود المتغيرة الخارجة، فتبعا لذلك فإن عنصر الارتكاز يساوي $Pivot = -04$ كما هو موضح في جدول السمبلاكس الأول.

- **تشكيل جدول السمبلكس الموالي (الثانـي):**

$C_j \rightarrow$		100	120	200	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	$X_2 \uparrow$	X_3	S_1	S_2	S_3	B
00	$\leftarrow S_1$	$-1/2$	**(-02)**	00	01	00	$1/2$	-200
00	S_2	$-1/2$	-01	00	00	01	$3/2$	500
200	X_3	$1/4$	$1/2$	01	00	00	$1/4$	200
Z_j		50	100	200	00	00	50	
$C_j - Z_j$		50	20	00	00	00	-50	$Z = 4\times 10^4$
$\frac{-(C_j - Z_j)}{a_{ij}}$		$\frac{-(50)}{-1/2}=100$	$\frac{-(20)}{-02}=10$	/	/	/	$\frac{-(-50)}{/}=/$	

حل الأساس الموافق لجدول السمبلكس الثاني هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس : $X_1 = 00, X_2 = 00, S_3 = 00$
- متغيرات الأساس : $S_1 = -200, S_2 = 500, X_3 = 200$
- قيمة دالة الهدف Z: $Z = 40000$

ما يلاحظ عن حل الأساس الثاني أعلاه أنه غير مقبول لأن متغيرة الأساس $S_1 = -200$ **تساوي قيمة** سالبة أي لا تحقق قيد عدم سلبية المتغيرة $S_1 \geq 0$.

5. **اختبار أمثلية الحل:** نعني بهذه الخطوة فيما إذا كان الحل الأساس المتوصل إليه في الخطوة 04 السابقة هو حل أمثل أو لا. بما أن حل الأساس المتوصل إليه في الخطوة 04 ليس بحل أساس مقبول فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل معنى ذلك أن هناك إمكانية لتحسين الحل و هذا يعني العودة من جديد إلى الخطوة 04 الممثلة في تحسين الحل.

6. **تحسين الحل:**

- **تحديد المتغيرة الخارجة:**

المتغيرة الخارجة هي متغيرة الأساس X_k التي تأخذ أقل قيمة سالبة أي متغيرة الأساس الأكثر سالبية. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة: $X_k = Min\left[X_i = b_i \;,\; b_i < 0\right] = Min\;[S_1 = -200] = S_1$

و عليه فإن المتغيرة الخارجة هي متغيرة الأساس S_1 كما هي موضحة بسهم $(\leftarrow)$ في جدول السمبلاكس الثاني الأول أعلاه.

- **تحديد المتغيرة الداخلة:**

المتغيرة الداخلة في الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس هي المتغيرة خارج الأساس X_r التي توافق أو تقابل أقل حاصل قسمة المعاملات $-(C_j - Z_j)$ لمتغيرات خارج الأساس X_1, X_2, S_3 على المعاملات a_{1j}' السالبة $(a_{1j}' < 0)$ المقابلة لمتغيرات خارج الأساس في سطر المتغيرة الداخلة S_1 و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$Min\ \left[\frac{-(C_j-Z_j)}{a_{1j}'}, a_{1j}'<0\right] = Min\ \left[\frac{-(C_1-Z_1)}{a_{11}'}, \frac{-(C_2-Z_2)}{a_{12}'}\right]$$

$$Min\ \left[\frac{-50}{-1/2}, \frac{-20}{-2}\right] = Min\ [100,10] = 10$$

أقل $\left[\frac{-(C_j-Z_j)}{a_{1j}'}, a_{1j}'<0\right]$ هي $\left[\frac{-(C_2-Z_2)}{a_{12}'}\right] = \frac{-20}{-2} = 10$ و هذا يوافق المتغيرة خارج الأساس X_2 و عليه فإن المتغيرة الداخلة هي المتغيرة خارج الأساس X_2 كما هي موضحة بسهم $(\uparrow)$ في جدول السمبلاكس الثاني أعلاه.

- **استنتاج عنصر الارتكاز:**

عنصر الارتكاز كما سبق و أن ذكرنا هو القيمة التي تمثل تقاطع سطر المتغيرة الداخلة S_1 و عمود المتغيرة الخارجة X_2، فتبعا لذلك فإن عنصر الارتكاز يساوي $Pivot = a_{12}' = -02$ كما هو موضح في جدول السمبلاكس الثاني أعلاه.

- **تشكيل جدول السمبلاكس الموالي (الثالث):**

$C_j \rightarrow$		100	120	200	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
120	X_2	$1/4$	01	00	$-1/2$	00	$-1/4$	100
00	S_2	$-1/4$	00	00	$1/2$	01	$5/4$	600
200	X_3	$1/8$	00	01	$1/4$	00	$3/8$	150
Z_j		55	120	200	-10	00	45	
$C_j - Z_j$		45	00	00	10	00	-45	$Z = 42\times 10^3$

حل الأساس الموافق لجدول السمبلاكس الثالث هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس : $X_1 = 00, S_1 = 00, S_3 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_2 = 100, S_2 = 600, X_3 = 150$
- قيمة دالة الهدف Z: $Z = 42000$

ما يلاحظ عن حل الأساس الثالث أعلاه أنه مقبول لأن جميع متغيرات الأساس تأخذ قيم موجبة أي أنها تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

اختبار أمثلية الحل: بما أن:

1. جميع قيم متغيرات الأساس موجبة.
2. جميع المعاملات $(C_j - Z_j)$ لمتغيرات خارج الأساس موجبة أي $(C_j - Z_j) > 0$ أي معيار الأمثلية محقق بالنسبة للنماذج من النوع تدنئة Min.

و عليه فإن الحل المتوصل إليه أعلاه هو حل أمثل.

ثانيا: تحليل الحساسية

الهدف من حل نموذج البرمجة الخطية بإحدى الطرق التي تم التطرق إليها في الفصول السابقة، هو الوصول إلى الحل الأمثل. هذا الأخير مرتبط أو متعلق بقيم مكونات النموذج التالية:

- هامش الربح C_j
- المتاح من الموارد b_i
- الاستهلاكات الوسيطية a_{ij}

إن مكونات النموذج المذكورة أعلاه قد تتغير قيمها لسبب من الأسباب، نذكر على سبيل المثال لا الحصر التغير الذي قد يحصل في قيمة هامش الربح C_j نتيجة تغير التكلفة، ضف إلى ذلك التغير الذي قد يحدث في قيمة المتاح من الموارد b_i.

أمام هذا التغير الذي قد يحدث في قيم مكونات النموذج يكون أو ينصب الاهتمام حول ما يلي:

عما سوف يحدث للحل الأمثل الذي تم التوصل إليه. هل سيبقى حلا أمثلا أم سوف يتغير؟ و إذا كان سوف يتغير هل سوف نلجأ مرة أخرى و من جديد إلى حل نموذج البرمجة الخطية بالقيم الجديدة بغرض الوصول إلى الحل الأمثل الجديد؟

توجد أدوات أو تقنيات تسمح لنا بتقييم حساسية الحل الأمثل الحالي عندما تتغير قيم مكونات النموذج. هذا المدخل في البرمجة الخطية يسمى **تحليل الحساسية**. تحليل الحساسية يسمح لنا بتحديد مجال تغير مكونات النموذج C_j، b_i ، a_{ij} مع الحفاظ على الحل الأمثل الحالي حلا أمثلا. بالإضافة إلى ذلك تحليل الحساسية يوفر علينا جهد إعادة حل النموذج من جديد أو مرة أخرى.

إن تحليل حساسية الحل الأمثل لا تهتم فقط بدراسة أثر أو نتائج تغير أحد مكونات النموذج و إنما يمكن لها تقييم فيما إذا كان من المهم إدراج منتج جديد أو لا.

07.04 – التغير في معاملات دالة الهدف C_j:

من خلال هذه الفقرة سوف نتناول أثر تغير معاملات دالة الهدف C_j لمتغيرات القرار X_j على الحل الأمثل. أي هل الحل الأمثل يبقى أمثل أم يتغير أي يصبح حل غير أمثل. انطلاقا من حل أساس مقبول أمثل، نفرض أن معامل C_j لمتغيرة قرار X_j تغير. نفرض أن هذا المعامل تغير من C_j إلى C_j' حيث أن: $C_j'=C_j+\Delta C_j$ و ΔC_j: يمثل مقدار تغير المعامل C_j.

السؤال الذي يطرح هو: **هل حل الأساس المقبول الأمثل يبقى دائما أمثلا أم يصبح غير أمثل أي يتغير؟**

الإجابة هي التالية: بما أن متغيرة القرار قد تكون متغيرة أساس أو قد تكون متغيرة خارج الأساس، فإننا نميز حالتين هما:

- حالة C_j معامل لمتغيرة X_j خارج الأساس.
- حالة C_j معامل لمتغيرة X_j الأساس.

01.07.04 – التغير في المعامل C_j لمتغيرة X_j خارج الأساس:

نفرض أن معامل المتغيرة خارج الأساس X_j قد تغير من C_j إلى C_j'، حيث أن: $C_j'=C_j+\Delta C_j$، و ΔC_j يمثل مقدار تغير المعامل C_j. في هذه الحالة الذي يتغير في جدول الحل الأمثل هو القيمة C_j-Z_j للمتغيرة خارج الأساس X_j فقط. حيث تصبح $C_j'-Z_j$، و بما أن: $C_j'=C_j+\Delta C_j$ فإن القيم C_j-Z_j تصبح $C_j+\Delta C_j-Z_j$ حيث يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا تحقق معيار أمثلية الحل المتمثل فيما يلي:

- $C_j'-Z_j\le 0$ إذا كان النموذج من النوع تعظيم (Max).
- $C_j'-Z_j\ge 0$ إذا كان النموذج من النوع تدنئة (Min).

1. حالة النموذج من النوع تعظيم (Max):

يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا كان أو تحقق معيار أمثلية الحل التالي: $C_j'-Z_j\le 0$ و منه $C_j'\le Z_j$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة $C_j'\le Z_j$، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كانت القيمة الجديدة C_j' للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j **أقل أو تساوي** من القيمة Z_j أي إذا كانت $C_j'\in]-\infty,Z_j]$. فإذا تعدى المعامل C_j' القيمة Z_j فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا. المجال $]-\infty,Z_j]$ يسمى **مجال تغير** لمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j. أما بالنسبة لمقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j المسموح به بغرض أن يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا هو التالي:

مما سبق لدينا $C_j'\le Z_j$ و بما أن: $C_j'=C_j+\Delta C_j$ فإن العلاقة أعلاه تصبح كما يلي:

$$C_j+\Delta C_j-Z_j\le 0$$
$$C_j+\Delta C_j\le Z_j$$
$$\Delta C_j\le Z_j-C_j$$
$$\Delta C_j\le -\left(C_j-Z_j\right)$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة $\Delta C_j\le -\left(C_j-Z_j\right)$، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j **أقل أو تساوي** من القيمة $-\left(C_j-Z_j\right)$ أي إذا كانت $\Delta C_j\in]-\infty,-(C_j-Z_j)]$. فإذا تعدى مقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j القيمة $-\left(C_j-Z_j\right)$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا. المجال $]-\infty,-(C_j-Z_j)]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j.

مثال 15.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\quad Z=100X_1+60X_2+80X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$06X_1+03X_2+06X_3\le 1200$$
$$04X_1+04X_2+06X_3\le 1000$$
$$04X_1+12X_2+08X_3\le 3800$$
$$X_1,X_2,X_3\ge 0$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		100	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	150
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	100
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	2000
Z_j		100	60	110	$40/3$	05	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-30	$-40/3$	-05	00	$Z = 21000$

- أدرس مجال تغير كل من:

1. معامل المتغيرة خارج الأساس X_3.

2. مقدار تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3.

- حدد فيما إذا كان الحل الأمثل يتغير في حالة أن معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 في الحالات التالية:

1. ارتفع بأقل من 30 و ليكن 29.

2. ارتفع بـ: 30.

3. ارتفع بأكثر من 30 و ليكن 31.

الإجابة:

1. مجال تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 : و الذي نعني به مجال تغير $C_3 = 80$ حتى يبقى الحل الأمثل أعلاه حلا أمثلا.

- تبعا للنتيجة المتوصل إليها أعلاه $C_j' \leq Z_j$ فإنه يبقى الحل الأمثل أعلاه حلا أمثلا إذا كان معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 و الذي هو C_3' لا يتعدى القيمة Z_3 أي $C_j' \leq 110$ و عليه فإن مجال تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 هو $]-\infty, 110]$ أي أن $C_3' \in]-\infty, 110]$.

كما يمكن الوصول إلى مجال تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 و الذي هو $]-\infty, 110]$ كما يلي:

- معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 هو $C_3 = 80$. قد يتغير بمقدار (موجب أو سالب) يساوي ΔC_3 فيصبح C_3' حيث أن: $C_3' = C_3 + \Delta C_3$ أي: $C_3' = 80 + \Delta C_3$ بتعويض $C_3 = 80$ بـ: $C_3' = 80 + \Delta C_3$ في جدول الحل الأمثل أعلاه نحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		100	60	$C_3' = 80 + \Delta C_3$	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	150
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	100
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	2000
Z_j		100	60	110	$40/3$	05	00	

$C_j - Z_j$	00	00	$80+\Delta C_3 - 110$	$-40/3$	-05	00	$Z = 21000$

إذا تغير معامل متغيرة خارج أساس فإن القيم التي تتغير في جدول الحل الأمثل هي: القيمة $C_j - Z_j$ المقابلة لمتغيرة خارج الأساس الذي تغير معاملها أي الذي يتغير هو $C_j - Z_j$ المقابلة للمتغيرة خارج الأساس X_3 أي $C_3 - Z_3$ حيث يصبح $C_3^{'} - Z_3$ بدلا من $C_3 - Z_3 = -30$ حيث أن $C_3^{'} - Z_3 = 80 + \Delta C_3 - 110$. يبقى الجدول أعلاه جدول الحل الأمثل إذا كان أو إذا تحقق شرط الحل الأمثل و هو: $C_3^{'} - Z_3 \leq 0$

$$C_3^{'} - Z_3 \leq 0 \Rightarrow 80 + \Delta C_3 - 110 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_3 - 30 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_3 \leq 30 \;\Rightarrow\; \Delta C_3 \leq 30$$

- $\Delta C_3 \leq 30$: يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلا أمثل ما دام مقدار تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 أقل أو يساوي 30 أي إذا تعدى مقدار التغير القيمة 30 فإن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول لا يبقى أمثلا بل يتغير.

لدينا: $\Delta C_3 \leq 30$ و بإضافة القيمة 80 للطرفين يصبح: $80 + \Delta C_3 \leq 80 + 30 \Rightarrow 80 + \Delta C_3 \leq 110$

مما سبق أعلاه لدينا أو نعلم أن: $C_3^{'} = 80 + \Delta C_3$ إذن يصبح لدينا ما يلي: $C_3^{'} \leq 110$ و الذي يكتب: $C_3^{'} \in \left]-\infty, 110\right]$

- $C_3^{'} \leq 110$: يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلا أمثل ما دام معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 أقل أو يساوي 110 أي إذا تعدى هذا المعامل القيمة 110 فإن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول لا يبقى أمثلا بل يتغير.

2. **مجال تغير مقدار تغير معامل** X_3 : أي مجال تغير ΔC_3 حتى يبقى الحل الأمثل أعلاه حلا أمثلا.

- تبعا للنتيجة المتوصل إليها أعلاه $\Delta C_j \leq -\left(C_j - Z_j\right)$ ، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j أقل أو تساوي من القيمة $-\left(C_j - Z_j\right)$ أي إذا كانت $\Delta C_j \in \left]-\infty, -(C_j - Z_j)\right]$. فإذا تعدى مقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j القيمة $-\left(C_j - Z_j\right)$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا. و عليه فإن مجال مقدار تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 و الذي هو ΔC_3 هو: $\Delta C_3 \leq -\left(C_3 - Z_3\right) \Rightarrow \Delta C_3 \leq -\left(-30\right) \Rightarrow \Delta C_3 \leq +30 \Rightarrow \Delta C_3 \in \left[-\infty, +30\right]$

و هي نفس النتيجة المتوصل إليها أعلاه عند معالجة مجال تغير معامل المتغيرة خارج الأساس X_3

3. **ارتفع بأقل من 30 و ليكن 29:** هذا يعني أن: $\Delta C_3 = +29$ و عليه فإن:

- مقدار التغير $\Delta C_3 = +29$ يقع ضمن مجال تغير ΔC_3 أي أن: $\Delta C_3 = 29 \in \left]-\infty, 30\right]$ و الذي من أجله (مجال التغير) يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا لا يتغير و يتجلى ذلك من خلال التفسير التالي:
- المعامل الجديد C_3' للمتغيرة خارج الأساس X_3 يساوي ما يلي:

$$C_3' = C_3 + \Delta C_3 \Rightarrow C_3' = 80 + 29 \Rightarrow C_3' = 109$$

- $C_3' = 109$: يقع ضمن مجال تغير المعامل C_3' أي أن: $C_3^{'} = 109 \;\in \left]-\infty, 110\right]$ و الذي من أجله (مجال التغير) يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا لا يتغير و يتجلى ذلك من خلال التفسير التالي:

- في هذه الحالة يصبح المعامل الجديد للمتغيرة خارج الأساس X_3 يساوي 104 و عليه فإن $C_3'-Z_3 = 109-110 = -01 < 0$ و منه فإن الحل الأمثل أعلاه لا يتغير بل يبقى حل أمثل كما يوضحه جدول السمبلاكس أدناه:

$C_j \rightarrow$		100	60	$C_3' = 80+29 = 109$	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	150
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	100
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	2000
Z_j		100	60	110	$40/3$	05	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$109-110=-01$	$-40/3$	-05	00	$Z = 21000$

4. ارتفع بـ: 30:

- بما أن مقدار تغير معامل المتغيرة X_3 يساوي 30 أي أن $\Delta C_3 = +30$ فهو يساوي مقدار التغير الأعلى المسموح به و الذي هو 30 بعبارة أخرى يقع ضمن مجال تغير ΔC_3 أي أن: $\Delta C_3 = 30 \in]-\infty, 30]$ و الذي من أجله (مجال التغير) يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا لا يتغير و يتجلى ذلك من خلال التفسير التالي:
- في هذه الحالة يصبح المعامل الجديد للمتغيرة C_3' خارج الأساس X_3 يساوي:

$$C_3' = 80 + \Delta C_3 \Rightarrow C_3' = 80 + 30 \Rightarrow C_3' = 110$$

- $C_3' = 110$: يقع ضمن مجال تغير المعامل C_3' أي أن: $C_3' = 110 \in]-\infty, 110]$ و الذي من أجله (مجال التغير) يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا لا يتغير و يتجلى ذلك من خلال التفسير التالي:
- في هذه الحالة يصبح المعامل الجديد للمتغيرة خارج الأساس X_3 يساوي 110 و عليه فإن $C_3'-Z_3 = 110-110 = 00$ و منه فإن الحل الأمثل أعلاه لا يتغير بل يبقى حل أمثل و بالضبط يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة كما يوضحه جدول السمبلاكس أدناه:

$C_j \rightarrow$		100	60	$C_3' = 80+30 = 110$	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	150
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	100
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	2000
Z_j		100	60	110	$40/3$	05	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$110-110=00$	$-40/3$	-05	00	$Z = 21000$

5. ارتفع بأكثر من 30 و ليكن 31:

- بما أن مقدار تغير معامل المتغيرة X_3 يساوي 31 أي أن $\Delta C_3 = +31$ فهو يفوق أو أكبر من مقدار التغير المسموح به و الذي هو 30 أو بعبارة أخرى مقدار التغير $\Delta C_3 = +31$ لا يقع أو لا ينتمي إلى مجال التغير المسموح به لـ: ΔC_3 و الذي هو $]-\infty,30]$ **أي أن** $\Delta C_3 = 31 \notin]-\infty,30]$ و عليه فإن الحل الأمثل سوف لا يبقى أمثلا بل يتغير.
- بما أن معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 و الذي هو $C_3 = 80$ ارتفع بـ: 31 أي أن $\Delta C_3 = +31$ فإنه سوف يصبح C_3' يساوي ما يلي:

$$C_3' = 80 + \Delta C_3 \Rightarrow C_3' = 80 + 31 \Rightarrow C_3' = 111$$

- و تبعا للنتائج المتوصل إليها أعلاه فإنه يجب على معامل المتغيرة X_3 أن لا يتعدى القيمة 110 أي أن لا يقع ضمن مجال تغير المعامل C_3' أي أن: $C_3' = 111 \notin]-\infty,110]$ و بما أنه أصبح يساوي 111 فقد تعدى 110 و عليه فإن الحل الأمثل أعلاه سوف يتغير و هذا بسبب أننا سوف نتحصل على $C_3' - Z_3 = 111 - 110 = +01$ **الموافقة للمتغير خارج الأساس** X_3 **موجبة** كما يوضحه الجدول أدناه:

$C_j \rightarrow$		100	60	$C_3' = 80 + 31 = 111$	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	150
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	100
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	2000
Z_j		100	60	110	$40/3$	05	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$111 - 110 = +01$	$-40/3$	-05	00	$Z = 21000$

الجدول أعلاه لا يمثل جدول الحل الأمثل لأنه لدينا $C_3 - Z_3 = +01 > 0$ أي أن هناك إمكانية لتحسين الحل و ذلك عن طريق اختيار المتغيرة خارج الأساس X_3 على أنها المتغيرة الداخلة و منه المتغيرة الخارجة هي X_2. يمكن استنتاج الحل الموالي دون تشكيل الجدول كما يلي:

- القيمة المرتقبة للمتغيرة الداخلة X_3 هي 100 أي $X_3 = 100$
- قيمة المتغيرة الخارجة X_2 هي 0 أي $X_2 = 00$
- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس X_1 هي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = l'Ancienne \quad Valeur - \frac{1}{2} \times 100 = 150 - 50 = 100 \Rightarrow X_1 = 100$$

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس S_3 هي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_3 = l'Ancienne \quad Valeur + 06 \times 100 = 2000 + 600 = 2600 \Rightarrow S_3 = 2600$$

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z هي:

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ \ De\ \ Z = l'\,Ancienne\ \ \ Valeur + 01\times 100 = 21000 + 100 = 21100$$

أما الحل عن طريق تشكيل جدول السمبلاكس فهو التالي:

$C_j \rightarrow$		100	60	111	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	$-1/2$	00	$1/2$	$-1/2$	00	100
111	X_3	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	100
00	S_3	00	06	00	$2/3$	-02	01	2600
Z_j		100	61	111	13	$11/2$	00	
$C_j - Z_j$		00	-01	00	-13	$-11/2$	00	$Z = 21100$

2. حالـة النمـوذج مـن النـوع تدنئـة (Min):

يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا كان أو تحقق معيار أمثلية الحل التالي: $C_j^{/} - Z_j \geq 0$.

$$C_j' - Z_j \geq 0 \Rightarrow C_j' \geq Z_j'$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة $C_j^{/} \geq Z_j$، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كانت القيمة الجديدة $C_j^{/}$ للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j **أكبر أو تساوي** من القيمة Z_j أي إذا كانت $C_j^{/} \in [Z_j + \infty[$.
فإذا لم يتعدى المعامل $C_j^{/}$ القيمة Z_j فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا.

المجال $[Z_j + \infty[$ يسمى **مجال تغير** لمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j. أما بالنسبة لمقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j المسموح به بغرض أن يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا هو التالي: $C_j^{/} \geq Z_j$. و بما أن $C_j^{/} = C_j + \Delta C_j$ يصبح لدينا:

$$C_j + \Delta C_j - Z_j \geq 0 \Rightarrow C_j + \Delta C_j \geq Z_j \Rightarrow C\Delta \geq Z_j - C_j \Rightarrow C\Delta \geq -(C_j - Z_j)$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة $\Delta C_j \geq -(C_j - Z_j)$، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة خارج الأساس X_j **أكبر أو تساوي** من القيمة $-(C_j - Z_j)$ أي إذا كانت $\Delta C_j \in [-(C_j - Z_j) + \infty[$. فإذا لم يتعدى المعامل ΔC_j القيمة $-(C_j - Z_j)$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا. المجال $[-(C_j - Z_j) + \infty[$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير ΔC_j للمعامل C_j للمتغيرة X_j

02.07.04 – التغير في المعامل C_j لمتغيرة أساس X_j:

نفرض أن المعامل C_j معامل متغيرة الأساس X_j قد تغير بالمقدار ΔC_j و أصبح $C_j^{/}$ حيث أن: $C_j^{/} = C_j + \Delta C_j$ و ΔC_j: يمثل مقدار تغير المعامل C_j معامل متغيرة الأساس X_j. هذا التغير قد يكون موجب أو قد يكون سالب أي أن:

- $\Delta C_j > 0$: يعني أن مقدار التغير موجب أي أن C_j ارتفع.

- $\Delta C_j < 0$: يعني أن مقدار التغير سالب أي أن C_j انخفض.

عند تغير المعامل C_j معامل متغيرة الأساس X_j فإن الذي يتغير في جدول الحل الأمثل هو التالي:

- بما أن القيم Z_j للمتغيرات خارج الأساس تحسب بدلالة المعامل C_j معامل متغيرة الأساس X_j الذي تغير فإن القيم Z_j سوف تتغير كذلك لتصبح Z'_j
- بما أن القيم $(C_j - Z_j)$ للمتغيرات خارج الأساس تحسب بدلالة القيم Z_j التي تتغير فإن القيم $(C_j - Z_j)$ للمتغيرات خارج الأساس سوف تتغير كذلك لتصبح $(C_j - Z'_j)$.
- بما أن قيمة دالة الهدف Z تحسب بدلالة المعامل C_j معامل متغيرة الأساس X_j الذي تغير فإن قيمة دالة الهدف Z سوف تتغير كذلك لتصبح Z

يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا تحقق معيار أمثلية الحل المتمثل فيما يلي:

- $C_j - Z'_j \le 0$ إذا كان النموذج من النوع تعظيم (Max).
- $C_j - Z'_j \ge 0$ إذا كان النموذج من النوع تدنئة (Min).

نذكر أن القيم Z_j أو Z'_j تحسب وفقا للعلاقة: $Z_j = C_B A_B^{-1} a_j$ حيث نميز حالتين هما:

1. حالة النموذج من النوع تعظيم (Max):

مثال 17.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 100X_1 + 60X_2 + 80X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} 06X_1 + 03X_2 + 06X_3 &\le 120 \\ 04X_1 + 04X_2 + 06X_3 &\le 100 \\ 04X_1 + 12X_2 + 08X_3 &\le 380 \\ X_1, X_2, X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه جدول الحل الأمثل التالي:

$C_j \rightarrow$		100	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
100	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		100	60	110	$40/3$	05	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-30	$-40/3$	-05	00	$Z = 2100$

- دراسة مجال تغير كل من:

1. معامل متغيرة الأساس X_1.

2. مقدار تغير معامل متغيرة الأساس X_1.

- تحديد فيما إذا كان الحل الأمثل يتغير في حالة أن معامل متغيرة الأساس X_1 في الحالات التالية:

1. ارتفع بـ: 20.
2. ارتفع بأقل من 20 و ليكن 19.
3. ارتفع بأكثر من 20 و ليكن 21.

1. مجال تغير مقدار تغير (ΔC_1) المعامل C_1 معامل متغيرة الأساس X_1 :

معامل متغيرة الأساس X_1 هو $C_1 = 100$، قد يتغير بمقدار موجب أو سالب يساوي ΔC_1 فيصبح $C_1^{'}$ حيث أن: $C_1^{'} = C_1 + \Delta C_1$ و بما أن: $C_1 = 100$ فإن $C_1^{'} = 100 + \Delta C_1$

بتعويض $C_1 = 100$ بـ: $C_1^{'} = 100 + \Delta C_1$ في جدول الحل الأمثل أعلاه نحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		100	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	V_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
$C_1^{'} = 100 + \Delta C_1$	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		100	60	$110 + \frac{1}{2}\Delta C_1$	$\frac{40}{3} + \frac{1}{3}\Delta C_1$	$5 - \frac{1}{4}\Delta C_1$	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$-30 - \frac{1}{2}\Delta C_1$	$-\frac{40}{3} - \frac{1}{3}\Delta C_1$	$-5 + \frac{1}{4}\Delta C_1$	00	$Z = 2100$

بما أن معامل متغيرة الأساس X_1 قد تغير من $C_1 = 100$ إلى $C_1^{'} = 100 + \Delta C_1$ فإن الذي يتغير في جدول الحل الأمثل هو التالي:

- القيم Z_j للمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 حيث تصبح $Z_3^{\prime}, Z_4^{\prime}, Z_5^{\prime}$ و التي تساوي كما هو موضح أدناه و في الجدول أعلاه.
- القيم $(C_j - Z_j)$ للمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 حيث تصبح $(C_3 - Z_3^{\prime}), (C_4 - Z_4^{\prime}), (C_5 - Z_5^{\prime})$ و التي تساوي كما هو موضح أدناه و في الجدول أعلاه.

- بالنسبة للمتغير خارج الأساس X_3 :

✓ $Z_3 = C_B A_B^{-1} a_3 = C_B \alpha_3$

✓ $$Z_3^{\prime} = C_B \alpha_3 = (100 + \Delta C_1 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = 110 + \frac{1}{2}\Delta C_1$$

✓ $$(C_3 - Z_3^{\prime}) = 80 - \left(110 + \frac{1}{2}\Delta C_1\right) = -30 - \frac{1}{2}\Delta C_1$$

- بالنسبة للمتغير خارج الأساس S_1 :

- ✓ $Z_4' = C_B\alpha_4 = (100+\Delta C_1 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \frac{40}{3}+\frac{1}{3}\Delta C_1$
- ✓ $(C_4 - Z_4') = 00 - \left(\frac{40}{3}+\frac{1}{3}\Delta C_1\right) = -\frac{40}{3}-\frac{1}{3}\Delta C_1$

- بالنسبة للمتغير خارج الأساس S_2:

- ✓ $Z_5' = C_B\alpha_5 = (100+\Delta C_1 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = 5-\frac{1}{4}\Delta C_1$
- ✓ $(C_5 - Z_5') = 00 - \left(05-\frac{1}{4}\Delta C_1\right) = -05+\frac{1}{4}\Delta C_1$

يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا تحقق معيار أمثلية الحل الخاص بالنموذج من النوع Max و المتمثل في أن القيم $(C_j - Z_j')$ المتعلقة بمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 تكون سالبة أو معدومة و هذا ما يعبر عنه بالكتابة $(C_j - Z_j') \le 00$ أي:

- $(C_3 - Z_3') \le 00 \Rightarrow -30-\frac{1}{2}\Delta C_1 \le 00 \Rightarrow 30+\frac{1}{2}\Delta C_1 \ge 00 \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta C_1 \ge -30 \Rightarrow \Delta C_1 \ge -60$
- $(C_4 - Z_4') \le 00 \Rightarrow -\frac{40}{3}-\frac{1}{3}\Delta C_1 \le 00 \Rightarrow \frac{40}{3}+\frac{1}{3}\Delta C_1 \ge 00 \Rightarrow \frac{1}{3}\Delta C_1 \ge -\frac{40}{3} \Rightarrow \Delta C_1 \ge -40$
- $(C_5 - Z_5') \le 00 \Rightarrow -05+\frac{1}{4}\Delta C_1 \le 00 \Rightarrow \frac{1}{4}\Delta C_1 \le 05 \Rightarrow \Delta C_1 \le 20$

أي أن:

- $\Delta C_1 \ge -60$
- $\Delta C_1 \ge -40$
- $\Delta C_1 \le 20$

أي أن:

$$-40 \le \Delta C_1 \le 20$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة $-40 \le \Delta C_1 \le 20$، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار التغير ΔC_1 للمعامل C_1 لمتغيرة الأساس X_1 **أكبر أو يساوي** القيمة -40 و **أقل أو يساوي** القيمة 20 أي إذا كان $\Delta C_1 \in [-40,+20]$. و الذي يعني ما يلي:

حتى يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا يجب على المعامل C_1 أن لا ينخفض بأكثر من 40 و أن لا يرتفع بأكثر من 20.

المجال $[-40,+20]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير ΔC_1 للمعامل C_1 لمتغيرة الأساس X_1.

ملاحظة 02.04:

- إذا ارتفع المعامل C_1 بمقدار أكبر من 20 أو انخفض بمقدار أكبر من 40 فإن الحل

الأمثل لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.

- إذا انخفض المعامل C_1 بمقدار يساوي 40 و الذي يوافق $\Delta C_1 = -40$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_4 - Z_4^{\prime}\right) = 00$
- إذا انخفض المعامل C_1 بمقدار أكبر من 40 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_4 - Z_4^{\prime}\right) > 00$
- إذا ارتفع المعامل C_1 بمقدار يساوي 20 و الذي يوافق $\Delta C_1 = 20$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_5 - Z_5^{\prime}\right) = 00$
- إذا ارتفع المعامل C_1 بمقدار أكبر من 20 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_5 - Z_5^{\prime}\right) > 00$

2. مجال تغير المعامل C_1 معامل متغيرة الأساس X_1 :

تم التوصل في الفقرة السابقة إلى أن $-40 \le \Delta C_1 \le 20$ نقوم بإضافة القيمة 100 إلى جميع الأطراف فنحصل على:

$$100 - 40 \le 100 + \Delta C_1 \le 100 + 20$$

$$60 \le 100 + \Delta C_1 \le 120$$

بما أن: $C_1^{'} = 100 + \Delta C_1$ فإن $60 \le C_1^{\prime} \le 120$

$60 \le C_1^{\prime} \le 120$: يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلا أمثل ما دام معامل متغيرة الأساس X_1 **أقل أو يساوي** القيمة 120 و **أكبر أو يساوي** القيمة 60 أي أن $C_1^{\prime} \in [+60,+120]$. إذا تعدى هذا المعامل القيمة العظمى 120 أو القيمة الدنيا 60 فإن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول لا يبقى أمثلا بل يتغير. المجال $[+60,+120]$ يسمى **مجال تغير** لمعامل C_1 للمتغيرة خارج الأساس X_1.

ملاحظة 03.04:

- إذا أخذ المعامل C_1 قيمة أكبر من 120 أو قيمة أقل من 60 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.
- إذا أخذ المعامل C_1 القيمة 60 فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_4 - Z_4^{\prime}\right) = 00$
- إذا اخذ المعامل C_1 قيمة أقل من 60 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_4 - Z_4^{\prime}\right) > 00$
- إذا أخذ المعامل C_1 القيمة 120 فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_5 - Z_5^{\prime}\right) = 00$
- إذا أخذ المعامل C_1 قيمة أكبر من 120 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $\left(C_5 - Z_5^{\prime}\right) > 00$

3. بافتراض أن المعامل C_1 ارتفع بـ: 20: هذا يعني أن $\Delta C_1 = +20$

- بما أن $\Delta C_1 = +20$ فهو ينتمي إلى مجال تغير ΔC_1 أي أن $\Delta C_1 \in [-40,+20]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. بما أن مقدار التغير ΔC_1 يساوي القيمة 20 و التي تمثل الحد الأعلى لمجال التغير فإننا نتوقع الحصول على $(C_j - Z_j)$ يساوي الصفر لإحدى المتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة S_2.
- بما أن $\Delta C_1 = +20$ فإن المعامل $C_1 = 100$ يصبح $C_1' = C_1 + \Delta C_1 = 100 + 20 = 120$ و هو ينتمي إلى مجال تغير C_1' الذي هو $[+60,+120]$ أي أن $C_1' = 120 \in [+60,+120]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. بما أن المعامل C_1' يساوي القيمة 120 و التي تمثل الحد الأعلى لمجال تغير فإننا نتوقع الحصول على $(C_j - Z_j)$ يساوي الصفر لإحدى المتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة خارج الأساس S_2 كما هو موضح أدناه:

– من أجل المتغيرة خارج الأساس X_3:

$$Z_3' = C_B\alpha_3 = (120 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = 120 \Rightarrow C_3 - Z_3' = 80 - 120 = -40$$

– من أجل المتغيرة خارج الأساس S_1:

$$Z_4' = C_B\alpha_4 = (120 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = 20 \Rightarrow C_4 - Z_4' = 00 - 20 = -20$$

– من أجل المتغيرة خارج الأساس S_2:

$$Z_5' = C_B\alpha_5 = (120 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = 00 \Rightarrow C_5 - Z_5' = 00 - 00 = 00$$

– قيمة دالة الهدف Z الجديدة هي التالية:

$$Z = C_B X_B = (120 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} = 2400$$

كما يمكن توضيح ذلك عن طريق الجدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		120	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
120	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10

00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		120	60	120	20	00	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-40	-20	**00**	00	$Z = 2400$

ما يلاحظ أن $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 سالبة أو معدومة و بالتالي الحل المتحصل عليه في جدول الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا أي لا يتغير. و بما أن $C_j - Z_j = 0$ الموافقة للمتغيرة خارج الأساس S_2 معدومة فإن النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.

1. **بافتراض أن المعامل C_1 ارتفع بأكثر من 20 و ليكن 21:** هذا يعني أن $\Delta C_1 = +21$

- بما أن $\Delta C_1 = +21$ فهو **لا ينتمي** إلى مجال تغير ΔC_1 أي أن $\Delta C_1 \notin [-40, +20]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير. بما أن مقدار التغير ΔC_1 يفوق القيمة 20 و التي تمثل الحد الأعلى لمجال تغير ΔC_1 فإننا نتوقع الحصول على $(C_j - Z_j)$ أكبر من الصفر لإحدى المتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة خارج الأساس S_2.
- بما أن $\Delta C_1 = +21$ فإن المعامل $C_1 = 100$ يصبح $C_1' = C_1 + \Delta C_1 = 100 + 21 = 121$ و هو لا ينتمي إلى مجال تغير C_1' الذي هو $[+60, +120]$ أي أن $C_1' = 120 \notin [+60, +120]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير. بما أن المعامل C_1' يفوق القيمة 120 و التي تمثل الحد الأعلى لمجال تغير C_1' فإننا نتوقع الحصول على الأقل على $(C_j - Z_j)$ أكبر من الصفر للمتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة خارج الأساس S_2 كما هو موضح أدناه:

– من أجل المتغيرة خارج الأساس X_3:

$$Z_3' = C_B \alpha_3 = (121 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = \frac{241}{2} \Rightarrow C_3 - Z_3' = 80 - \frac{241}{2} = -\frac{81}{2}$$

– من أجل المتغيرة خارج الأساس S_1:

$$Z_4' = C_B \alpha_4 = (121 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \frac{61}{3} \Rightarrow C_4 - Z_4' = 00 - \frac{61}{3} = -\frac{61}{3}$$

– من أجل المتغيرة خارج الأساس S_2:

$$Z_5' = C_B \alpha_5 = (121 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \Rightarrow C_5 - Z_5' = 00 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

– قيمة دالة الهدف Z الجديدة هي التالية:

$$Z = C_B X_B = (121 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} = 2415$$

كما يمكن توضيح ذلك عن طريق الجدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		121	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	$S_2 \uparrow$	S_3	B
121	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	$\leftarrow X_2$	00	01	01	$-1/3$	$(1/2)$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		121	60	$241/2$	$61/3$	$-1/4$	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$-81/2$	$-61/3$	$+1/4$	00	$Z = 2415$

ما يلاحظ أن $C_j - Z_j$ للمتغيرة خارج الأساس S_2 موجبة أي $C_5 - Z_5 = +\frac{1}{4} > 0$ و بالتالي الجدول المتحصل عليه بعد تغير المعامل C_1 بالمقدار $\Delta C_1 = 21$ لا يمثل جدول الحل الأمثل و بالتالي نقوم بتحسين الحل كما يلي:

- المتغيرة الداخلة: S_2
- المتغيرة الخارجة: X_2
- عنصر الارتكاز: $Pivot = \frac{1}{2}$
- جدول السمبلاكس الجديد و من ثم حل الأساس المقبول الجديد:

يمكن استنتاج حل الأساس المقبول الجديد قبل تشكيل جدول السمبلاكس الجديد كما يلي:

- قيمة المتغيرة الداخلة S_2: تساوي 20 أي: $S_2 = 20$
- قيمة المتغيرة الخارجة X_2: تساوي 00 أي: $X_2 = 00$
- قيمة المتغيرة خارج الأساس X_3: تساوي 00 أي: $X_3 = 00$
- قيمة المتغيرة خارج الأساس S_1: تساوي 00 أي: $S_1 = 00$
- قيمة متغيرة الأساس X_1:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = l'Ancienne \quad Valeur + \frac{1}{4} \times 20 = 15 + 5 = 20 \Rightarrow X_1 = 20$$

- قيمة متغيرة الأساس S_3:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_3 = l'Ancienne \quad Valeur + 05 \times 20 = 200 + 100 = 300 \Rightarrow S_3 = 300$$

- قيمة دالة الهدف Z:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = l'Ancienne \quad Valeur + \frac{1}{4} \times 20 = 2415 + 05 = 2420 \Rightarrow Z = 2420$$

- تشكيل جدول السمبلاكس الجديد:

$C_j \rightarrow$		121	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
121	X_1	01	$1/2$	01	$1/6$	00	00	20
00	S_2	00	02	04	$-2/3$	01	00	20
00	S_3	00	10	04	$-2/3$	00	01	300
Z_j		121	70	121	$121/6$	00	00	
$C_j - Z_j$		00	-10	-41	$-121/6$	00	00	$Z = 2420$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, X_3 = 00, S_1 = 00$
- متغيرات الأساس: $X_1 = 20, S_2 = 20, S_3 = 300$

بما أن جميع القيم $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة فإن معيار أمثلية الحل محقق و بالتالي حل الأساس المقبول الذي يقدمه جدول السمبلاكس أعلاه يمثل الحل الأمثل.

1. بافتراض أن المعامل C_1 ارتفع بأقل من 20 و ليكن 19: هذا يعني أن $\Delta C_1 = +19$

- بما أن $\Delta C_1 = +19$ فهو ينتمي إلى مجال تغير ΔC_1 أي أن $\Delta C_1 = +19 \in [-40,+20]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. الذي يتغير فقط هو قيمة دالة الهدف Z.

$$La \quad Nouvelle \quad De \quad Z = l'Acienne \quad Valeur + \Delta C_1 \times valeur \quad De \quad X_1 = 2100 + (19) \times (15) = 2385$$

- بما أن $\Delta C_1 = +19$ فإن المعامل $C_1 = 100$ يصبح $C_1' = C_1 + \Delta C_1 = 100 + 19 = 119$ و هو ينتمي إلى مجال تغير C_1' الذي هو $[+60,+120]$ أي أن $C_1' = 119 \in [+60,+120]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. أي جميع القيم $(C_j - Z_j)$ للمتغيرات خارج الأساس سالبة كما هو موضح أدناه:

- من أجل المتغيرة خارج الأساس X_3:

$$Z_3' = C_B \alpha_3 = (119 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = \frac{239}{2} \Rightarrow C_3 - Z_3' = 80 - \frac{239}{2} = -\frac{79}{2}$$

- من أجل المتغيرة خارج الأساس S_1:

$$Z_4' = C_B \alpha_4 = (119 \quad 60 \quad 00) \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \frac{59}{3} \Rightarrow C_4 - Z_4' = 00 - \frac{59}{3} = -\frac{59}{3}$$

- من أجل المتغيرة خارج الأساس S_2:

$$Z_5' = C_B\alpha_5 = (119 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \Longrightarrow C_5 - Z_5' = 00 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$ قيمة دالة الهدف Z الجديدة

هي التالية:

$$Z = C_B X_B = (119 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} = 2385$$

كما يمكن توضيح ذلك عن طريق الجدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		119	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
119	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		119	60	$239/2$	$59/3$	$1/4$	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$-79/2$	$-59/3$	$-1/4$	00	$Z = 2385$

ما يلاحظ أن جميع القيم $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 سالبة و بالتالي الحل المتحصل عليه في جدول الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا أي لا يتغير. الذي تغير فقط هو قيمة دالة الهدف Z

1. **بافتراض أن المعامل** C_1 **انخفض بـ: 40:** هذا يعني أن $\Delta C_1 = -40$

- بما أن $\Delta C_1 = -40$ فهو ينتمي إلى مجال تغير ΔC_1 أي أن $\Delta C_1 \in [-40, +20]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. بما أن مقدار التغير ΔC_1 يساوي القيمة 40 و التي تمثل الحد الأدنى لمجال التغير فإننا نتوقع الحصول على $(C_j - Z_j)$ يساوي الصفر لإحدى المتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة S_1.
- بما أن $\Delta C_1 = -40$ فإن المعامل $C_1 = 100$ يصبح $C_1' = C_1 + \Delta C_1 = 100 - 40 = 60$ و هو ينتمي إلى مجال تغير C_1' الذي هو $[+60, +120]$ أي أن $C_1' = 60 \in [+60, +120]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. بما أن المعامل C_1' يساوي القيمة 60 و التي تمثل الحد الأدنى لمجال تغير فإننا نتوقع الحصول على $(C_j - Z_j)$ يساوي الصفر لإحدى المتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة خارج الأساس S_1 كما هو موضح أدناه:
  - من أجل المتغيرة خارج الأساس X_3:

$$Z_3' = C_B\alpha_3 = (60 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = 90 \Rightarrow C_3 - Z_3' = 80 - 90 = -10$$

- من أجل المتغيرة خارج الأساس S_1:

$$Z_4' = C_B\alpha_4 = (60 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = 00 \Rightarrow C_4 - Z_4' = 00 - 00 = 00$$

- من أجل المتغيرة خارج الأساس S_2:

$$Z_5' = C_B\alpha_5 = (60 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = 15 \Rightarrow C_5 - Z_5' = 00 - 15 = -15$$

- قيمة دالة الهدف Z الجديدة هي التالية:

$$Z = C_B X_B = (60 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} = 1500$$

كما يمكن توضيح ذلك عن طريق الجدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		60	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
60	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		120	60	90	00	15	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-10	**00**	-15	00	$Z = 1500$

ما يلاحظ أن $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 سالبة أو معدومة و بالتالي الحل المتحصل عليه في جدول الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا أي لا يتغير. و بما أن $C_j - Z_j = 0$ الموافقة للمتغيرة خارج الأساس S_1 معدومة فإن النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.

1. بافتراض أن المعامل C_1 انخفض بأكثر من 40 و ليكن 41: هذا يعني أن $\Delta C_1 = -41$

- بما أن $\Delta C_1 = -41$ فهو **لا ينتمي** إلى مجال تغير ΔC_1 أي أن $\Delta C_1 = -41 \notin [-40, +20]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير. بما أن مقدار التغير ΔC_1 يفوق القيمة -40 و التي تمثل الحد الأدنى لمجال تغير ΔC_1 فإننا نتوقع الحصول على $(C_j - Z_j)$ أكبر من الصفر لإحدى المتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة خارج الأساس S_1.
- بما أن $\Delta C_1 = -41$ فإن المعامل $C_1 = 100$ يصبح $C_1' = C_1 + \Delta C_1 = 100 - 41 = 59$ و هو **لا ينتمي** إلى مجال تغير C_1' الذي هو $[+60, +120]$ أي أن $C_1' = 59 \notin [+60, +120]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير. بما أن

المعامل $C_1^{/}$ أصغر من القيمة 60 و التي تمثل الحد الأدنى لمجال تغير $C_1^{/}$ فإننا نتوقع الحصول على الأقل على $(C_j - Z_j)$ أكبر من الصفر للمتغيرات خارج الأساس و بالضبط المتغيرة خارج الأساس S_1 كما هو موضح أدناه:

- من أجل المتغيرة خارج الأساس X_3:

$$Z_3^{/} = C_B\alpha_3 = (59 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = \frac{179}{2} \Rightarrow C_3 - Z_3^{/} = 80 - \frac{179}{2} = -\frac{19}{2}$$

- من أجل المتغيرة خارج الأساس S_1:

$$Z_4^{/} = C_B\alpha_4 = (59 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow C_4 - Z_4^{/} = 00 - \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{3}$$

- من أجل المتغيرة خارج الأساس S_2:

$$Z_5^{/} = C_B\alpha_5 = (59 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = \frac{61}{4} \Rightarrow C_5 - Z_5^{/} = 00 - \frac{61}{4} = -\frac{61}{4}$$

- قيمة دالة الهدف Z الجديدة هي التالية:

$$Z = C_B X_B = (59 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} = 1485$$

كما يمكن توضيح ذلك عن طريق الجدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		59	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	$S_1 \uparrow$	S_2	S_3	B
59	$\leftarrow X_1$	01	00	$1/2$	$(1/3)$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		59	60	$179/2$	$-1/3$	$61/4$	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$-19/2$	$+1/3$	$-61/4$	00	$Z = 1485$

ما يلاحظ أن $C_j - Z_j$ للمتغيرة خارج الأساس S_1 موجبة أي $C_4 - Z_4 = +\frac{1}{3} > 0$ و بالتالي الجدول المتحصل عليه بعد تغير المعامل C_1 بالمقدار $\Delta C_1 = -41$ لا يمثل جدول الحل الأمثل و بالتالي نقوم بتحسين الحل كما يلي:

- المتغيرة الداخلة: S_1
- المتغيرة الخارجة: X_1

- عنصر الارتكاز: $Pivot = \frac{1}{3}$
- جدول السمبلاكس الجديد و من ثم حل الأساس المقبول الجديد:

يمكن استنتاج حل الأساس المقبول الجديد قبل تشكيل جدول السمبلاكس الجديد كما يلي:

- قيمة المتغيرة الداخلة S_1 : تساوي 45 أي: $S_1 = 45$
- قيمة المتغيرة الخارجة X_1 : تساوي 00 أي: $X_1 = 00$
- قيمة المتغيرة خارج الأساس X_3 : تساوي 00 أي: $X_3 = 00$
- قيمة المتغيرة خارج الأساس S_2 : تساوي 00 أي: $S_2 = 00$
- قيمة متغيرة الأساس X_2:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_2 = l'Acienne \quad Valeur + \frac{1}{3} \times 45 = 10 + 15 = 25 \Rightarrow X_2 = 25$$

- قيمة متغيرة الأساس S_3:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_3 = l'Acienne \quad Valeur - \frac{8}{3} \times 45 = 200 - 15 = 80 \Rightarrow S_3 = 80$$

- قيمة دالة الهدف Z:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = l'Acienne \quad Valeur + \frac{1}{3} \times 45 = 1485 + 15 = 1500 \Rightarrow Z = 1500$$

- تشكيل جدول السمبلاكس الجديد:

$C_j \rightarrow$		59	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	03	00	$3/2$	01	$-3/4$	00	45
60	X_2	01	01	$3/2$	00	$1/4$	00	25
00	S_3	-08	00	-10	00	-03	01	80
Z_j		60	60	90	00	15	00	
$C_j - Z_j$		-01	00	-10	00	-15	00	$Z = 1500$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_1 = 00, X_3 = 00, S_2 = 00$
- متغيرات الأساس: $X_2 = 25, S_1 = 45, S_3 = 80$

بما أن جميع القيم $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة فإن معيار أمثلية الحل محقق و بالتالي حل الأساس المقبول الذي يقدمه جدول السمبلاكس أعلاه يمثل الحل الأمثل.

1. بافتراض أن المعامل C_1 انخفض بأقل من 40 و ليكن 39: هذا يعني أن $\Delta C_1 = -39$

- بما أن $\Delta C_1 = -39$ فهو ينتمي إلى مجال تغير ΔC_1 أي أن $\Delta C_1 = -39 \in [-40, +20]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. الذي يتغير فقط هو قيمة دالة الهدف Z.

$La\ \ Nouvelle\ \ De\ \ Z = l'Acienne\ \ Valeur + \Delta C_1 \times valeur\ \ De\ \ X_1 = 2100 + (-39)\times(15) = 1515$

- بما أن $\Delta C_1 = -39$ فإن المعامل $C_1 = 100$ يصبح $C_1^{/} = C_1 + \Delta C_1 = 100 - 39 = 61$ و هو ينتمي إلى مجال تغير $C_1^{/}$ الذي هو $[+60,+120]$ أي أن $C_1^{/} = 61 \in [+60,+120]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا. أي جميع القيم $(C_j - Z_j)$ للمتغيرات خارج الأساس سالبة كما هو موضح أدناه:

– من أجل المتغيرة خارج الأساس X_3:

$$Z_3^{/} = C_B\alpha_3 = (61 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/2 \\ 01 \\ -06 \end{pmatrix} = \frac{181}{2} \Rightarrow C_3 - Z_3^{/} = 80 - \frac{181}{2} = -\frac{21}{2}$$

– من أجل المتغيرة خارج الأساس S_1:

$$Z_4^{/} = C_B\alpha_4 = (61 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \Rightarrow C_4 - Z_4^{/} = 00 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

– من أجل المتغيرة خارج الأساس S_2:

$$Z_5^{/} = C_B\alpha_5 = (61 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ -05 \end{pmatrix} = \frac{59}{4} \Longrightarrow C_5 - Z_5^{/} = 00 - \frac{59}{4} = -\frac{59}{4}$$

– قيمة دالة الهدف Z الجديدة هي التالية:

$$Z = C_B X_B = (61 \quad 60 \quad 00)\times\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} = 1515$$

كما يمكن توضيح ذلك عن طريق الجدول كما يلي:

$C_j \rightarrow$		61	60	80	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
61	X_1	01	00	$1/2$	$1/3$	$-1/4$	00	15
60	X_2	00	01	01	$-1/3$	$1/2$	00	10
00	S_3	00	00	-06	$8/3$	-05	01	200
Z_j		61	60	$181/2$	$1/3$	$59/4$	00	
$C_j - Z_j$		00	00	$-21/2$	$-1/3$	$-59/4$	00	$Z = 1515$

ما يلاحظ أن جميع القيم $C_j - Z_j$ لمتغيرات خارج الأساس X_3, S_1, S_2 سالبة و بالتالي الحل المتحصل عليه في جدول الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا أي لا يتغير. الذي تغير فقط هو قيمة دالة الهدف Z.

08.04 – التغير في الطرف الثاني للقيود:

نعني بتغير الطرف الثاني للقيود الوظيفية، التغير في الموارد المتاحة و التي تم الرمز إليها بالرمز B أو b_i. إن تغير قيم الطرف الثاني B للقيود الوظيفية لا يؤثر على القيم Z_j و بالتالي لا يؤثر على القيم $(C_j - Z_j)$، و إنما يؤثر على قيم متغيرات الأساس التي يرمز لها بالرمز X_B، لأن هذه الأخيرة أي قيم متغيرات الأساس تحسب بدلالة الطرف الثاني للقيود الوظيفية وفقا للعلاقة التالية

$$X_B = A_B^{-1} \times B$$

حيث أن:

- X_B: مصفوفة (شعاع) جزئية من الشعاع أو المصفوفة X ذات البعد $(m \times 1)$، عناصرها X_{Bi} حيث أن: $(i = 1,2,3,...,m)$ التي تمثل **متغيرات الأساس.**
- A_B: مصفوفة جزئية من المصفوفة A ذات البعد $(m \times m)$، عناصرها a_{ij} التي تمثل معاملات **متغيرات الأساس** على مستوي القيود لبوظيفية للنموذج لذلك تسمى هذه المصفوفة الجزئية **مصفوفة الأساس**
- A_B^{-1}: معكوس أو مقلوب مصفوفة الأساس A_B عناصرها α_{ij} التي تمثل معاملات **متغيرات الأساس** في جدول الحل الأمثل.

بما أن تغير قيم الطرف الثاني B للقيود الزظيفية لا يؤثر على القيم Z_j و لا يؤثر على القيم $(C_j - Z_j)$، فإننا في هذه الحالة لا نهتم بمعيار الأمثلية الممثل في $(C_j - Z_j)$ هل هو محقق أو لا و إنما نهتم بالقيم الجديدة لمتغيرات الأساس X_B أي نهتم بحل الأساس الجديد X_B.

من خلال هذه الفقرة سوف نتناول أو نتطرق إلى حدود أو مجال تغير X_B حتى يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا.

كما هو معلوم فإن قيم متغيرات الأساس X_B تحسب وفقا للعلاقة السابقة الذكر:

$$X_B = A_B^{-1} \times B$$

حيث أن:

$$X_B = \begin{pmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \\ \\ X_{Bi} \\ \\ X_{Bk} \\ \\ X_{Bm} \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1j} & . & . & . & \alpha_{1k} & . & . & . & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2j} & . & . & . & \alpha_{2k} & . & . & . & \alpha_{2m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & . & . & . & \alpha_{ij} & . & . & . & \alpha_{ik} & . & . & . & \alpha_{im} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & . & . & . & \alpha_{kj} & . & . & . & \alpha_{kk} & . & . & . & \alpha_{km} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & . & . & . & \alpha_{mj} & . & . & . & \alpha_{mk} & . & . & . & \alpha_{mm} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_i \\ . \\ . \\ . \\ b_k \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

بافتراض أن المورد رقم k أي b_k قد تغير (بالزيادة أو بالنقصان) بالمقدار Δb_k و أصبح $b_k^{/}$ حيث أن $b_k^{/} = b_k + \Delta b_k$ حيث أن Δb_k يمثل مقدار تغير المورد رقم k أي b_k.

بما أن b_k قد تغير و أصبح $b_k^{/}$، فإن شعاع الموارد المتاحة B قد تغير (بالنقصان أو بالزيادة) بالمقدار ΔB و أصبح $B^{/}$ حيث أن $B^{/} = B + \Delta B$ حيث أن:

$$B^{/} = \begin{pmatrix} b_1^{/} \\ b_2^{/} \\ . \\ . \\ . \\ b_i^{/} \\ . \\ . \\ . \\ b_k^{/} \\ . \\ . \\ . \\ b_m^{/} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_i \\ . \\ . \\ . \\ b_k \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta b_k \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_i \\ . \\ . \\ . \\ b_k + \Delta b_k \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

بما أن حل الأساس الممثل في قيم متغيرات الأساس X_B تحسب بدلالة شعاع الموارد المتاحة B، و بما أن هذا الأخير أي B قد تغير و أصبح $B^{/}$ فإن حل الأساس X_B يتغير و يصبح $X_B^{/}$ حيث أن:

$$X_B^{/} = A_B^{-1} \times B^{/}$$

بما أن $B^{/} = B + \Delta B$ يصبح لدينا ما يلي:

$$X_B^{/} = A_B^{-1} \times (B + \Delta B)$$
$$X_B^{/} = A_B^{-1} \times B + A_B^{-1} \times \Delta B$$

بما أن $X_B = A_B^{-1} \times B$ يصبح لدينا ما يلي:

$$X_B^{/} = X_B + A_B^{-1} \times \Delta B$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة المتوصل إليها يتضح أن:

- **حل الأساس الجديد (أي القيم الجديدة لمتغيرات الأساس) $X_B^{/}$ يساوي حل الأساس المقبول القديم X_B مضافا إليه المقدار $A_B^{-1} \times \Delta B$**

يمكن تقديم حل الأساس الجديد $X_B^{/}$ بقدر من التفصيل كما يلي:

$$X_B^{/} = A_B^{-1} \times B^{/}$$

بالتعويض عن كل من $X_B^{'}$، A_B^{-1} و $B^{/}$ بما تساويه نحصل على ما يلي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X'_{B1} \\ X'_{B2} \\ \\ \\ \\ X'_{Bi} \\ \\ \\ \\ X'_{Bk} \\ \\ \\ \\ X'_{Bm} \end{pmatrix}}_{X'_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2k} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ik} & \cdots & \alpha_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kk} & \cdots & \alpha_{km} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mk} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}}_{A_B^{-1}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k + \Delta b_k \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} X'_{B1} \\ X'_{B2} \\ \\ \\ \\ X'_{Bi} \\ \\ \\ \\ X'_{Bk} \\ \\ \\ \\ X'_{Bm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{1j}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{1k}(b_k + \Delta b_k) + \dots\dots\dots + \alpha_{1m}b_m \\ \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{2j}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{2k}(b_k + \Delta b_k) + \dots\dots\dots + \alpha_{2m}b_m \\ \vdots \\ \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{ij}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{ik}(b_k + \Delta b_k) + \dots\dots\dots + \alpha_{im}b_m \\ \vdots \\ \alpha_{k1}b_1 + \alpha_{k2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{kj}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{kk}(b_k + \Delta b_k) + \dots\dots\dots + \alpha_{km}b_m \\ \vdots \\ \alpha_{m1}b_1 + \alpha_{m2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{mj}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{mk}(b_k + \Delta b_k) + \dots\dots\dots + \alpha_{mm}b_m \end{pmatrix}$$

القيمة الجديدة لأي متغيرة أساس و لتكن X'_{Bi} حيث أن $(i = 1,2,3,\dots,m)$ تساوي ما يلي:

$$X'_{Bi} = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{ij}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{ik}(b_k + \Delta b_k) + \dots\dots\dots + \alpha_{im}b_m$$

$$X'_{Bi} = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{ij}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{ik}b_k + \alpha_{ik}\Delta b_k + \dots\dots\dots + \alpha_{im}b_m$$

$$X'_{Bi} = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{ij}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{ik}b_k + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \alpha_{im}b_m + \alpha_{ik}\Delta b_k$$

بما أن:

$$X_{Bi} = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots\dots\dots + \alpha_{ij}b_i + \dots\dots\dots + \alpha_{ik}b_k + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \alpha_{im}b_m$$

فإن:

$$X'_{Bi} = X_{Bi} + \alpha_{ik} \times \Delta b_k$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة المتوصل إليها يتضح أن:

- **القيمة الجديدة (حل الأساس الجديد) لمتغيرة الأساس رقم i أي X'_{Bi} تساوي القيمة القديمة لها أي X_{Bi} مضافا إليها المقدار $\alpha_{ik} \times \Delta b_k$**

حتى يكون هذا حل الأساس الجديد حل أساس مقبول يجب أن يتحقق قيد عدم سلبية المتغيرات:

$$X'_{Bi} \geq 0 \ , \ (i = 1,2,3,...,m)$$

و بما أن:

$$X'_{Bi} = X_{Bi} + \alpha_{ik} \times \Delta b_k \ldots\ldots\ldots\ldots \ (01.04)$$

فإن الشرط يصبح كالتالي:

$$X_{Bi} + \alpha_{ik} \times \Delta b_k \geq 0$$

و عليه فإن:

$$\alpha_{ik} \times \Delta b_k \geq -X_{Bi}$$

$$\Delta b_k \geq -\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}$$

حيث أن:

- X_{Bi} : يمثل حل أساس مقبول أمثل، فهو يحقق قيد عدم سلبية المتغيرات أي $X_{Bi} \geq 0$

هنا نميز حالتين هما:

- إذا كان: $\alpha_{ik} > 0$ فيجب على القيمة المعطاة أو التي تأخذها Δb_k تكون:

$$\Delta b_k \geq -\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}} \ , \ (i = 1,2,3,...,m)$$

- إذا كان: $\alpha_{ik} < 0$ فيجب على القيمة المعطاة أو التي تأخذها Δb_k تكون:

$$\Delta b_k \leq -\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}} \ , \ (i = 1,2,3,...,m)$$

من أجل التأكد بأن الحل الأمثل الحالي يبقى حلا أمثلا يجب أن يكون:

- الحد الأعلى لـ Δb_k يساوي أقل القيم $\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)$، حيث أن $\alpha_{ik} < 0$ و هذا ما يعبر عنه الكتابة التالية:

$$Min\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)$$

- الحد الأدنى لـ Δb_k يساوي أكبر القيم $\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)$، حيث أن $X_{ik} > 0$ و هذا ما يعبر عنه الكتابة

التالية:

$$Max\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)$$

معنى ذلك أن مجال تغير Δb_k هو التالي:

$$Max\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)\leq \Delta b_k \leq Min\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (02.04)$$

أما فيما يخص مجال تغير b_k فهو التالي:

نقوم بإضافة المقدار b_k لجميع الأطراف فنحصل على ما يلي:

$$Max\left(b_k-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)\leq b_k+\Delta b_k \leq Min\left(b_b-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)$$

نعلم أن:

$$b_k^{/}=b_k+\Delta b_k$$

و بالتعويض في العلاقة أعلاه نحصل على ما يلي:

$$Max\left(b_k-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)\leq b_k^{/} \leq Min\left(b_k-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (03.04)$$

بغرض توضيح أكثر ما تم التطرق إليه ضمن هذه الفقرة، نأخذ المثال التالي:

مثال 19.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية من النوع تعظيم (Max) التالي:

$$Max \quad Z=700X_1+400X_2+600X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$04X_1+02X_2+04X_3\leq 1000$$
$$02X_1+02X_2+01X_3\leq 800$$
$$01X_1+03X_2+02X_3\leq 450$$
$$X_1,X_2,X_3\geq 0$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه جدول الحل الأمثل التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
700	X_1	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$-1/5$	210
00	S_2	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$-2/5$	220
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	80
Z_j		700	400	720	170	00	20	
C_j-Z_j		00	00	-120	-170	00	-20	$Z=179000$

دراسة مجال تغير كل من:

- مقدار تغير المورد الأول b_1.

- المورد الأول b_1.
- مقدار تغير المورد الثاني b_2.
- المورد الثاني b_2.

1-/ مجال تغير مقدار تغير المورد الأول b_1:

بافتراض أن المورد الأول $b_1=1000$ تغير بالمقدار Δb_1 (موجب أو سالب) و أصبح $b_1^{/}$ حيث أن:

$$b_1^{/}=b_1+\Delta b_1$$

$$b_1^{/}=1000+\Delta b_1$$

انطلاقا من جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يمكن استنتاج ما يلي:

$$B=\begin{pmatrix} b_1=1000 \\ b_2=800 \\ b_3=400 \end{pmatrix} \ , \ X_B=\begin{pmatrix} X_{B1}=X_1=220 \\ X_{B2}=S_2=240 \\ X_{B3}=X_2=60 \end{pmatrix} \ , \ A_B=\begin{pmatrix} 04 & 00 & 02 \\ 02 & 01 & 02 \\ 01 & 00 & 03 \end{pmatrix} \ , \ A_B^{-1}=\begin{pmatrix} +\frac{03}{10} & -00 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & +01 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & 00 & +\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$A_H=\begin{pmatrix} 04 & 01 & 00 \\ 01 & 00 & 00 \\ 02 & 00 & 01 \end{pmatrix}, A_B^{-1}\times A_H=\begin{pmatrix} +4/5 & +3/10 & -1/5 \\ -7/5 & -2/5 & -2/5 \\ +2/5 & -1/10 & -1/10 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1=1000 \\ b_2=800 \\ b_3=500 \end{pmatrix}, B^{/}=\begin{pmatrix} b_1^{/}=1000+\Delta b_1 \\ b_2=800 \\ b_3=500 \end{pmatrix}$$

حل الأساس الجديد هو التالي:

$$X_B^{/}=A_B^{-1}\times B^{/}$$

بتعويض كل من $X_B^{/}, A_B^{-1}, B^{/}$ في العلاقة الأخيرة نحصل على ما يلي:

$$X_B^{/}=A_B^{-1}\times B^{/}=\begin{pmatrix} +\frac{03}{10} & -00 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & +01 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & 00 & +\frac{2}{5} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1000+\Delta b_1 \\ 800 \\ 500 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10}\times 1000+\frac{3}{10}\times\Delta b_1-00\times 800-\frac{1}{5}\times 500 \\ -\frac{2}{5}\times 1000-\frac{2}{5}\Delta b_1+800-\frac{2}{5}\times 500 \\ -\frac{1}{10}\times 1000-\frac{1}{10}\times\Delta b_1+00\times 800+\frac{2}{5}\times 500 \end{pmatrix}$$

$$X_B^{/}=\begin{pmatrix} X_{B1}^{/}=X_1^{/}=210+\frac{3}{10}\Delta b_1 \\ X_{B2}^{/}=S_2^{/}=220-\frac{2}{5}\Delta b_1 \\ X_{B3}^{/}=X_2^{/}=80-\frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix}$$

يمكن كتابة $X_B^{/}$ على الشكل التالي:

$$X'_B = \begin{pmatrix} X'_{B1} = X'_1 = 210 + \frac{3}{10}\Delta b_1 \\ X'_{B2} = S'_2 = 220 - \frac{2}{5}\Delta b_1 \\ X'_{B3} = X'_2 = 80 - \frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_{B1} = X'_1 = 210 \\ X'_{B2} = S'_2 = 220 \\ X'_{B3} = X'_2 = 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\frac{3}{10}\Delta b_1 \\ -\frac{2}{5}\Delta b_1 \\ -\frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix}$$

أي أن:

حيث أن:

$$X_B = \begin{pmatrix} X'_{B1} = X'_1 = 210 \\ X'_{B2} = S'_2 = 220 \\ X'_{B3} = X'_2 = 80 \end{pmatrix}$$

و عليه فإن X'_B يساوي ما يلي:

$$X'_B = \begin{pmatrix} X'_{B1} = X'_1 = 210 + \frac{3}{10}\Delta b_1 \\ X'_{B2} = S'_2 = 220 - \frac{2}{5}\Delta b_1 \\ X'_{B3} = X'_2 = 80 - \frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_{B1} = X'_1 = X_1 + \frac{3}{10}\Delta b_1 \\ X'_{B2} = S'_2 = S_2 - \frac{2}{5}\Delta b_1 \\ X'_{B3} = X'_2 = X_2 - \frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 = 210 \\ S_2 = 220 \\ X_2 = 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\frac{3}{10}\Delta b_1 \\ -\frac{2}{5}\Delta b_1 \\ -\frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix}$$

$$X'_B = X_B + \begin{pmatrix} +\frac{3}{10}\Delta b_1 \\ -\frac{2}{5}\Delta b_1 \\ -\frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix}$$

أي أن:

- $X'_{B1} = X'_1 = 210 + \frac{3}{10}\Delta b_1 = X_1 + \frac{3}{10}\Delta b_1$
- $X'_{B2} = S'_2 = 220 - \frac{2}{5}\Delta b_1 = S_2 - \frac{2}{5}\Delta b_1$
- $X'_{B3} = X_2 = 80 - \frac{1}{10}\Delta b_1 = X_2 - \frac{1}{10}\Delta b_1$

يمكن التوصل إلى القيم الجديدة لمتغيرات الأساس بتطبيق العلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه:

$$X'_{Bi} = X_{Bi} + \alpha_{ik} \times \Delta b_k$$

- $i = 1 \Rightarrow X'_{B1} = X_{B1} + \alpha_{11} \times \Delta b_1$

$$X'_1 = X_1 + \alpha_{11} \times \Delta b_1$$

$$X'_1 = 210 + \frac{3}{10}\Delta b_1$$

- $i = 2 \Rightarrow X'_{B2} = X_{B2} + \alpha_{21} \times \Delta b_1$

$$S'_2 = S_2 + \alpha_{21} \times \Delta b_1$$

$$S'_2 = 220 - \frac{2}{5}\Delta b_1$$

- $i=3 \Rightarrow X'_{B3} = X_{B3} + \alpha_{31} \times \Delta b_1$

$$X'_2 = X_2 + \alpha_{31} \times \Delta b_1$$
$$X'_2 = 80 - \frac{1}{10}\Delta b_1$$

حتى يكون حل الأساس الجديد X'_B حل أساس مقبول يجب أن يتحقق قيد عدم سلبية المتغيرات $X'_B \geq 00$ أي:

$$X'_B = \begin{pmatrix} 210 + \frac{3}{10}\Delta b_1 \\ 220 - \frac{2}{5}\Delta b_1 \\ 80 - \frac{1}{10}\Delta b_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix}$$

أي:

- $210 + \frac{3}{10}\Delta b_1 \geq 00 \Rightarrow \frac{3}{10}\Delta b_1 \geq -210 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -700$
- $220 - \frac{2}{5}\Delta b_1 \geq 00 \Rightarrow \frac{2}{5}\Delta b_1 \leq 220 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 550$
- $80 - \frac{1}{10}\Delta b_1 \geq 00 \Rightarrow \frac{1}{10}\Delta b_1 \leq 80 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 800$

و عليه فإن:

$$-700 \leq \Delta b_1 \leq 550$$

انطلاقا من العلاقة الأخيرة $-700 \leq \Delta b_1 \leq 550$، يتضح أن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار التغير Δb_1 للمورد الأول b_1 **أكبر أو يساوي** القيمة 700− و **أقل أو يساوي** القيمة 550 أي إذا كان $\Delta b_1 \in [-700,+550]$. و الذي يعني ما يلي:

- حتى يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا يجب على للمورد الأول b_1 أن لا ينخفض بأكثر من 700 و أن لا يرتفع بأكثر من 550.

المجال $[-700,+550]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير Δb_1 للمورد الأول b_1.

- يمكن التوصل إلى مجال تغير مقدار التغير Δb_1 للمورد الأول b_1 بتطبيق العلاقة (02.04) المتوصل إليها أعلاه:

$$Max\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right) \leq \Delta b_k \leq Min\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{ik}}\right)$$
$$Max\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{i1}}\right) \leq \Delta b_1 \leq Min\left(-\frac{X_{Bi}}{\alpha_{i1}}\right)$$
$$Max\left(-\frac{X_{B1}}{\alpha_{11}},-\frac{X_{B2}}{\alpha_{21}},-\frac{X_{B3}}{\alpha_{31}}\right) \leq \Delta b_1 \leq Min\left(-\frac{X_{B1}}{\alpha_{11}},-\frac{X_{B2}}{\alpha_{21}},-\frac{X_{B3}}{\alpha_{31}}\right)$$

- $\alpha_{11}=\frac{3}{10}>00$, $\alpha_{21}=-\frac{2}{5}<00$, $\alpha_{31}=-\frac{1}{10}<00$

$$Max\left(-\frac{X_1}{\alpha_{11}}\right)\leq \Delta b_1 \leq Min\left(-\frac{S_2}{\alpha_{21}},-\frac{X_2}{\alpha_{31}}\right)$$

$$Max\left(-\frac{210}{3/10}\right)\leq \Delta b_1 \leq Min\left(-\frac{220}{-2/5},-\frac{80}{-1/10}\right)$$

$$Max(-700)\leq \Delta b_1 \leq Min(+550,+800)$$

$$Max(-700)=-700\leq \Delta b_1 \leq Min(+550,+800)=+550$$

$$-700\leq \Delta b_1 \leq +550$$

ملاحظة 10.04:

- إذا ارتفع المورد الأول b_1 بمقدار **أكبر من** 550 أو انخفض بمقدار **أكبر من** 700 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.
- إذا ارتفع المورد الأول b_1 بمقدار يساوي 550 و الذي يوافق $\Delta b_1=+550$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا غير أنه سوف نتجصل على $S_2=00$.
- إذا انخفض المورد الأول b_1 بمقدار يساوي 700 و الذي يوافق $\Delta b_1=-700$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $X_1=00$.
- إذا ارتفع المورد الأول b_1 بمقدار **أكبر من** 550 و الذي يوافق $\Delta b_1>+550$ فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث أنه سوف نتجصل على $S_2<00$.
- إذا انخفض المورد الأول b_1 بمقدار **أكبر من** 700 و الذي يوافق $\Delta b_1<-700$ فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث أنه سوف نتحصل على $X_1<00$.

2-/ مجال تغير المورد الأول b_1:

مجال تغير Δb_1 هو التالي:

$$-700\leq \Delta b_1 \leq 550$$

نضيف القيمة 1000 لجميع الأطراف فنحصل على ما يلي:

$$1000-700\leq 1000+\Delta b_1 \leq 1000+550$$

$$300\leq 1000+\Delta b_1 \leq 1550$$

نعلم أن:

$$b_1^{/}=1000+\Delta b_1$$

و عليه فإن:

$$300\leq b_1^{/} \leq 1550$$

$300 \le b_1^{/} \le 1550$: يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلا أمثل ما دام المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ **أقل أو يساوي** القيمة 1550 و **أكبر أو يساوي** القيمة 300 أي أن $b_1^{/} \in [+300,+1550]$. إذا تعدى المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ القيمة العظمى 1550 أو القيمة الدنيا 300 فإن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول لا يبقى أمثلا بل يتغير.

المجال $[+300,+1550]$ يسمى **مجال تغير** المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$.

ملاحظة 11.04:

- إذا أخذ المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ قيمة **أكبر من** 1550 أو قيمة **أقل من** 300 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.
- إذا أخذ المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ القيمة 1550 فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا غير أنه سوف نتحصل على $S_2 = 00$.
- إذا اخذ المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ قيمة **أكبر من** 1550 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $S_2 < 00$
- إذا أخذ المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ القيمة 300 فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا غير أنه سوف نتحصل على $X_1 = 00$.
- إذا أخذ المتاح من المورد الأول $b_1^{/}$ قيمة **أقل من** 300 فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $X_1 < 00$.

– **بافتراض أن المورد الأول ارتفع بـ:** 550: و الذي يوافق $\Delta b_1 = +550$

- بما أن $\Delta b_1 = +550$ فهو **ينتمي** إلى مجال تغير Δb_1 أي أن $\Delta b_1 = +550 \in [-700,+550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا غير أن الذي يتغير هوالتالي:
  - قيم متغيرات الأساس.
  - قيمة دالة الهدف Z.

بما أن مقدار التغير Δb_1 يساوي القيمة $+550$ و التي تمثل الحد الأعلى لمجال تغير Δb_1 فإننا نتوقع الحصول على متغيرة أساس تساوي الصفر و بالضبط متغيرة الأساس S_2 أي $S_2 = 00$.

– **القيم الجديدة لمتغيرات الأساس** X_1, S_2, X_2:

تبعا للعلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه فإن:

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس رقم i تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $\alpha_{i1} \times \Delta b_1$

و عليه فإن:

- $La \ Nouvelle \ Valeur \ De \ X_1 = l'Acienne \ Valeur \ De \ X_1 + \alpha_{11} \times \Delta b_1$

$$La \ Nouvelle \ Valeur \ De \ X_1 = 210 + \frac{3}{10} \times (+550) = 375 \ \Rightarrow \ X_1 = 375$$

- $La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad S_2 + \alpha_{12} \times \Delta b_1$

$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = 220 - \frac{2}{5} \times (+550) = 00 \Rightarrow S_2 = 00$

- $La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad X_2 + \alpha_{13} \times \Delta b_1$

$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_2 = 80 - \frac{1}{10} \times (+550) = 25 \Rightarrow X_2 = 25$

القيم الجديدة لمتغيرات الأساس جميعها تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي:

- $X_1 = 375 > 0$
- $S_2 = 00 \geq 0$
- $X_2 = 25 > 0$

و عليه فإن حل الأساس الجديد يعد حل أساس مقبول.

– القيمة الجديدة لدالة الهدف Z:

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $-(C_4 - Z_4) \times \Delta b_1$

أي:

- $La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad Z + [-(C_4 - Z_4)] \times \Delta b_1$

$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = 179000 + [-(-170)] \times (+550) = 272500$

نقوم بتعويض القيم الجديدة لكل من متغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 و دالة الهدف Z في جدول الحل الأمثل فنحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
700	X_1	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$-1/5$	375
00	S_2	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$-2/5$	00
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	25
Z_j		700	400	720	170	00	20	
$C_j - Z_j$		00	00	-120	-170	00	-20	$Z = 272500$

ملاحظة 12.04:

بما أن المتاح من المورد الأول $b_1 = 1000$ تغير بالمقدار $\Delta b_1 = +550$ و أصبح $b_1^{/} = 1000 + 550 = 1550$ فإن نموذج البرمجة الخطية أعلاه يصبح على الشكل التالي:

$Max \quad Z = 700X_1 + 400X_2 + 600X_3$

Soumise Aux Contraintes

$$04X_1+02X_2+04X_3\le 1550$$
$$02X_1+02X_2+01X_3\le 800$$
$$01X_1+03X_2+02X_3\le 450$$
$$X_1,X_2,X_3\ge 0$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه جدول السمبلاكس الأخير المتوصل إليه أعلاه دون اللجوء إلى حل النموذج من جديد.

- بما أن $\Delta b_1=+550$ فإن المتاح من المورد الأول $b_1=1000$ يصبح $b_1^{/}=b_1+\Delta b_1=1000+550=1550$ و هو **ينتمي** إلى مجال تغير $b_1^{/}$ الذي هو $[+300,+1550]$ أي أن $b_1^{/}=1550\in[+300,+1550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا غير أن الذي يتغير هوالتالي:
  - قيم متغيرات الأساس.
  - قيمة دالة الهدف Z.

بما أن المتاح من المورد الأول b_1 يساوي القيمة 1550 و التي تمثل الحد الأعلى لمجال تغير $b_1^{/}$ فإننا نتوقع الحصول على متغيرة أساس تساوي الصفر و بالضبط متغيرة الأساس S_2 أي $S_2=00$.

- **بافتراض أن المورد الأول ارتفع بأقل من 550 و ليكن** 549 : و الذي يوافق $\Delta b_1=+549$

- بما أن $\Delta b_1=+549$ فهو **ينتمي** إلى مجال تغير Δb_1 أي أن $\Delta b_1=+549\in[-700,+550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا غير أن الذي يتغير هوالتالي:
  - قيم متغيرات الأساس.
  - قيمة دالة الهدف Z.

- **القيم الجديدة لمتغيرات الأساس** X_1,S_2,X_2 :

تبعا للعلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه فإن:

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس رقم i تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $\alpha_{i1}\times\Delta b_1$

و عليه فإن:

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1=l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1+\alpha_{11}\times\Delta b_1$

  $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1=210+\frac{3}{10}\times(+549)=\frac{3747}{10}\ \Rightarrow\ X_1=\frac{3747}{10}$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2=l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2+\alpha_{12}\times\Delta b_1$

  $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2=220-\frac{2}{5}\times(+549)=\frac{2}{5}\ \Rightarrow\ S_2=\frac{2}{5}$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2=l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2+\alpha_{13}\times\Delta b_1$

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_2 = 80 - \frac{1}{10} \times (+549) = \frac{251}{10} \;\; \Rightarrow \;\; X_2 = \frac{251}{10}$$

القيم الجديدة لمتغيرات الأساس جميعها تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي:

- $X_1 = \frac{3747}{10} > 00$
- $S_2 = \frac{2}{5} > 00$
- $X_2 = \frac{251}{10} > 00$

و عليه فإن حل الأساس الجديد يعد حل أساس مقبول.

– **القيمة الجديدة لدالة الهدف** Z:

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $-(C_4 - Z_4) \times \Delta b_1$

أي:

- $La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; Z = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; Z + [-(C_4 - Z_4)] \times \Delta b_1$

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; Z = 179000 + [-(-170)] \times (+549) = 272330$$

نقوم بتعويض القيم الجديدة لكل من متغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 و دالة الهدف Z في جدول الحل الأمثل فنحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
700	X_1	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$-1/5$	$3747/10$
00	S_2	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$-2/5$	$2/5$
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	$251/10$
Z_j		700	400	720	170	00	20	
$C_j - Z_j$		00	00	-120	-170	00	-20	$Z = 272330$

و الذي يمثل جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أدناه:

$$Max \;\; Z = 700X_1 + 400X_2 + 600X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned} &04X_1 + 02X_2 + 04X_3 \le 1000 + 549 = 1549 \\ &02X_1 + 02X_2 + 01X_3 \le 800 \\ &01X_1 + 03X_2 + 02X_3 \le 450 \\ &X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

– **بافتراض أن المورد الأول ارتفع بأكثر من** 550 **و ليكن** 551: و الذي يوافق $\Delta b_1 = +551$

- بما أن $\Delta b_1 = +551$ فهو **لا ينتمي** إلى مجال تغير Δb_1 أي أن $\Delta b_1 = +551 \notin [-700, +550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل بتغير.

بما أن مقدار التغير Δb_1 يساوي القيمة $+551$ و التي **تفوق** الحد الأعلى لمجال تغير Δb_1 فإننا نتوقع الحصول على متغيرة أساس تساوي قيمة سالبة و بالضبط متغيرة الأساس S_2 أي $S_2 < 00$.

a. القيم الجديدة لمتغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 :

تبعا للعلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه فإن:

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس رقم i تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $\alpha_{i1} \times \Delta b_1$

و عليه فإن:

- $La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_1 = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; X_1 + \alpha_{11} \times \Delta b_1$

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_1 = 210 + \frac{3}{10} \times (+551) = \frac{3753}{10} \;\; \Rightarrow \;\; X_1 = \frac{3753}{10}$$

- $La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; S_2 = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; S_2 + \alpha_{12} \times \Delta b_1$

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; S_2 = 220 - \frac{2}{5} \times (+551) = -\frac{2}{5} \;\; \Rightarrow \;\; S_2 = -\frac{2}{5}$$

- $La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_2 = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; X_2 + \alpha_{13} \times \Delta b_1$

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_2 = 80 - \frac{1}{10} \times (+551) = \frac{249}{10} \;\; \Rightarrow \;\; X_2 = \frac{249}{10}$$

بعض القيم الجديدة لمتغيرات الأساس لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي:

- $X_1 = \frac{3753}{10} > 00$
- $S_2 = -\frac{2}{5} < 00$
- $X_2 = \frac{249}{10} > 00$

و عليه فإن حل الأساس الجديد لا يعد حل أساس مقبول.

– **القيمة الجديدة لدالة الهدف** Z :

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $-(C_4 - Z_4) \times \Delta b_1$

أي:

1. $La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; Z = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; Z + [-(C_4 - Z_4)] \times \Delta b_1$

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; Z = 179000 + [-(-170)] \times (+551) = 272670$$

نقوم بتعويض القيم الجديدة لكل من متغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 و دالة الهدف Z في جدول الحل الأمثل فنحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$S_3 \uparrow$	B
700	X_1	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$-1/5$	$3753/10$
00	$\leftarrow S_2$	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$(-2/5)$	$-2/5$
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	$249/10$
Z_j		700	400	720	170	00	20	
$C_j - Z_j$		00	00	-120	-170	00	-20	$Z = 272670$
$\frac{(C_j - Z_j)}{a_{ij}}$		/	/	$\frac{-120}{-7/5} = \frac{600}{7}$	$\frac{-170}{-2/5} = 425$	/	$\frac{-20}{-2/5} = 50$	

حل الأساس الجديد المستنتج و المقدم من خلال جدول السمبلاكس أعلاه يعد حل أساس غير مقبول و بالتالي نقوم بعملية تحسين الحل باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس

المتغيرة الخارجة: S_2

المتغيرة الداخلة: S_3

عنصر الارتكاز: $Pivot = -\frac{2}{5}$

استنتاج حل الأساس المقبول الجديد قبل تشكيل جدول السمبلاكس:

- $S_3 = 01$
- $X_1 = \frac{3753}{10} + \frac{1}{5} \times (01) = \frac{3755}{10} = \frac{751}{2}$
- $X_2 = \frac{249}{10} - \frac{2}{5} \times (01) = \frac{245}{10} = \frac{49}{2}$
- $Z = 272670 - 20 \times (01) = 272650$

جدول السمبلاكس الجديد (حل الأساس المقبول الجديد)

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
700	X_1	01	00	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	00	$751/2$
00	S_3	00	00	$7/2$	01	$-5/2$	01	01
400	X_2	00	01	-01	$-1/2$	01	00	$49/2$
Z_j		700	400	650	150	50	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-50	-150	-50	00	$Z = 272650$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_3 = 00, S_1 = 00, S_2 = 00$

- متغيرات الأساس : $X_1 = \frac{751}{2}, X_2 = \frac{49}{2}, S_3 = 01$
- قيمة دالة الهدف Z : $Z = 272650$

و هو نفس حل الأساس المقبول المستنتج.

بما أن:

- النموذج من النوع تعظيم Max.
- جميع قيم $\left(C_j - Z_j\right)$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة.
- جميع قيم متغيرات الأساس موجبة.

فإن حل الأساس المقبول أعلاه يمثل حل أساس مقبول أمثل.

ملاحظة 13.04:

بما أن المتاح من المورد الأول $b_1 = 1000$ تغير بالمقدار $\Delta b_1 = +551$ و أصبح $b_1^{/} = 1000 + 551 = 1551$ فإن نموذج البرمجة الخطية أعلاه يصبح على الشكل التالي:

$$Max \quad Z = 700X_1 + 400X_2 + 600X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$04X_1 + 02X_2 + 04X_3 \le 1000 + 551 = 1551$$
$$02X_1 + 02X_2 + 01X_3 \le 800$$
$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 \le 450$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه جدول السمبلاكس الأخير المتوصل إليه أعلاه دون اللجوء إلى حل النموذج من جديد.

– **بافتراض أن المورد الأول انخفض بـ:** 700 : و الذي يوافق $\Delta b_1 = -700$

- بما أن $\Delta b_1 = -700$ فهو **ينتمي** إلى مجال تغير Δb_1 أي أن $\Delta b_1 = +550 \in \left[-700, +550\right]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا غير أن الذي يتغير هوالتالي:
  - قيم متغيرات الأساس.
  - قيمة دالة الهدف Z.

بما أن مقدار التغير Δb_1 يساوي القيمة 700− و التي تمثل الحد الأدنى لمجال تغير Δb_1 فإننا نتوقع الحصول على متغيرة أساس تساوي الصفر و بالضبط متغيرة الأساس X_1 أي $X_1 = 00$.

b. القيم الجديدة لمتغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 :

تبعا للعلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه فإن:

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس رقم i تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $\alpha_{i1} \times \Delta b_1$

و عليه فإن:

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1 + \alpha_{11} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1 = 210 + \frac{3}{10} \times (-700) = 00 \ \Rightarrow\ X_1 = 00$$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 + \alpha_{12} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 = 220 - \frac{2}{5} \times (-700) = 500 \ \Rightarrow\ S_2 = 500$$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 + \alpha_{13} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 = 80 - \frac{1}{10} \times (-700) = 150 \ \Rightarrow\ X_2 = 150$$

القيم الجديدة لمتغيرات الأساس جميعها تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي:

- $X_1 = 00 \geq 00$
- $S_2 = 500 \geq 0$
- $X_2 = 150 > 0$

و عليه فإن حل الأساس الجديد يعد حل أساس مقبول.

- **القيمة الجديدة لدالة الهدف** Z:

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $-(C_4 - Z_4) \times \Delta b_1$

أي:

2. $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ Z = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ Z + [-(C_4 - Z_4)] \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ Z = 179000 + [-(-170)] \times (-700) = 60000$$

نقوم بتعويض القيم الجديدة لكل من متغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 و دالة الهدف Z في جدول الحل الأمثل فنحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
700	X_1	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$-1/5$	00
00	S_2	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$-2/5$	500
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	150
Z_j		700	400	720	170	00	20	
$C_j - Z_j$		00	00	-120	-170	00	-20	$Z = 60000$

ملاحظة 14.04:

بما أن المتاح من المورد الأول $b_1 = 1000$ تغير بالمقدار $\Delta b_1 = -700$ و أصبح 300 فإن $b_1^{/} = 1000 - 700 = 300$ نموذج البرمجة الخطية أعلاه يصبح على الشكل التالي:

$$Max \quad Z = 700X_1 + 400X_2 + 600X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$04X_1 + 02X_2 + 04X_3 \leq 1000 - 700 = 300$$
$$02X_1 + 02X_2 + 01X_3 \leq 800$$
$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 \leq 450$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه جدول السمبلاكس الأخير المتوصل إليه أعلاه دون اللجوء إلى حل النموذج من جديد.

- بما أن $\Delta b_1 = -700$ فإن المتاح من المورد الأول $b_1 = 1000$ يصبح $b_1^{/} = 1000 - 700 = 300$ و هو **ينتمي** إلى مجال تغير $b_1^{/}$ الذي هو $[+300, +1550]$ أي أن $b_1^{/} = 300 \in [+300, +1550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا غير أن الذي يتغير هوالتالي:
  - قيم متغيرات الأساس.
  - قيمة دالة الهدف Z.

بما أن المتاح من المورد الأول b_1 يساوي القيمة 300 و التي تمثل الحد الأدنى لمجال تغير $b_1^{/}$ فإننا نتوقع الحصول على متغيرة أساس تساوي الصفر و بالضبط متغيرة الأساس X_1 أي $X_1 = 00$.

– **بافتراض أن المورد الأول انخفض بأقل من** 700 **و ليكن** 699 : و الذي يوافق $\Delta b_1 = -699$

- بما أن $\Delta b_1 = -699$ فهو **ينتمي** إلى مجال تغير Δb_1 أي أن $\Delta b_1 = -699 \in [-700, +550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا غير أن الذي يتغير هوالتالي:
  - قيم متغيرات الأساس.
  - قيمة دالة الهدف Z.

– **القيم الجديدة لمتغيرات الأساس** X_1, S_2, X_2 :

تبعا للعلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه فإن:

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس رقم i تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $\alpha_{i1} \times \Delta b_1$

و عليه فإن:

- $La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad X_1 + \alpha_{11} \times \Delta b_1$

  $La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = 210 + \frac{3}{10} \times (-699) = \frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{3}{10}$

- $La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad S_2 + \alpha_{12} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 = 220 - \frac{2}{5} \times (-699) = \frac{2498}{5} \ \Rightarrow\ S_2 = \frac{2498}{5}$$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 + \alpha_{13} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 = 80 - \frac{1}{10} \times (-699) = \frac{1499}{10} \ \Rightarrow\ X_2 = \frac{1499}{10}$$

القيم الجديدة لمتغيرات الأساس جميعها تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي:

- $X_1 = \frac{3}{10} > 00$
- $S_2 = \frac{2498}{5} > 00$
- $X_2 = \frac{1499}{10} > 00$

و عليه فإن حل الأساس الجديد يعد حل أساس مقبول.

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z:

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $-(C_4 - Z_4) \times \Delta b_1$

أي:

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ Z = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ Z + [-(C_4 - Z_4)] \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ Z = 179000 + [-(-170)] \times (-699) = 60170$$

نقوم بتعويض القيم الجديدة لكل من متغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 و دالة الهدف Z في جدول الحل الأمثل فنحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
700	X_1	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$-1/5$	$3/10$
00	S_2	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$-2/5$	$2498/5$
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	$1499/10$
Z_j		700	400	720	170	00	20	
$C_j - Z_j$		00	00	-120	-170	00	-20	$Z = 60170$

و الذي يمثل جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أدناه:

$$Max\ \ Z = 700X_1 + 400X_2 + 600X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$04X_1 + 02X_2 + 04X_3 \leq 1000 - 699 = 301$$
$$02X_1 + 02X_2 + 01X_3 \leq 800$$
$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 \leq 450$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

- **بافتراض أن المورد الأول انخفض بأكثر من** 700 **و ليكن** 701 : و الذي يوافق $\Delta b_1 = -701$

- بما أن $\Delta b_1 = -701$ فهو **لا ينتمي** إلى مجال تغير Δb_1 أي أن $\Delta b_1 = -701 \notin [-700,+550]$ و عليه فإن الحل الأمثل المتوصل إليه من خلال جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل بتغير.

بما أن مقدار التغير Δb_1 يساوي القيمة -701 و التي **تفوق** الحد الأدنى لمجال تغير Δb_1 فإننا نتوقع الحصول على متغيرة أساس تساوي قيمة سالبة و بالضبط متغيرة الأساس X_1 أي $X_1 < 00$.

- **القيم الجديدة لمتغيرات الأساس** X_1, S_2, X_2 :

تبعا للعلاقة (01.04) المتوصل إليها أعلاه فإن:

- القيمة الجديدة لمتغيرة الأساس رقم i تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $\alpha_{i1} \times \Delta b_1$

و عليه فإن:

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1 + \alpha_{11} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_1 = 210 + \frac{3}{10} \times (-701) = -\frac{3}{10} \Rightarrow X_1 = -\frac{3}{10}$$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 + \alpha_{12} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ S_2 = 220 - \frac{2}{5} \times (-701) = \frac{2502}{5} \Rightarrow S_2 = \frac{2502}{5}$$

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 + \alpha_{13} \times \Delta b_1$

$$La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ X_2 = 80 - \frac{1}{10} \times (-701) = \frac{1501}{10} \Rightarrow X_2 = \frac{1501}{10}$$

بعض القيم الجديدة لمتغيرات الأساس لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي:

- $X_1 = -\frac{3}{10} < 00$
- $S_2 = \frac{2502}{5} > 00$
- $X_2 = \frac{1501}{10} > 00$

و عليه فإن حل الأساس الجديد لا يعد حل أساس مقبول.

- **القيمـة الجديـدة لدالـة الهـدف** Z :

- القيمة الجديدة لدالة الهدف Z تساوي القيمة القديمة لها مضافا إليها المقدار $-(C_4 - Z_4) \times \Delta b_1$

أي:

- $La\ \ Nouvelle\ \ Valeur\ \ De\ \ Z = l'Acienne\ \ Valeur\ \ De\ \ Z + [-(C_4 - Z_4)] \times \Delta b_1$

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = 179000 + [-(-170)] \times (-701) = 59830$$

نقوم بتعويض القيم الجديدة لكل من متغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 و دالة الهدف Z في جدول الحل الأمثل فنحصل على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$S_3 \uparrow$	B
700	$\leftarrow X_1$	01	00	$4/5$	$3/10$	00	$(-1/5)$	$-3/10$
00	S_2	00	00	$-7/5$	$-2/5$	01	$-2/5$	$2502/5$
400	X_2	00	01	$2/5$	$-1/10$	00	$2/5$	$1501/10$
Z_j		700	400	720	170	00	20	
$C_j - Z_j$		00	00	-120	-170	00	-20	$Z = 59830$
$\frac{(C_j - Z_j)}{a_{ij}}$		/	/	/	/	/	$\frac{-20}{-1/5} = 100$	

حل الأساس الجديد المستنتج و المقدم من خلال جدول السمبلاكس أعلاه يعد حل أساس غير مقبول و بالتالي نقوم بعملية تحسين الحل باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس

المتغيرة الخارجة: X_1

المتغيرة الداخلة: S_3

عنصر الارتكاز: $Pivot = -\frac{1}{5}$

استنتاج حل الأساس المقبول الجديد قبل تشكيل جدول السمبلاكس:

- $S_3 = \frac{3}{2}$
- $S_2 = \frac{2502}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2505}{5} = 501$
- $X_2 = \frac{1501}{10} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1495}{10} = \frac{299}{2}$
- $Z = 59830 - 20 \times \left(\frac{3}{2}\right) = 59800$

جدول السمبلاكس الجديد (حل الأساس المقبول الجديد)

$C_j \rightarrow$		700	400	600	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
00	S_3	-05	00	-04	$-3/2$	00	01	$3/2$
00	S_2	-02	00	-03	-01	01	00	501
400	X_2	02	01	02	$1/2$	00	00	$299/2$
Z_j		800	400	800	200	00	00	
$C_j - Z_j$		-100	00	-200	-200	00	00	$Z = 59800$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_1 = 00, X_3 = 00, S_1 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_2 = \frac{299}{2}, S_2 = 501, S_3 = \frac{3}{2}$
- قيمة دالة الهدف Z : $Z = 59800$

و هو نفس حل الأساس المقبول المستنتج.

بما أن:

- النموذج من النوع تعظيم Max.
- جميع قيم $\left(C_j - Z_j\right)$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة.
- جميع قيم متغيرات الأساس موجبة.

فإن حل الأساس المقبول أعلاه يمثل حل أساس مقبول أمثل.

ملاحظة 15.04:

بما أن المتاح من المورد الأول $b_1 = 1000$ تغير بالمقدار $\Delta b_1 = -701$ و أصبح $b_1^{/} = 1000 - 701 = 299$ فإن نموذج البرمجة الخطية أعلاه يصبح على الشكل التالي:

$$Max \quad Z = 700X_1 + 400X_2 + 600X_3$$

$$\text{Soumise Aux Contraintes}$$

$$\begin{aligned} 04X_1 + 02X_2 + 04X_3 &\le 1000 - 701 = 299 \\ 02X_1 + 02X_2 + 01X_3 &\le 800 \\ 01X_1 + 03X_2 + 02X_3 &\le 450 \\ X_1, X_2, X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه جدول السمبلاكس الأخير المتوصل إليه أعلاه دون اللجوء إلى حل النموذج من جديد.

5-/ مجال تغير مقدار تغير المورد الثانـي b_2:

بتفحص قيم عمود المتغيرة S_2 و التي تمثل المتبقى أو الكمية المتبقية من المورد الثاني b_2 فإن:

- القيمة 00 التي تقابل متغيرة الأساس X_1: تمثل تغير (ارتفاع أو انخفاض) الكمية المستخدمة من المورد الثاني بوحدة واحدة تؤدي إلى تغير (ارتفاع أو انخفاض) قيمة متغيرة الأساس X_1 (أي الكمية المنتجة من المنتج الأول) بـ: 00 و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$b_2 \overset{01}{\uparrow} \;\Rightarrow\; X_1 \overset{00}{\uparrow}$$

هذا يعني أنه إذا تغيرة (زادت أو نقصت) الكمية المستخدمة من المورد الثاني بوحدة واحدة أي فإن:

القيمـة الجديـدة للمتغيرة X_1 تساوي القيمـة القديمـة زائـد 00 مضروب بالمقدار 01

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad X_1 \; + \; 00 \times 01$$

أما إذا زادت الكمية المستخدمة من المورد الثاني بالمقدار Δb_2 فإن:

القيمـة الجديـدة للمتغيرة X_1 **تسـاوي القيمـة القديمـة ناقص** 00 **مضروب بالمقدار** Δb_2

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad X_1 \; + \; 00 \times \Delta b_2$$

$$X_1 = 210 + 00 \times \Delta b_3 = 210 + 00 = 210$$

- القيمة 01 التي تقابل متغيرة الأساس S_2: تمثل ارتفاع أو زيادة الكمية المستخدمة من المورد الثاني بوحدة واحدة تؤدي إلى **زيادة و ارتفاع** قيمة متغيرة الأساس S_2 (أي المتبقى أو الكمية المتبقية من المورد الثاني) بـ: 01 و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$b_2 \overset{01}{\uparrow} \;\Rightarrow\; S_2 \overset{01}{\uparrow}$$

هذا يعني أنه إذا زادت أو إرتفعت الكمية المستخدمة من المورد الثاني بوحدة واحدة أي فإن:

القيمـة الجديـدة للمتغيرة S_2 **تسـاوي القيمـة القديمـة زائـد** 01 **مضروب بالمقدار** 01

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad S_2 \; + \; 01 \times 01$$

أما إذا زادت الكمية المستخدمة من المورد الثاني بالمقدار Δb_2 فإن:

القيمـة الجديـدة للمتغيرة S_2 **تسـاوي القيمـة القديمـة ناقص** 01 **مضروب بالمقدار** Δb_2

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad S_2 \; + \; 01 \times \Delta b_2$$

$$X_1 = 220 + 01 \times \Delta b_2 = 220 + \Delta b_2$$

- القيمة 00 التي تقابل متغيرة الأساس X_2: تمثل تغير (ارتفاع أو انخفاض) الكمية المستخدمة من المورد الثاني بوحدة واحدة تؤدي إلى تغير (ارتفاع أو انخفاض) قيمة متغيرة الأساس X_2 (أي الكمية المنتجة من المنتج الثاني) بـ: 00 و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$b_2 \overset{01}{\uparrow} \;\Rightarrow\; X_2 \overset{00}{\uparrow}$$

هذا يعني أنه إذا تغيرة (زادت أو نقصت) الكمية المستخدمة من المورد الثاني بوحدة واحدة أي فإن:

القيمـة الجديـدة للمتغيرة X_2 **تسـاوي القيمـة القديمـة زائـد** 00 **مضروب بالمقدار** 01

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad X_2 \; + \; 00 \times 01$$

أما إذا زادت الكمية المستخدمة من المورد الثاني بالمقدار Δb_2 فإن:

القيمـة الجديـدة للمتغيرة X_2 **تسـاوي القيمـة القديمـة ناقص** 00 **مضروب بالمقدار** Δb_2

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad X_2 \; + \; 00 \times \Delta b_2$$

$$X_2 = 80 + 00 \times \Delta b_2 = 80 + 00 = 80$$

إذن القيم الجديدة لمتغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 نتيجة تغير المورد الثاني b_2 بالمقدار Δb_2 هي التالية:

- $X_1 = 210$
- $S_2 = 220 + \Delta b_2$
- $X_2 = 80$

الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا إذا كانت القيم الجديدة لمتغيرات الأساس X_1, S_2, X_2 تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات أي إذا تحقق ما يلي:

- $X_1 \geq 00 \Rightarrow 210 > 00$
- $S_2 \geq 00 \Rightarrow 220 + \Delta b_2 \geq 00 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -220$
- $X_2 \geq 00 \Rightarrow 80 > 00$

أو بعبارة أخرى الحل الأمثل أعلاه يبقى حلا أمثلا إذا تحقق الشرط التالي:

$$\Delta b_2 \geq -220$$

و الذي يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\Delta b_2 \in [-220, +\infty[$$

و الذي يعني ما يلي:

- الحل الأمثل الذي يقدمه جدول الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا ما دام **مقدار تغير** Δb_2 المورد الثاني b_2 **أكبر أو يساوي** القيمة -220 بعبارة أخرى يبقى الحل أمثل إذا كان مقدار انخفاض المورد الثاني أقل أو يساوي القيمة 220.
- إذا تعدى مقدار الإنخفاض القيمة 220 فإن الحل الأمثلا لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.

$[-220, +\infty[$ يسمى مجال تغير مقدار تغير Δb_2 المورد الثاني b_2.

ملاحظة 24.04:

- إذا انخفض المورد الثاني b_2 بمقدار **أقل من** 220 و الذي يوافق $\Delta b_2 < -220$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا. الذي يتغير في هذه الحالة هو قيمة متغيرة الأساس S_2 حيث أن قيمتها سوف تنخفض بمقدار إنخفاض المورد الثاني b_2 أي سوف تنخفض بقيمة Δb_2.
- إذا انخفض المورد الثاني b_2 بمقدار يساوي 220 و الذي يوافق $\Delta b_2 = -220$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $S_2 = 00$ أي المتبقى من المورد الثاني يساوي الصفر.
- إذا انخفض المورد الثاني b_2 بمقدار **أكبر من** 220 و الذي يوافق $\Delta b_2 > -220$ فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث أنه سوف نتحصل على $S_2 < 00$.

- مهما ارتفع المورد الثاني b_2 فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا لا يتغير. الذي يتغير في هذه الحالة هو قيمة متغيرة الأساس S_2 حيث أن قيمتها سوف **تزداد** بمقدار إرتفاع المورد الثاني b_2 أي سوف تزداد بقيمة Δb_2.

ملاحظة25.04:

1. إذا تغيرت (زادت أو ارتفعت) قيمة مورد ما و ليكن b_k بحيث أن هذا المورد b_k في جدول الحل الأمثل لم يتم استخدامه كلية أي هناك الباقي أو المتبقى منه (أي أن $S_k \neq 0$) فإنه:

- **مهما زدنا من هذا المورد b_k فإن قيم متغيرات الأساس لا تتغير.**
- **الذي يتغير (الذي يزداد) هو المتبقى من هذا المورد بعبارة أخرى الذي يتغير (يزداد) هو قيمة متغيرة الفجوة S_k مقدار تغير أو زيادة المتبقى أي مقدار زيادة قيمة متغيرة الفجوة S_k يساوي إلى قيمة الكمية التي زدنا بها هذا المورد b_k**

2. إذا تغيرت (نقصت أو انخفضت) قيمة مورد ما و ليكن b_k بحيث أن هذا المورد b_k في جدول الحل الأمثل لم يتم استخدامه كلية أي هناك الباقي أو المتبقى منه (أي أن $S_k \neq 0$) فإنه:

- **يجب أن لا تنخفض إلى قيمة أقل مما نحتاجه لإنتاج قيم متغيرات القرار الموجودة داخل الأساس.**

6-/ مجال تغير المورد الثاني b_2:

مجال تغير Δb_2 هو التالي:

$$\Delta b_2 \geq -220$$

نضيف القيمة 800 لطرفي المتراجحة فنحصل على ما يلي:

$$800 + \Delta b_2 \geq 800 - 220$$

$$800 + \Delta b_2 \geq 600$$

نعلم أن:

$$b_2' = 800 + \Delta b_2$$

و عليه فإن:

$$b_2' \geq +600$$

$b_2' \geq +600$: يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلا أمثل ما دام المتاح من المورد الثاني b_2' **أكبر أو يساوي** القيمة $+600$ أي أن $b_2' \in [+600,+\infty[$. إذا تعدى المتاح من المورد الثاني b_2' القيمة الدنيا $+600$ فإن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول لا يبقى أمثلا بل يتغير.

المجال $[+600,+\infty[$ يسمى **مجال تغير** المتاح من المورد الثاني b_2'.

ملاحظة 26.04:

- إذا أخذ المتاح من المورد الثاني $b_2^/$ القيمة $600+$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا غير أنه سوف نتحصل على $S_2 = 00$. و الذي يعني أن المتبقى من المورد الثاني يساوي الصفر.
- إذا اخذ المتاح من المورد الثاني $b_2^/$ قيمة **أقل من** $600+$ فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا حيث سوف نتحصل على $S_2 < 00$
- إذا أخذ المتاح من المورد الثاني $b_2^/$ قيمة **أكبر من** $600+$ فإن الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا لا يتغير.

09.04 – إضافة نشاط (متغيرة) جديد:

بافتراض أن مؤسسة ما تقوم بإنتاج عدة منتجات $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$. لهذه المؤسسة برنامجها الخطي، هذا الأخير أي البرنامج الخطي له الحل المثل. بافتراض أن هذه المؤسسة ترغب في إنتاج منتج جديد و ليكن (X_{n+1}). اهتمامنا في هذه الفقرة هو دراسة أثر إدراج هذا المنتج (المتغيرة) الجديد (الجديدة) على الحل الأمثل دون إعادة إيجاد الحل الأمثل بإدراج هذه المتغيرة الجديدة.

نسمي معامل المتغيرة الجديدة X_{n+1} على مستوى دالة الهدف بـ: C_{n+1}، أما معامل هذه المتغيرة على مستوى القيود الوظيفية فهو a_{n+1}.

كما هو معلوم يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا تحقق معيار أمثلية الحل المتمثل فيما يلي:

- $C_j - Z_j \leq 0$ أي $C_{n+1} - Z_{n+1} \leq 0$ إذا كان النموذج من النوع تعظيم (Max).
- $C_j - Z_j \geq 0$ أي $C_{n+1} - Z_{n+1} \geq 0$ إذا كان النموذج من النوع تدنئة (Min).

فهنا نميز حالتين هما:

01.09.04 – حالـة نمـوذج البرمجـة الخطيـة من النـوع تعظيـم (Max):

يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا كان أو تحقق معيار أمثلية الحل التالي: $C_{n+1} - Z_{n+1} \leq 0$. و عليه المتغيرة الجديدة X_{n+1} تكون متغيرة خارج الأساس أي $X_{n+1} = 00$. أما إذا كان $C_{n+1} - Z_{n+1} > 0$، فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا و عليه يجب تحسين الحل (إيجاد حل أمثل جديد) باستخدام طريقة السمبلاكس عن طريق اختيار المتغيرة الجديدة X_{n+1} على أنها المتغيرة الداخلة.

نعلم أن $Z_{n+1} = C_B A_B^{-1} a_{n+1}$ و بما أن $A_B^{-1} a_{n+1} = \alpha_{n+1}$ فإن $Z_{n+1} = C_B \alpha_{n+1}$

و عليه فإن:

$$C_{n+1} - Z_{n+1} = C_{n+1} - C_B A_B^{-1} a_{n+1} = C_{n+1} - C_B \alpha_{n+1}$$

مثال 20.04:

نموذج البرمجة الخطية من النوع تعظيم (Max) أدناه يمثل الصيغة الرياضية لبرنامج انتاجي لمؤسسة تنتج ثلاثة منتجات X_1, X_2, X_3

$$Max \quad Z = 60X_1 + 70X_2 + 80X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$01X_1 + 02X_2 + 01X_3 \le 1000$$
$$03X_1 + 04X_2 + 02X_3 \le 1200$$
$$02X_1 + 06X_2 + 04X_3 \le 2000$$

الحل الأمثل يقدمه جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		60	70	80	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	00	$1/4$	00	01	$-1/4$	$-1/8$	450
60	X_1	01	$1/2$	00	00	$1/2$	$-1/4$	100
80	X_3	00	$5/4$	01	00	$-1/4$	$3/8$	450
Z_j		60	130	80	00	10	15	
$C_j - Z_j$		00	-60	00	00	-10	-15	$Z = 42000$

ترغب المؤسسة في انتاج منتج جديد حيث أن الربح الوحدوي لهذا المنتج يساوي 100 و أن انتاج وحدة واحدة من هذا المنتج يتطلب ثلاث وحدات من المورد الأول و وحدة واحدة من المورد الثاني و وحدتين من المورد الثالث.

انطلاقا من معطيات المثال لدينا:

1. انطلاقا من المعطيات أعلاه يمكن استنتاج المصفوفات التالية:

$$X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ X_3 \end{pmatrix},\ A_B = \begin{pmatrix} 01 & 01 & 01 \\ 00 & 03 & 02 \\ 00 & 02 & 04 \end{pmatrix},\ (A_B)^{-1} = \begin{pmatrix} +01 & -1/4 & -1/8 \\ +00 & +1/2 & -1/4 \\ +00 & -1/4 & +3/8 \end{pmatrix}, C_B = (00 \quad 60 \quad 80)$$

$$X_H = \begin{pmatrix} X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix},\ A_H = \begin{pmatrix} 02 & 00 & 00 \\ 04 & 01 & 00 \\ 06 & 00 & 01 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} \times A_H = \begin{pmatrix} +1/4 & -1/4 & -1/8 \\ +1/2 & +1/2 & -1/4 \\ +5/4 & -1/4 & +3/8 \end{pmatrix},\ C_H = (70 \quad 00 \quad 00)$$

- المتغيرة الجديدة المراد إدراجها ضمن النموذج هي: $X_{n+1} = X_{3+1} = X_4$.
- معامل المتغيرة الجديدة على مستوى دالة الهدف Z هو: $C_{n+1} = C_{3+1} = C_4 = 100$.
- معاملات المتغيرة الجديدة على مستوى القيود الوظيفية يقدمها الشعاع $a_{n+1} = a_{3+1} = a_4$ حيث أن:

$$a_4 = \begin{pmatrix} 03 \\ 01 \\ 02 \end{pmatrix}$$

- حساب $\alpha_{n+1} = \alpha_{3+1} = \alpha_4$:

$$\alpha_4 = A_B^{-1} \times a_4 = \begin{pmatrix} +01 & -1/4 & -1/8 \\ +00 & +1/2 & -1/4 \\ +00 & -1/4 & +3/8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 03 \\ 01 \\ 02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 00 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- حساب $Z_{n+1} = Z_{3+1} = Z_4$:

$$Z_4 = C_B \times \alpha_4 = (00 \quad 60 \quad 80) \times \begin{pmatrix} 5/2 \\ 00 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 00 \times \frac{5}{2} + 60 \times 00 + 80 \times \frac{1}{2} = 40$$

- حساب $C_4 - Z_4$:

$$C_4 - Z_4 = 100 - 40 = 60$$

بما أن $C_4 - Z_4 = 60 > 00$ و النموذج من النوع تعظيم (Max) فإن الحل الأمثل المقدم من قبل جدول السمبلاكس أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير حيث يتم اختيار المتغيرة خارج الأساس الجديدة X_4 على أنها المتغيرة الداخلة. نقوم بإدراج الشعاع α_4 الموافق للمتغيرة الجديدة X_4 في جدول السمبلاكس أعلاه فنحصل على ما يلي:

$C_j \rightarrow$		60	70	80	00	00	00	100	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$X_4 \uparrow$	B
00	$\leftarrow S_1$	00	$1/4$	00	01	$-1/4$	$-1/8$	$(5/2)$	450
60	X_1	01	$1/2$	00	00	$1/2$	$-1/4$	00	100
80	X_3	00	$5/4$	01	00	$-1/4$	$3/8$	$1/2$	450
Z_j		60	130	80	00	10	15	40	
$C_j - Z_j$		00	-60	00	00	-10	-15	60	$Z = 42000$

جدول السمبلاكس أعلاه لا يمثل جدول الحل الأمثل لأن قيمة $(C_j - Z_j)$ الموافقة للمتغيرة خارج الأساس X_4 موجبة أي $C_4 - Z_4 = 60 > 00$ و عليه فإن هناك إمكانية لتحسين الحل.

المتغيرة الداخلة: X_4

المتغيرة الخارجة: S_1

عنصر الإرتكاز: $Pivot = \frac{1}{5}$

استنتاج حل الأساس المقبول الموالي قبل تشكيل جدول السمبلاكس:

قيمة المتغيرة الداخلة X_4 تساوي 180 أي $X_4 = 180$.

قيمة المتغيرة الخارجة S_1 تساوي 00 أي $S_1 = 00$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس X_2 تساوي 00 أي $X_2 = 00$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس S_2 تساوي 00 أي $S_2 = 00$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس S_3 تساوي 00 أي $S_3 = 00$.

قيمة متغيرة الأساس X_1 تساوي:

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_1 = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; X_1 + 00 \times 180 = 100 - 00 = 100$$

قيمة متغيرة الأساس X_3 تساوي:

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; X_3 = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; X_3 - \frac{1}{2} \times 180 = 450 - 90 = 360$$

قيمة دالة الهدف Z تساوي:

$$La \;\; Nouvelle \;\; Valeur \;\; De \;\; Z = l'Acienne \;\; Valeur \;\; De \;\; Z + 60 \times 180 = 42000 + 10800$$

تشكيل جدول السمبلاكس:

$C_j \rightarrow$		60	70	80	00	00	00	100	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	X_4	B
100	X_4	00	$1/10$	00	$2/5$	$-1/10$	$-1/20$	01	180
60	X_1	01	$1/2$	00	00	$1/2$	$-1/4$	00	100
80	X_3	00	$6/5$	01	$-1/5$	$-1/5$	$2/5$	00	360
Z_j		60	136	80	24	04	12	100	
$C_j - Z_j$		00	-66	00	-24	-04	-12	00	$Z = 52800$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, S_1 = 00, S_2 = 00, S_3 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_1 = 100, X_3 = 360, X_4 = 180$
- قيمة دالة الهدف Z : $Z = 52800$

و هو نفس حل الأساس المقبول المستنتج.

بما أن:

- النموذج من النوع تعظيم Max.
- جميع قيم $(C_j - Z_j)$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة.
- جميع قيم متغيرات الأساس موجبة.

فإن حل الأساس المقبول أعلاه يمثل حل أساس مقبول أمثل.

ملاحظة 31.04: جدول الحل الأمثل أعلاه عبارة عن جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \;\; Z = 60X_1 + 70X_2 + 80X_3 + 100X_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$01X_1 + 02X_2 + 01X_3 + 03X_4 \le 1000$$
$$03X_1 + 04X_2 + 02X_3 + 01X_4 \le 1200$$
$$02X_1 + 06X_2 + 04X_3 + 02X_4 \le 2000$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

02.09.04 – حالـة نمـوذج البرمجـة الخطيـة من النـوع تدنئـة (Min):

يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا إذا كان أو تحقق معيار أمثلية الحل التالي: $C_{n+1} - Z_{n+1} \geq 0$. و عليه المتغيرة الجديدة X_{n+1} تكون متغيرة خارج الأساس أي $X_{n+1} = 00$. أما إذا كان $C_{n+1} - Z_{n+1} < 0$، فإن الحل الأمثل لا يبقى حلا أمثلا و عليه يجب تحسين الحل (إيجاد حل أمثل جديد) باستخدام طريقة السمبلاكس عن طريق اختيار المتغيرة الجديدة X_{n+1} على أنها المتغيرة الداخلة.

نعلم أن $Z_{n+1} = C_B A_B^{-1} a_{n+1}$ و بما أن $A_B^{-1} a_{n+1} = \alpha_{n+1}$ فإن $Z_{n+1} = C_B \alpha_{n+1}$ و عليه فإن:

$$C_{n+1} - Z_{n+1} = C_{n+1} - C_B A_B^{-1} a_{n+1} = C_{n+1} - C_B \alpha_{n+1}$$

10.04 – إضـافـة قيـد جديـد:

سوف نهتم من خلال هذه الفقرة بدراسة الأثر الذي يحدثه قيد جديد على الحل الأمثل عند إضافته إلى نموذج البرمجة الخطية. لنفرض أنه لدينا نموذج برمجة خطية، الحل الأمثل يعطى على الشكل التالي:

- قيم متغيرات الأساس الموجبة: $X_B = A_B^{-1} \times B$.
- قيم المتغيرات خارج الأساس المعدومة: $X_H = 00$

القيد الجديد الممكن إضافته يأخذ أحد الشكلين:

- قيد من النوع أقل أو يساوي.
- قيد من النوع أكبر أو يساوي.

01.10.04 – إضـافـة قيـد جديـد من النـوع أقل أو يساوي:

لنفرض أن القيد الجديد المراد إضافته هو من الشكل التالي:

$$a_{m+1,1}X_1 + a_{m+1,2}X_2 + a_{m+1,3}X_3 + ... + a_{m+1,j}X_j + ... + a_{m+1,n}X_n \leq b_{m+1}$$

الشكل المعياري للقيد الجديد هو التالي:

$$a_{m+1,1}X_1 + a_{m+1,2}X_2 + a_{m+1,3}X_3 + ... + a_{m+1,j}X_j + ... + a_{m+1,n}X_n + S_{m+1} = b_{m+1}$$

القيد أعلاه يتكون من:

- متغيرات القرار $X_1, X_2, X_3, ..., X_j, ..., X_n$: قيم هذه المتغيرات معلومة انطلاقا من الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية قبل إضافة القيد الجديد.
- متغيرات الفجوة S_{m+1}: قيمة هذه المتغيرة مجهولة حيث تساوي ما يلي:

$$S_{m+1} = b_{m+1} - \left(a_{m+1,1}X_1 + a_{m+1,2}X_2 + a_{m+1,3}X_3 + ... + a_{m+1,j}X_j + ... + a_{m+1,n}X_n\right)$$

نميز قيمتين لمتغيرة الفجوة S_{m+1} هما:

- $S_{m+1} \geq 00$: أي قيمة متغيرة الفجوة **أكبر أو تساوي الصفر:**

في هذه الحالة الحل الأمثل المتوصل إليه قبل إضافة القيد الجديد يبقى حلا أمثلا لا يتغير. الجديد في الحل الأمثل الأول هو أنه سوف يتضمن متغيرة الفجوة الجديدة S_{m+1} المتعلقة بالقيد الجديد كمتغيرة أساس تساوي قيمة موجبة أو معدومة.

- $S_{m+1} < 00$: أي قيمة متغيرة الفجوة **أقل من الصفر:**

في هذه الحالة الحل الأمثل الأول سوف يتضمن متغيرة الفجوة الجديدة S_{m+1} المتعلقة بالقيد الجديد كمتغيرة أساس تساوي **قيمة سالبة.** أي سوف يتم الحصول على حل أساس غير مقبول و بالتالي الحل الأمثل الأول لا يبقى حلا مقبولا أمثلا، و بالتالي يجب البحث عن الحل الأمثل الجديد. بغرض الوصول إلى الحل الأمثل الجديد نتبع الخطوات التالية:

- إدراج القيد الجديد ضمن جدول الحل الأمثل المتحصل عليه قبل إضافة القيد الجديد. حيث أن المتغيرة S_{m+1} كمتغيرة أساس. مع الحرص على ضمان توفير شعاع الوحدة من أجل كل متغيرة أساس في الجدول. إذا لم يتوفر ذلك نقوم بإجراء العمليات اللازمة على القيد الجديد من أجل توفير شعاع الوحدة لكل متغيرة أساس في الجدول.
- بما أنه تم الحصول على حل غير مقبول عند إضافة القيد الجديد، فيجب تطبيق الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس.

ملاحظة 37.04:

إضافة قيد جديد إلى نموذج البرمجة الخطية يمكن أن:

- **يقلص في منطقة الحلول المقبولة أي يلغي بعض الحلول المقبولة. كما نشير إلى أنه يمكن للحل الأمثل أن يكون ضمن هذه الحلول المقبولة الملغاة و بالتالي سوف يلغيه.**
- **لا يحدث أي تغيير في منطقة الحلول المقبولة و بالتالي الحل الأمثل الأول يبقى حلا أمثلا.**

مثال 25.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 6000X_1 + 7000X_2 + 8000X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$100X_1 + 200X_2 + 100X_3 \le 10000$$
$$300X_1 + 400X_2 + 200X_3 \le 12000$$
$$200X_1 + 600X_2 + 400X_3 \le 20000$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 00$$

الحل الأمثل يقدمه جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		6000	7000	8000	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	00	25	00	01	$-1/4$	$-1/8$	4500
6000	X_1	01	$1/2$	00	00	$1/200$	$-1/400$	10
8000	X_3	00	$5/4$	01	00	$-1/400$	$3/800$	45
Z_j		6000	13000	8000	00	10	15	
$C_j - Z_j$		00	-6000	00	00	-10	-15	$Z = 420000$

نود إضافة القيد الجديد التالي:

$$100X_1 + 200X_2 + 150X_3 \leq 7000$$

– الحل الأمثل الموافق لجدول الحل الأمثل أعلاه هو التالي:

$$X_1 = 10 \ , \ X_2 = 00 \ , \ X_3 = 45$$

– كتابة القيد الجديد على الشكل التالي:

$$100X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 01S_4 = 7000$$

– حساب قيمة متغيرة الفجوة S_4:

$$S_4 = 7000 - (100X_1 + 200X_2 + 150X_3)$$

بغرض إيجاد قيمة S_4 نقوم بتعويض الحل الأمثل في العلاقة الأخيرة أعلاه فنحصل على ما يلي:

$$S_4 = 7000 - (100 \times (10) + 200 \times (00) + 150 \times (45))$$

$$S_4 = 7000 - 7750 = -750$$

$$S_4 = -750 < 00$$

بما أن قيمة متغيرة الفجوة S_4 سالبة، فإن هذا يعني أن المورد الرابع أي مورد القيد الجديد و الذي يساوي $b_4 = 7000$ لا يكفي لإنتاج الحل الأمثل الذي هو: $X_1 = 10 \ , \ X_2 = 00 \ , \ X_3 = 45$ حيث يلزمنا 750 وحدة إضافية من المورد الرابع b_4 و بالتالي فإن الحل الأمثل سوف يتغير ليحترم ما هو متاح من المورد الرابع أي الجديد $b_4 = 7000$.

تبعا للقيمة السالبة لمتغيرة الفجوة S_4 التي سوف يتم إدراجها على أنها متغيرة أساس فإن الحل الأمثل الذي يقدمه جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.

سوف نقوم بإدراج القيد الجديد ضمن جدول السمبلاكس للحل الأمثل أعلاه حيث نضع متغيرة الفجوة S_4 على أنها متغيرة أساس كما يلي:

$C_j \rightarrow$		6000	7000	8000	00	00	00	**00**	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
00	S_1	00	25	00	01	$-1/4$	$-1/8$	**00**	4500
6000	X_1	01	$1/2$	00	00	$1/200$	$-1/400$	**00**	10
8000	X_3	00	$5/4$	01	00	$-1/400$	$3/800$	**00**	45
00	S_4	**100**	**200**	**150**	**00**	**00**	**00**	**01**	**7000**
Z_j		6000	13000	8000	00	10	15	**00**	
$C_j - Z_j$		00	-6000	00	00	-10	-15	**00**	$Z = 420000$

انطلاقا من جدول السمبلاكس أعلاه نلاحظ أن متغيرات الأساس X_1, X_3 لا يوافقها أشعة الوحدة على عكس متغيرات الأساس S_1 و S_4 التي توافقها أشعة الوحدة. بغرض توفير أشعة الوحدة لمتغيرات الأساس X_1, X_3 نقوم بإجراء العمليات التالية:

- نقوم بضرب السطر الأول أي سطر متغيرة الأساس X_1 $La\ Ligne\ De\ X_1$ بـ: -100 فنحصل على ما يلي:

$La\ Ligne\ De\ X_1$	01	$1/2$	00	00	$1/200$	$-1/400$	**00**	10

$-100\times Ligne\ De\ X_1$	-100	-50	00	00	$-1/2$	$1/4$	**00**	-1000

- نقوم بضرب السطر الثاني أي سطر متغيرة الأساس X_3 $La\ Ligne\ De\ X_3$ بـ: -150 فنحصل على ما يلي:

$La\ Ligne\ De\ X_3$	00	$5/4$	01	00	$-1/400$	$3/800$	**00**	45

$-150\times Ligne\ De\ X_3$	00	$-375/2$	-150	00	$3/8$	$-9/16$	**00**	-6750

- السطر الجديد لمتغيرة الأساس S_4 يتم الحصول عليه كما يلي:

السطر الجديد لـ: S_4 = السطر الجديد لـ: X_1 **+** السطر الجديد لـ: X_3 **+** السطر القديم لـ: S_4 أي

$$La\ \ Nouvelle\ \ Ligne\ \ S_4 = La\ \ Nouv.\ \ Lig.\ \ X_1 + La\ \ Nouv.\ \ Lig.\ \ X_3 + L'ancienne\ \ Lig.\ \ S_4$$

$La\ Nouv.\ Ligne\ X_1$	-100	-50	00	00	$-1/2$	$1/4$	00	-1000
$La\ Nouv.\ Ligne\ X_3$	00	$-375/2$	-150	00	$3/8$	$-9/16$	00	-6750
$l'Aciènne\ Ligne\ S_4$	100	200	150	00	00	00	01	7000
$La\ Nouv.\ Ligne\ S_4$	**00**	$-75/2$	**00**	**00**	$-1/8$	$-5/16$	**01**	-750

- في جدول السمبلاكس الأخير نقوم بتعويض السطر القديم لـ: S_4 بالسطر الجديد لـ: S_4 فنحصل على جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		6000	7000	8000	00	00	00	**00**	
$C_j\downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	$S_3\uparrow$	S_4	B
00	S_1	00	25	00	01	$-1/4$	$-1/8$	**00**	4500
6000	X_1	01	$1/2$	00	00	$1/200$	$-1/400$	**00**	10
8000	X_3	00	$5/4$	01	00	$-1/400$	$3/800$	**00**	45
00	$\leftarrow S_4$	**00**	$-75/2$	**00**	**00**	$-1/8$	$\left(-5/16\right)$	**01**	-750
Z_j		6000	13000	8000	00	10	15	**00**	
$C_j - Z_j$		00	-6000	00	00	-10	-15	**00**	$Z = 420000$
$\dfrac{(C_j - Z_j)}{a_{ij}}$		/	$\dfrac{-6000}{-75/2}$	/	/	$\dfrac{-10}{-1/8}$	$\dfrac{-15}{-5/16}$	**/**	

حل الأساس الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, S_2 = 00, S_3 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_1 = 10, X_3 = 45, S_1 = 4500, S_4 = -750$
- قيمة دالة الهدف Z : $Z = 420000$

حل الأساس المتحصل عليه أعلاه غير مقبول لأن متغيرة الأساس $S_4 = -750 < 00$ لا تحقق قيد عدم سلبية المتغيرات التالي $S_4 \geq 00$ و بالتالي يجب البحث أو الوصول إلى حل أساس مقبول عن طريق عملية تحسين الحل باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس كما يلي:

- المتغيرة الخارجة: S_4
- المتغيرة الداخلة: S_3
- عنصر الارتكاز: $Pivot = -\frac{5}{16}$
- استنتاج حل الأساس الموالي قبل تشكيل جدول السمبلاكس:

قيمة المتغيرة الخارجة S_4 تساوي 00 أي $S_4 = 00$.

قيمة المتغيرة الداخلة S_3 تساوي 2400 أي $S_3 = 2400$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس X_2 تساوي 00 أي $X_2 = 00$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس S_2 تساوي 00 أي $S_2 = 00$.

قيمة متغيرة الأساس X_1 تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = l'Acienne \quad Valeur \quad De \quad S_2 - 35 \times \frac{75}{7} = 625 - 375 = 250$$

$$X_1 = 16$$

قيمة متغيرة الأساس X_3 تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_3 = l'Ancienne \quad Valeur - \frac{3}{800} \times 2400 = 45 - 09 = 36$$

$$X_3 = 36$$

قيمة متغيرة الأساس S_1 تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_1 = l'Ancienne \quad Valeur + \frac{1}{8} \times 2400 = 4500 - 09 = 4800$$

$$S_1 = 4800$$

قيمة دالة الهدف Z تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = l'Acienne \quad Valeur - 15 \times 2400 = 420000 - 36000 = 384000$$

$$Z = 384000$$

- تشكيل جدول السمبلاكس الموالي:

$C_j \rightarrow$		6000	7000	8000	00	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
00	S_1	00	40	00	01	$-1/5$	00	$-2/5$	4800
6000	X_1	01	$4/5$	00	00	$3/500$	00	$-1/125$	16
8000	X_3	00	$4/5$	01	00	$-1/250$	01	$3/250$	36
00	S_3	00	$4/5$	00	00	$2/5$	00	$-16/5$	2400
Z_j		6000	11200	8000	00	04	00	48	
$C_j - Z_j$		00	-4200	00	00	-04	00	-48	$Z = 384000$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, S_2 = 00, S_4 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_1 = 16, X_3 = 36, S_1 = 4800, S_3 = 2400$
- قيمة دالة الهدف Z : $Z = 384000$

و هو نفس حل الأساس المقبول المستنتج.

بما أن:

- النموذج من النوع تعظيم Max .
- جميع قيم $(C_j - Z_j)$ لمتغيرات خارج الأساس سالبة.
- جميع قيم متغيرات الأساس موجبة.

فإن حل الأساس المقبول أعلاه يمثل حل أساس مقبول أمثل.

ملاحظة 38.04:

جدول الحل الأمثل أعلاه يمثل أو عبارة عن جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max \quad Z = 6000X_1 + 7000X_2 + 8000X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$100X_1 + 200X_2 + 100X_3 \le 10000$$
$$300X_1 + 400X_2 + 200X_3 \le 12000$$
$$200X_1 + 600X_2 + 400X_3 \le 20000$$
$$100X_1 + 200X_2 + 150X_3 \le 7000$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 00$$

02.10.04 – إضافة قيد جديد من النوع أكبر أو يساوي:

لنفرض أن القيد الجديد المراد إضافته هو من الشكل التالي:

$$a_{m+1,1}X_1 + a_{m+1,2}X_2 + a_{m+1,3}X_3 + ... + a_{m+1,j}X_j + ... + a_{m+1,n}X_n \quad \ge \quad b_{m+1}$$

الشكل المعياري للقيد الجديد هو التالي:

$$a_{m+1,1}X_1 + a_{m+1,2}X_2 + a_{m+1,3}X_3 + ... + a_{m+1,j}X_j + ... + a_{m+1,n}X_n - S_{m+1} = b_{m+1}$$

بغرض تحديد قيمة متغيرة الفجوة S_{m+1} نقوم بضرب القيد بالمقدار -1 فنحصل على ما يلي:

$$-a_{m+1,1}X_1 - a_{m+1,2}X_2 - a_{m+1,3}X_3 - ...... - a_{m+1,j}X_j - ...... - a_{m+1,n}X_n + S_{m+1} = -b_{m+1}$$

و عليه فإن قيمة متغيرة الفجوة S_{m+1} تساوي ما يلي:

$$S_{m+1} = a_{m+1,1}X_1 + a_{m+1,2}X_2 + a_{m+1,3}X_3 + ... + a_{m+1,j}X_j + ... + a_{m+1,n}X_n - b_{m+1}$$

نميز قيمتين لمتغيرة الفجوة S_{m+1} هما:

- $S_{m+1} \geq 00$: أي قيمة متغيرة الفجوة **أكبر أو تساوي الصفر:**

في هذه الحالة الحل الأمثل المتوصل إليه قبل إضافة القيد الجديد يبقى حلا أمثلا لا يتغير. الجديد في الحل الأمثل الأول هو أنه سوف يتضمن متغيرة الفجوة الجديدة S_{m+1} المتعلقة بالقيد الجديد كمتغيرة أساس تساوي قيمة موجبة أو معدومة.

- $S_{m+1} < 00$: أي قيمة متغيرة الفجوة **أقل من الصفر:**

في هذه الحالة الحل الأمثل الأول سوف يتضمن متغيرة الفجوة الجديدة S_{m+1} المتعلقة بالقيد الجديد كمتغيرة أساس تساوي **قيمة سالبة.** أي سوف يتم الحصول على حل أساس غير مقبول و بالتالي الحل الأمثل الأول لا يبقى حلا مقبولا أمثلا، و بالتالي يجب البحث عن الحل الأمثل الجديد. بغرض الوصول إلى الحل الأمثل الجديد نتبع الخطوات التالية:

- إدراج القيد الجديد ضمن جدول الحل الأمثل المتحصل عليه قبل إضافة القيد الجديد. حيث أن المتغيرة S_{m+1} كمتغيرة أساس. مع الحرص على ضمان توفير شعاع الوحدة من أجل كل متغيرة أساس في الجدول. إذا لم يتوفر ذلك نقوم بإجراء العمليات اللازمة على القيد الجديد من أجل توفير شعاع الوحدة لكل متغيرة أساس في الجدول.
- بما أنه تم الحصول على حل غير مقبول عند إضافة القيد الجديد، فيجب تطبيق الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس.

ملاحظة 44.04:

إضافة قيد جديد إلى نموذج البرمجة الخطية يمكن أن:

- **يقلص في منطقة الحلول المقبولة أي يلغي بعض الحلول المقبولة. كما نشير إلى أنه يمكن للحل الأمثل أن يكون ضمن هذه الحلول المقبولة الملغاة و بالتالي سوف يلغيه.**

- **لا يحدث أي تغيير في منطقة الحلول المقبولة و بالتالي الحل الأمثل الأول يبقى حلا أمثلا.**

مثال 31.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية من النوع تدنئة (Min) التالي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$50X_1 + 20X_2 + 10X_3 \geq 8000$$
$$30X_1 + 30X_2 + 30X_3 \geq 6000$$
$$10X_1 + 20X_2 + 10X_3 \geq 5000$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل الأمثل يقدمه جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
300	X_1	01	00	00	$-1/40$	00	$1/40$	75
240	X_2	00	01	$1/2$	$1/80$	00	$-1/16$	$425/2$
00	S_2	00	00	-15	$-3/8$	01	$-9/8$	2625
Z_j		300	240	120	$-9/2$	00	$-15/2$	
$C_j - Z_j$		00	00	60	$9/2$	00	$15/2$	$Z = 73500$

نود إضافة القيد الجديد التالي:

$$20X_1 + 15X_2 + 10X_3 \geq 7500$$

– الحل الأمثل الموافق لجدول الحل الأمثل أعلاه هو التالي:

$$X_1 = 75 \ , \ X_2 = \frac{425}{2} \ , \ X_3 = 00$$

– كتابة القيد الجديد على الشكل التالي:

$$20X_1 + 15X_2 + 10X_3 - 01S_4 = 7500$$

– حساب قيمة متغيرة الفجوة S_4:

$$S_4 = (20X_1 + 15X_2 + 10X_3) - 7500$$

بغرض إيجاد قيمة S_4 نقوم بتعويض الحل الأمثل في العلاقة الأخيرة أعلاه فنحصل على ما يلي:

$$S_4 = \left(20 \times (75) + 15 \times \left(\frac{425}{2}\right) + 10 \times (00)\right) - 7500$$

$$S_4 = \frac{9375}{2} - 7500 = -\frac{5625}{2}$$

$$S_4 = -\frac{5625}{2} < 00$$

بما أن قيمة متغيرة الفجوة S_4 سالبة، الطرف الأيمن للقيد $b_4 = 7500$ أكبر من الطرف الأيسر للقيد بعد تعويض الحل الأمثل $X_1 = 75 \ , \ X_2 = \frac{425}{2} \ , \ X_3 = 00$ أي $(20X_1 + 15X_2 + 10X_3 - 01S_4)$

$\frac{9375}{2}=\left(20\times(75)+15\times\left(\frac{425}{2}\right)+10\times(00)\right)< b_4=7500$ حيث أن الفرق بين الطرفين يساوي $\frac{5625}{2}$ و

بالتالي فإن الحل الأمثل سوف يتغير ليحترم $b_4=7500$.

تبعا للقيمة السالبة لمتغيرة الفجوة S_4 التي سوف يتم إدراجها على أنها متغيرة أساس فإن الحل الأمثل الذي يقدمه جدول الحل الأمثل أعلاه لا يبقى حلا أمثلا بل يتغير.

سوف نقوم بإدراج القيد الجديد ضمن جدول السمبلاكس للحل الأمثل أعلاه و هذا بعد ضربه بـ: -1 حيث نضع متغيرة الفجوة S_4 على أنها متغيرة أساس كما يلي:

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	00	**00**	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
300	X_1	01	00	00	$-1/40$	00	$1/40$	**00**	75
240	X_2	00	01	$1/2$	$1/80$	00	$-1/16$	**00**	$425/2$
00	S_2	00	00	-15	$-3/8$	01	$-9/8$	**00**	2625
00	S_4	-20	-15	-10	00	00	00	01	-7500
Z_j		300	240	120	$-9/2$	00	$-15/2$	**00**	
C_j-Z_j		00	00	60	$9/2$	00	$15/2$	**00**	$Z=73500$

انطلاقا من جدول السمبلاكس أعلاه نلاحظ أن متغيرات الأساس X_1,X_3 لا يوافقها أشعة الوحدة على عكس متغيرات الأساس S_2,S_4 التي توافقها أشعة الوحدة. بغرض توفير أشعة الوحدة لمتغيرات الأساس X_1,X_3,S_4 نقوم بإجراء العمليات التالية:

- نقوم بضرب السطر الأول أي سطر متغيرة الأساس X_1 $La\ \ Ligne\ \ De\ \ X_1$ بـ: 20 فنحصل على:

$La\ \ Ligne\ \ De\ \ X_1$	01	00	00	$-1/40$	00	$1/40$	**00**	75

$20\times Ligne\ \ De\ \ X_1$	20	00	00	$-1/2$	00	$1/2$	**00**	1500

- نقوم بضرب السطر الثاني أي سطر متغيرة الأساس X_2 $La\ \ Ligne\ \ De\ \ X_2$ بـ: 15 فنحصل على:

$La\ \ Ligne\ \ De\ \ X_2$	00	01	$1/2$	$1/80$	00	$-1/16$	**00**	$425/2$

$15\times Ligne\ \ De\ \ X_2$	00	15	$15/2$	$3/16$	00	$-15/16$	**00**	$6375/2$

- السطر الجديد لمتغيرة الأساس S_4 يتم الحصول عليه كما يلي:

السطر الجديد لـ: S_4 = السطر الجديد لـ: X_1 + السطر الجديد لـ: X_2 + السطر القديم لـ: S_4 أي:

$$La\ \ Nouvelle\ \ Ligne\ \ S_4=La\ \ Nouv.\ Lig.\ \ X_1+La\ \ Nouv.\ Lig.\ \ X_3+L'ancienne\ \ Lig.\ \ S_4$$

La Nouv. Ligne X_1	20	00	00	$-\frac{1}{2}$	00	$\frac{1}{2}$	00	1500
La Nouv. Ligne X_2	00	15	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{16}$	00	$-\frac{15}{16}$	00	$\frac{6375}{2}$
l'Aciènne Ligne S_4	-20	-15	-10	00	00	00	01	-7500
La Nouv. Ligne S_4	**00**	**00**	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{16}$	**00**	$-\frac{7}{16}$	**01**	-5625

– في جدول السمبلاكس الأخير نقوم بتعويض السطر القديم لـ: S_4 بالسطر الجديد لـ: S_4 فنحصل على جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	00	**00**	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	$S_1 \uparrow$	S_2	S_3	S_4	B
300	X_1	01	00	00	$-\frac{1}{40}$	00	$\frac{1}{40}$	**00**	75
240	X_2	00	01	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{80}$	00	$-\frac{1}{16}$	**00**	$\frac{425}{2}$
00	S_2	00	00	-15	$-\frac{3}{8}$	01	$-\frac{9}{8}$	**00**	2625
00	$\leftarrow S_4$	**00**	**00**	$-\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{5}{16}\right)$	**00**	$-\frac{7}{16}$	**01**	$-\frac{5625}{2}$
Z_j		300	240	120	$-\frac{9}{2}$	00	$-\frac{15}{2}$	**00**	
$C_j - Z_j$		00	00	60	$\frac{9}{2}$	00	$\frac{15}{2}$	**00**	$Z = 73500$
$\frac{-(C_j - Z_j)}{a_{ij}}$		/	/	$\frac{-60}{-\frac{5}{2}}$	$\frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{5}{16}}$	/	$\frac{-\frac{15}{2}}{-\frac{7}{16}}$	**/**	

حل الأساس الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

– متغيرات خارج الأساس: $X_2 = 00, S_2 = 00, S_3 = 00$

– متغيرات الأساس : $X_1 = 75, X_2 = \frac{425}{2}, S_2 = 2625, S_4 = -\frac{5625}{2}$

– قيمة دالة الهدف Z : $Z = 73500$

حل الأساس المتحصل عليه أعلاه غير مقبول لأن متغيرة الأساس $S_4 = -\frac{5625}{2} < 00$ لا تحقق قيد عدم سلبية المتغيرات التالي $S_4 \geq 00$ و بالتالي يجب البحث أو الوصول إلى حل أساس مقبول عن طريق عملية تحسين الحل باستخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلاكس كما يلي:

- المتغيرة الخارجة: S_4
- المتغيرة الداخلة: S_1
- عنصر الارتكاز: $Pivot = -\frac{5}{16}$
- استنتاج حل الأساس الموالي قبل تشكيل جدول السمبلاكس:

قيمة المتغيرة الخارجة S_4 تساوي 00 أي $S_4 = 00$.

قيمة المتغيرة الداخلة S_1 تساوي 9000 أي $S_1 = 9000$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس S_3 تساوي 00 أي $S_3 = 00$.

قيمة المتغيرة خارج الأساس X_3 تساوي 00 أي $X_3 = 00$.

$$X_1 = 75, X_2 = 425/2, S_2 = 2625, S_4 = -5625/2$$

قيمة متغيرة الأساس X_1 تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_1 = l'Ancienne \quad Valeur - \frac{1}{40} \times 9000 = 75 + 225 = 300$$

$$X_1 = 300$$

قيمة متغيرة الأساس X_2 تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad X_2 = l'Ancienne \quad Valeur - \frac{1}{80} \times 9000 = \frac{425}{2} - \frac{225}{2}$$

$$X_2 = 100$$

قيمة متغيرة الأساس S_2 تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad S_2 = l'Ancienne \quad Valeur + \frac{3}{8} \times 9000 = 2625 + 3375 = 6000$$

$$S_2 = 6000$$

قيمة دالة الهدف Z تساوي:

$$La \quad Nouvelle \quad Valeur \quad De \quad Z = l'Acienne \quad Valeur + \frac{9}{2} \times 9000 = 73500 + 40500 = 114000$$

$$Z = 114000$$

- تشكيل جدول السمبلاكس الموالي:

$C_j \rightarrow$		300	240	180	00	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
300	X_1	01	00	$1/5$	00	00	$3/50$	$-2/25$	300
240	X_2	00	01	$2/5$	00	00	$-2/25$	$1/25$	100
00	S_2	00	00	-12	00	01	$-3/5$	$-6/5$	6000
00	S_1	00	00	08	01	00	$7/5$	$-16/5$	9000
Z_j		300	240	156	00	00	$-6/5$	$-72/5$	
$C_j - Z_j$		00	00	24	00	00	$6/5$	$72/5$	$Z = 114000$

حل الأساس المقبول الموافق لجدول السمبلاكس أعلاه هو التالي:

- متغيرات خارج الأساس: $X_3 = 00, S_3 = 00, S_4 = 00$
- متغيرات الأساس : $X_1 = 300, X_2 = 100, S_1 = 9000, S_2 = 6000$
- قيمة دالة الهدف Z : $Z = 114000$

و هو نفس حل الأساس المقبول المستنتج.

بما أن:

- النموذج من النوع تعظيم Min .
- جميع قيم $\left(C_j - Z_j\right)$ لمتغيرات خارج الأساس موجبة.
- جميع قيم متغيرات الأساس موجبة.

فإن حل الأساس المقبول أعلاه يمثل حل أساس مقبول أمثل.

ملاحظة 45.04:

جدول الحل الأمثل أعلاه يمثل أو عبارة عن جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min \quad Z = 300X_1 + 240X_2 + 180X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{aligned}
50X_1 + 20X_2 + 10X_3 &\geq 8000 \\
30X_1 + 30X_2 + 30X_3 &\geq 6000 \\
10X_1 + 20X_2 + 10X_3 &\geq 5000 \\
20X_1 + 15X_2 + 10X_3 &\geq 7500
\end{aligned}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

11.04 – التغير في المعامل التكنولوجي a_{ij} :

نعني بحدوث تغير في المعامل التكنولوجية a_{ij} حدوث تغير في معاملات متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية لنموذج البرمجة الخطية. بما أن المعاملات التكنولوجية a_{ij} تعني عدد الوحدات اللازمة من المورد i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج j ، فإننا نعني بحدوث تغير في a_{ij} ، حدوث تغير عدد الوحدات اللازمة من المورد i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج j ، هذا التغير يرجع لسبب من الأسباب، نذكر على سبيل المثال لا الحصر استبدال مؤسسة لآلة نستخدم تكنولوجيا قديمة بآلة ذات تكنولوجيا حديثة.

سوف نهتم من خلال هذه الفقرة بدراسة أثر تغير المعاملات التكنولوجية a_{ij} على الحل الأمثل. بما أنه في الحل الأمثل قد تكون متغيرات القرار متغيرات أساس أو قد تكون متغيرات خارج الأساس، فإننا نميز حالتين هما:

- التغير في معامل تكنولوجي a_{ij} لمتغيرة خارج الأساس.
- التغير في معامل تكنولوجي a_{ij} لمتغيرة أساس.

01.11.04 – التغير في المعامل التكنولوجي a_{ij} لمتغيرة خارج الأساس:

سوف نتناول من خلال هذه الفقرة أثر تغير معامل تكنولوجي a_{ij} لمتغيرة قرار خارج الأساس على الحل الأمثل، كما سنتناول أو نتطرق إلى حدود أو مجال تغير هذا المعامل التكنولوجي a_{ij} حتى يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا.

بافتراض أن متغيرة القرار X_j و التي هي متغيرة خارج الأساس في الحل الأمثل قد تغير معاملها a_{ij} بالمقدار Δa_{ij} الذي قد يكون موجب أو سالب ليصبح $a_{ij}^{'}$ حيث أن:

$$a_{ij}^{/} = a_{ij} + \Delta a_{ij}$$

عند تغير المعامل التكنولوجي a_{ij} معامل المتغيرة خارج الأساس X_j فإن الذي يتغير في جدول الحل الأمثل هو التالي:

- الشعاع a_j الموافق للمتغيرة خارج الأساس X_j الذي يتضمن المعامل التكنولوجي a_{ij} يتغير ليصبح a'_j حيث أن:

$$a'_j = a_j + \Delta a_j$$

- بما أن القيمة Z_j للمتغيرة خارج الأساس X_j تحسب بدلالة الشعاع a_j الذي تغير فإن القيمة Z_j سوف تتغير كذلك لتصبح Z'_j.
- بما أن القيمة $\left(C_j - Z_j\right)$ للمتغيرة خارج الأساس X_j تحسب بدلالة القيمة Z_j التي تغيرت و أصبحت Z'_j فإن القيمة $\left(C_j - Z_j\right)$ سوف تتغير كذلك لتصبح $\left(C_j - Z'_j\right)$.

- المعامل a_{ij} معامل المتغيرة خارج الأساس X_j تغير بالمقدار Δa_{ij} و أصبح a'_j حيث أن:

$$a'_j = a_j + \Delta a_j$$

- الشعاع a_j الموافق للمتغيرة خارج الأساس X_j الذي يتضمن المعامل التكنولوجي a_{ij} يتغير ليصبح a'_j حيث أن:

$$a'_j = a_j + \Delta a_j$$

- القيمة Z_j للمتغيرة خارج الأساس X_j تحسب بدلالة الشعاع a_j وفقا للعلاقة التالية:

$$Z_j = C_B \times A_B^{-1} \times a_j$$

- القيمة Z'_j للمتغيرة خارج الأساس X_j تحسب بدلالة الشعاع a_j الذي تغير و أصبح a'_j وفقا للعلاقة التالية:

$$Z'_j = C_B \times A_B^{-1} \times a'_j$$

بتعويض بما يساويه نحصل على ما يلي:

$$Z'_j = C_B \times A_B^{-1} \times \left(a_j + \Delta a_j\right)$$

$$Z'_j = C_B \times A_B^{-1} \times a_j + C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_j$$

نعلم أن: $C_B \times A_B^{-1} \times a_j = Z_j$ و عليه فإن: $Z'_j = Z_j + C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_j$

بما أن المعامل التكنولوجي a_{ij} الموافق للقيد رقم i و متغيرة القرار رقم j أي X_j يمثل عنصر من الشعاع a_j فإن:

$$Z'_j = Z_j + C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_{ij}$$

- القيمة $\left(C_j - Z'_j\right)$ للمتغيرة خارج الأساس X_j تحسب بدلالة القيمة Z_j التي تغيرت و أصبحت Z'_j وفقا للعلاقة التالية:

$$C_j - Z'_j = C_j - \left(Z_j + C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_{ij}\right)$$

$$C_j - Z_j' = C_j - Z_j - C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_{ij}$$

$$C_j - Z_j' = (C_j - Z_j) - C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_{ij}$$

- بما أن: القيمة $C_B A_B^{-1}$ ما هي إلا قيمة المتغيرة الثنائية رقم i أي: $C_B \times A_B^{-1} \times a_j' = Y_i$

و عليه فإن $C_j - Z_j' = (C_j - Z_j) - Y_i \times \Delta a_{ij}$ من أجل معرفة فيما إذا كان الحل الأمثل حلا أمثلا يجب تحقق معيار أمثلية الحل المتمثل فيما يلي:

- **حالـة النموذج من النوع تعظيم** (Max):

$$C_j - Z_j' \leq 00$$

$$(C_j - Z_j) - Y_i \times \Delta a_{ij} \leq 00$$

في هذه الحالة نميز ما يلي:

- إذا كان $y_i > 0$، يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا كلما كان: $\Delta a_{ij} \geq \dfrac{C_j - Z_j}{y_i}$
- إذا كان $y_i < 0$، يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا كلما كان: $\Delta a_{ij} \leq \dfrac{C_j - Z_j}{y_i}$
- إذا كان $y_i = 0$، فإن Δa_{ij} يأخذ أي قيمة كانت.

مثال 36.04: ليكن نموذج البرمجة الخطية من النوع تعظيم التالي:

$$Max \quad Z = 250X_1 + 100X_2 + 50X_3$$

Soumise Aux Contraintes

$$20X_1 + 10X_2 + 40X_3 \leq 1600$$
$$30X_1 + 20X_2 + 10X_3 \leq 1000$$
$$10X_1 + 30X_2 + 10X_3 \leq 1600$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل الأمثل يقدمه جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		250	100	50	00	00	00	
$C_j \downarrow$		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	00	$-10/3$	$100/3$	01	$-2/3$	00	$2800/3$
250	X_1	01	$2/3$	$1/3$	00	$1/30$	00	$100/3$
00	S_3	00	$70/3$	$20/3$	00	$-1/3$	01	$3800/3$
Z_j		250	$500/3$	$250/3$	00	$25/3$	00	
$C_j - Z_j$		00	$-200/3$	$-100/3$	00	$-25/3$	00	$Z = 25000/3$

– انطلاقا من جدول الحل الأمثل يمكن استنتاج أو قراءة قيم متغيرات القرار للنموذج الثنائي كما يلي:

$$Y_1 = 00 \ , \ Y_2 = \frac{25}{3} \ , \ Y_3 = 00$$

– انطلاقا من المعطيات أعلاه لدينا ما يلي:

$$X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ S_3 \end{pmatrix},\ A_B = \begin{pmatrix} 01 & 20 & 00 \\ 00 & 30 & 00 \\ 00 & 10 & 01 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -01 & +03 \\ +3/20 & +00 & -1/10 \\ -1/5 & +00 & +1/5 \end{pmatrix}, C_B = \begin{pmatrix} 00 & 250 & 00 \end{pmatrix}$$

$$X_H = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ S_2 \end{pmatrix}, A_H = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 00 \\ 20 & 10 & 01 \\ 30 & 10 & 00 \end{pmatrix}, A_B^{-1} \times A_H = \begin{pmatrix} -10/3 & +100/3 & -2/3 \\ +2/3 & +1/3 & +1/30 \\ +70/3 & +20/3 & -1/3 \end{pmatrix}, C_H = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 00 \end{pmatrix}$$

1–/ مجال تغير a_{i2} معامل المتغيرة خارج الأساس X_2 على مستوى القيود الوظيفية:

– **المعامل** $a_{12} = 10$:

لنفرض أن المعامل $a_{12} = 10$ تغير بالمقدار Δa_{12} و أصبح a'_{12} حيث أن:

$$a'_{12} = a_{12} + \Delta a_{12}$$

و عليه فإن Z_2 يتغير و يصبح Z'_2 حيث أن:

$$Z'_2 = Z_2 + C_B \times A_B^{-1} \times \Delta a_{12}$$

حيث أن:

$$a_j = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},\ \Delta a_j = \begin{pmatrix} \Delta a_{12} \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix},\ a'_j = \begin{pmatrix} 10 + \Delta a_{12} \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} \times a'_j = \begin{pmatrix} \Delta a_{12} - \frac{10}{3} \\ +\frac{2}{3} \\ +\frac{70}{3} \end{pmatrix}$$

و عليه فإن:

$$Z'_2 = C_B \times A_B^{-1} \times a'_j = \begin{pmatrix} 00 & 250 & 00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta a_{12} - \frac{10}{3} \\ +\frac{2}{3} \\ +\frac{70}{3} \end{pmatrix} = \frac{500}{3}$$

$$Z'_2 = \frac{500}{3}$$

أما $C_2 - Z'_2$ فيساوي ما يلي:

$$C_2 - Z'_2 = 100 - \left(\frac{500}{3}\right)$$

$$C_2 - Z'_2 = -\frac{200}{3}$$

هذا يعني مهما كانت قيمة مقدار تغير المعامل a_{12} فإن $C_2 - Z_2' = -\frac{200}{3} < 00$ و عليه يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا لا يتغير. بعبارة أخرى مهما كانت قيمة Δa_{12} فإن $C_2 - Z_2' = -\frac{200}{3} < 00$ و عليه يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا لا يتغير. و عليه فإن مجال تغير المعامل a_{12} الذي هو Δa_{12} هو المجال التالي:

$$\Delta a_{12} \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

- a_{12}' يأخذ أي قيمة كانت أي $a_{12}' \in \left]-\infty, +\infty\right[$ حيث أن:
- نعلم أن:

$$a_{12}' = a_{12} + \Delta a_{12}$$
$$a_{12}' = 10 + \Delta a_{12}$$

و بما أن :

$$\Delta a_{12} \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

فإن:

$$a_{12}' \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

ملاحظة 51.04:

يمكن الوصول إلى مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{22} عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه كما يلي:

بما أن:

- $Y_1 = 00$

فإن:

- Δa_{12} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{12} \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

و عليه فإن:

- a_{12}' يأخذ أي قيمة كانت أي $a_{12}' \in \left]-\infty, +\infty\right[$ حيث أن:

$$a_{12}' = a_{12} + \Delta a_{12} = 10 + \Delta a_{12}$$

- **المعامل** $a_{22} = 20$:

لنفرض أن المعامل $a_{22} = 20$ تغير بالمقدار Δa_{22} و أصبح a_{22}' حيث أن:

$$a_{22}' = a_{22} + \Delta a_{22} = 20 + \Delta a_{22}$$

و عليه فإن Z_2 يتغير و يصبح Z_2' حيث أن:

$$Z_2' = C_B \times A_B^{-1} \times a_2'$$

حيث أن:

$$a_2=\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix}\ ,\ \Delta a_2=\begin{pmatrix}00\\ \Delta a_{22}\\00\end{pmatrix}\ ,\ a_2^/=\begin{pmatrix}10\\20+\Delta a_{22}\\30\end{pmatrix}\ ,\ A_B^{-1}\times a_2^/=\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\Delta a_{22}\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{30}\Delta a_{22}\\ -\frac{20}{3}-\frac{1}{3}\Delta a_{22}+30\end{pmatrix}$$

و عليه فإن:

$$Z_2^/=C_B\times A_B^{-1}\times a_2^/=\begin{pmatrix}00 & 250 & 00\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\Delta a_{22}\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{30}\Delta a_{22}\\ -\frac{20}{3}-\frac{1}{3}\Delta a_{22}+30\end{pmatrix}=\frac{500}{3}+\frac{25}{3}\Delta a_{22}$$

$$Z_2^/=\frac{500}{3}+\frac{25}{3}\Delta a_{22}$$

نعلم أن:

- $Z_2=\frac{500}{3}$
- $Y_2=\frac{25}{3}$

و عليه فإن:

- $Z_2^/=\frac{500}{3}+\frac{25}{3}\times\Delta a_{22}=Z_2+Y_2\times\Delta a_{22}$

و هي نفس النتيجة المتوصل إليها أعلاه أن:

$$Z_j^/=Z_j+Y_j\times\Delta a_{ij}$$

أما $C_2-Z_2^/$ فيساوي ما يلي:

$$C_2-Z_2^/=100-\left(\frac{500}{3}+\frac{25}{3}\times\Delta a_{22}\right)$$

$$C_2-Z_2^/=100-\frac{500}{3}-\frac{25}{3}\times\Delta a_{22}$$

$$C_2-Z_2^/=-\frac{200}{3}-\frac{25}{3}\times\Delta a_{22}$$

نعلم أن:

- $C_2-Z_2=-\frac{200}{3}$
- $Y_2=\frac{25}{3}$

و عليه فإن:

$$\left(C_2-Z_2^/\right)=\left(C_2-Z_2\right)-Y_2\times\Delta a_{22}$$

و هي نفس النتيجة المتوصل إليها أعلاه أن:

$$C_j-Z_j^/=\left(C_j-Z_j\right)-Y_i\times\Delta a_{ij}$$

من أجل معرفة فيما إذا كان الحل الأمثل حلا أمثلا يجب تحقق معيار أمثلية الحل $\left(C_2 - Z_2'\right) \geq 00$:

$$\left(C_2 - Z_2'\right) \geq 00$$

$$\frac{200}{3} - \frac{25}{3}\Delta a_{22} \geq 00$$

$$\frac{200}{3} \geq \frac{25}{3}\Delta a_{22}$$

$$\Delta a_{22} \leq +08$$

و هي نفس النتيجة المتوصل إليها أعلاه أن:

$$\Delta a_{ij} \geq \frac{C_j - Z_j}{y_i}$$

$$\Delta a_{22} \geq \frac{C_2 - Z_2}{Y_2}$$

$$\Delta a_{22} \geq \frac{-200/3}{25/3} = -08$$

$$\Delta a_{22} \leq +08$$

أي أن:

$$\Delta a_{22} \in \left]-\infty, +08\right]$$

المجال $\left]-\infty, +08\right]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير Δa_{22}.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار تغير a_{22} الذي هو Δa_{22} **أقل أو يساوي** القيمة $+08$ أي إذا كان $\Delta a_{22} \in \left]-\infty, +08\right]$.
- إذا أخذ مقدار التغير Δa_{22} القيمة $+08$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_2 - Z_2' = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا تعدى مقدار التغير Δa_{22} القيمة $+08$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_2 - Z_2' > 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_2 متغيرة داخلة.

ملاحظة 52.04:

يمكن الوصول إلى مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{22} عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه كما يلي:

بما أن:

- $Y_2 = \frac{25}{3} \;>\; 00$

فإن:

- $$\Delta a_{ij} \geq \frac{C_j - Z_j}{Y_i}$$

$$\Delta a_{32} \geq \frac{C_2 - Z_2}{Y_2}$$

$$\Delta a_{32} \geq \frac{-200/3}{25/3} = -08$$

$$\Delta a_{32} \leq +08$$

مما سبق لدينا:

$$\Delta a_{32} \leq +08$$

نضيف المقدار 20 للطرفين فنحصل على ما يلي:

$$20 + \Delta a_{22} \leq 20 + 08$$

$$20 + \Delta a_{22} \leq +28$$

نعلم أن:

$$a'_{22} = 20 + \Delta a_{22}$$

و عليه فإن:

$$a'_{22} \leq +28$$

أي أن:

$$a'_{22} \in \left]-\infty, +28\right]$$

المجال $\left]-\infty, +28\right]$ يسمى **مجال تغير** المعامل a'_{22}.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان المعامل a'_{22} **أقل أو يساوي** القيمة 28+ أي إذا كان $a'_{22} \in \left]-\infty, +28\right]$.
- إذا أخذ المعامل a'_{22} القيمة 28+ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_2 - Z'_2 = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا أخذ المعامل a'_{22} قيمة أكبر من القيمة 28+ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_2 - Z'_2 > 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_2 متغيرة داخلة.

- **المعامل** $a_{32} = 30$:

لنفرض أن المعامل $a_{32} = 30$ تغير بالمقدار Δa_{32} و أصبح a'_{32} حيث أن:

$$a'_{32} = a_{32} + \Delta a_{32}$$

$$a'_{32} = 30 + \Delta a_{32}$$

سوف يتم التوصل إلى مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{32} الذي هو Δa_{32} عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه كما يلي:

بما أن:

- $Y_3 = 00$

فإن:

- Δa_{32} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{32} \in]-\infty,+\infty[$.

و عليه فإن:

- a'_{32} يأخذ أي قيمة كانت أي $a'_{32} \in]-\infty,+\infty[$ حيث أن:

$$a'_{32} = a_{32} + \Delta a_{32} = 30 + \Delta a_{32}$$

2-/ مجال تغير a_{i3} معامل المتغيرة خارج الأساس X_3 على مستوى القيود الوظيفية:

- **المعامل** $a_{13} = 40$:

لنفرض أن المعامل $a_{13} = 40$ تغير بالمقدار Δa_{13} و أصبح a'_{13} حيث أن:

$$a'_{13} = a_{13} + \Delta a_{13}$$

$$a'_{13} = 40 + \Delta a_{13}$$

سوف يتم التوصل إلى مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{13} الذي هو Δa_{13} عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه كما يلي:

بما أن:

- $Y_1 = 00$

فإن:

- Δa_{13} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{13} \in]-\infty,+\infty[$.

و عليه فإن:

- a'_{13} يأخذ أي قيمة كانت أي $a'_{13} \in]-\infty,+\infty[$ حيث أن:

$$a'_{13} = a_{13} + \Delta a_{13} = 40 + \Delta a_{13}$$

- **المعامل** $a_{23} = 10$:

لنفرض أن المعامل $a_{23} = 10$ تغير بالمقدار Δa_{23} و أصبح a'_{23} حيث أن:

$$a'_{23} = a_{23} + \Delta a_{23}$$

$$a'_{23} = 10 + \Delta a_{23}$$

سوف يتم التوصل إلى مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{23} الذي هو Δa_{23} عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه كما يلي:

بما أن:

- $Y_2 = \frac{25}{3} > 00$

فإن:

- $\Delta a_{ij} \geq \frac{C_j - Z_j}{Y_i}$

$$\Delta a_{23} \geq \frac{C_3 - Z_3}{Y_2}$$

$$\Delta a_{23} \geq \frac{-100/3}{25/3} = -04$$

$$\Delta a_{23} \leq +04$$

أي أن:

$$\Delta a_{23} \in]-\infty, +04]$$

المجال $]-\infty, +04]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير Δa_{23}.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار تغير a_{23} الذي هو Δa_{23} **أقل أو يساوي** القيمة $+04$ أي إذا كان $\Delta a_{23} \in]-\infty, +04]$.
- إذا أخذ مقدار التغير Δa_{23} القيمة $+04$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_3 - Z_3' = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا تعدى مقدار التغير Δa_{23} القيمة $+04$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_3 - Z_3' > 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_3 متغيرة داخلة.

مما سبق لدينا:

$$\Delta a_{23} \leq +04$$

نضيف المقدار 10 للطرفين فنحصل على ما يلي:

$$10 + \Delta a_{23} \leq 10 + 04$$

$$10 + \Delta a_{23} \leq 14$$

نعلم أن:

$$a_{23}' = 10 + \Delta a_{23}$$

و عليه فإن:

$$a_{23}' \leq +14$$

أي أن:

$$a_{23}' \in]-\infty, +14]$$

المجال $]-\infty,+14]$ يسمى **مجال تغير** المعامل a'_{23}.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان المعامل a'_{23} **أقل أو يساوي** القيمة $+14$ أي إذا كان $a'_{23} \in]-\infty,+14]$.
- إذا أخذ المعامل a'_{23} القيمة $+14$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_3 - Z'_3 = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا أخذ المعامل a'_{23} قيمة أكبر من القيمة $+14$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_3 - Z'_3 > 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_3 متغيرة داخلة.

- **المعامل** $a_{33} = 30$:

لنفرض أن المعامل $a_{33} = 30$ تغير بالمقدار Δa_{33} و أصبح a'_{33} حيث أن:

$$a'_{33} = a_{33} + \Delta a_{33}$$

$$a'_{33} = 30 + \Delta a_{33}$$

سوف يتم التوصل إلى مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{13} الذي هو Δa_{13} عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه كما يلي:

بما أن:

- $Y_3 = 00$

فإن:

- Δa_{33} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{33} \in]-\infty,+\infty[$.

و عليه فإن:

- a'_{33} يأخذ أي قيمة كانت أي $a'_{33} \in]-\infty,+\infty[$ حيث أن:

$$a'_{33} = a_{33} + \Delta a_{33} = 30 + \Delta a_{33}$$

- **حالة النموذج من النوع تدنئة** (Min):

$$C_j - Z'_j \geq 00$$

$$(C_j - Z_j) - Y_i \times \Delta a_{ij} \geq 00$$

في هذه الحالة نميز ما يلي:

- إذا كان $y_i > 0$، يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا كلما كان: $\Delta a_{ij} \leq \dfrac{C_j - Z_j}{y_i}$
- إذا كان $y_i < 0$، يبقى الحل الأمثل حلا أمثلا كلما كان: $\Delta a_{ij} \geq \dfrac{C_j - Z_j}{y_i}$

- إذا كان $y_i = 0$ ، فإن Δa_{ij} يأخذ أي قيمة كانت.

بغرض توضيح ما تم تناوله ضمن هذه الفقرة نأخذ المثال التالي:

مثال 36.04:

ليكن نموذج البرمجة الخطية من النوع تدنئة التالي:

$$Min \quad Z = 800X_1 + 1400X_2 + 600X_3 + 1800X_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$\begin{cases} 400X_1 + 200X_2 + 300X_3 + 400X_4 \ge 100000 \\ 100X_2 + 100X_4 \ge 40000 \\ 600X_3 + 300X_4 \ge 60000 \\ 100X_1 - 100X_3 \le 90000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{cases}$$

الحل الأمثل يقدمه جدول السمبلاكس التالي:

$C_j \rightarrow$		800	1400	600	1800	00	00	00	00	
$C_B \downarrow$	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_2
00	S_1	-400	00	00	-50	01	-02	$-1/2$	00	10000
1400	X_2	00	01	00	01	00	$-1/100$	00	00	400
600	X_3	00	00	01	$1/2$	00	00	$-1/600$	00	100
00	S_4	100	00	00	50	00	00	$-1/6$	01	100000
Z_j		00	1400	600	1700	00	-1400	-01	00	
$C_j - Z_j$		800	00	00	100	00	1400	01	00	$Z = 62 \times 10^4$

– انطلاقا من جدول الحل الأمثل يمكن استنتاج أو قراءة قيم متغيرات القرار للنموذج الثنائي كما يلي:

$$Y_1 = -Z_5 = 00 \ , \ Y_2 = -Z_6 = -(-1400) = 1400 \ , \ Y_3 = -Z_7 = -(-01) \ , \ Y_4 = -Z_8 = 00$$

– انطلاقا من المعطيات أعلاه لدينا ما يلي:

$$X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ S_3 \end{pmatrix}, \ A_B = \begin{pmatrix} 01 & 20 & 00 \\ 00 & 30 & 00 \\ 00 & 10 & 01 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -01 & +03 \\ +3/20 & +00 & -1/10 \\ -1/5 & +00 & +1/5 \end{pmatrix}, C_B = \begin{pmatrix} 00 & 250 & 00 \end{pmatrix}$$

$$X_H = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ S_2 \end{pmatrix}, A_H = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 00 \\ 20 & 10 & 01 \\ 30 & 10 & 00 \end{pmatrix}, A_B^{-1} \times A_H = \begin{pmatrix} -1/10 & +100/3 & -2/3 \\ +2/3 & +1/3 & +1/30 \\ +70/3 & +20/3 & -1/3 \end{pmatrix}, C_H = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 00 \end{pmatrix}$$

1-/ مجال تغير a_{i1} معامل المتغيرة خارج الأساس X_1 على مستوى القيود الوظيفية:

– **المعامل** $a_{11} = 400$:

لنفرض أن المعامل $a_{11}=400$ تغير بالمقدار Δa_{11} و أصبح $a_{11}^{/}$ حيث أن:

$$a_{11}^{/}=a_{11}+\Delta a_{11}$$

$$a_{11}^{/}=400+\Delta a_{11}$$

عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه فإن مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{11} الذي هو Δa_{11} يتم التوصل إليه كما يلي:

بما أن:

- $Y_1=00$

فإن:

- Δa_{11} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{11}\in\left]-\infty,+\infty\right[$.

و عليه فإن:

- $a_{11}^{/}$ يأخذ أي قيمة كانت أي $a_{11}^{/}\in\left]-\infty,+\infty\right[$ حيث أن:

$$a_{11}^{/}=a_{11}+\Delta a_{11}=400+\Delta a_{11}$$

- **المعامل** $a_{41}=100$:

لنفرض أن المعامل $a_{41}=100$ تغير بالمقدار Δa_{41} و أصبح $a_{41}^{/}$ حيث أن:

$$a_{41}^{/}=a_{41}+\Delta a_{41}$$

$$a_{41}^{/}=100+\Delta a_{41}$$

عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه فإن مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{41} الذي هو Δa_{41} يتم التوصل إليه كما يلي:

بما أن:

- $Y_4=00$

فإن:

- Δa_{41} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{41}\in\left]-\infty,+\infty\right[$.

و عليه فإن:

- $a_{41}^{/}$ يأخذ أي قيمة كانت أي $a_{41}^{/}\in\left]-\infty,+\infty\right[$ حيث أن:

$$a_{41}^{/}=a_{41}+\Delta a_{41}=100+\Delta a_{41}$$

2-/ مجال تغير a_{i4} معامل المتغيرة خارج الأساس X_4 على مستوى القيود الوظيفية:

- **المعامل** $a_{14}=400$:

لنفرض أن المعامل $a_{14}=400$ تغير بالمقدار Δa_{14} و أصبح $a_{14}^{/}$ حيث أن:

$$a_{14}^{/}=a_{14}+\Delta a_{14}$$

$$a_{14}^{/}=400+\Delta a_{14}$$

عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه فإن مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{14} الذي هو Δa_{14} يتم التوصل إليه كما يلي:

بما أن:

- $Y_1 = 00$

فإن:

- Δa_{14} يأخذ أي قيمة كانت أي $\Delta a_{14} \in \left]-\infty,+\infty\right[$.

و عليه فإن:

- a'_{14} يأخذ أي قيمة كانت أي $a'_{14} \in \left]-\infty,+\infty\right[$ حيث أن:

$$a'_{14} = a_{14} + \Delta a_{14} = 400 + \Delta a_{14}$$

- **المعامل** $a_{24} = 100$:

لنفرض أن المعامل $a_{24} = 100$ تغير بالمقدار Δa_{24} و أصبح a'_{24} حيث أن:

$$a'_{24} = a_{24} + \Delta a_{24}$$
$$a'_{24} = 100 + \Delta a_{24}$$

عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه فإن مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{24} الذي هو Δa_{24} يتم التوصل إليه كما يلي:

بما أن:

- $Y_2 = 1400 > 00$

فإن:

- $\Delta a_{ij} \le \frac{C_j - Z_j}{Y_i}$

$$\Delta a_{24} \le \frac{C_4 - Z_4}{Y_2}$$
$$\Delta a_{24} \le \frac{100}{1400} = +\frac{1}{14}$$
$$\Delta a_{24} \le +\frac{1}{14}$$

أي أن:

$$\Delta a_{24} \in \left]-\infty,+\frac{1}{14}\right]$$

المجال $\left]-\infty,+04\right]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير Δa_{24} .

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار تغير a_{24} الذي هو Δa_{24} **أقل أو يساوي** القيمة $+\frac{1}{14}$ أي إذا كان $\Delta a_{24} \in \left]-\infty,+\frac{1}{14}\right]$.

- إذا أخذ مقدار التغير Δa_{24} القيمة $+\frac{1}{14}$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_4 - Z_4^{/} = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا تعدى مقدار التغير Δa_{24} القيمة $+\frac{1}{14}$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_4 - Z_4^{/} < 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_4 متغيرة داخلة.

مما سبق لدينا:

$$\Delta a_{24} \leq +\frac{1}{14}$$

نضيف المقدار 100 للطرفين فنحصل على ما يلي:

$$100 + \Delta a_{24} \leq 100 + \frac{1}{4}$$

$$100 + \Delta a_{24} \leq +\frac{401}{4}$$

نعلم أن:

$$a_{24}^{/} = 100 + \Delta a_{24}$$

و عليه فإن:

$$a_{24}^{/} \leq +\frac{401}{4}$$

أي أن:

$$a_{24}^{/} \in \left]-\infty, +\frac{401}{4}\right]$$

المجال $\left]-\infty, +\frac{401}{4}\right]$ يسمى **مجال تغير** المعامل $a_{24}^{/}$.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان المعامل $a_{24}^{/}$ **أقل أو يساوي** القيمة $+\frac{401}{4}$ أي إذا كان $a_{24}^{/} \in \left]-\infty, +\frac{401}{4}\right]$.
- إذا أخذ المعامل $a_{24}^{/}$ القيمة $+\frac{401}{4}$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_4 - Z_4^{/} = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا أخذ المعامل $a_{24}^{/}$ قيمة أكبر من القيمة $+\frac{401}{4}$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_4 - Z_4^{/} < 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_4 متغيرة داخلة.

– **المعامل** $a_{34} = 300$:

لنفرض أن المعامل $a_{34} = 300$ تغير بالمقدار Δa_{34} و أصبح $a_{34}^{/}$ حيث أن:

$$a'_{14} = a_{14} + \Delta a_{14}$$

$$a'_{14} = 400 + \Delta a_{14}$$

عن طريق التطبيق المباشر للعلاقة المتوصل إليها أعلاه فإن مجال تغير مقدار تغير المعامل a_{34} الذي هو Δa_{34} يتم التوصل إليه كما يلي:

بما أن:

- $Y_3 = 01 > 00$

فإن:

- $\Delta a_{ij} \leq \dfrac{C_j - Z_j}{Y_i}$

$$\Delta a_{34} \leq \frac{C_4 - Z_4}{Y_3}$$

$$\Delta a_{34} \leq \frac{100}{01} = +100$$

$$\Delta a_{34} \leq +100$$

أي أن:

$$\Delta a_{34} \in \left]-\infty, +100\right]$$

المجال $\left]-\infty, +100\right]$ يسمى **مجال تغير** لمقدار التغير Δa_{34}.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان مقدار تغير a_{34} الذي هو Δa_{34} **أقل أو يساوي** القيمة $+100$ أي إذا كان $\Delta a_{34} \in \left]-\infty, +100\right]$.
- إذا أخذ مقدار التغير Δa_{34} القيمة $+100$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_4 - Z'_4 = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا تعدى مقدار التغير Δa_{34} القيمة $+100$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_4 - Z'_4 < 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_4 متغيرة داخلة.

مما سبق لدينا:

$$\Delta a_{34} \leq +100$$

نضيف المقدار 300 للطرفين فنحصل على ما يلي:

$$300 + \Delta a_{34} \leq 300 + 100$$

$$300 + \Delta a_{34} \leq 400$$

نعلم أن:

$$a'_{34} = 300 + \Delta a_{34}$$

و عليه فإن:

$$a'_{34} \leq +400$$

أي أن:

$$a'_{34} \in \left]-\infty,+400\right]$$

المجال $\left]-\infty,+400\right]$ يسمى **مجال تغير** المعامل a'_{34}.

هذا يعني أن:

- الحل الأمثل يبقى حلا أمثلا إذا كان المعامل a'_{34} **أقل أو يساوي** القيمة $+400$ أي إذا كان $a'_{34} \in \left]-\infty,+400\right]$.
- إذا أخذ المعامل a'_{34} القيمة $+400$ فإن الحل الأمثل لن يتغير غير أننا سوف نتحصل على $C_4 - Z'_4 = 00$ و بالتالي يصبح النموذج يقبل حلول مثلى متعددة.
- إذا أخذ المعامل a'_{34} قيمة أكبر من القيمة $+400$ فإن الحل الأمثل لن يبقى أمثلا حيث يتم الحصول على $C_4 - Z'_4 < 00$ و بالتالي سوف تكون المتغيرة خارج الأساس X_4 متغيرة داخلة.

المحور الثاني : مشـــاكــل النقــــل

الفصـــل 🕮 الخامـــس

صياغـــة المسألـــة (المشكلـــة)

Formulation du problème

أهداف الفصل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بمـا يلـي:

- مسألـة (مشكل) النقل
- صياغة النموذج الرياضي لمسألـة النقل.
- إيجاد أول حل أساس مقبول لنموذج النقل باستخدام إحدى الطرق التاليـة:
  1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية. Coin Nord-Ouest
  2. طريقة التكاليف أو التكلفة الدنيا. Minimum Des Coûts
  3. طريقة الفروقات العظمى أو طريقة Différence Maximale.Vogel
- إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل باستخدام إحدى الطرق التالية:
  1. طريقة Dantzig أو طريقة Stepping Stone
  2. طريقة التكاليف الثنائية Les Coûts Duals أو طريقة التوزيع المعدل
- صياغة النموذج الثنائي لنموذج النقل.

01.05 – عـرض مسـألـة (مشكـل) النقـل:

سنحاول من خلال هذه الفقرة عرض مشكل النقل من خلال المثال التالي:

مثال 01.05:

تتوفر مؤسسة على 03 **مراكز إنتاج** $C1, C2, C3$ مختلفة و متباعدة و 05 **مراكز توزيع** $D1, D2, D3, D4, D5$ تتواجد في مناطق مختلفة، هذه المؤسسة تنتج منتج معين و ليكن P على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة ليتم بعد ذلك **نقلـه** إلى مختلف مراكز التوزيع الخمسة أين يتم تموين مختلف زبائن المؤسسة. نشير إلى أن مراكز الإنتاج الثلاثة تتوفر على كمية معينة من المنتج P، أما بالنسبة لمراكز التوزيع الخمسة فلها طلبات معينة. الجدول أدناه يوضح الكميات المتاحة أو المعروضة و التي نسميها a_i على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة $C1, C2, C3$.

الوحدة: طن

مركز الإنتـاج	$C1$	$C2$	$C3$	**مجموع العرض**
الكمية المتاحة (العرض) a_i	$a_1 = 240$	$a_2 = 160$	$a_3 = 260$	660

الجدول أدناه يوضح الكميات المطلوبة و التي نسميها d_j من قبل مراكز التوزيع الخمسة $D1, D2, D3, D4, D5$.

الوحدة: طن

مركز التوزيع	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**مجموع الطلب**
الكمية المطلوبة(الطلب) d_j	$d_1 = 120$	$d_2 = 130$	$d_3 = 145$	$d_4 = 125$	$d_5 = 145$	660

نشير إلى أن عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة $C1, C2, C3$ إلى مراكز التوزيع الخمسة $D1, D2, D3, D4, D5$ يترتب عليها تحمل تكلفة، هذه التكلفة تسمى **تكلفـة النقـل**. الجدول (المصفوفة) أدناه يقدم التكاليف الوحدوية C_{ij} أي تكلفة نقل الوحدة الواحدة أي الطن الواحد من كل مركز إنتاج من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى كل مركز توزيع من مراكز التوزيع الخمسة. حيث أن:

C_{ij}: تمثل تكلفة النقل الوحدوية من مركز الإنتاج رقم i إلى مركز التوزيع رقم j، أي تكلفة نقل الطن الواحد من مركز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j.

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$
$C1$	$C_{11} = 100$	$C_{12} = 800$	$C_{13} = 100$	$C_{14} = 500$	$C_{15} = 400$
$C2$	$C_{21} = 500$	$C_{22} = 500$	$C_{23} = 300$	$C_{24} = 600$	$C_{25} = 700$
$C3$	$C_{31} = 200$	$C_{32} = 900$	$C_{33} = 500$	$C_{34} = 900$	$C_{35} = 800$

فمثلا $C_{24} = 600$: تمثل تكلفة نقل الطن الواحد للمنتج P من مركز الإنتاج رقم $i = 2$ إلى مركز التوزيع رقم $j = 4$ و التي تساوي 600 وحدة نقدية، أي أن نقل طن واحد من المنتج P من مركز الإنتاج رقم $i = 2$ إلى مركز التوزيع رقم $j = 4$ يكلف المؤسسة 600 وحدة نقدية.

مشكل المؤسسة هو التالــي:

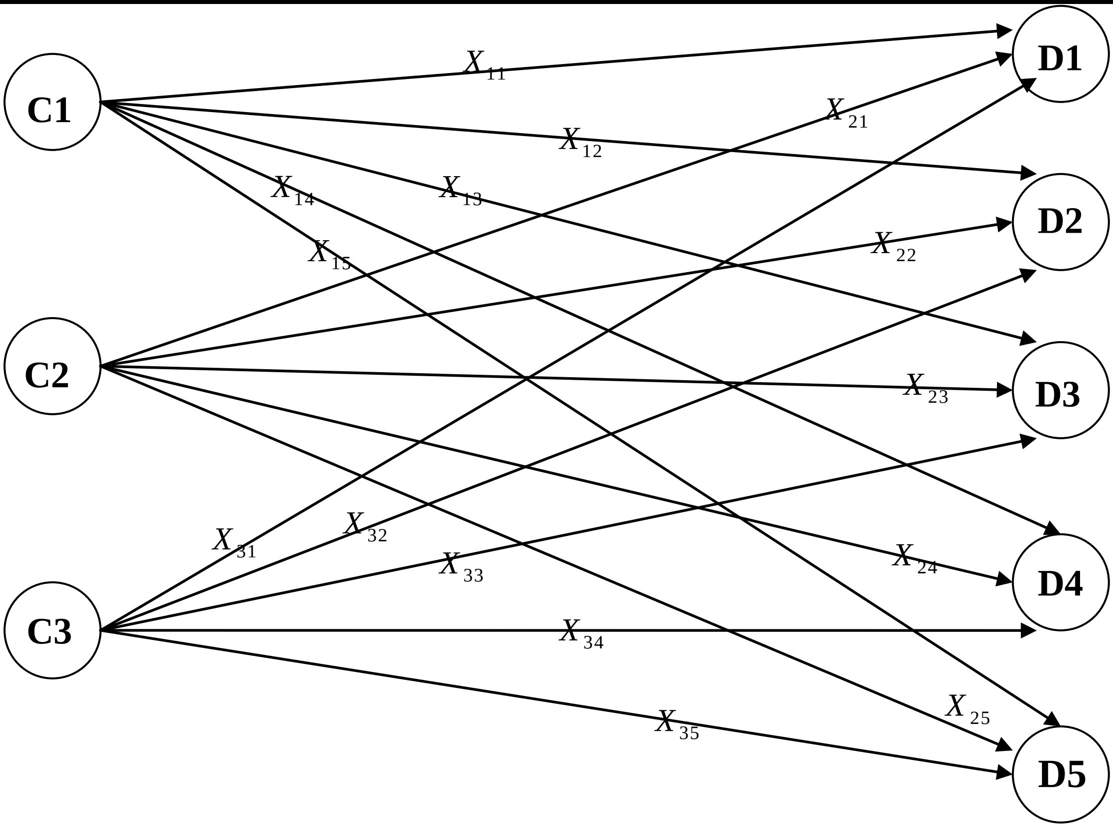
ترغب أو تريد المؤسسة نقل المتاح أو المعروض من المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مختلف مراكز التوزيع **بأقل تكلفة ممكنة**. أو بعبارة أخرى تهدف المؤسسة إلى:

1. **تحديد الكميات و التي نسميها X_{ij} التي تنقلها المؤسسة من كل مركز إنتاج C_i حيث أن $i=1,2,3$ إلى كل مركز توزيع D_j حيث أن $j=1,2,3,4,5$** .
2. **تدنئة و تخفيض تكلفة النقل المترتبة عن عملية نقل المتاح من المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مختلف مراكز التوزيع أو بعبارة أخرى تدنئة نقل الكميات X_{ij} المتوصل إليها في الهدف 1.**

أمام المؤسسة عدة إمكانيات لإنجاز عملية نقل المنتج P . فمثلا بإمكان المؤسسة القيام بما يلي:

1. نقل كمية من المتاح (قد تكون جزء و كل المتاح) على مستوى مركز الإنتاج رقم 1، $C1$ إلى:
   - مركز التوزيع رقم 1، $D1$
   - مركز التوزيع رقم 2، $D2$
   - مركز التوزيع رقم 3، $D3$
   - مركز التوزيع رقم 4، $D4$
   - مركز التوزيع رقم 5، $D5$
2. نقل كمية من المتاح (قد تكون جزء و كل المتاح) على مستوى مركز الإنتاج رقم 2، $C2$ إلى:
   - مركز التوزيع رقم 1، $D1$
   - مركز التوزيع رقم 2، $D2$
   - مركز التوزيع رقم 3، $D3$
   - مركز التوزيع رقم 4، $D4$
   - مركز التوزيع رقم 5، $D5$
3. نقل كمية من المتاح (قد تكون جزء و كل المتاح) على مستوى مركز الإنتاج رقم 3، $C3$ إلى:
   - مركز التوزيع رقم 1، $D1$
   - مركز التوزيع رقم 2، $D2$
   - مركز التوزيع رقم 3، $D3$
   - مركز التوزيع رقم 4، $D4$
   - مركز التوزيع رقم 5، $D5$

الشكل أدناه يوضح مختلف الإمكانيات المتوفرة أمام المؤسسة للقيام بعملية نقل المتاح من المنتج P المتواجد على مستوى مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مختلف مراكز التوزيع الخمسة.



حيث أن:

- X_{11} : تمثل الكمية أو عدد الوحدات أو عدد الأطنان التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم $i=1$ أي من $C1$ إلى مركز التوزيع رقم $j=1$ أي $D1$ هذه الكمية مجهولة يجب تحديد قيمتها.
- X_{12} : تمثل الكمية أو عدد الوحدات أو عدد الأطنان التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم $i=1$ أي من $C1$ إلى مركز التوزيع رقم $j=2$ أي $D2$ هذه الكمية مجهولة يجب تحديد قيمتها.
- X_{13} : تمثل الكمية أو عدد الوحدات أو عدد الأطنان التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم $i=1$ أي من $C1$ إلى مركز التوزيع رقم $j=3$ أي $D3$ هذه الكمية مجهولة يجب تحديد قيمتها.
- و نفس التعليق بالنسبة لبقية القيم X_{ij}. حيث أن:
- X_{ij} حيث أن $i=1,2,3$ و $j=1,2,3,4,5$: تمثل الكمية أو عدد الوحدات أو عدد الأطنان التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم i إلى مركز التوزيع رقم j. هذه الكمية مجهولة يجب تحديد قيمتها.

معطيات مسألة النقل المتعلقة بالمؤسسة و الممثلة في كل من:

1. الكميات المعروضة a_i على مستوى مراكز الإنتاج.

2. الكميات المطلوبة b_j من قبل مختلف مراكز التوزيع.

3. تكاليف النقل الوحدوية C_{ij}.

نقدمها و نعرضها ضمن جدول يسمى **جدول النقل** كما يلي:

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	العرض a_i
$C1$	100 X_{11}	800 X_{12}	100 X_{13}	500 X_{14}	400 X_{15}	**240**
$C2$	500 X_{21}	500 X_{22}	300 X_{23}	600 X_{24}	700 X_{25}	**160**
$C3$	200 X_{31}	900 X_{32}	500 X_{33}	900 X_{34}	800 X_{35}	**260**
الطلب b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**

نهتم في مسائل النقل بما يلي:

- **تحديد الكميات** X_{ij} $(i=1,2,3,....,m$ و $j=1,2,3,....,n)$ من منتج معين أو منتجات معينة الواجب نقلها من كل منبع Si من الـ m منبع إلى كل مصب Dj من الـ n مصب و هذا **بأقل تكلفة نقل ممكنة.**

02.05 – نمذجة مسألة النقل (صياغة نموذج النقل):

نعني بصياغة نموذج النقل، كتابة مسألة النقل في شكل نموذج رياضي أي في شكل معادلات و متراجحات. هذا النموذج الرياضي يسمى نموذج النقل. و بغرض بلوغ ذلك نتبع مجموعة من الخطوات من خلال المثال التالي:

1-/ تحديد و تعريف متغيرات القرار:

نسمي X_{ij} حيث أن $(i=1,2,3),(j=1,2,3,4,5)$ الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مختلف مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مختلف مراكز التوزيع الخمسة. هذه الكميات مجهولة يجب تحديد قيمتها.

بما أن عدد المنابع الممثلة في مراكز الإنتاج تساوي $m=03$ و عدد المصبات الممثلة في مراكز التوزيع تساوي $n=05$ فإن عدد متغيرات القرار يساوي $3\times5=15$ هي:

X_{11} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 01 إلى مركز التوزيع رقم 01.

X_{12} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 01 إلى مركز التوزيع رقم 02.

....

....

X_{15} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 01 إلى مركز التوزيع رقم 05.

X_{21} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 02 إلى مركز التوزيع رقم 01.

X_{22} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 02 إلى مركز التوزيع رقم 02.

....

....

X_{25} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 02 إلى مركز التوزيع رقم 05.

X_{31} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 03 إلى مركز التوزيع رقم 01.

X_{32} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 03 إلى مركز التوزيع رقم 02.

....

X_{35} : الكمية التي سوف تنقلها المؤسسة من مركز الإنتاج رقم 03 إلى مركز التوزيع رقم 05.

2-/ صياغة دالـة الهدف:

$$
\begin{aligned}
Min\quad Z = {} & 100X_{11}+800X_{12}+100X_{13}+500X_{14}+400X_{15}+\\
& 500X_{21}+500X_{22}+300X_{23}+600X_{14}+700X_{25}+\\
& 200X_{31}+900X_{32}+500X_{33}+900X_{34}+800X_{3n}+
\end{aligned}
$$

3-/ صياغة القيـود الوظيفيـة:

قيـود العرض

$$
\begin{aligned}
X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15} &= 240\\
X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25} &= 160\\
X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35} &= 260
\end{aligned}
$$

قيـود الطلب

$$
\begin{aligned}
X_{11}+X_{21}+X_{31} &= 120\\
X_{12}+X_{22}+X_{32} &= 130\\
X_{13}+X_{23}+X_{33} &= 145\\
X_{14}+X_{24}+X_{34} &= 125\\
X_{15}+X_{25}+X_{35} &= 140
\end{aligned}
$$

4-/ صياغة قيود عدم سلبيـة المتغيرات: $X_{ij} \geq 00 \quad ,(i=1,2,3)\ ,\ (j=1,2,3,4,5)$

بتجميع العلاقات أعلاه نحصل على نموذج النقل التالي:

$$
\begin{aligned}
Min\quad Z = {} & 100X_{11}+800X_{12}+100X_{13}+500X_{14}+400X_{15}+\\
& 500X_{21}+500X_{22}+300X_{23}+600X_{14}+700X_{25}+\\
& 200X_{31}+900X_{32}+500X_{33}+900X_{34}+800X_{3n}+
\end{aligned}
$$

Soumise Aux Contraintes :

قيـود العرض

$$
\begin{aligned}
X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15} &= 240\\
X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25} &= 160\\
X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35} &= 260
\end{aligned}
$$

قيـود الطلب

$$
\begin{aligned}
X_{11}+X_{21}+X_{31} &= 120\\
X_{12}+X_{22}+X_{32} &= 130\\
X_{13}+X_{23}+X_{33} &= 145\\
X_{14}+X_{24}+X_{34} &= 125\\
X_{15}+X_{25}+X_{35} &= 140
\end{aligned}
$$

$$X_{ij} \geq 00 \quad ,(i=1,2,3)\ ,\ (j=1,2,3,4,5)$$

03.05 – الحالات الخاصة لنماذج النقل:

إن نماذج النقل التي نصادفها في الواقع العملي ليست دائما متوازنة أي ليس دائما إجمالي الكميات المعروضة $\sum_{i=1}^{m} a_i$ يساوي إجمالي الكميات المطلوبة $\sum_{j=1}^{n} b_j$، هذا النوع من نماذج النقل يسمى **نماذج النقل الغير متوازنـة.**

نميز حالتين خاصتين لمسائل النقل و من ثم لنماذج النقل أعلاه و التي نوردها أدناه:

- الكميات المعروضة أكبر من الكميات المطلوبة.
- الكميات المعروضة أقل من الكميات المطلوبة.

01.03.05– العِرض أكبـر من الطلب: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

في هذه الحالة يكون مجموع الكميات المتاحة أو المعروضة على مستوى جميع المنابع $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i + ... + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$ **أكبـر من** مجموع الكميات المطلوبة من طرف مختلف المصبات $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_j + ... + b_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

نموذج النقل الموافق لهذه الحالة هو التالي:

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Soumises Aux Contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} < a_i \ , \quad i = 1,2,3,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \ , \quad j = 1,2,3,...,n$$

$$X_{ij} \geq 00 \quad , \ i = 1,2,3,...,m \ , \ j = 1,2,3,...,n$$

عندما يكون العرض الإجمالي لمختلف المنابع أكبر من الطلب الكلي لمختلف المصبات، في هذه الحالة يقال عن نموذج النقل أنه غير متوازن و بغرض إيجاد التوازن لنموذج النقل يتم إضافة مصب وهمي يرمز له بالرمز $Dn+1$، طلب هذا المصب الوهمي يرمز له بالرمز b_{n+1} يساوي إلى الفرق بين الكمية المعروضة $\sum_{i=1}^{m} a_i$ و الكمية المطلوبة $\sum_{j=1}^{n} b_j$ و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التاليـة:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

أما فيما يخص تكاليف النقل الموافقة لهذا المصب الوهمي فهي معدومة أي تساوي الصفر.

بغرض توضيح ذلك نأخذ المثال أدناه.

مثال 02.05: ليكن جدول النقل الغير متوازن التالي:

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	a_i
$S-01$	100	800	100	500	400	**2500**
$S-02$	500	500	300	600	700	**1600**
$S-03$	200	900	500	900	800	**2600**
b_j	**1200**	**1300**	**1450**	**1250**	**1400**	

إجمالي الكميات المعروضة الذي يساوي $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 2500 + 1600 + 2600 = 6700$ أكبر من

إجمالي الكميات المطلوبة الذي يساوي:

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1200 + 1300 + 1450 + 1250 + 1400 = 6600$$

و بغرض تحقيق التوازن نقوم بإضافة مصب جديد وهمي يرمز له بالرمز $Dn+1 = D5+1 = D6$. طلب هذا المصب الجديد يساوي

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{5} b_j$$
$$b_{5+1} = 6700 - 6600$$
$$b_6 = 100$$

تكاليف النقل الموافقة لهذا المصب الوهمي الجديد معدومة. و عليه يتم تشكيل جدول النقل كما يلي:

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	$D6$	a_i
$S-01$	100	800	100	500	400	00	**2500**
$S-02$	500	500	300	600	700	00	**1600**
$S-03$	200	900	500	900	800	00	**2600**
b_j	**1200**	**1300**	**1450**	**1250**	**1400**	**100**	

بعد إضافة المصب الوهمي الجديد تم الحصول على نموذج نقل متوازن و عليه يمكن حل هذا النموذج استخدام طرق الحل التي تم التطرق إليها أعلاه.

02.03.05- العِرض أصغر من الطلب: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

في هذه الحالة يكون مجموع الكميات المتاحة على مستوى جميع المنابع

$a_1+a_2+a_3+...+a_i+...+a_m=\sum_{i=1}^{m}a_i$ **أصغر من** مجموع الكميات المطلوبة من طرف مختلف المصبات $b_1+b_2+b_3+...+b_j+...+b_n=\sum_{j=1}^{n}b_j$. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i < \sum_{j=1}^{n}b_j$$

نموذج النقل الموافق لهذه الحالة هو التالي:

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

Soumises Aux Contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}<a_i \ , \ i=1,2,3,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}X_{ij}<b_j \ , \ j=1,2,3,...,n$$

$$X_{ij}\geq 00 \quad , \ i=1,2,3,...,m \ , \ j=1,2,3,...,n$$

عندما يكون العرض الإجمالي لمختلف المنابع أصغر من الطلب الكلي لمختلف المصبات، في هذه الحالة يقال عن نموذج النقل أنه غير متوازن و بغرض إيجاد التوازن لنموذج النقل يتم إضافة منبع جديد يسمى منبع وهمي يرمز له بالرمز $Sm+1$، عرض هذا المنبع الوهمي يرمز له بالرمز a_{m+1} يساوي إلى الفرق بين الكمية المطلوبة $\sum_{j=1}^{n}b_j$ و الكمية المعروضة $\sum_{i=1}^{m}a_i$ و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$$

أما فيما يخص تكاليف النقل الموافقة لهذا المنبع الوهمي فهي معدومة أي تساوي الصفر. بغرض توضيح ذلك نأخذ المثال أدناه.

مثال 03.05: ليكن جدول النقل الغير متوازن التالي:

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	a_i
$S-01$	01	08	01	05	04	**2400**
$S-02$	05	05	03	06	07	**1600**
$S-03$	02	09	05	09	08	**2600**
b_j	**1200**	**1300**	**1600**	**1250**	**1400**	

إجمالي الكميات المعروضة الذي يساوي $\sum_{i=1}^{3}a_i=a_1+a_2+a_3=2400+1600+2600=6600$ أقل من إجمالي الكميات المطلوبة الذي يساوي:

$$\sum_{j=1}^{5}b_j=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=1200+1300+1600+1250+1400=6750$$

و بغرض تحقيق التوازن نقوم بإضافة منبع جديد وهمي يرمز له بالرمز $Sm+1=S3+1=S4$ ، عرض هذا المنبع الجديد يساوي

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{5}b_j-\sum_{i=1}^{3}a_i$$
$$a_{3+1}=6750-6600$$
$$a_4=150$$

تكاليف النقل الموافقة لهذا المنبع الوهمي الجديد معدومة. و عليه يتم تشكيل جدول النقل كما يلي:

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	a_i
$S-01$	01	08	01	05	04	**2400**
$S-02$	05	05	03	06	07	**1600**
$S-03$	02	09	05	09	08	**2600**
$S-04$	00	00	00	00	00	**1500**
b_j	**1200**	**1300**	**1600**	**1250**	**1400**	

بعد إضافة المنبع الوهمي الجديد a_4 تم الحصول على نموذج نقل متوازن و عليه يمكن حل هذا النموذج باستخدام طرق الحل

04.05 – حل نمـوذج النقــل:

كما سبق و أن ذكرنا نعني بحل النموذج إيجاد قيم متغيرات القرار X_{ij} التي تعطي لدالة الهدف أمثل و أحسن قيمة، أي أعظم و أكبر قيمة في حالة النموذج من النوع تعظيم أو أدنى و أقل قيمة في حالة النموذج من النوع تدنئة، و تراعي قيود النموذج.

هناك عدة طرق بغرض حل نموذج النقل منها ما يسمح لنا بالحصول على أول حل أساس مقبول و منها ما يسمح بالحصول على الحل الأمثل و هذا انطلاقا من حل الأساس المقبول.

بتفحص قيود نموذج النقل في شكله العام يلاحظ أن هذا الأخير يحتوي على:

- $m\times n$ متغيرة قرار X_{ij} حيث أن $i=1,2,3,...,n$, $j=1,2,3,...,m$
- $m+n$ معادلة أو قيد

غير متغيرات القرار للمعادلة (القيد) الأخيرة أي المعادلة رقم $m+n$ تظهر في الـ m معادلة (قيد) الأولى و بالتالي قيم هذه المتغيرات تتحدد من هذه الـ m معادلة الأولى التي تظهر فيها. و بالتالي نخلص إلى أن نموذج النقل يحتوي على $m+n-1$ معادلة (قيد) و ليس $m+n$ معادلة، و عليه فإن نموذج النقل يقبل حل أساس مقبول يحتوي على $m+n-1$ متغيرة أساس موجبة (خانة أو خلية مملوءة أو مشغولة)

حل نموذج النقل يكون عن طريق:

1. إيجاد أول حل أساس مقبول:

يتم إيجاد أول حل أساس مقبول عن طريق استخدام إحدى الطرق التالية:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
- طريقة التكاليف الدنيا.
- طريقة الفرقات العضمى (طريقة Vogel).

2. إيجاد الحل الأمثل:

يتم إيجاد الحل الأمثل عن طريق استخدام إحدى الطرق التالية:

- طريقة Dantzig أو طريقة Stepping Stone.
- طريقة التكاليف الثنائية Coûts Duals.

05.05 – طريقة الزاوية (الركن) الشمالية الغربية (الأعلى الأيسر):Coin Nord-Ouest

تعتبر طريقة الزاوية الشمالية الغربية (الركن الأعلى الأيسر) الطريقة الأسهل تطبيقا. هذه الطريقة تسمح بالحصول على حل أساس مقبول. مبدأ هذه الطريقة مستمد من تسميتها، حيث أنه تبعا لهذه الطريقة **نبدأ بملأ الخانة أو الخلية الفارغة الواقعة في الركن (الزاوية) الشمالي الغربي أي الركن الأعلى الأيسر لجدول النقل**. كيفية الحصول على حل الأساس المقبول وفقا لهذه الطريقة نستعرضها في الخطوات أدناه:

خطوات الحل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

1. تشكيل جدول النقل:

يتم تشكيل جدول النقل لمسألة النقل انطلاقا من تجميع معطيات مسألة النقل في جدول يسمى جدول النقل.

2. تحديد الخانة الفارغة الواقعة في الركن الأعلى الأيسر:

بعد عملية تشكيل جدول النقل ننتقل إلى الخطوة الثانية و الممثلة تحديد الخانة أو الخلية الفارغة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر.

3. ملأ الخانة الفارغة الواقعة في الركن الأعلى الأيسر:

بعد عملية تحديد الخانة أو الخلية الفارغة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر، ننتقل إلى الخطوة الممثلة في ملأ هذه الخانة الفارغة. يتم ملأ هذه الخانة بأقل كمية بين عرض المنبع و طلب المصب و هذا ما يعبر عنه بالكتابة: $Min\ (a_i, b_j)$ و التي هي نفسها الكتابة: $Min\ (a_i, b_j)$

4. تحيين جدول النقل:

نعني بهذه الخطوة تسجيل جميع التغيرات التي تحصل لمعطيات جدول النقل بعد ملأ الخانة الفارغة في الخطوة رقم 03. هذه التغيرات التي تحصل تمس كل من الطلب و العرض.

5. اختبار فيما إذا كان قد تم التوصل إلى حل الأساس المقبول أم لا:

إذا تم ملأ جميع خانات جدول النقل فإنه تم الحصول على حل الأساس المقبول و من ثم المرور إلى الخطوة رقم 06، أما إذا لم يتم ملأ جميع خانات جدول النقل فإنه لم بتم الحصول على حل الأساس المقبول و عليه نواصل ملأ الخانات الفارغة و ذلك بالعودة إلى الخطوة رقم 02.

6. قراءة حل الأساس المقبول و التحقق من قيود النموذج:

يتم في هذه الخطوة قراءة حل الأساس المقبول أي قيم متغيرات القرار انطلاقا من جدول حل الأساس المقبول الأخير المتحصل عليه ثم بعد ذلك نقوم بالتأكد من أن قيود النموذج محققة ليتم بعد ذلك إيجاد قيمة دالة الهدف الموافقة لهذا حل الأساس المقبول و من أجل ذلك يكفي أن نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف.

سوف نحاول تطبيق هذه الخطوات على المثال أعلاه 01.05

الخطوة رقم 01: تشكيل جدول النقل:

بتجميع معطيات مسألة النقل المعروضة من خلال المثال 01.05 نحصل على جدول النقل التالي:

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i
C1	100	800	100	500	400	240
C2	500	500	300	600	700	160
C3	200	900	500	900	800	260
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660

الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة الفـارغة الواقعة في الركن الأعلـى الأيسر:

بتفحص جدول النقل أعلاه فإن الخلية الفارغة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر هي الخانة **(1,1)** التي تقع في السطر الأول و العمود الأول.

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفارغة الواقعة في الركن الأعلـى الأيسر: $Min\ (a_1 = 240, b_1 = 120) = 120$

بتوقفنا عند الخانة (1،1) نقرأ ما يلي: المصب D1 يطلب كمية مقدارها $b_1 = 120$ من المنبع C1 الذي يتوفر على عرض مقداره $a_1 = 240$. لذلك سوف يقوم المنبع C1 بتلبية طلب المصب D1 أي سوف يتم نقل كمية مقدارها $b_1 = 120$ من المنبع C1 إلى المصب D1. يتم توضيح ذلك في الجدول عن طريق ملأ الخانة (1،1) بالكمية $b_1 = 120$.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100 **120**	800	100	500	400	240	120
C2	500 **00**	500	300	600	700	160	
C3	200 **00**	900	500	900	800	260	
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	

الخطوة رقم 04: تحيين جدول النقل:

بعدما تم ملأ الخانة (1،1) بالكمية 120، هناك بعض التعديلات نجريها على معطيات جدول النقل، هذه التعديلات تخص معطيات الكميات المطلوبة b_j و الكميات المعروضة a_i. هذه التعديلات هي:

- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D1، فإن الطلب الجديد لهذا المصب أصبح معدوم أي يساوي الصفر (0). لذلك سوف يتم توضيح هذا الطلب الجديد للمصب D1 في جدول النقل كما هو موضح في الجدول أعلاه.
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D1 من طرف المنبع C1، فهذا يعني أن هذا المصب D1 لا يمكن له أن يتلقي أو يحصل على أي كمية من المنبعC2 و لا كمية من المنبع C3 و بعبارة أخرى المصب D1 يتلقى أو يحصل على كمية من C2 تساوي الصفر و يتلقى كمية من C3 تساوي الصفر. أي أننا سوف نملأ الخانات (1،2) و (1،3) بالقيمة **صفر**.
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D1 من طرف C1 فإن الكمية الجديدة المتاحة على مستوى C1 تتغير من $a_1 = 240$ لتصبح $a'_1 = a_1 - b_1 = 240 - 120 = 120$، معنى ذلك أن الكمية الجديدة المتاحة على مستوى C1 أصبحت تساوي $a'_1 = 120$ بدلا من $a_1 = 240$ كما هو موضح في الجدول اعلاه.

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة الفارغـة الواقعـة في الركن الأعلـى الأيسر:

بتفحص جدول النقل الأخير نلاحظ بأن الخانة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر هي **(1,2)** التي تقع في السطر الأول و العمود الثاني. بعد تحديد الخانة الفارغة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر نقوم في خطوة موالية بملأ هذه الخانة و هذا يعني المرور أو العودة إلى الخطوة رقم 03 .

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفارغـة (1,2):

بتوقفنا عند الخانة (1،2) نقرأ ما يلي:

المصب D2 يطلب كمية مقدارها $b_2 = 130$ من المنبع C1 الذي يتوفر على عرض $a'_1 = 120$. هنا نلاحظ بأن طلب المصب أكبر من عرض المنبع. لذلك سوف يقوم المنبع C1 بتلبية جزأ من طلب المصب D2 هذا الجزء يساوي إلى الكمية المتاحة على مستوى المنبع C1 أي يساوي $a'_1 = 120$ معنى ذلك أنه سوف يتم نقل كمية مقدارها a’1=120 من المنبع C1 إلى المصب D2. يتم توضيح ذلك في الجدول أدناه عن طريق ملأ الخانة (1،2) بالكمية $a'_1 = 120$.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100 **120**	800 **120**	100 **00**	500 **00**	400 **00**	**240**	**120 00**
C2	500 **00**	500	300	600	700	**160**	
C3	200 **00**	900	500	900	800	**260**	
الطلب b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**	
	00	**10**					

الخطوة رقم 04: تحيين جدول النقل:

بعدما تم ملأ الخانة (1،2) بالكمية 120 سيتم اجراء بعض التعديلات هي:

- بما أنه تم تلبية جزء من طلب المصب D2، فإن الطلب الجديد لهذا المصب أصبح يساوي إلى الفرق بين طلب هذا المصب $b_2 = 130$ و جزء الطلب الذي تم تلبيته $a_1' = 120$ أي يساوي $b_2' = b_2 - a_1' = 130 - 120 = 10$. لذلك سوف يتم توضيح هذا الطلب الجديد للمصب D1 في جدول النقل كما هو موضح في الجدول أعلاه.
- بما أنه تم تلبية جزء من طلب المصب D2 عن طريق كل الكمية المتاحة على مستوى المنبع C1، فهذا يعني أن المنبع C1 لم يبقى على مستواه أي كمية معروضة بعبارة أخرى الكمية الجديدة المعروضة (العرض) على مستوى المنبع C1 تساوي الصفر. كما هو موضح في جدول النقل أعلاه.
- بما أن العرض الجديد للمنبع C1 يساوي الصفر فهذا يعني أن هذا المنبع لا يمكن له تلبية أي طلب للمصبات D3 ، D4 و D5 ، بعبارة أخرى المنبع C1 يلبي طلب المصب D3 بكمية تساوي الصفر و يلبي طلب المصب D4 بكمية تساوي الصفر و يلبي طلب المصب D5 بكمية تساوي الصفر. أي أننا سوف نملأ الخانات (1،3) و (1،4) و (1،5) بالقيمة **صفر** و التي تمثل الكمية التي ننقلها من المنبع C1 إلى المصبات D3 ، D4 و D5 كما هو موضح في الجدول أعلاه.

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة الفارغـة الواقعـة في الركن الأعلـى الأيسـر:

بتفحص جدول النقل الجديد نلاحظ بأن الخلية أو الخانة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر الخانة **(2,2)**

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة <u>الفارغـة</u> (2,2):

تبعا للقاعدة 01.03 المتعلقة بتحديد الكمية التي نملأ بها الخانة الفارغة فإن الكمية التي يتم ملأ بها الخانة (2،2) هي أقل كمية بين العرض و الطلب أي $Min\ (b_2' = 10, a_2 = 160) = b_2' = 10$. يتم توضيح ذلك في الجدول أدناه عن طريق ملأ الخانة (2،2) بالكمية $b_2' = 10$.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100 **120**	800 **120**	100 **00**	500 **00**	400 **00**	**240**	**120 00**
C2	500 **00**	500 **10**	300	600	700	**160**	**150**
C3	200 **00**	900 **00**	500	900	800	**260**	
الطلب b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**	
	00	**10** **00**					

الخطوة رقم 04: تحيين جدول النقل:

بعدما تم ملأ الخانة (2،2) بالكمية 10 فإن كل من:

- طلب المصب D2 قد تغير ليصبح يساوي الصفر بدلا من 10 كما هو موضح في جدول النقل أعلاه.
- عرض المنبع C2 قد تغير ليصبح يساوي 150 بدلا من 160 كما هو موضح في جدول النقل أعلاه.
- بما أن طلب المصب D2 أصبح يساوي الصفر معنى ذلك أنه تم تلبية كل طلب هذا المصب معنى ذلك أنه سوف لا يتلقى أي كمية من المنبع C3 أو بعبارة أخرى سوف يتلقى كمية من المنبع C3 تساوي الصفر كما هو موضح في الخانة (2،3) لجدول النقل أعلاه.

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة <u>الفارغة</u> الواقعة في الركن الأعلـى الأيسر:

بتفحص جدول النقل الجديد نلاحظ بأن الخلية أو الخانة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر الخانة **(2,3)**

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة <u>الفارغة</u> (2,3)

تبعا للقاعدة 01.03 المتعلقة بتحديد الكمية التي نملأ بها الخانة الفارغة فإن الكمية التي يتم ملأ بها الخانة **(2,3)** هي أقل كمية بين العرض و الطلب أي $Min\ \left(b_3 = 145, a_2 = 150\right) = b_3 = 145$. يتم توضيح ذلك في الجدول أدناه عن طريق ملأ الخانة (2،3) بالكمية $b_3 = 145$.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100 **120**	800 **120**	100 **00**	500 **00**	400 **00**	**240**	**120 00**
C2	500 **00**	500 **10**	300 **145**	600	700	**160**	**150 05**
C3	200 **00**	900 **00**	500 **00**	900	800	**260**	
الطلب b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**	
	00	**10**	**00**				
		00					

بتفحص جدول النقل الجديد يلاحظ أن هناك بعض الخانات الفارغة معنى ذلك أن هناك إمكانية لملأ هذه الخانات معنى ذلك أنه لم يتم الحصول على حل الأساس المقبول بعد. و بغرض ملأ الخانات الفارغة المتبقية يجب العودة إلى الخطوة رقم 02.

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة <u>الفارغة</u> الواقعة في الركن الأعلـى الأيسر:

بتفحص جدول النقل الجديد نلاحظ بأن الخلية أو الخانة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر الخانة **(2,4)**

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة <u>الفارغة</u> (2,4)

الكمية التي يتم ملأ بها الخانة (2،4) هي أقل كمية بين العرض و الطلب أي $Min\ \left(b_4 = 125, a_2^{/} = 05\right) = a_2^{/} = 05$. يتم توضيح ذلك في الجدول أدناه عن طريق ملأ الخانة (2،4) بالكمية $a_2^{/} = 05$.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	(100) 120	(800) 120	(100) 00	(500) 00	(400) 00	240	120 00
C2	(500) 00	(500) 10	(300) 145	(600) 05	(700) 00	160	150 05 00
C3	(200) 00	(900) 00	(500) 00	(900)	(800)	260	
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	00	10 00	00	120			

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة <u>الفارغة</u> الواقعة في الركن الأعلـى الأيسر:

بتفحص جدول النقل الجديد نلاحظ بأن الخلية أو الخانة التي تقع في الركن الأعلى الأيسر الخانة **(3,4)**

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة <u>الفارغة</u> (3,4)

الكمية التي يتم ملأ بها الخانة **(3,4)** هي أقل كمية بين العرض و الطلب أي $Min\ \left(b'_4=120, a_3=260\right)=b'_4=120$. يتم توضيح ذلك في الجدول أدناه عن طريق ملأ الخانة **(3,4)** بالكمية $b'_4=120$.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	(100) 120	(800) 120	(100) 00	(500) 00	(400) 00	240	120 00
C2	(500) 00	(500) 10	(300) 145	(600) 05	(700) 00	160	150 05 00
C3	(200) 00	(900) 00	(500) 00	(900) 120	(800)	260	140
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	00	10 00	00	120 00			

بتفحص جدول النقل الجديد نلاحظ أنه بقيت خانة واحدة فارغة و هي الخانة (3،5) معنى ذلك أن هناك إمكانية لملأ هذه الخانة معنى ذلك أنه لم يتم الحصول على حل الأساس المقبول بعد. و بغرض ملأ هذه الخانة الفارغة المتبقية يجب العودة إلى الخطوة رقم 02 أو ملأها مباشرة لأنها بقيت وحيدة و حتى لو تم الرجوع إلى الخطوة رقم 02 فسوف يتم احتيار هذه الخانة المتبقية. الكمية التي نملأ بها هذه الخانة تبعا للقاعدة 01.10 هي 140 كما هو موضح قي جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض b_j	
C1	(100) 120	(800) 120	(100) 00	(500) 00	(400) 00	240	120 00
C2	(500) 00	(500) 10	(300) 145	(600) 05	(700) 00	160	150 05 00
	(200)	(900)	(500)	(900)	(800)	260	140 00

C3	**00**	**00**	**00**	**120**	**140**	
b_j **الطلب**	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**
	00	**10**	**00**	**120**	**00**	
		00		**00**		

بتفحص جدول النقل الجديد يلاحظ أن جميع الخانات الفارغة تم ملأها و لا توجد أي خانة فارغة معنى ذلك أنه تم الحصول على حل الأساس المقبول.

عادة تستبدل القيمة (00) في الجدول أعلاه بالعلامة (/) و بالتالي يصبح جدول النقل أعلاه هو التالي:

	D1	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	a_i **العرض**
C1	100 **120**	800 **120**	100 **/**	500 **/**	400 **/**	**240**
C2	500 **/**	500 **10**	300 **145**	600 **05**	700 **/**	**160**
C3	200 **/**	900 **/**	500 **/**	900 **120**	800 **140**	**260**
b_j **الطلب**	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقا من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$$X_{11}=120, X_{12}=120, X_{13}=00, X_{14}=00, X_{15}=00$$
$$X_{21}=00, X_{22}=10, X_{23}=145, X_{24}=05, X_{25}=00$$
$$X_{31}=00, X_{32}=00, X_{33}=00, X_{34}=120, X_{35}=140$$

موزعة كما يلي:

1. متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي $07=(3+5-1)=(m+n-1)$

$$X_{11}=120, X_{12}=120, X_{22}=10, X_{23}=145, X_{24}=05, X_{34}=120, X_{35}=140$$

2. متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار

$$X_{13}=00, X_{14}=00, X_{15}=00, X_{21}=00, X_{25}=00, X_{31}=00, X_{32}=00, X_{33}=00$$

- **قيمة دالة الهدف:** بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\begin{aligned} Z = {} & 100(120)+800(120)+100(00)+500(00)+400(00)+ \\ & 500(00)+500(10)+300(145)+600(05)+700(00)+ \\ & 200(00)+900(00)+500(00)+900(120)+800(140)=379500 \end{aligned}$$

$$Z=379500$$

06.05 – طريقـة التكاليف الدنيـا:

تعتبر هذه الطريقة من الطرق المستخدمة للحصول على حل أساس مقبول لنموذج النقل. مبدأ هذه الطريقة مستمد من تسميتها، حيث أنه تبعا لهذه الطريقة **نبدأ بمـلأ الخانـة الفـارغة التـي لهـا أدنـى و أخفض تكلفـة وحدويـة للنقل.** كيفية الحصول على حل الأساس المقبول وفقا لهذه الطريقة نستعرضها في الخطوات التالية:

خطوات الحل باستخدام طريقـة التكـاليف الدنيـا:

1. تشكيل جدول النقل:

يتم تشكيل جدول النقل لمسألة النقل انطلاقا من تجميع معطيات مسألة النقل في جدول.

2. تحديد الخانـة الفارغة ذات أدنـى تكلفـة:

بعد عملية تشكيل جدول النقل ننتقل إلى الخطوة الثانية و الممثلة تحديد الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة وحدوية و في حالة وجود أكثر من خانة فارغة لها نفس أقل تكلفة يتم اختيار الخانة التي تسمح بنقل أكبر كمية ممكنة.

3. مـلأ الخانـة الفـارغة:

في هذه الخطوة يتم ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة التي تم تحديدها في الخطوة السابقة. ملأ هذه الخانة يتم بأقل كمية بين عرض المنبع و طلب المصب و هذا ما يعبر عنه بالكتابة: $Min\ (a_i, b_j)$ و التي هي نفسها الكتابة: $Min\ (a_i, b_j)$

4. تحيين جدول النقل:

نعني بهذه الخطوة تسجيل جميع التغيرات التي تحصل لمعطيات جدول النقل بعد ملأ الخانة الفارغة في الخطوة رقم 03. هذه التغيرات التي تحصل تمس كل من الطلب و العرض.

5. اختبـار فيما إذا كان قد تم التوصل إلى حل الأساس المقبول أم لا:

إذا تم ملأ جميع خانات جدول النقل فإنه تم الحصول على حل الأساس المقبول و من ثم المرور إلى الخطوة رقم 06، أما إذا لم يتم ملأ جميع خانات جدول النقل فإنه لم بتم الحصول على حل الأساس المقبول و عليه نواصل ملأ الخانات الفارغة و ذلك بالعودة إلى الخطوة رقم 02.

6. قراءة حل الأسـاس المقبول و التحقق من قيود النموذج:

يتم في هذه الخطوة قراءة حل الأساس المقبول أي قيم متغيرات القرار انطلاقا من جدول حل الأساس المقبول الأخير المتحصل عليه ثم بعد ذلك نقوم بالتأكد من أن قيود النموذج محققة ليتم بعد ذلك إيجاد قيمة دالة الهدف الموافقة لهذا حل الأساس المقبول. و من أجل ذلك يكفي أن نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف.

سوف نحاول تطبيق هذه الخطوات على المثال أعلاه 01.05

الخطوة رقم 01: تشكيل جدول النقل:

هذه الخطوة هي نفسها الخطوة المتعلقة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i
C1	100	800	100	500	400	240
C2	500	500	300	600	700	160
C3	200	900	500	900	800	260
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660

الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة ذات أدنـى تكلفـة:

بتفحص التكاليف للخانات الفارغة يلاحظ أن الخانتين (1،1) و(1،3) هما ذات أقل و التي تساوي 100.

السؤال المطروح ما هي الخانة الفارغة التي يتم اختيارها في هذه الحالة.

- **اختيار الخانة (1،1):** يترتب عليه ملأ هذه الخانة بكمية تساوي $Min\ (b_1 = 120, a_1 = 240) = b_1 = 120$ و يعني ذلك أننا سوف ننقل كمية مقدارها 120 وحدة من المنبع C1 إلى المصب D1 بتكلفة 100 دج للوحدة الواحدة.
- **اختيار الخانة (1،3):** يترتب عليه ملأ هذه الخانة بكمية تساوي $Min\ (b_3 = 145, a_1 = 240) = b_3 = 145$ يعني ذلك أننا سوف ننقل كمية مقدارها 145 وحدة من المنبع C1 إلى المصب D3 بتكلفة 100 دج للوحدة الواحدة.

الاختيار الأول الممثل في نقل كمية مقدارها 120 وحدة بتكلفة 100 دج للوحدة الواحدة و الاختيار الثاني الممثل في نقل كمية مقدارها 145 وحدة بتكلفة 100 دج للوحدة الواحدة. فحتما أن المؤسسة تختار الاختيار الذي يسمح بنقل أكبر كمية و عليه فإنها سوف تختار الاختيار الثاني، أي أن من صالح المؤسسة أن تختار نقل كمية مقدارها 145 وحدة بتكلفة وحدوية تساوي 100 دج أحسن من اختيار نقل كمية مقدارها 120 وحدة بنفس التكلفة الوحدوية، معنى ذلك أنها سوف تختار الخانة الفارغة (1،3) التي تسمح لها بنقل أكبر كمية.

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفارغة:

بعد عملية تحديد الخانة الفارغة ذات أدنى تكلفة، ننتقل إلى الخطوة الممثلة في ملأ هذه الخانة الفارغة.

يتم ملأ هذه الخانة تبعا للقاعدة 01.03 بأقل كمية بين كل من طلب المصب و عرض المنبع أي : $Min\ (b_3 = 145, a_1 = 240) = b_3 = 145$. و عليه فإنه سوف يتم ملأ الخانة (1،3) بالكمية 145 كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100	800	100 145	500	400	240	95
C2	500	500	300 /	600	700	160	
C3	200	900	500 /	900	800	260	
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
			00				

بتفحص جدول النقل الجديد يلاحظ أن هناك بعض الخانات الفارغة معنى ذلك أن هناك إمكانية لملأ هذه الخانات معنى ذلك أنه لم يتم الحصول على حل الأساس المقبول بعد. و بغرض ملأ الخانات الفارغة المتبقية يجب العودة إلى الخطوة رقم 02.

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة ذات أدنـى تكلفـة: الخانة الفارغة ذات اقل تكلفة هي (1،1)

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفـارغة :

يتم ملأ الخانة (1،1) بأقل كمية بين كل من طلب المصب D1 و العرض الجديد للمنبع C1 أي: $Min\ (b_1 = 120, a_1' = 95) = a_1' = 95$. و عليه فإنه سوف يتم ملأ هذه الخانة بالكمية 95

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100 95	800 /	100 145	500 /	400 /	240	95
C2	500	500	300 /	600	700	160	
C3	200	900	500 /	900	800	260	
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	25		00				

العودة إلى الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة ذات أدنـى تكلفـة: (3،1)

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفـارغة : $Min\ (b_1' = 25, a_3 = 260) = b_1' = 25$

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100 95	800 /	100 145	500 /	400 /	240	95 00
C2	500 /	500	300 /	600	700	160	
C3	200 25	900	500 /	900	800	260	235
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	25 00		00				

العودة الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة ذات أدنـى تكلفـة: $(2،2)$

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفـارغـة: $Min\ (b_2=130, a_2=160)=b_2=130$

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	^{100} 95	^{800} /	^{100} 145	^{500} /	^{400} /	240	95 00
C2	^{500} /	^{500} 130	^{300} /	^{600}	^{700}	160	30
C3	^{200} 25	^{900} /	^{500} /	^{900}	^{800}	260	235
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	25		00				
	00						

العودة الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة ذات أدنـى تكلفـة: $(2،4)$

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفـارغـة: $Min\ (b_4=125, a_2'=30)=a_2'=30$

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	^{100} 95	^{800} /	^{100} 145	^{500} /	^{400} /	240	95 00
C2	^{500} /	^{500} 130	^{300} /	^{600} 30	^{700} /	160	30 00
C3	^{200} 25	^{900} /	^{500} /	^{900}	^{800}	260	235
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	25		00	95			
	00						

العودة الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة ذات أدنـى تكلفـة: $(3،5)$

الخطوة رقم 03: مـلأ الخانـة الفـارغـة: $Min\ (b_5=140, a_3'=235)=b_5=140$

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	^{100} 95	^{800} /	^{100} 145	^{500} /	^{400} /	240	95
C2	^{500} /	^{500} 130	^{300} /	^{600} 30	^{700} /	160	30 00
C3	^{200} 25	^{900} /	^{500} /	^{900}	^{800} 140	260	235 95
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	25		00	95	00		
	00						

بتفحص جدول النقل الجديد نلاحظ أنه بقيت خانة واحدة فارغة و هي الخانة (3،4) و التي يتم ملأها بـ:95

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i			
C1	100 95	800 /	100 145	500 /	400 /	240	95	00	
C2	500 /	500 130	300 /	600 30	700 /	160	30	00	
C3	200 25	900 /	500 /	900 95	800 140	260	235	95	00
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660			
	25		00	95	00				
	00			00					

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقا من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$$X_{11}=95, X_{12}=00, X_{13}=145, X_{14}=00, X_{15}=00$$
$$X_{21}=00, X_{22}=130, X_{23}=00, X_{24}=30, X_{25}=00$$
$$X_{31}=25, X_{32}=00, X_{33}=00, X_{34}=95, X_{35}=140$$

موزعة كما يلي:

1. متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي $(m+n-1)=(3+5-1)=07$

$$X_{11}=95, X_{13}=145, X_{22}=130, X_{24}=30, X_{31}=25, X_{34}=95, X_{35}=140$$

2. متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار

$$X_{12}=00, X_{14}=00, X_{15}=00, X_{21}=00, X_{23}=00, X_{25}=00, X_{32}=00, X_{33}=00$$

3. قيمة دالة الهدف: بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\begin{aligned}Z=&100(95)+800(00)+100(145)+500(00)+400(00)+\\&500(00)+500(130)+300(00)+600(30)+700(00)+\\&200(25)+900(00)+500(00)+900(95)+800(140)=309500\end{aligned}$$

$$Z=309500$$

07.05 – طريقة الفروق العظمى أو طريقة Vogel.

تعتبر طريقة Vogel من الطرق المستخدمة للحصول على حل أساس مقبول لنموذج النقل. كيفية الحصول على حل الأساس المقبول وفقا لهذه الطريقة نستعرضها في الخطوات أدناه:

خطوات الحل باستخدام طريقة Vogel

1. تشكيل جدول النقل

2. حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر و في كل عمود و تسجيل هذه الفروقات على يمين جدول النقل بالنسبة لفروقات الأسطر أما بالنسبة لفروقات الأعمدة فتسجل تحت جدول النقل.

3. اختيار و تحديد السطر أو العمود الموافق لأكبر فرق من بين الفروقات المتحصل عليها في الخطوة

2. إذا كان هناك أكثر من فرق يمثل أكبر الفروق ففي هذه الحالة يتم اختيار واحد لا على التعيين أي بطريقة عشوائية أو من الأفضل اختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على خانة فارغة ذات أقل تكلفة. إن وجد أكثر من سطر أو عمود يحتوي على خانة فارغة ذات نفس أقل تكلفة نختار السطر أو العمود ذو الخانة الفارغة التي تسمح بنقل أكبر كمية.

4. ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده في الخطوة 3.

5. تحيين جدول النقل:

نعني بهذه الخطوة تسجيل جميع التغيرات التي تحصل لمعطيات جدول النقل بعد ملأ الخانة الفارغة في الخطوة رقم 04. هذه التغيرات التي تحصل تمس كل من الطلب و العرض.

6. اختبار فيما إذا تم الحصول على حل الأساس المقبول أم لا. و يتم ذلك عندما يتم ملأ جميع الخانات الفارغة لجدول النقل. أما إذا لم يتم ذلك فهذا يعني أنه لم يتم الحصول على حل الأساس المقبول و من ثم العودة إلى الخطوة 2.

و بغرض توضيح أكثر لخطوات الحل باستخدام طريقة Vogel ، نأخذ معطيات المثال 01.05 أعلاه

الخطوة رقم 01: تشكيل جدول النقل:

هذه الخطوة هي نفسها الخطوة المتعلقة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و طريقة التكاليف الدنيا.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i
C1	100	800	100	500	400	240
C2	500	500	300	600	700	160
C3	200	900	500	900	800	260
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660

الخطوة رقم 02: حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر و في كل عمود:

- **بالنسبة للأسطر:**

– السطر رقم 01: اقل تكلفتين في هذا السطر هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (1،1) و (1،3) حيث أن تكلفة الخانة (1،1) تساوي $C_{11}=100$ و تكلفة الخانة (1،3) تساوي $C_{13}=100$ الفرق بينهما يساوي $100-100=00$. يتم تسجيل هذا الفرق على يمين جدول النقل كما هو موضح أدناه.

– السطر رقم 02: اقل تكلفتين في هذا السطر هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (2،3) و (2،1) أو (2،2) حيث أن تكلفة الخانة (2،3) تساوي $C_{23}=300$ و تكلفة الخانة (2،1) أو (2،2) تساوي $C_{21}=C_{22}=500$ الفرق بينهما يساوي $500-300=200$. يتم تسجيل هذا الفرق على يمين الجدول

– السطر رقم 03: اقل تكلفتين في هذا السطر هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (3،1) و (3،3) الفرق بينهما يساوي $500-200=300$. يتم تسجيل هذا الفرق على يمين جدول النقل كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100	800	100	500	400	240	00
C2	500	500	300	600	700	160	200
C3	200	900	500	900	800	260	300
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	100	300	200	100	300		

-بالنسبة للأعمدة:

- العمود رقم 01: اقل تكلفتين في هذا العمود هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (1،1) و (3،1) الفرق بينهما يساوي $100 = 100 - 200$. يتم تسجيل هذا الفرق تحت جدول النقل.
- العمود رقم 02 : اقل تكلفتين في هذا العمود هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (2،2) و (1،2) الفرق بينهما يساوي $300 = 500 - 800$. يتم تسجيل هذا الفرق تحت جدول النقل
- بنفس الطريقة يمكن التوصل إلى حساب فروق الأعمدة المتبقية و التي هي 200 ، 100 و 300 كما هي موضحة في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض a_i	
C1	100	800	100	500	400	240	00
C2	500	500	300	600	700	160	200
C3	200	900	500	900	800	260	300*
الطلب b_j	120	130	145	125	140	660	
	100	300	200	100	300		

الخطوة رقم 03: اختيار السطر أو العمود الموافق لأكبر فرق من بين الفروقات المتحصل عليها:

أعظم فرق هو 300 . هذا الفرق يوافق السطر رقم 03 و العمود رقم 02 و العمود رقم 05 ففي هذه الحالة يتم اختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على خانة فارغة ذات أقل تكلفة، و عليه يتم اختيار السطر رقم 03 لأنه يحتوي على الخانة الفارغة (3،1) ذات أقل تكلفة و التي تساوي $C_{31} = 200$. يتم الإشارة للسطر أو العمود المختار عادة بإشارة (*) كما هو موضح في جدول النقل أعلاه.

الخطوة رقم 04: ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده:

الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة هي (3،1) يتم ملأ ها الخانة بالكمية $X_{31} = Min\ (b_1 = 120, a_3 = 260) = 120$. كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

الخطوة رقم 05: تحيين جدول النقل:

بعدما تم ملأ الخانة (3،1) بالكمية 120 نجري مجموعة من التعديلات هي:

- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D1، فإن الطلب الجديد لهذا المصب أصبح معدوم بدلا من 120. لذلك سوف يتم توضيح هذا الطلب الجديد للمصب D1 في جدول النقل كما هو موضح أدناه.
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D1 من طرف المنبع C3، فهذا يعني أن هذا المصب D1 لا يمكن له أن يتلقي على أي كمية من المنبع C1 و لا كمية من المنبع C2 و بعبارة أخرى المصب D1 يتلقى كمية من المنبع C1 تساوي الصفر و يتلقى كمية من المنبع C2 تساوي الصفر. أي أننا سوف نملأ الخانات (1،1) و (2،1) بالقيمة **صفر**.
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D1 من طرف المنبع C3 فإن الكمية المتاحة على مستوى المنبع C3 تتغير من 260 لتصبح 140=120−260 ، معنى ذلك أن الكمية المتاحة على مستوى المنبع C3 أصبحت تساوي 140 بدلا من 260 كما هو موضح في الجدول أدناه.

	D1	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	a_i		
C1	100 **00**	800	100	500	400	**240**		00
C2	500 **00**	500	300	600	700	**160**		200
C3	200 **120**	900	500	900	800	**260**	**140**	300*
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**		
	00							
	100	300	200	100	300			

العودة إلى الخطوة رقم 02: حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر و في كل عمود:

– السطر رقم 01: اقل تكلفتين في هذا السطر هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (1،3) و (1،5) حيث أن تكلفة الخانة (1،3) تساوي $C_{13}=100$ و تكلفة الخانة (1،5) تساوي $C_{15}=400$ الفرق بينهما يساوي $400-100=300$. يتم تسجيل هذا الفرق على يمين جدول النقل كما هو موضح أدناه.

– السطر رقم 02: اقل تكلفتين في هذا السطر هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (2،3) و (2،2) حيث أن تكلفة الخانة (2،3) تساوي $C_{23}=300$ و تكلفة الخانة (2،2) تساوي $C_{22}=500$ الفرق بينهما يساوي $500-300=200$. يتم تسجيل هذا الفرق على يمين جدول النقل كما هو موضح أدناه.

– السطر رقم 03: اقل تكلفتين في هذا السطر هما تلك المتعلقتين بالخانتين الفارغتين (3،3) و (3،5) حيث أن تكلفة الخانة (3،3) تساوي $C_{33}=300$ و تكلفة الخانة (3،5) تساوي $C_{35}=800$ الفرق بينهما يساوي $800-300=500$. يتم تسجيل هذا الفرق على يمين جدول النقل كما هو موضح أدناه.

– العمود رقم 01: لا يتم حساب الفرق بين اقل تكلفتين لهذا العمود لأنه لا يحتوي على خانات فارغة.

– أما بالنسبة لفروق الأعمدة المتبقية فيتم حساب هذه الفروق بنفس الطريقة. و عليه فإن فروق الأعمدة المتبقية هي 300، 200 ، 100 و 300 كما هي موضحة في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i			
C1	100 **/**	800	100	500	400	**240**		00	300*
C2	500 **/**	500	300	600	700	**160**		200	200
C3	200 **120**	900	500	900	800	**260**	**140**	300*	300
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**			
	00								
	100	300	200	100	300				
	/	300	200	100	300				

الخطوة رقم 03: اختيار السطر أو العمود الموافق لأكبر فرق من بين الفروق المتحصل عليها:

أعظم فرق هو 300 . هذا الفرق يوافق السطر رقم 01 و السطر رقم 03 و العمود رقم 02 و العمود رقم 05 ففي هذه الحالة يتم اختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على خانة فارغة ذات أقل تكلفة، و عليه يتم اختيار السطر رقم 01 لأنه يحتوي على الخانة الفارغة (1،3) ذات أقل تكلفة و التي تساوي $C_{13}=100$.

الخطوة رقم 04: ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده.

الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة هي (1،3) يتم ملأها بالكمية $X_{13}=Min\ (b_3=145, a_1=240)$.

الخطوة رقم 05: تحيين جدول النقل

- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D3، فإن الطلب الجديد لهذا المصب أصبح معدوم. لذلك سوف يتم توضيح هذا الطلب الجديد للمصب D3 في جدول النقل كما هو موضح في الجدول أدناه.
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D3 من طرف المنبع C1، فهذا يعني أن هذا المصب D3 لا يمكن له أن يتلقي أي كمية من المنبع C2 و لا كمية من المنبع C3 و بعبارة أخرى المصب D3 يتلقى أو يحصل على كمية من المنبع C2 تساوي الصفر و يتلقى كمية من المنبع C3 تساوي الصفر. أي أننا سوف نملأ الخانات (2،3) و (3،3) بالقيمة **صفر**..
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D3 من طرف المنبع C1 فإن الكمية المتاحة على مستوى المنبع C1 تتغير من 240 لتصبح $240-145=95$.

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i			
C1	100 **/**	800	100 **145**	500	400	**240**	**95**	00	300*
C2	500 **/**	500	300 **/**	600	700	**160**		200	200
C3	200 **120**	900	500 **/**	900	800	**260**	**140**	300*	300
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**			
	00		**00**						
	100	300	200	100	300				
	/	300	200	100	300				

– حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر و في كل عمود:

الفرق بين أقل تكلفتين للأسطر 01 ، 02 و 03 هي على التوالي 100، 100 و 100 كما هي موضحة.

الفرق بين أقل تكلفتين للأعمدة 02 ، 04 و 05 هي على التوالي 300 ، 100 و 300. كما هي موضحة

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i				
C1	100 /	800	100 145	500	400	**240**	**95**	00	300*	100
C2	500 /	500	300 /	600	700	**160**		200	200	100
C3	200 120	900	500 /	900	800	**260**	**140**	300*	300	100
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**				
	00		**00**							
	100	300	200	100	300					
	/	300	200	100	300					
	/	300	/	100	300*					

– اختيار السطر أو العمود الموافق لأكبر فرق من بين الفروق المتحصل عليها:

أعظم فرق هو 300. هذا الفرق يوافق العمود رقم 02 و العمود رقم 05 ففي هذه الحالة يتم اختيار العمود 5

– ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده.

الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة هي (5،1) يتم ملأ هذه الخانة بالكمية 95 $X_{15} = Min\left(b_5 = 140, a_1^{/} = 95\right) = 95$

– تحيين جدول النقل:

- بما أنه تم تلبية جزء من طلب المصب D5، هذا الجزء يساوي 95 التي تم ملأ بها الخانة (5،1) و عليه فإن الطلب الجديد لهذا المصب أصبح يساوي $140 - 95 = 45$ كما هو موضح في الجدول أدناه.
- بما أنه تم تلبية جزء من طلب المصب D5 من طرف كل المتاح على مستوى المنبع C1 فإن الكمية المتاحة على مستوى المنبع C1 لتصبح 00 كما هو موضح في الجدول أدناه.
- بما أن العرض الجديد للمنبع C1 أصبح يساوي الصفر، فإنه لا يمكن لهذا المنبع أن ينقل منه كميات إلى كل من المصبات D2 و D4 بعبارة أخرى المصبان يحصلا على كمية معدومة من المنبع C1

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i					
C1	100 /	800 /	100 145	500 /	400 95	**240**	**95**	**00**	00	300*	100
C2	500 /	500	300 /	600	700	**160**			200	200	100
C3	200 120	900	500 /	900	800	**260**	**140**		300*	300	100
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**					
	00		**00**		**45**						
	100	300	200	100	300						
	/	300	200	100	300						
	/	300	/	100	300*						

– حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر و في كل عمود:

انطلاقا من جدول النقل الأخير، الفرق بين أقل تكلفتين للأسطر 02 و 03 هي على التوالي 100 ، 100. الفرق بين أقل تكلفتين للأعمدة 02 ، 04 و 05 هي على التوالي 400 ، 300 و 100. كما هي موضحة في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i						
C1	100 /	800 /	100 145	500 /	400 95	240	95	00	00	300*	100	/
C2	500 /	500	300 /	600	700	160			200	200	100	100
C3	200 120	900	500 /	900	800	260	140		300*	300	100	100
b_j	120	130	145	125	140	660						
	00		00		45							
	100	300	200	100	300							
	/	300	200	100	300							
	/	300	/	100	300*							
	/	400*	/	300	100							

– اختيار السطر أو العمود الموافق لأكبر فرق من بين الفروق المتحصل عليها:

انطلاقا من جدول النقل أعلاه، فإن أعظم فرق هو 400 . هذا الفرق يوافق العمود رقم 02.

– ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده.

الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة هي (2،2) يتم ملأها بالكمية $X_{22} = Min\ (b_2 = 130, a_2 = 160) = 130$.

– تحيين جدول النقل:

- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D2، بكمية تساوي (130) و التي تمثل الكمية التي تم ملأ بها الخانة (2،2) و عليه فإن الطلب الجديد لهذا المصب أصبح يساوي00=130-130 كما هو موضح في الجدول أدناه.
- بما أنه تم تلبية كل طلب المصب D2 من طرف جزء من متاح أو عرض المنبع C2 فإن الكمية المتاحة على مستوى المنبع C1 تتغير من 160 لتصبح $30 = 130 - 160$، معنى ذلك أن الكمية المتاحة على مستوى المنبع C2 أصبحت تساوي 30 بدلا من 160 كما هو موضح في الجدول أدناه.
- بما أن طلب المصب D2 تم تلبيته كليتا من عرض المنبع C2، فإن هذا لمصب D2 لا يمكنه أن يتلقى كميات من المنبع C3، بعبارة أخرى المصب D2 يتلقى أو يحصل على كمية من المنبع C3 تساوي الصفر أي أننا سوف نملأ الخانة (2،3) بالقيمة **صفر** كما هو موضح في الجدول أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i						
C1	^{100} **00**	^{800} **00**	^{100} **145**	^{500} **00**	^{400} **95**	**240**	**95**	**00**	00	300*	100	/
C2	^{500} **00**	^{500} **130**	^{300} **00**	^{600}	^{700}	**160**	**30**		200	200	100	100
C3	^{200} **120**	^{900} **00**	^{500} **00**	^{900}	^{800}	**260**	**140**		300*	300	100	100
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**						
	00	**00**	**00**		**45**							
	100	300	200	100	300							
	/	300	200	100	300							
	/	300	/	100	300*							
	/	400	/	300	100							

- **حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر و في كل عمود:**

انطلاقا من جدول النقل الأخير، الفرق بين أقل تكلفتين للأسطر 02 و 03 هي على التوالي 100 ، 100 و 100 كما هي موضحة في جدول النقل أدناه.

الفرق بين أقل تكلفتين للأعمدة 04 و 05 هي على التوالي 300 و 100. كما هي موضحة في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i							
C1	^{100} **00**	^{800} **00**	^{100} **145**	^{500} **00**	^{400} **95**	**240**	**95**	**00**	00	300*	100	/	/
C2	^{500} **00**	^{500} **130**	^{300} **00**	^{600}	^{700}	**160**	**30**		200	200	100	100	100
C3	^{200} **120**	^{900} **00**	^{500} **00**	^{900}	^{800}	**260**	**140**		300*	300	100	100	100
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**							
	00	**00**	**00**		**45**								
	100	300	200	100	300								
	/	300	200	100	300								
	/	300	/	100	300*								
	/	400	/	300	100								
	/	/	/	300*	100								

- **اختيار السطر أو العمود الموافق لأكبر فرق من بين الفروق المتحصل عليها:**

انطلاقا من جدول النقل أعلاه، فإن أعظم فرق هو 300 . هذا الفرق يوافق العمود رقم 04.

- **ملأ الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده.**

الخانة الفارغة ذات أقل تكلفة هي (4،2) يتم ملأها بالكمية $X_{24} = Min\ \left(b_4 = 125, a_2' = 30\right) = 30$

- **تحيين جدول النقل:**

الطلب الجديد للمصب D4 يساوي 95 بدلا من 125 كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

العرض الجديد للمنبع C2 يساوي 00 بدلا من 30 كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

الخانة (5،2) تملأ بالكمية صفر (0) كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i							
C1	100 **00**	800 **00**	100 **145**	500 **00**	400 **95**	**240**	**95**	**00**	00	300*	100	/	/
C2	500 **00**	500 **130**	300 **00**	600 **30**	700 **/**	**160**	**30**	**00**	200	200	100	100	100
C3	200 **120**	900 **00**	500 **00**	900	800	**260**	**140**		300*	300	100	100	100
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**							
	00	**00**	**00**	**95**	**45**								
	100	300	200	100	300								
	/	300	200	100	300								
	/	300	/	100	300*								
	/	400	/	300	100								
	/	/	/	300*	100								

بالعودة إلى الخطوة رقم 02 و من ثم الخطوات الموالية نصل إلى جدول النقل الأخير التالي:

	D1	D2	D3	D4	D5	a_i			*						
C1	100	800	100 **145**	500	400 **95**	**240**	**95**	**00**		00	300*	100	/	/	/
C2	500	500 **130**	300	600 **30**	700	**160**	**30**	**00**		200	200	100	100	100	/
C3	200 **120**	900	500	900 **95**	800 **45**	**260**	**140**	**95**	**00**	300*	300	100	100	100	100*
b_j	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**									
	00	**00**	**00**	**95**	**45**										
				00	**00**										
	100	300	200	100	300										
	/	300	200	100	300										
	/	300	/	100	300*										
	/	400	/	300	100										
	/	/	/	300*	100										
	/	/	/	/	/										

1. متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي 07 $(m+n-1)=(3+5-1)=07$

$$X_{13}=145, X_{15}=95, X_{22}=130, X_{24}=30, X_{31}=120, X_{34}=95, X_{35}=45$$

2. متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار

$$X_{11}=00, X_{12}=00, X_{14}=00, X_{21}=00, X_{23}=00, X_{25}=00, X_{32}=00, X_{33}=00$$

3. قيمة دالة الهدف: $Z=281000$

08.05 – طريقة Dantzig أو Stepping Stone:

تهدف هذه الطريقة إلى الوصول إلى الحل الأمثل و هذا انطلاقا من أحد حلول الاساس المقبولة التي تم التطرق اليها من خلال الفقرات السابقة أعلاه

خطوات الحل باستخدام طريقة Dantzig **أو** Stepping Stone:

1. تشكيـل جـدول النقـل:

2. إيجـاد أول حـل أسـاس مقبـول:

يتم إيجاد أول حل أساس مقبول باستخدام أحدى الطرق الثلاثة التالية: طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا أو طريقة Vogel.

3. اختبـار أمثليـة الحـل (تقييـم الخانـات الفارغة):

نعني بهذه الخطوة النظر فيما كان حل الأساس المقبول المتحصل عليه هو حل أمثل أم لا. عملية الاختبار تتم عن طريق تقييم الخانات الفارغة. عملية التقييم تتم عن طريق حساب القيم $\boldsymbol{\Delta_{ij}}$ لكل خلية فارغة. و هنا نميز :

- **جميع** Δ_{ij} **موجبة أو معدومة** $(\Delta_{ij} \geq 00)$ **فإن حل الأساس المقبول هو حل أمثل**
- **ليست جميع** Δ_{ij} **موجبة أو معدومة أي هناك بعض أو كل** Δ_{ij} **سالبة** $(\Delta_{ij} < 00)$ **فإن حل الأساس المقبول ليس بحل أمثل و عليه يجب المرور إلى الخطوة 4.**

4. تحديد الخانـة الفارغة التي تدخل إلى الحل:

تبعا للقاعدة 02.03 الخانة الفارغة (المتغيرة خارج الأساس المعدومة) التي تدخل إلى الحل (تصبح متغيرة أساس موجبة) هي الخانة الموافقة لأقل Δ_{ij} سالب أي $Min\left(\Delta_{ij}\ ,\ \Delta_{ij} < 00\right)$.

5. تحديد أعظم كميـة للخانـة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل:

تبعا للقاعدة 03.03 أعظم كمية ممكن أن تأخذها الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل هي (تساوي) أقل كمية X_{ij} للخانات المملوءة التي تم طرح منها $\theta = 01$ أي إضافة لها $-\theta = -01$ لمسار هذه الخانة الفارغة.

6. استنتـاج حل الأساس المقبول الجديـد:

يتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقا من جدول النقل الجديد المتحصل عليه بعد إدخال الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل.

7. العـودة إلـى الخطوة 3:

سوف يتم تناول هذه الخطوات بالتفصيل من خلال المثال أدناه:

مثـال 04.03:

جدول النقل أدناه يقدم حل أساس مقبول محصل عليه بإستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 **20**	80 /	40 /	**80**
S2	50 /	20 **60**	30 **40**	10 /	**100**
S3	40 /	20 /	30 **50**	60 **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

- **متغيرات الأساس الموجبة:** $X_{11}=60, X_{12}=20, X_{22}=60, X_{23}=40, X_{33}=50, X_{34}=95$
- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** $X_{13}=00, X_{14}=00, X_{21}=00, X_{24}=00, X_{31}=00, X_{32}=00$
- **قيمـة دالـة الهدف:** $Z=11700$

الخطوة رقم 01: تقييم الخانات الفارغة:

نعني بعملية تقييم الخانات الفارغة فيما إذا كان إدخال هذه الخانات إلى الحل يؤدي إلى تخفيض أو زيادة في قيمة دالة الهدف Z. عملية تقييم الخانات الفارغة تتم كالتالي: بتفحص جدول النقل أعلاه نلاحظ أن هناك 06 خانات فارغة هي: $S1D3$, $S1D4$, $S2D1$, $S2D4$, $S3D1$, $S3D2$

1-/ تقييم الخانة الفارغة (1،3) و التي يرمز لها بالرمز $S1D3$:

حتى يتم تقييم الخانة $S1D3$ نحاول إدخال هذه الخلية إلى الحل و ذلك عن طريق ملئها بكمية موجبة و لتكن وحدة واحدة و التي نرمز لها بالرمز $\theta=+01$، كما هو موضح في جدول النقل أدناه

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 **20**	$\theta=+01$ 80 /	40 /	**80**
S2	50 /	20 **60**	30 **40**	10 /	**100**
S3	40 /	20 /	30 **50**	60 **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

إن ملأ الخانة $S1D3$ بالقيمة الموجبة $\theta=+01$ أدى إلى اختلال التوازن على مستوى السطر الأول و العمود الثالث حيث أن:

- بالنسبة للسطر الأول أصبح إجمالي الكمية المنقولة من المنبع $S1$ تساوي $60+20+(\theta=+01)=81$ أكبر من عرض هذا المنبع الذي يساوي $a_1=80$. مقدار اختلال السطر هو القيمة (الكمية) الموجبة $\theta=+01$.
- بالنسبة للعمود الثالث أصبح إجمالي الكمية المنقولة إلى هذا المصب $D3$ تساوي $91=50+4+(\theta=+01)$ أكبر من طلب هذا المصب الذي يساوي $b_3=90$ مقدار اختلال العمود هو القيمة (الكمية) الموجبة $\theta=+01$.

بغرض استعادة توازن السطر الأول يجب تخفيض القيمة الموجبة $\theta = +01$ (التي تمثل مقدار الاختلال) من إحدى الخانات المملوءة لهذا السطر. الخانة المملوءة التي يتم إنقاص منها الكمية $\theta = +01$ هي الخانة $S1D2$ (و ليس $S1D1$ و سيتم معرفة السبب لاحقا) كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

!	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 $-\theta = -01$ **20**	80 $+\theta = +01$ /	40 /	**80**
S2	50 /	20 **60**	30 **40**	10 /	**100**
S3	40 /	20 /	30 **50**	60 **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

بغرض استعادة توازن العمود الثالث يجب تخفيض أو إنقاص القيمة الموجبة $\theta = +01$ (التي تمثل مقدار الاختلال) من إحدى الخانات المملوءة لهذا العمود. الخانة المملوءة التي يتم إنقاص منها الكمية $\theta = +01$ هي الخانة $S2D3$ كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 $-\theta = -01$ **20**	80 $+\theta = +01$ /	40 /	**80**
S2	50 /	20 **60**	30 $-\theta = -1$ **40**	10 /	**100**
S3	40 /	20 /	30 **50**	60 **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

– إن طرح أو تخفيض الكمية $\theta = +01$ من الخانة المملوءة $S1D1$ للسطر الأول سمح لنا باستعادة التوازن للسطر الأول و لكن ترتب عنه اختلال العمود الثاني حيث أن أصبحت الكمية المنقولة لمصب هذا العمود $D2$ تساوي $79 = 60 + 20 + (-\theta = -01)$ أقل من طلب هذا المصب الذي يساوي $b_2 = 80$. مقدار اختلال العمود هو القيمة (الكمية) الموجبة $\theta = +01$.

– إن طرح أو تخفيض الكمية $\theta = +01$ من الخانة المملوءة $S2D3$ للعمود الثالث سمح لنا باستعادة التوازن لهذا العمود و لكن ترتب عنه اختلال السطر الثاني حيث أصبح مجموع الكميات المنقولة من منبع هذا السطر $S2$ يساوي $99 = 40 + (-\theta = -01) + 60$ أقل من عرض هذا المصب الذي يساوي $a_2 = 100$. مقدار اختلال العمود هو القيمة (الكمية) الموجبة.

السؤال الذي يطرح هو التالي:

– **كيف يتم استعادة توازن السطر هذا الاختلال الجديد أي اختلال السطر الثاني و العمود الثالث.**

– الإجابة هي التالية:

يتم استعادة توازن السطر الثاني و العمود الثالث عن طريق إضافة القيمة الموجبة $\theta=+01$ (التي تمثل مقدار الاختلال) إلى إحدى الخانات المملوءة ل السطر الثاني و العمود الثالث. الخانة المملوءة التي يتم إضافة إليها الكمية $\theta=+01$ هي الخانة $S2D2$ كما هو موضح في جدول النقل أدناه.

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 $-\theta=-01$ **20**	80 $+\theta=+01$ /	40 /	**80**
S2	50 /	20 $+\theta=+01$ **60**	30 $-\theta=-1$ **40**	10 /	**100**
S3	40 /	20 /	30 **50**	60 **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

بإضافة الكمية $\theta=+01$ إلى الخانة $S2D2$ تم الحصول على توازن جميع أسطر و أعمدة جدول النقل.

- إن الإجراء الممثل في:

- إضافة $+\theta=+1$ و إضافة $-\theta=-1$ في الأربع خانات و الممثل بأسهم يسمى مسار (Parcours) كما هو موضح في الجدول أدناه

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 $-\theta=-01$ **20**	80 $+\theta=+01$ /	40 /	**80**
S2	50 /	20 $+\theta=+01$ **60**	30 $-\theta=-1$ **40**	10 /	**100**
S3	40 /	20 /	30 **50**	60 **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

حيث أن المسار يوضح الخانات التي خضعت لعملية الزيادة و النقصان. هذا المسار يمكن التعبير عنه بـ: $S1D3 \rightarrow S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D3$ و الذي هو نفسه المسار التالي: $S1D3 \rightarrow S2D3 \rightarrow S2D2 \rightarrow S1D2$

السؤال الذي يطرح هو التالي:

ما هو أثر إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل على التكلفة الإجمالية للنقل، بعبارة أخرى هل إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل يترتب عنه زيادة في قيمة التكلفة الإجمالية للنقل أم نقصان في قيمة هذه الأخيرة.

الإجابة هي التالية:

بغرض معرفة أثر إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل على التكلفة الإجمالية للنقل يجب أن نتتبع هذا الأثر كما يلي:

إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل ترتب عنه إنجاز العمليات الأربع التالية:

- إضافة الكمية $+\theta=+1$ إلى الخانة $S1D3$ و بما أن التكلفة الوحدوية لهذه الخانة تساوي $C_{13}=80$ فيترتب عليه زيادة في التكلفة الإجمالية للنقل تقدر بـ: $80\times(+\theta=+1)=+80$ أي تغير في التكلفة بمقدار يساوي $+80$.

- إنقاص الكمية $+\theta=+1$ و الذي هو إضافة الكمية $-\theta=-1$ إلى الخانة $S1D2$ و بما أن التكلفة الوحدوية لهذه الخانة تساوي $C_{12}=60$ فيترتب عليه انخفاض في التكلفة الإجمالية للنقل تقدر بـ $60\times(-\theta=-1)=-60$ أي تغير في التكلفة بمقدار يساوي -60.
- إضافة الكمية $+\theta=+1$ إلى الخانة $S2D2$ و بما أن التكلفة الوحدوية لهذه الخانة تساوي $C_{22}=20$ فيترتب عليه زيادة في التكلفة الإجمالية للنقل تقدر بـ: $20\times(+\theta=+1)=+20$ أي تغير في التكلفة بمقدار يساوي $+20$.
- إنقاص الكمية $+\theta=+1$ و الذي هو إضافة الكمية $-\theta=-1$ إلى الخانة $S2D3$ و بما أن التكلفة الوحدوية لهذه الخانة تساوي $C_{23}=30$ فيترتب عليه انخفاض في التكلفة الإجمالية للنقل تقدر بـ $30\times(-\theta=-1)=-30$ أي تغير في التكلفة بمقدار يساوي -30.

و منه يصبح أثر إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل على التكلفة الإجمالية للنقل هو التالي:

$$+80-60+20-30=+10$$

القيمة $+10$: تمثل نتيجة عملية تقييم الخلية الفارغة $S1D3$ و التي تعني أن إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية مقداره وحدة واحدة $+\theta=+1$ يترتب عنه تغير في التكلفة الإجمالية للنقل بالمقدار $+10$. و بما أن المقدار $+10$ موجب فإنه يمثل مقدار زيادة التكلفة الإجمالية للنقل في حالة إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل. بذلك نخلص إلى أن:

- إدخال الخلية الفارغة $S1D3$ إلى الحل يؤدي إلى ارتفاع التكلفة الإجمالية للنقل.

يرمز لنتيجة عملية تقييم أي خانة فارغة $SiDj$ بالرمز Δ_{ij}. و عليه فإن نتيجة تقييم الخانة الفارغ $S1D3$ يرمز لها بالرمز Δ_{13} حيث أن: $\Delta_{13}=+80-60+20-30=+10$. يمكن تلخيص عملية تقييم الخانة الفارغة $S1D3$ في جدول كما يلي:

Δ_{ij}	**المســار**	**الخانـة الفارغة**
$\Delta_{13}=+80-60+20-30=+10$	$S1D3\to S1D2\to S2D2\to S2D3$	$S1D3$

تبعا لنتيجة التقييم يتضح أنه من الأحسن عدم إدخال هذه الخانة إلى الحل، و البحث عن خانات فارغة أخرى قد يؤدي إدخالها إلى الحل تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل، و من أجل ذلك نقوم بمواصلة تقييم الخانات الفارغة المتبقية. بالاستعانة بالشرح المفصل أعلاه لتقييم الخانة $S1D3$ يمكن تقييم الخانات الفارغة المتبقية كما توضح الجداول أدناه:

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S1D4$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	$-\theta=-1$ ^{60} **20**	^{80} /	$+\theta=1$ ^{40} /
^{50} /	$+\theta=1$ ^{20} **60**	$-\theta=-1$ ^{30} **40**	^{10} /
^{40} /	^{20} /	$+\theta=1$ ^{30} **50**	$-\theta=-1$ ^{60} **70**
60	**80**	**90**	**70**

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S2D1$

D1	D2	D3	D4
$-\theta=-1$ ^{40} **60**	$+\theta=+1$ ^{60} **20**	^{80} /	^{40} /
$+\theta=+1$ ^{50} /	$-\theta=-1$ ^{20} **60**	^{30} **40**	^{10} /
^{40} /	^{20} /	^{30} **50**	^{60} **70**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S1D4$

$$S1D4 \to S1D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3 \to S3D4$$
$$\Delta_{14} = +40-60+20-30+30-60 = -60$$

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S2D1$

$$S2D1 \to S2D2 \to S1D2 \to S1D1$$
$$\Delta_{21} = +50-20+60-40 = +50$$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S2D4$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	^{60} **20**	^{80} /	^{40} /
^{50} /	^{20} **60**	$-\theta=-1$ ^{30} **40**	$+\theta=+1$ ^{10} /
^{40} /	^{20} /	$+\theta=+1$ ^{30} **50**	$-\theta=-1$ ^{60} **70**
60	**80**	**90**	**70**

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S3D1$

D1	D2	D3	D4
$-\theta=-1$ ^{40} **60**	$+\theta=+1$ ^{60} **20**	^{80} /	^{40} /
^{50} /	$-\theta=-1$ ^{20} **60**	$+\theta=+1$ ^{30} **40**	^{10} /
$+\theta=+1$ ^{40} /	^{20} /	$-\theta=-1$ ^{30} **50**	^{60} **70**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S2D4$

$$S2D4 \to S2D3 \to S3D3 \to S3D5$$
$$\Delta_{24} = +10-30+30-60 = -50$$

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S3D1$

$$S3D1 \to S1D1 \to S1D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3$$
$$\Delta_{31} = +40-40+60-20+30-30 = +40$$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S3D2$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	^{60} **20**	^{80} /	^{40} /
^{50} /	$-\theta=-1$ ^{20} **60**	$+\theta=+1$ ^{30} **40**	^{10} /
^{40} /	$+\theta=+1$ ^{20} /	$-\theta=-1$ ^{30} **50**	^{60} **70**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S3D2$

$$S3D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3$$
$$\Delta_{32} = +20-20+30-30 = 00$$

يمكن تلخيص نتائج تقييم الخانات الفارغة في الجدول أدناه:

الخانة الفارغة	المســـار	Δ_{ij}
$S1D3$	$S1D3 \rightarrow S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D3$	$\Delta_{13} = 80 - 60 + 20 - 30 = +10$
$S1D4$	$S1D4 \rightarrow S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D3 \rightarrow S3D3 \rightarrow S3D4$	$\Delta_{14} = 40 - 60 + 20 - 30 + 30 - 60 = -60$
$S2D1$	$S2D1 \rightarrow S2D2 \rightarrow S1D2 \rightarrow S1D1$	$\Delta_{21} = 50 - 20 + 60 - 40 = +50$
$S2D4$	$S2D4 \rightarrow S2D3 \rightarrow S3D3 \rightarrow S3D5$	$\Delta_{24} = 10 - 30 + 30 - 60 = -50$
$S3D1$	$S3D1 \rightarrow S1D1 \rightarrow S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D3 \rightarrow S3D3$	$\Delta_{31} = 40 - 40 + 60 - 20 + 30 - 30 = +40$
$S3D2$	$S3D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D3 \rightarrow S3D3$	$\Delta_{32} = 20 - 20 + 30 - 30 = 00$

أما بالنسبة لتفسير نتائج تقييم الخانات الفارغة فنوردها فيما يلي:

- $\Delta_{13} = +10$**:** يعني أن إدخال الخانة الفارغة $S1D3$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية مقدارها وحدة واحدة $\theta = +01$ يترتب عنه **زيادة و ارتفـاع** التكلفة الإجمالية للنقل بـ: $\Delta_{13} = +10$ وحدات نقدية. و بالتالي نخلص إلى أن $\Delta_{13} = +10$ يمثل مقدار تغير **(بالضبط زيادة)** التكلفة الإجمالية للنقل عند إدخال الخانة $S1D3$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية مقدارها وحدة واحدة $\theta = +01$.
- $\Delta_{14} = -60$**:** يعني أن إدخال الخانة الفارغة $S1D4$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية مقدارها وحدة واحدة $\theta = +01$ يترتب عنه **انخفاض و نقص** التكلفة الإجمالية للنقل بـ 60 وحدات نقدية. و بالتالي نخلص إلى أن $\Delta_{14} = -60$ يمثل مقدار تغير **(بالضبط انخفاض)** التكلفة الإجمالية للنقل عند إدخال الخانة $S1D4$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية مقدارها وحدة واحدة $\theta = +01$
- $\Delta_{32} = 00$**:** يعني أن إدخال الخانة الفارغة $S3D2$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية مقدارها وحدة واحدة $\theta = +01$ يترتب عنه **تغير** التكلفة الإجمالية للنقل بـ 00 وحدات نقدية. بعبارة أخرى لا يؤدي إلى تغير التكلفة الإجمالية للنقل.

الخطوة رقم 02: تحديد الخانـة الفارغـة التـي تـدخل إلـى الحل:

لتحديد الخانة الفارغة التي يتم اختيارها لتدخل إلى الحل نعتمد على نتائج تقييم الخانات الفارغة المتوصل إليها في الخطوة رقم 01 أعلاه. أو بعبارة أخرى نعتمد على قيم Δ_{ij}.

سوف يتم اختيار الخانة الفارغة $S1D4$ لأنها يترتب عليها تغير التكلفة بـ $\Delta_{14} = -60$ و الذي يعني انخفاض التكلفة بـ 60 من أجل كل وحدة $\theta = +01$ مضافة إلى هذه الخانة الفارغة.

القاعدة 02.03 : المتعلقـة بتحديد الخليـة الفارغة التـي تدخل إلى الحل:

الخليـة الفارغة التـي يتـم اختيـارها للدخـول إلى الحـل هي الخليـة الفارغـة ذات أقـل Δ_{ij} سـالـب و هذا ما يعبر عنـه رياضيا بالكتابـة التاليـة:

$$Min \left(\Delta_{ij} \;\; , \;\; \Delta_{ij} < 00 \right)$$

بالنسبة للمثال أعلاه، الخلية الفارغة المرشحة لأن تدخل إلى الحل هي $S1D4$. إدخال هذه الخلية إلى الحل يكون عن طريق ملئها.

- ملأ هذه الخلية بكمية مقدارها بوحدة $\theta = +01$ يترتب عليه تغير التكلفة بـ: $\theta \times \Delta_{14} = 1 \times (-60) = -60$ و الذي يعني انخفاض التكلفة بـ: 60.
- ملأ هذه الخلية بكمية مقدارها بوحدتين $\theta = +02$ يترتب عليه تغير التكلفة بـ: $\theta \times \Delta_{14} = 0 \times (-60) = -120$ و الذي يعني انخفاض التكلفة بـ: 120
- ملأ هذه الخلية بكمية مقدارها بوحدة $\theta = +03$ يترتب عليه تغير التكلفة بـ: $\theta \times \Delta_{14} = 3 \times (-60) = -180$ و الذي يعني انخفاض التكلفة بـ: 180
- ....
- ....
- ....

نلاحظ أنه كلما تم ملأ الخانة المرشحة للدخول $S1D4$ بكمية أكبر كلما ترتيب عن ذلك انخفاض في التكلفة (قيمة دالة الهدف Z) بمقدار أكبر.

السؤال الذي يطرح هو التالي:

- ما هي أكبر و أعظم كمية يمكن إضافتها الخانة المرشحة للدخول $S1D4$ أو بعبارة أخرى ما هي أعظم قيمة لـ θ.

- الإجابة هي موضوع الفقرة الموالية و التي تشكل الخطوة الثالثة من خطوات الحصول على الحل الأمثل

الخطوة رقم 03: تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل: (تحديد أعظم قيمة لـ θ)

إن أعظم كمية (قيمة لـ θ) يمكن أن نملأ بها الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل تحددها القاعدة التالية:

القاعدة 03.03 : المتعلقة بتحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل:

أعظم كمية ممكن أن تأخذها الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل هي (تساوي) أقل كمية X_{ij} للخانات المملوءة التي تم طرح منها $-\theta = -01$ لمسار لهذه الخانة الفارغة.

بتتبع مسار الخانة الفارغة $S1D4$ المرشحة للدخول إلى الحل نلاحظ أن الخانات المملوءة التي تحتوي على $-\theta = -01$ هي:

الخانة المملوءة $S1D2$: كمية هذه الخانة هي $X_{12} = 20$

الخانة المملوءة $S2D3$: كمية هذه الخانة هي $X_{23} = 40$

الخانة المملوءة $S3D4$: كمية هذه الخانة هي $X_{34} = 70$

أقل كمية من بين كميات الخانات المملوءة أعلاه هي الكمية $X_{12} = 20$ أي:

$$Min\ \ (X_{12} = 20, X_{23} = 40, X_{34} = 70) = X_{12} = 20$$

و عليه فإن أعظم كمية (أعظم قيمة لـ θ) يمكن أن نملأ بها الخانة الفارغة $S1D4$ المرشحة للدخول إلى الحل هي الكمية $\theta = 20$. السؤال الذي قد يطرح الآن هو التالي:

– ما أثر إدخال الخلية الفارغة $S1D4$ على قيمة دالة الهدف أو بعبارة أدق ما هو أثر إدخال هذه الخلية على حل الأساس المقبول الأول.

الإجابة على هذا السؤال هي موضوع الفقرة الموالية و التي تشكل الخطوة الثالثة من خطوات الحصول على الحل الأمثل باستخدام طريقة Dantzig.

الخطوة رقم 04: استنتـاج حل الأسـاس المقبـول الجديـد:

كما هو معلوم يتم قراءة أو استنتاج حل الأساس المقبول انطلاقا من جدول النقل، و عليه فإنه سوف يتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقا من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه من جدول النقل المتحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية بعد إدخال الخلية الفارغة $S1D4$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية $\theta = 20$، و يتم ذلك كما يلي:

بتتبع مسار الخلية الفارغة $S1D4$:

$$S1D4 \to S1D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3 \to S3D4$$

كما هو موضح في جدول النقل أدناه نلاحظ أن:

ملأ الخانة الفارغة $S1D4$ عن طريق إضافة كمية $\theta = 20$ يتطلب بغرض المحافظة على توازن أسطر و أعمدة جدول النقل ما يلي:

- طرح كمية $\theta = 20$ (و الذي يعني إضافة $-\theta = -20$) من الخانة المملوءة $S1D2$
- إضافة كمية $\theta = 20$ من الخانة المملوءة $S2D2$
- طرح كمية $\theta = 20$ (و الذي يعني إضافة $-\theta = -20$) من الخانة المملوءة $S2D3$
- إضافة كمية $\theta = 20$ من الخانة المملوءة $S3D3$
- طرح كمية $\theta = 20$ (و الذي يعني إضافة $-\theta = -20$) من الخانة المملوءة $S1D4$
- طرح كمية $\theta = 20$ (و الذي يعني إضافة $-\theta = -20$) من الخانة المملوءة $S3D4$

كما هو موضح في جدول النقل أدناه:

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	^{40} **60**	$-\theta=-20$ ^{60} **20**	^{80} /	$\theta=20$ ^{40} /	**80**
S2	^{50} /	$\theta=20$ ^{20} **60**	$-\theta=-20$ ^{30} **40**	^{10} /	**100**
S3	^{40} /	^{20} /	$\theta=20$ ^{30} **50**	$-\theta=-20$ ^{60} **70**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

و عليه يصبح جدول النقل الجديد هو التالي:

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	^{40} **60**	^{60} /	^{80} /	^{40} **20**	**80**
S2	^{50} /	^{20} **80**	^{30} **20**	^{10} /	**100**
S3	^{40} /	^{20} /	^{30} **70**	^{60} **50**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

انطلاقا من جدول النقل الجديد يتم استنتاج و قراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

1. متغيرات الأساس الموجبة: وعددها $06=(3+4-1)=(m+n-1)$

$$X_{11}=60, X_{14}=20, X_{22}=80, X_{23}=20, X_{33}=70, X_{34}=50$$

2. متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار

$$X_{12}=00, X_{13}=00, X_{21}=00, X_{24}=00, X_{31}=00, X_{32}=00$$

3. قيمة دالة الهدف:

$$\begin{aligned} Z = & 40(60)+60(00)+80(00)+40(20)+ \\ & 50(00)+20(80)+30(20)+10(00)+ \\ & 40(00)+20(00)+30(70)+60(50)=10500 \end{aligned}$$

$$Z=10500$$

العودة إلى الخطوة رقم 02 : اختبار أمثلية الحل (تقييم الخانات الفارغة):

انطلاقا من جدول النقل الجديد نقوم بعملية تقييم الخانات الفارغة بنفس الطريقة و الأسلوب المتبع أعلاه.

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S1D3$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	^{60} /	$+\theta=+1$ ^{80} /	$-\theta=-1$ ^{40} **20**
^{50} /	^{20} **80**	^{30} **20**	^{10} /
^{40} /	^{20} /	$-\theta=-1$ ^{30} **70**	$+\theta=+1$ ^{60} **50**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S1D3$

$$S1D3 \rightarrow S1D4 \rightarrow S3D4 \rightarrow S3D3$$
$$\Delta_{13}=+80-40+60-30=+70$$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S1D2$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	$+\theta=+1$ ^{60} /	^{80} /	$-\theta=-1$ ^{40} **20**
^{50} /	$-\theta=-1$ ^{20} **80**	$+\theta=+1$ ^{30} **20**	^{10} /
^{40} /	^{20} /	$-\theta=-1$ ^{30} **70**	$+\theta=+1$ ^{60} **50**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S1D2$

$$S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D3 \rightarrow S3D3 \rightarrow S3D4 \rightarrow S1D4$$
$$\Delta_{12}+60-20+30-30+60-40=+60$$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S2D4$

D1	D2	D3	D4
40 **60**	60 /	80 /	40 **20**
50 /	20 **80**	30 $-\theta=-1$ **20**	10 $+\theta=+1$ /
40 /	20 /	30 $+\theta=+1$ **70**	60 $-\theta=-1$ **50**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S2D4$

$S2D4 \to S2D3 \to S3D3 \to S3D4$

$\Delta_{24}=+10-30+30-60=-50$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S2D1$

D1	D2	D3	D4
40 $-\theta=-1$ **60**	60 /	80 /	40 $+\theta=+1$ **20**
50 $+\theta=+1$ /	20 **80**	30 $-\theta=-1$ **20**	10 /
40 /	20 /	30 $+\theta=+1$ **70**	60 $-\theta=-1$ **50**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S2D1$

$S2D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S3D4 \to S3D3 \to S2D3$

$\Delta_{21}=+50-40+40-60+30-30=-10$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S3D2$

D1	D2	D3	D4
40 **60**	60 /	80 /	40 **20**
50 /	20 $-\theta=-1$ **80**	30 $+\theta=+1$ **20**	10 /
40 /	20 $+\theta=+1$ /	30 $-\theta=-1$ **70**	60 **50**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S3D2$

$S3D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3$

$\Delta_{32}=+20-20+30-30=00$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S3D1$

D1	D2	D3	D4
40 $-\theta=-1$ **60**	60 /	80 /	40 $+\theta=+1$ **20**
50 /	20 **80**	30 **20**	10 /
40 $+\theta=+1$ /	20 /	30 **70**	60 $-\theta=-1$ **50**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S3D1$

$S3D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S3D4$

$\Delta_{31}=+40-40+40-60=-20$

نتائج عملية التقييم نوردها في الجدول أدناه.

الخانة الفارغة	**المســـار**	Δ_{ij}
$S1D2$	$S1D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3 \to S3D4 \to S1D4$	$+60-20+30-30+60-40=+60$
$S1D3$	$S1D3 \to S1D4 \to S3D4 \to S3D3$	$\Delta_{13}=+80-40+60-30=+70$
$S2D1$	$S2D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S3D4 \to S3D3 \to S2D3$	$+50-40+40-60+30-30=-10$
$S2D4$	$S2D4 \to S2D3 \to S3D3 \to S3D4$	$\Delta_{24}=+10-30+30-60=-50$
$S3D1$	$S3D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S3D4$	$\Delta_{31}=+40-40+40-60=-20$
$S3D2$	$S3D2 \to S2D2 \to S2D3 \to S3D3$	$\Delta_{32}=+20-20+30-30=00$

بما أن نتائج عملية تقييم الخانات الفارغة تبين أن هناك خانات فارغة ذات Δ_{ij} أقل من الصفر فهذا يعني أن إدخال هذه الخلايا إلى الحل سوف يترتب عليه انخفاض في قيمة دالة الهدف Z. معنى ذلك أن هناك إمكانية

لتحسين الحل أي أن حل الأساس المقبول الثاني المتحصل عليه أعلاه لا يمثل حل أمثل. و عليه يمكن المرور إلى الخطوة الموالية.

– تحديد الخانـة الفارغـة التـي تـدخل إلـى الحل:

تبعا للقاعدة 02.03 المتعلقة بتحديد الخانة الفارغة (المتغيرة خارج الأساس المعدومة) التي تدخل إلى الحل (تصبح متغيرة أساس موجبة) فإن الخانة $S2D4$ هي الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل.

– تحديد أعظم كميـة للخانـة الفارغـة المرشحة للدخول إلى الحل:

تبعا للقاعدة 03.03 المتعلقة بأعظم كمية يمكن أن نملأ بها الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل فإن هذه الكمية تساوي $Min\ (X_{23}=20, X_{34}=50)=X_{23}=20$.

– استنتـاج حل الأساس المقبول الجديـد:

يتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقا من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه من جدول النقل الأخير (جدول حل الأساس المقبول الثاني) بعد إدخال الخلية الفارغة $S2D4$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية $\theta=20$ و يتم ذلك كما يلي:

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	40 **60**	60 /	80 /	40 **20**	**80**
S2	50 /	20 **80**	30 /	10 **20**	**100**
S3	40 /	20 /	30 **90**	60 **30**	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

انطلاقا من جدول النقل الجديد يتم استنتاج و قراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

1. متغيرات الأساس الموجبة: $X_{11}=60, X_{14}=20, X_{22}=80, X_{24}=20, X_{33}=90, X_{34}=30$

2. متغيرات خارج الأساس المعدومة: $X_{12}=00, X_{13}=00, X_{21}=00, X_{23}=00, X_{31}=00, X_{32}=00$

3. دالة الهدف: $Z=9500$

اختبار أمثلية الحل (تقييم الخانات الفارغة):

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S1D3$

D1	D2	D3	D4
40 **60**	60 /	$+\theta=+1$ 80 /	$-\theta=-1$ 40 **20**
50 /	20 **80**	30 /	10 **20**
40 /	20 /	$-\theta=-1$ 30 **90**	$+\theta=+1$ 60 **30**
60	**80**	**90**	**70**

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S1D2$

D1	D2	D3	D4
40 **60**	$+\theta=+1$ 60 /	80 /	$-\theta=-1$ 40 **20**
50 /	$-\theta=-1$ 20 **80**	30 /	$+\theta=+1$ 10 **20**
40 /	20 /	30 **90**	60 **30**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S1D3$

$S1D3 \rightarrow S1D4 \rightarrow S3D4 \rightarrow S3D3$

$\Delta_{13} = +80 - 40 + 60 - 30 = +70$

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S1D2$

$S2D1 \rightarrow S2D2 \rightarrow S1D2 \rightarrow S1D1$

$\Delta_{12} = +60 - 20 + 10 - 40 = +10$

– جدول تقييم الخانـة الفارغـة $S2D3$

D1	D2	D3	D4
(40) **60**	(60) /	(80) /	(40) **20**
(50) /	(20) **80**	(30) $+\theta=+1$ /	(10) $-\theta=-1$ **20**
(40) /	(20) /	(30) $-\theta=-1$ **90**	(60) $+\theta=+1$ **30**
60	**80**	**90**	**70**

– جدول تقييم الخانـة الفارغـة $S2D1$

D1	D2	D3	D4
(40) $-\theta=-1$ **60**	(60) /	(80) /	(40) $+\theta=+1$ **20**
(50) $+\theta=+1$ /	(20) **80**	(30) /	(10) $-\theta=-1$ **20**
(40) /	(20) /	(30) **90**	(60) **30**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S2D3$

$S2D3 \rightarrow S2D4 \rightarrow S3D4 \rightarrow S3D3$

$\Delta_{23} = +30 - 10 + 60 - 30 = +50$

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S2D1$

$S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D4 \rightarrow S1D4$

$\Delta_{21} = +50 - 40 + 40 - 10 = +40$

– جدول تقييم الخانـة الفارغـة $S3D2$

D1	D2	D3	D4
(40) **60**	(60) /	(80) /	(40) **20**
(50) /	(20) $-\theta=-1$ **80**	(30) /	(10) $+\theta=+1$ **20**
(40) /	(20) $+\theta=+1$ /	(30) **90**	(60) $-\theta=-1$ **30**
60	**80**	**90**	**70**

– جدول تقييم الخانـة الفارغـة $S3D1$

D1	D2	D3	D4
(40) $-\theta=-1$ **60**	(60) /	(80) /	(40) $+\theta=+1$ **20**
(50) /	(20) **80**	(30) /	(10) **20**
(40) $+\theta=+1$ /	(20) /	(30) **90**	(60) $-\theta=-1$ **30**
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S3D2$

$S3D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D4 \rightarrow S3D4$

$\Delta_{32} = +20 - 20 + 10 - 60 = -50$

– نتيجـة تقييم الخانـة الفارغـة $S3D1$

$S3D1 \rightarrow S1D1 \rightarrow S1D4 \rightarrow S3D4$

$\Delta_{31} = +40 - 40 + 40 - 60 = -20$

نتائج عملية التقييم نوردها في الجدول أدناه.

الخانة الفارغة	المســار	Δ_{ij}
$S1D2$	$S1D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D4 \rightarrow S1D4$	$\Delta_{12} = +60 - 20 + 10 - 40 = +10$
$S1D3$	$S1D3 \rightarrow S1D4 \rightarrow S3D4 \rightarrow S3D3$	$\Delta_{13} = +80 - 40 + 60 - 30 = +70$
$S2D1$	$S2D1 \rightarrow S1D1 \rightarrow S1D4 \rightarrow S2D4$	$\Delta_{21} = +50 - 40 + 40 - 10 = +40$
$S2D3$	$S2D3 \rightarrow S2D4 \rightarrow S3D4 \rightarrow S3D3$	$\Delta_{23} = +30 - 10 + 60 - 30 = +50$
$S3D1$	$S3D1 \rightarrow S1D1 \rightarrow S1D4 \rightarrow S3D4$	$\Delta_{31} = +40 - 40 + 40 - 60 = -20$
$S3D2$	$S3D2 \rightarrow S2D2 \rightarrow S2D4 \rightarrow S3D4$	$\Delta_{32} = +20 - 20 + 10 - 60 = -50$

- تحديد الخانـة الفارغـة التـي تـدخل إلـى الحل:

تبعا للقاعدة 02.03 المتعلقة بتحديد الخانة الفارغة (المتغيرة خارج الأساس المعدومة) التي تدخل إلى الحل (تصبح متغيرة أساس موجبة) فإن الخانة $S3D2$ هي الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل.

- تحديد أعظم كميـة للخانـة الفارغـة المرشحة للدخول إلى الحل:

تبعا للقاعدة 03.03 المتعلقة بأعظم كمية يمكن أن نملأ بها الخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل فإن هذه الكمية تساوي $Min\ \left(X_{22}=80, X_{34}=30\right)=X_{34}=30$.

- استنتـاج حل الأسـاس المقبـول الجديـد:

يتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقا من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه من جدول النقل الأخير (جدول حل الأساس المقبول الثاني) بعد إدخال الخلية الفارغة $S3D2$ إلى الحل عن طريق ملأها بكمية $\theta=30$ و يتم ذلك كما يلي:

	D1	D2	D3	D4	a_i
S1	^{40} **60**	^{60} /	^{80} /	^{40} **20**	**80**
S2	^{50} /	^{20} **50**	^{30} /	^{10} **50**	**100**
S3	^{40} /	^{20} **30**	^{30} **90**	^{60} /	**120**
b_j	**60**	**80**	**90**	**70**	**300**

انطلاقا من جدول النقل الجديد يتم استنتاج و قراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

1. متغيرات الأسـاس الموجبـة: $X_{11}=60, X_{14}=20, X_{22}=50, X_{24}=50, X_{32}=30, X_{33}=90$

2. متغيرات خـارج الأسـاس المعدومـة: $X_{12}=00, X_{13}=00, X_{21}=00, X_{23}=00, X_{31}=00, X_{34}=00$

3. دالـة الهدف: $Z=8000$

اختبـار أمثليـة الحل (تقييم الخانـات الفـارغة):

انطلاقا من جدول النقل الجديد (الأخير) نقوم بعملية تقييم الخانات الفارغة بنفس الطريقة و الأسلوب المتبع أعلاه.

- جدول تقييم الخانـة الفارغـة $S1D3$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	^{60} /	$+\theta=+1$ ^{80} /	$-\theta=-1$ ^{40} **20**
^{50} /	$-\theta=-1$ ^{20} **50**	^{30} /	$+\theta=+1$ ^{10} **50**
^{40} /	$+\theta=+1$ ^{20} **30**	$-\theta=-1$ ^{30} **90**	^{60} /
60	**80**	**90**	**70**

- جدول تقييم الخانـة الفارغـة $S1D2$

D1	D2	D3	D4
^{40} **60**	$+\theta=+1$ ^{60} /	^{80} /	$-\theta=-1$ ^{40} **20**
^{50} /	$-\theta=-1$ ^{20} **50**	^{30} /	$+\theta=+1$ ^{10} **50**
^{40} /	^{20} **30**	^{30} **90**	^{60} /
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S1D3$

$S1D3 \to S3D3 \to S3D2 \to S2D2 \to S2D4 \to S1D4$

$\Delta_{13} = 80 - 30 + 20 - 20 + 10 - 40 = 20$

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S1D2$

$S1D2 \to S2D2 \to S2D4 \to S1D4$

$\Delta_{12} = 60 - 20 + 10 - 40 = +10$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S2D3$

D1	D2	D3	D4
40 **60**	60 /	80 /	40 **20**
50 /	$-\theta=-1$ 20 **50**	$+\theta=+1$ 30 /	10 **50**
40 /	$+\theta=+1$ 20 **30**	$-\theta=-1$ 30 **90**	60 /
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S2D3$

$S2D3 \to S2D2 \to S3D3 \to S3D4$

$\Delta_{23} = 30 - 20 + 20 - 30 = 00$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S2D1$

D1	D2	D3	D4
$-\theta=-1$ 40 **60**	60 /	80 /	$+\theta=+1$ 40 **20**
$+\theta=+1$ 50 /	20 **50**	30 /	$-\theta=-1$ 10 **50**
40 /	20 **30**	30 **90**	60 /
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S2D1$

$S2D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S2D4$

$\Delta_{21} = 50 - 40 + 40 - 10 = +40$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S3D4$

D1	D2	D3	D4
40 **60**	60 /	80 /	40 **20**
50 /	$+\theta=+1$ 20 **50**	30 /	$-\theta=-1$ 10 **50**
40 /	$-\theta=-1$ 20 **30**	30 **90**	$+\theta=+1$ 60 /
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S3D4$

$S3D4 \to S2D4 \to S2D2 \to S3D2$

$\Delta_{34} = 60 - 10 + 20 - 20 = +50$

– جدول تقييم الخانة الفارغة $S3D1$

D1	D2	D3	D4
$-\theta=-1$ 40 **60**	60 /	80 /	$+\theta=+1$ 40 **20**
50 /	$+\theta=+1$ 20 **50**	30 /	$-\theta=-1$ 10 **50**
$+\theta=+1$ 40 /	$-\theta=-1$ 20 **30**	30 **90**	60 /
60	**80**	**90**	**70**

– نتيجـة تقييم الخانة الفارغة $S3D1$

$S3D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S2D4 \to S2D2 \to S3D2$

$\Delta_{31} = 40 - 40 + 40 - 10 + 20 - 20 = 30$

نتائج عملية التقييم نوردها في الجدول أدناه.

الخانة الفارغة	المســـار	Δ_{ij}
$S1D2$	$S1D2 \to S2D2 \to S2D4 \to S1D4$	$\Delta_{12} = 60 - 20 + 10 - 40 = +10$
$S1D3$	$S1D3 \to S3D3 \to S3D2 \to S2D2 \to S2D4 \to S1D4$	$\Delta_{13} = 80 - 30 + 20 - 20 + 10 - 40 = 20$
$S2D1$	$S2D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S2D4$	$\Delta_{21} = 50 - 40 + 40 - 10 = +40$
$S2D3$	$S2D3 \to S2D2 \to S3D3 \to S3D4$	$\Delta_{23} = 30 - 20 + 20 - 30 = +00$
$S3D1$	$S3D1 \to S1D1 \to S1D4 \to S2D4 \to S2D2 \to S3D2$	$\Delta_{31} = 40 - 40 + 40 - 10 + 20 - 20 = 30$
$S3D4$	$S3D4 \to S2D4 \to S2D2 \to S3D2$	$\Delta_{34} = 60 - 10 + 20 - 20 = +50$

بما أن نتائج عملية تقييم الخانات الفارغة تبين أن جميع الخانات الفارغة لها Δ_{ij} أكبر من الصفر $(\Delta_{ij} > 00)$ فهذا يعني أن إدخال أي خلية فارغة إلى الحل من بين هذه الخلايا سوف يترتب عليه زيادة في قيمة دالة الهدف Z. معنى ذلك أن ليس هناك إمكانية لتحسين حل الأساس المقبول الأخير المتوصل إليه ألاه يمثل **حل أساس مقبول أمثل.** و بالتالي نخلص إلى القاعدة المتعلقة باختبار أمثلية الحل.

القـاعدة 04.03 : المتعلقـة باختبـار أمثليـة الحـل:

نقـول عن حـل أسـاس مقبـول أنـه حـل أسـاس مقبـول أمثـل إذا تحقـق مـا يلـي:

- **جميـع نتائـج عمليـة تقييـم الخـانـات الفارغـة موجبـة أو معدومـة و هذا ما يعبـر عنـه رياضيـا بالكتابـة التاليـة:**

$$\Delta_{ij} \geq 00$$

المحور الثاني : مشــــاكــــل النقــــل

الفصـــل 📖 الســـادس

تمثيـــل مشكلـــة النقـــل بنظريـــة الشبكـــة

Représentation de la problématique du transport par la théorie du réseau

أهداف الفصل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بمـا يلـي:

- ماذا نعني بالشبكة
- مختلف مكونات الشبكة
- مسائل المسارات المثلى
- مسائل التدفق الأعظمي
- مسائل الشجرة المثلي

01.06 – تمهيـــد:

يهتم اسلوب شبكات النقل بايجاد الحل الأمثل للكثير من المشاكل و المسائل الاقتصادية، نطكر على سبيل المثال لا الحصر نقل المسافرين، نقل البضائع، نقل و توزيع بعض المواد مثل الماء، الغاز، الكهرباء، الهاتف، الانترنت، قنوات الصرف الصحي و غيرها من المواد الاخرى.

من بين تطبيقات نظرية الشبكات نجد مسائل البحث عن المسار الامثل و الذي قد يكون اقصر مسار و قد يكون أطول مسار على حسب طبيعة المشكل و المسألة. كما نجد مسائل التدفق الاعضمي بالاضافة الى مسائل الشجرة المثلى.

قبل التطرق الى عرض و التعريف بالمسائل الثلاث اعلاه و كيفية ايجاد الحل الامثل نتطرق الى التعريف ببعض المصطلحات المتعلقة بتشكيل و رسم الشبكات.

02.06 – مصطلحات و مفـاهيـم أسـاسيـة حـول الشبكـة:

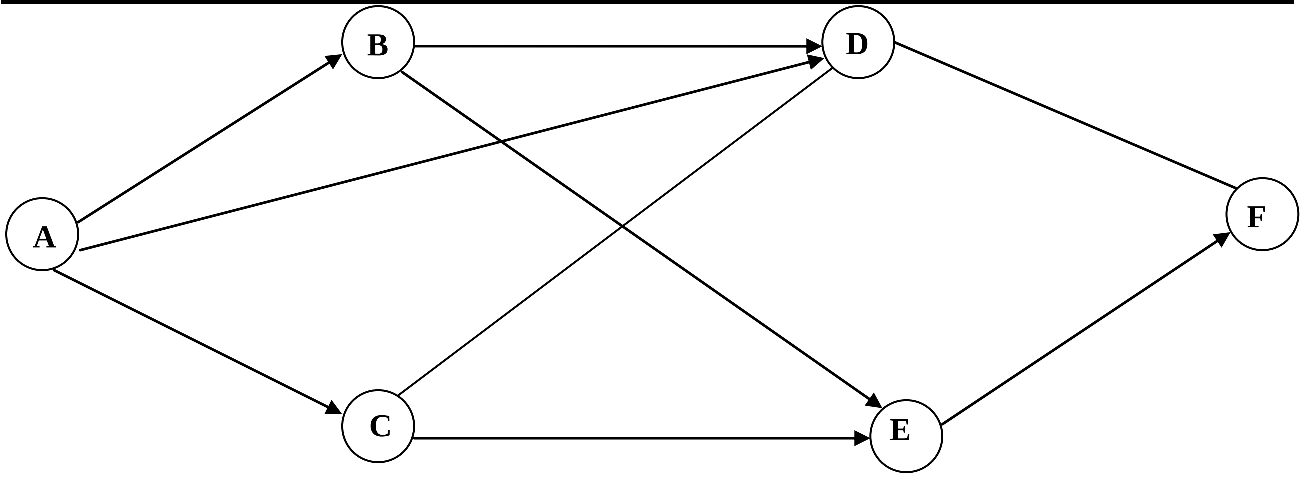
سوف نتطرق من خلال هذه الفقرة الى تقديم بعض المصطلحات و المفاهيم الاساسية المتعلقة برسم الشبكات. هذه المصطلحات هي:

- ✓ الشبكة.
- ✓ الشبكة الكاملة.
- ✓ القوس الموجه.
- ✓ القوس غير الموجه.
- ✓ الشبكة الموجهة.
- ✓ الشبكة غير الموجهة.
- ✓ الاقواس المتصلة.
- ✓ المسار.
- ✓ الحلقة.
- ✓ حمولة القوس.

01.02.06 – الشبكـــة:

تتكون الشبكة من مجموعة من الرؤوس أو عقد و مجموعة من الاقواس التي تصل بين ازواج هذه العقد أو الرؤوس. تمثل الرؤوس في الشبكة بنقاط أو بدوائر مرقمة بأعداد متسلسلة أو حروف متسلسلة، و تمثل الاقواس بخطوط (أسهم أو احرف) كما هو موضح في شبكة المثال أدناه:

مثـــال 01.06: الشكل أدناه يقدم شبكة مكونة من ستة رؤوس و تسعة اقواس



02.02.06 – الشبكـــة الكاملـــة:

هي الشبكة التي يكون فيها أي رأس (عقدة) من الرؤوس (العقد) مرتبط بكل رأس من رؤوس الشبكة. فبالنسبة لشبكة المثال أعلاه ليست شبكة كاملة لوجود بعض الرؤوس غير مرتبطة ببقية رؤوس الشبكة مثل الرأس A غير مرتبط بالرؤوس E و F.

03.02.06 – القـــوس الموجـــه:

نقول عن القوس أنه موجه اذا كان له اتجاها خاص به، حيث تحدد الاتجاهات بوضع اسهم على الاقواس و مثال على ذلك الأقواس الموجهة التالية:

$$A\,B,\ A\,C,\ A\,D,\ B\,D\ ,\ B\,E,\ C\,E\ ,\ E\,F$$

فمثلا القوس $A\,B$ حركته تبدأ من A و تنتهي في B و لا يسمح بحركة معاكسة من B إلى A أما الاقواس غير الموجهة و التي تتمثل في كل من $C\,D$ و $D\,F$ فيسمح بالحركة باتجاهين متعاكسين.

04.02.06 – القـــوس غيـــر الموجـــه (الحـــرف):

نقول عن القوس أنه غير موجه أو انه حرف اذا لم يكن له اتجاها خاص به مثل ما هو الحال بالنسبة للأقواس $C\,D$ و $D\,F$ الخاصة بشبكة المثال أعلاه.

05.02.06 – الشبكـــة الموجهـــة:

هي الشبكة التي يكون فيها جميع الاقواس موجهة، أي جميع اقواسها عبارة عن أسهم.

06.02.06 – الشبكـــة غيـــر الموجهـــة:

هي الشبكة التي لا يكون فيها جميع الاقواس موجهة

07.02.06 – الاقـــوس المتصلـــة:

نقول عن قوسين أنهما متصلين اذا كان لهما رأس (عقدة) مشترك. بالعودة الى شبكة المثال أعلاه نلاحظ أن القوسين $A\,B$ و $A\,C$ متصلين في حين أن القوسين $A\,B$ و $C\,E$ غير متصلين.

08.02.06 – المســــار:

المسار عبارة عن سلسلة متصلة من الأقواس التي تصل جميع رؤوس الشبكة حيث ان الرأس النهائي لكل قوس هو عبارة عن الرأس الابتدائي للقوس الذي يليه ماعدا القوس الأخير. نشير إلى ان الشبكة تحتوي على العديد من المسارات.

09.02.06 – الحلقــة:

عبارة عن مسار يكون فيه الرأس النهائي للقوس الأخير عبارة عن الرأس الابتدائي للقوس الأول.

10.02.06 – حمـولـة القـوس:

أي قوس من اقواس الشبكة له حمولة و التي يرمز لها بالرمز $C(A,B)$ و الذي يعبر عن حمولة القوس $A\ B$. هذه الحمولة قد تكون أو تعبر عن تكلفة، مسافة، مدة زمنية،...الخ، و هذا حسب طبيعة المشكلة أو المسألة.

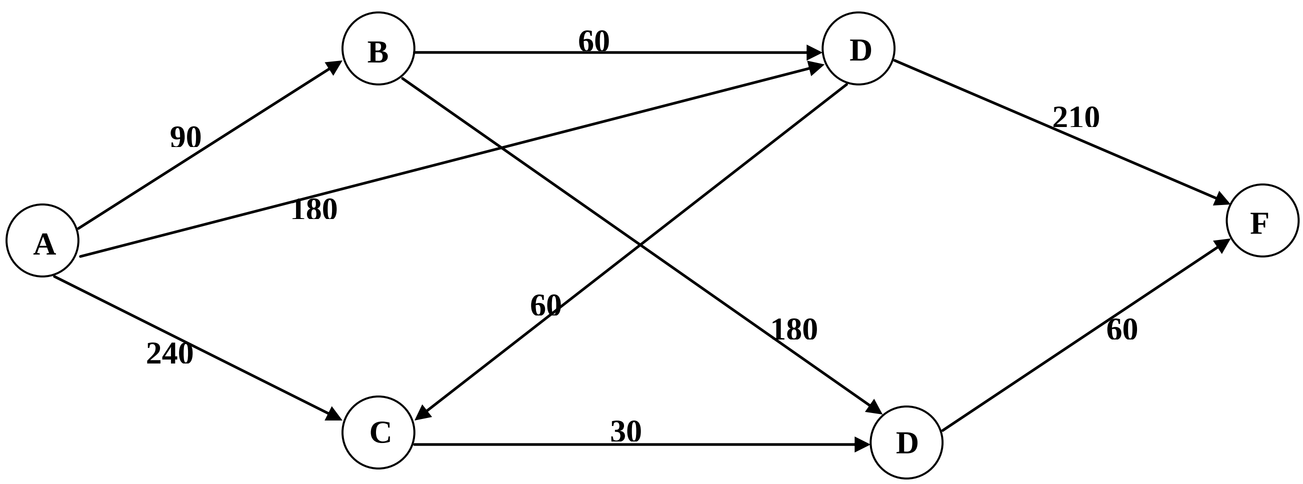
03.06 – مسائــل المســـار الأمثــل:

تهتم نظرية المسارات المثلى بإيجاد و البحث عن أمثل مسار (أقصر أو أطول) يربط نقطتين أو قمتين (قمة ابتدائية و قمة نهائية) من بين العديد و من بين مجموعة كبيرة من المسارات المكونة للشبكة، بغرض توضيح أكثر نأخذ الأمثلة التالية:

مثـــال 02.06:

قرر أستاذ بحوث العمليات تنظيم رحلة أو نزهة علمية لطلبة السنة الثانية علوم تجارية إلى مدينة سكيكدة . أمام الأستاذ و الطلبة العديد من المسالك أو الطرق أو المسارات يمكن أخذها أو سلوكها انطلاقا من مدينة تيارت الممثلة بالنقطة أو القمة A إلى مدينة سكيكدة الممثلة بالنقطة أو القمة F.

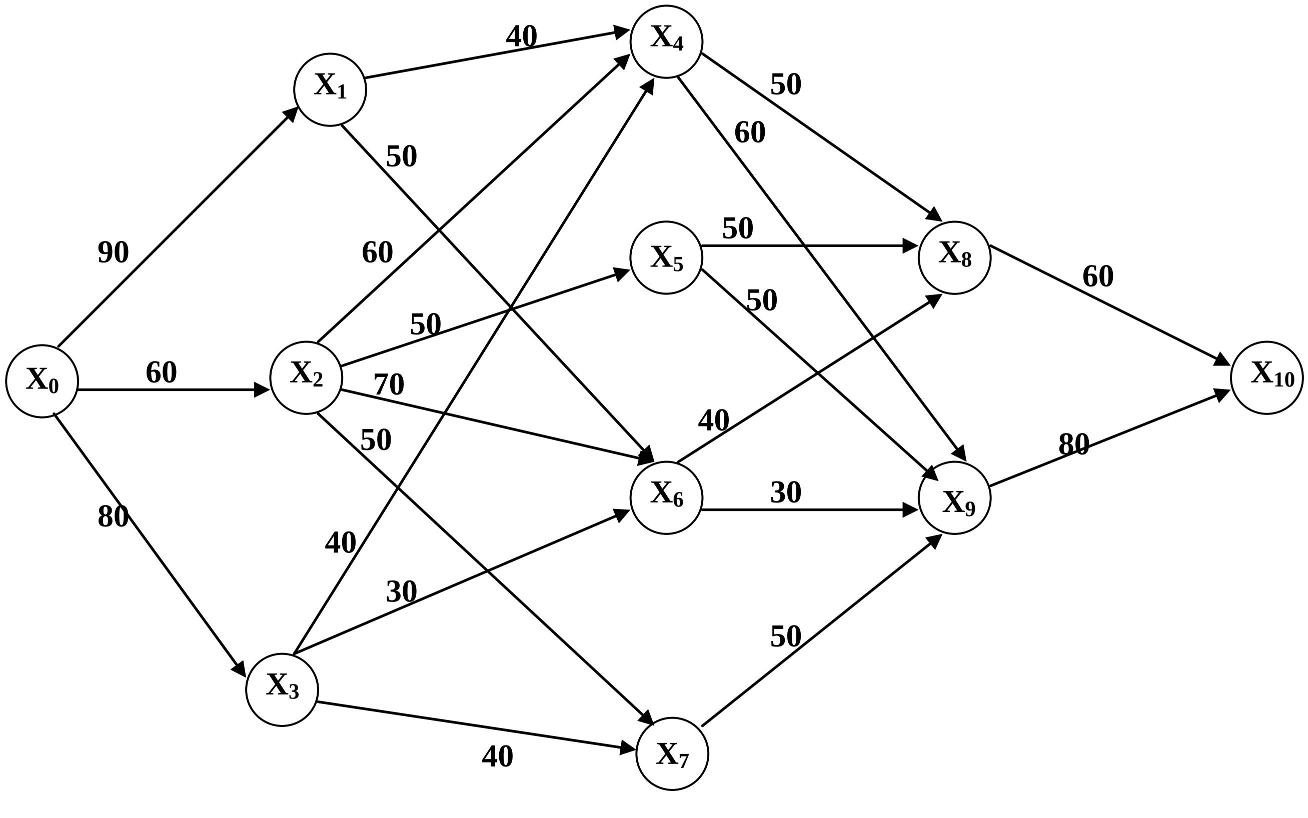
مختلف الطرق و المسالك الممكن المرور عبرها أو بها و كذا المسافات بين المدن تقدمها الشبكة أدناه:



انطلاقا من الشبكة أعلاه، يود كل من الأستاذ و الطلبة تحديد أقصر طريق أو مسار (المسار الأمثل) يمكن المرور به انطلاقا من النقطة أو القمة A (مدينة تيارت) إلى النقطة أو القمة F (مدينة سكيكدة) مع تحديد المسافة الدنيا الواجب قطعها بالإضافة إلى تحديد القمم أو النقاط (المدن) الواجب المرور بها.

مثـــال 03.06:

نتيجة سهره مع التحضير لمقياس رياضيات المؤسسة إلى وقت جد متأخر من الليل، استيقظ متأخرا على غير عادته، ليخرج بعد ذلك من المنزل الممثل بالقمة $\mathbf{X_0}$ الموضحة في الشبكة أدناه، مسرعا ناسيا لوازم الامتحان و تناول فطور الصباح متوجها إلى المحطة الممثلة بالقمة $\mathbf{X_{10}}$ حيث هناك يجد حافلة النقل الجامعي في الانتظار. عند خروجه من المنزل نظر إلى ساعته فأدرك أنه بقي أمام الحافلة مدة تقدر بـ 3 دقائق و 30 ثانية لمغادرة المحطة. احتار في اختيار المسار أو الطريق الذي يسلكه إلى المحطة و الذي يمكنه باللحاق بالحافلة و من ثم الوصول إلى قاعة الامتحان في الوقت المحدد. نشير إلى أن أمام الطالب العديد من المسالك أو الطرق يمكن له أن يسلكها انطلاقا من منزله وصولا إلى المحطة، هذه المسالك يقدمها البيان التالي.



من خلال المثال اعلاه نود تحديد و ايجاد المسار الأمثل أي أقصر طريق الذي يسلكه الطالب من بين المسارات المتعددة المتاحة أمام الطالب.

ملاحظـة:

إن نظريـة المسارات المثلى لا تهتم فقط بتحديد أقصر مسار و إنما يمكن أن تهتم بتحديد و إيجاد أطول مسـار.

04.06 – مسائــل التـدفـق الأعظمــي:

تهدف مسائل التدفق الأعظمي الى تحديد الكميات المثلى (العظمى أي أكبر كمية ممكنة) الواجب تمريرها من مركز معين أو مجموعة من المراكز تسمى منابع إلى مركز معين آخر أو مجموعة من المراكز الأخرى تسمى مصبات، من خلال أو مرورا على مراكز وسيطة تصل بينها شبكة من الطرق ذات سعات معينة (محدودة)، حي يفترض أنه لا يتم التخزين في أي مركز وسيط، أي أن المادة التي تصل إلى أي مركز وسيط تنقل مباشرة إلى مركز آخر. نشير إلى أن المراكز قد تكون مناطق، مصانع، مخازن، ... الخ. اما فيما يخص شبكة الطرق فقد تكون مختلف وسائل النقل، طرق، انابيب، ... الخ. أما فيما يتعلق بالطرق ذات سعات معينة و محدودة فإنها تعبر عن سعة الشحن على مختلف وسائل النقل أو سعة التدفق و الانسياب في مختلف قنوات التوزيع مثل قنوات المياه، الغاز، الصرف الصحي، الانترنت. بغرض توضيح أكثر لمسائل التدفق الأعظمي نقوم بعرضها من خلال الأمثلة أدناه:

مثـــال 04.06:

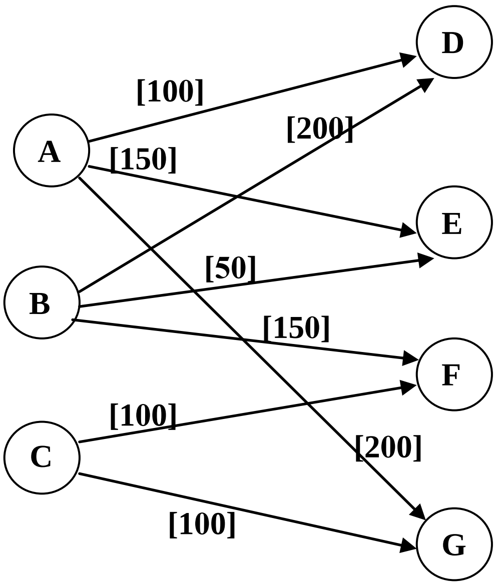
تتوفر إحدى بلديات ولاية تيارت على ثلاثة خزانات A,B,C تقوم بتزويد أربعة أحياء D,E,F,G بالماء الصالح للشرب حيث أن:

- الخزان A يستطيع تصريف 450 لتر/ الدقيقة
- الخزان B يستطيع تصريف 250 لتر/ الدقيقة
- الخزان C يستطيع تصريف 200 لتر/ الدقيقة

أما فيما يخص احتياجات القرى من الماء فهي كالتالي

- الحي D يحتاج 300 لتر/ الدقيقة
- الحي E يحتاج 100 لتر/ الدقيقة
- الحي F يحتاج 200 لتر/ الدقيقة
- الحي G يحتاج 300 لتر/ الدقيقة

توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالقرى علما أن هذه القنوات لها طاقة تصريف محدودة و التي توضحها الشبكة التالية:



من خلال المسألة أعلاه نهدف إلى ايجاد و تحديد الكميات المثلى (العظمى) الواجب تمريرها عبر مختلف قنوات التصريف التي تخضع لقيود تتمثل في طاقة التصريف المحدودة، بعبارة أخرى نود تحديد أمثل (أكبر) كمية الواجب تمريرها عبر كل قناة تصريف من مختلف المنابع الثلاثة A,B,C بغرض تلبية طلبات مختلف المصبات D,E,F,G .

مثـــال 05.06:

تقوم مؤسسة مطاحن بلدية **مهديـة** بولاية تيارت بتأمين احتياجات الولاية من مختلف الحبوب الأساسية، تتوفر المؤسسة على كميات مخزنة بأربعة مخازن A,B,C,D طاقة كل مخزن يقدمها الجدول التالي:

المخزن	A	B	C	D
الكمية المتاحة	1400	1200	1200	1200

ترغب المؤسسة نقل هذه الكميات المتاحة على مستوى المخازن إلى بعض بلديات الولاية هي: **السوقر**، **تيارت**، **فرندة و الرحوية**، احتياجات هذه البلديات يقدمها الجدول التالي:

البلديـــة	**السوقـــر**	**تيـــارت**	**فرنـدة**	**الرحويـة**
الاحتيـــاج	1200	1000	1000	1700

تتوفر المؤسسة على شاحنات يمكن لها القيام بعملية النقل، غير أن طاقة هذه الشاحنات محدودة كما يوضحها الجدول أدناه:

	السوقـــر	**تيـــارت**	**فرنـدة**	**الرحويـة**
A	900	500	400	-
B	700	600	300	-
C	-	400	600	600
D	-	400	600	600

الهدف هو تحديد الكميات التي يمكن لكل شاحنة حملها أو نقلها من كل مخزن إلى كل بلدية.

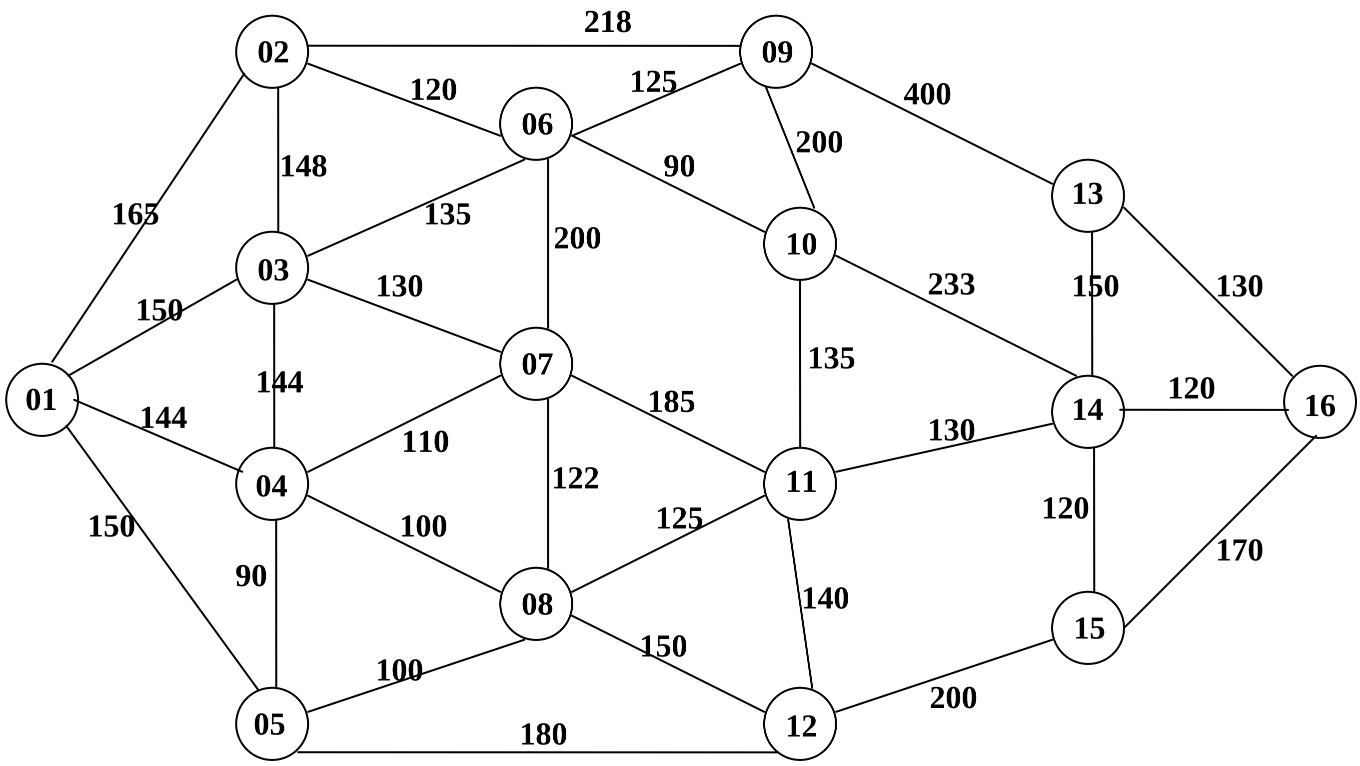
05.06 – مسائــل الشجـرة المثلـــى:

نسمي شجرة كل مجموعة من الأقواس غير الموجهة (الأحرف) التي تربط بين جميع رؤوس (قمم) الشبكة دون أن تشكل حلقة فيما بينها. نشير الى انه انطلاقا من أي شبكة يمكن الحصول على مجموعة من الشجرات التي تربط و تصل جميع رؤوس الشبكة، كما نشير إلى أن كل شجرة توافقها حمولة معينة تساوي مجموع حمولات الأقواس المشكلة لهذه الشجرة. ما يهمنا هو الشجرة المثلى أي الشجرة ذات أقل حمولة في حالة تدنئة التكاليف و الشجرة ذات أكبر حمولة في تعظيم الارباح و العوائد و التدفقات.

تهتم نظرية الشجرة المثلى في ايجاد و تحديد أقل و ادنى تكلفة و مسافة أو أعلى الأرباح و العوائد و التدفقات بغرض ربط جميع قمم و رؤوس الشبكة فيما بينها.

مثـــال 06.06:

تتميز مدينة تيارت في الشتاء بوجود ما يسمى بـ Le Verglas على الطرقات الرابطة بين مختلف أحياء المدينة، الأمر الذي يشل (يمنع) حركة تنقل أصحاب المركبات (السيارات) بين مختلف هذه الأحياء، و بغرض تفادي هذا المشكل، أمر المسئول الأول على مستوى الولاية المكلفون بالوسائل العامة معالجة Le Verglas عن طريق Le Sablage Des Rues أي عن طريق وضع الرمل (Le Sable) عبر هذه الطرقات. الطرقات الواجب معالجتها يقدمها البيان التالي:



حيث أن:

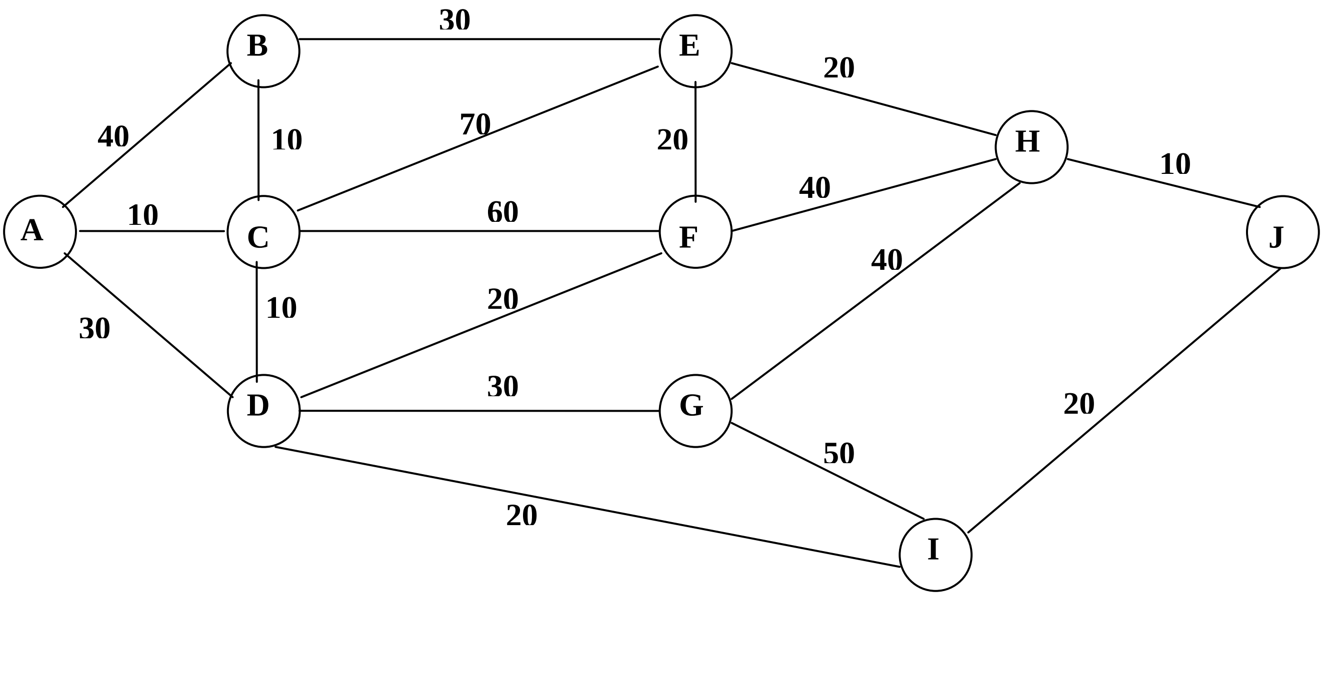
- **الرؤوس (القمم) Les Sommets:** تمثل مختلف أحياء مدينة تيارت بدءا بقمة البداية 01 التي تمثل كرمان إلى قمة النهاية 16 و التي تمثل زعرورة
- **الأحرف Les Arêtes:** تمثل مختلف الطرق التي تربط مختلف أحياء مدينة تيارت
- **حمولة الأحرف Capacité:** عبارة عن القيم التي بجانب الأحرف و هي تمثل المسافة.

الشاحنة المسخرة لهذه العملية ذات قدرة على حمل كمية من الرمل تكفي لمعالجة جميع الطرق في دورة واحدة، إلا أنه نظرا لتوفر هذه المادة بكمية محدودة فسوف لا يتم معالجة جميع الطرق بل يتم معالجة سلسلة من الطرق (أي مسار أو شجرة) بحيث يتم من خلالها الوصول إلى جميع الأحياء أو من خلالها يتم ربط جميع الإحياء مع بعضها البعض.

في هذه المسألة نهتم بايجاد و تحديد أقصر شجرة من الطرق الواجب معالجتها بالرمل بحيث نتمكن من الوصول إلى جميع أحياء المدينة.

مثـــال 07.06:

ترغب مؤسسة الجزائرية للمياه ADE بتيارت إمداد و تزويد مختلف أحياء بلدية السوقر بشبكة المياه الصالحة للشرب. إمكانيات الربط بين مختلف احياء هذه البلدية و كذا تكاليف عملية الربط تقدمها الشبكة التالية:



المحور الثاني : مشـــاكـــل النقـــــل

الفصـــل 🕮 السابـــع

عـــرض الحـــل بطريقـــة الشبكـــة

Présentation de la solution par la méthode du réseau

أهداف الفصل:

بعد انتهائك من دراسة و الإطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بما يلي:

- مختلف الطرق المستخدمة في حل مسائل المسارات المثلى
  1. خوارزمية فورد l'Algorithme De FORD
  2. خوارزمية l'Algorithme De Dijkstra
  3. خوارزمية l'Algorithme De Bellman
  4. طريقة المصفوفات Méthode Matricielle
- مختلف الطرق المستخدمة في حل مسائل التدفق الأعظمي
  1. خوارزمية فورد فليكرسون l'Algorithme De Ford-Fulkerson
  2. خوارزمية نائب ماغوط l'Algorithme de Nayeb & Maghaut
- مختلف الطرق المستخدمة في حل مسائل الشجرة المثلى
  1. خوارزمية l'Algorithme De J.B.Kruskal
  2. خوارزمية l'Algorithme De G.Sollin

01.07 – تمهيـــــد:

سنحاول من خلال هذا الفصل التطرق لمختلف الطرق المستخدمة في حل المسائل الثلاث الفقرة عرض مشكل النقل من خلال المثال التالي:

02.07 – حـــل مسائـــل المســـار الأمثـــل:

تهتم نظرية المسارات المثلى بإيجاد أو البحث عن أمثل مسار (أقصر أو أطول) يربط نقطتين أو قمتين ممثلتين في قمة ابتدائية و قمة نهائية من بين العديد أو من بين مجموعة كبيرة من المسارات المكونة للشبكة. نشير إلى أن الحل الأمثل في مسائل المسار الأمثل يتمثل في المسار الأمثل، أي أقصر مسار في حالة تدنئة التكاليف، أو أطول مسار في حالة تعظيم الأرباح.

بغرض ايجاد الحل الأمثل في مسائل المسارات المثلى يتم استخدام العديد من الطرق أو الخوارزميات نذكر منها ما يلي:

1. خوارزمية فورد: l'Algorithme De FORD
2. طريقة المصفوفات: Méthode Matricielle
3. خوارزمية l'Algorithme De Dijkstra
4. خوارزمية l'Algorithme De Bellman

سوف نقتصر على التطرق بالتفصيل إلى الطريقة الأولى الممثلة في خوارزمية فورد l'Algorithme De FORD

01.02.07 – خـوارزميـــة فـــورد:

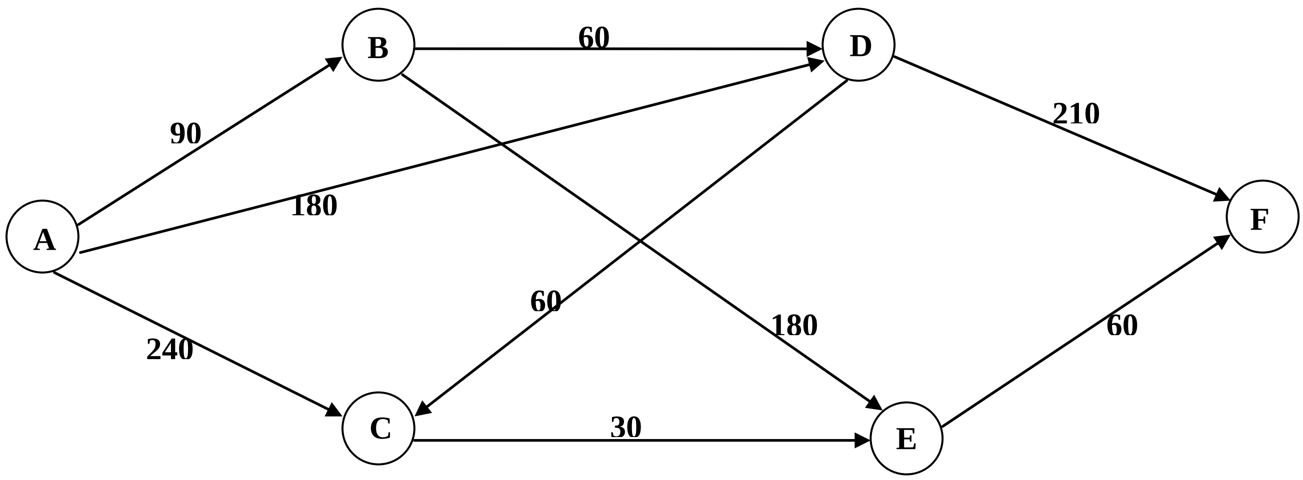
وفقا لهذه الطريقة أو الخوارزمية يتم الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق اتباع مجموعة من الخطوات و التي نوردها فيما يلي:

1. تسمية قمم و رؤوس الشبكة: تبعا لهذه الخطوة يتم تسمية جميع قمم الشبكة بدءا بقمة الانطلاق تسمى X_0 و القمة الثانية تسمى X_2، إلى غاية آخر قمة و تسمى X_n.
2. عند قمة الانطلاق X_0 نضع $\lambda_0 = 0$ و عند باقي القمم نضع $\lambda_i = \infty$ حيث أن $i = 1,2,3,......,n$.
3. نفرض أن حمولة القوس (السهم) (X_i, X_j) هي $C(X_i, X_j)$.
4. في كل قمة X_j يكون فيها $(\lambda_j - \lambda_i) > C(X_i, X_j)$ أو $\lambda_j > C(X_i, X_j) + \lambda_i$ أو $\lambda_i < \lambda_j - C(X_i, X_j)$ نقوم بتعويض λ_j بـ $\lambda_i + C(X_i, X_j)$.
5. نواصل الخطوة الأخيرة أعلاه حتى يتعذر و يستحيل علينا تغيير أي من λ_j.

بغرض فهم و استعاب خطوات هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثـــال 01.07:

ترغب المؤسسة الوطنية للنقل البري SNTR نقل مجموعة من المنتجات باستخدام الشاحنات النصف مقطورة التي تتوفر عليها. عملية النقل تتم من نقطة الانطلاق الممثلة بالقمة A إلى نقطة الوصول الممثلة بالقمة F . نشير إلى أن أمام المؤسسة العديد من المسالك أو الطرق أو المسارات يمكن أخذها أو سلوكها انطلاقا من نقطة الانطلاق A إلى نقطة الوصول F. مختلف الطرق و المسالك الممكن المرور عبرها أو بها و كذا المسافات بين المدن تقدمها الشبكة أدناه:

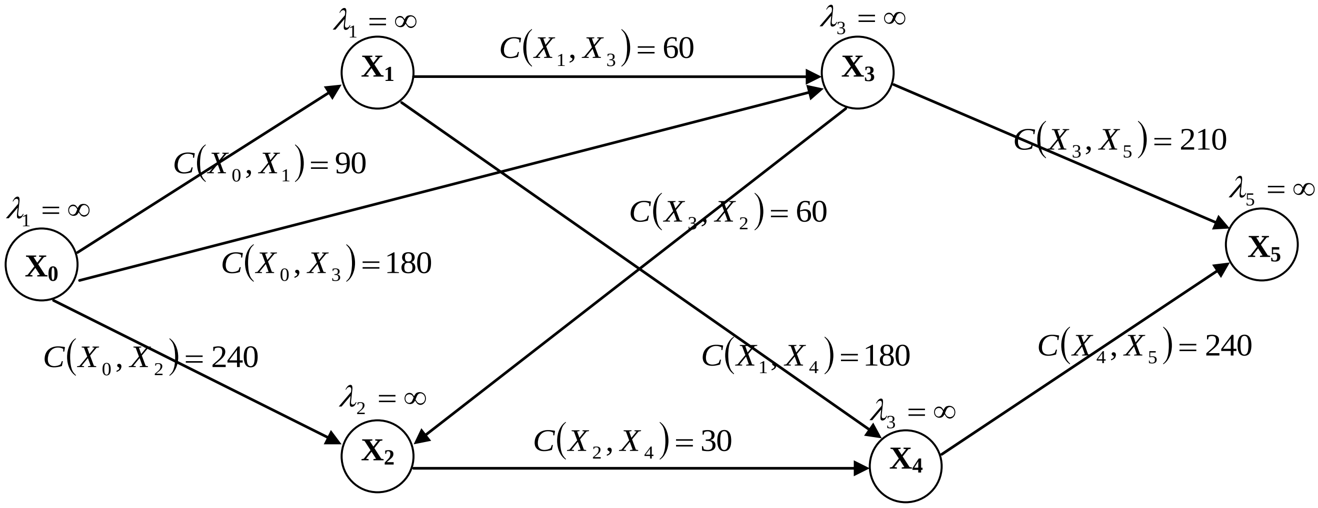


انطلاقا من الشبكة أعلاه، تود مؤسسة النقل البري SNTR تحديد أقصر طريق أو مسار (المسار الأمثل) يمكن المرور به انطلاقا من النقطة أو القمة A (نقطة الانطلاق) إلى النقطة أو القمة F (نقطة الوصول) مع تحديد المسافة الدنيا الواجب قطعها بالإضافة إلى تحديد القمم أو النقاط الواجب المرور بها.

بغرض الوصول إلى المسار الأمثل أي أقصر مسار باستخدام خوارزمية فورد نتبع الخطوات السابقة الذكر:

- تسمية قمم و رؤوس الشبكة
- عند قمة الانطلاق X_0 نضع $\lambda_0 = 0$ و عند باقي القمم نضع $\lambda_i = \infty$
- نفرض أن حمولة القوس (السهم) (X_i, X_j) هي $C(X_i, X_j)$.

بعد انجاز الخطوات الثلاث أعلاه نحصل على الشبكة التالية:



- في كل قمة X_j يكون فيها $(\lambda_j - \lambda_i) > C(X_i, X_j)$ أو $\lambda_j > C(X_i, X_j) + \lambda_i$ أو $\lambda_i < \lambda_j - C(X_i, X_j)$ نقوم بتعويض λ_j بـ $\lambda_i + C(X_i, X_j)$.

- **القمـة** X_0 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_0 هي التالية: (X_0, X_1)، (X_0, X_2)، (X_0, X_3)
  - بالنسبة للقوس (X_0, X_1):

$$(\lambda_1 - \lambda_0) = \infty - 0 = \infty > C(X_0, X_1) = 90 \ , \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0 + 90 = 90 \Rightarrow \lambda_1 = 90$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_1 = 0$ بـ $\lambda_1 = 90$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

  - بالنسبة للقوس (X_0, X_2):

$$(\lambda_2 - \lambda_0) = \infty - 0 = \infty > C(X_0, X_2) = 240 \ , \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0 + 240 = 240 \Rightarrow \lambda_2 = 240$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_2 = \infty$ بـ $\lambda_2 = 240$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

  - بالنسبة للقوس (X_0, X_3):

$$(\lambda_3 - \lambda_0) = \infty - 0 = \infty > C(X_0, X_3) = 180 \ , \quad \Rightarrow \lambda_3 = 0 + 180 = 180 \Rightarrow \lambda_3 = 180$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_3 = \infty$ بـ $\lambda_3 = 180$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_1 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_1 هي التالية: (X_1, X_3)، (X_1, X_4)،
  - بالنسبة للقوس (X_1, X_3):

$$(\lambda_3 - \lambda_1) = 180 - 90 = 90 > C(X_1, X_3) = 60 \ , \quad \Rightarrow \lambda_3 = 90 + 60 = 150 \Rightarrow \lambda_3 = 150$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_3 = 180$ بـ $\lambda_3 = 150$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

  - بالنسبة للقوس (X_1, X_4):

$$(\lambda_4 - \lambda_1) = \infty - 90 = \infty > C(X_1, X_4) = 180 \ , \quad \Rightarrow \lambda_4 = 90 + 180 = 270 \Rightarrow \lambda_4 = 270$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_4 = \infty$ بـ $\lambda_4 = 270$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_2 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_2 هي التالية: (X_2, X_4)

- بالنسبة للقوس (X_2, X_4):

$$(\lambda_4 - \lambda_2) = 270 - 240 = 30 = C(X_2, X_4) = 30$$

- **القمـة** X_3 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_3 هي التالية: (X_3, X_2)، (X_3, X_5)

- بالنسبة للقوس (X_3, X_5):

$$(\lambda_5 - \lambda_3) = \infty - 150 = \infty > C(X_3, X_5) = 210 \ , \quad \Rightarrow \lambda_5 = 150 + 210 = 360 \Rightarrow \lambda_5 = 360$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_5 = \infty$ بـ $\lambda_5 = 360$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- بالنسبة للقوس (X_3, X_2):

$$(\lambda_2 - \lambda_3) = 240 - 150 = 90 > C(X_3, X_2) = 60 \ , \quad \Rightarrow \lambda_2 = 150 + 60 = 210 \Rightarrow \lambda_2 = 210$$

نلاحظ أن i= 3 و j=2 حيث أن i>j لذلك نعود من جديد لفحص الأقواس التي تنطلق من القمة X_2.

أو بعبارة أخرى

بما أن قيمة λ_2 تغيرت من $\lambda_2 = 240$ إلى $\lambda_2 = 210$ و بما أن قيمة λ_4 المتعلقة بالقوس (X_2, X_4) تحسب بدلالة λ_2 التي تغيرت فحتما أن قيمة λ_4 سوف تتغير لذلك سوف نعود للقمة X_2

* **القمـة** X_2 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_2 هي التالية: (X_2, X_4)

$$(\lambda_4 - \lambda_2) = 270 - 210 = 60 > C(X_2, X_4) = 30 \ , \quad \Rightarrow \lambda_4 = 210 + 30 = 240 \Rightarrow \lambda_4 = 240$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_4 = 270$ بـ $\lambda_4 = 240$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_4 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_4 هي التالية: (X_4, X_5)

- بالنسبة للقوس (X_4, X_5):

$$(\lambda_3 - \lambda_1) = \infty - 90 = \infty > C(X_1, X_3) = 60 \ , \quad \Rightarrow \lambda_3 = 90 + 60 = 150 \Rightarrow \lambda_3 = 150$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_3 = \infty$ بـ $\lambda_3 = 150$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_5 : بالنسبة للأقواس التي تنطلق من القمة X_5، فإنه لا ينطلق أي سهم

نصل إلى أن أقصر مسار هو المسار ذو الطول 300 بين القمتين: القمة الابتدائية A و القمة النهائية B السؤال هو ما هو هذا المسار ذو أقصر مسافة التي 300

مرحلـة العودة: في هذه المرحلة نبدأ من القمة الأخيرة أي نبدأ من قمة الوصول X_{n-1} حيث نطرح من القيمة λ_{n-1} قيمة λ_r الموجودة في الأطراف الابتدائية للأقواس التي تصل إلى القمة X_{n-1} و نأخذ أو نختار القوس الذي تكون فيها $(\lambda_{n-1} - \lambda_r) = C(X_i, X_j)$ حيث يكون القوس المختار من بين الأقواس المشكلة لأقصر مسار

- **القمـة** X_5 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_5 هي: (X_3, X_5)، (X_4, X_5)

- بالنسبة للقوس (X_4, X_5):

- $(\lambda_5 - \lambda_4) = 300 - 240 = 60 = C(X_4, X_5) = 60$

بما أن $(\lambda_5 - \lambda_4) = C(X_4 - X_5)$ فإن القوس (X_4, X_5) سوف يكون ضمن الأنشطة التي تشكل المسار الأمثل أي أقصر مسار

- بالنسبة للقوس (X_3, X_5):

$$(\lambda_5 - \lambda_3) = 300 - 150 = 150 \neq C(X_3, X_5) = 210$$

بما أن $(\lambda_5 - \lambda_3) \neq C(X_3, X_5)$ فإن القوس (X_3, X_5) سوف لا يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار

- **القمـة** X_4 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_4 هي: (X_2, X_4)،(X_1, X_4)

- بالنسبة للقوس (X_2, X_4):
  - $(\lambda_4 - \lambda_2) = 240 - 210 = 30 = C(X_2, X_4) = 30$

بما أن $(\lambda_4 - \lambda_2) = C(X_2, X_4)$ فإن القوس (X_2, X_4) سوف يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار أي المسار الأمثل

- بالنسبة للقوس (X_1, X_4):
  - $(\lambda_4 - \lambda_1) = 240 - 90 = 150 \neq C(X_1, X_4) = 180$

بما أن $(\lambda_4 - \lambda_1) \neq C(X_1, X_4)$ فإن القوس (X_1, X_4) سوف لا يكون ضمن الأنشطة التي تشكل المسار الأمثل

- **القمـة** X_3 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_3 هي: (X_1, X_3)،(X_0, X_3)

- بالنسبة للقوس (X_0, X_3):
  - $(\lambda_3 - \lambda_0) = 150 - 0 = 150 = C(X_0, X_3) = 150$

بما أن $(\lambda_3 - \lambda_0) = C(X_0, X_3)$ فإن القوس (X_0, X_3) سوف يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار أي المسار الأمثل

- بالنسبة للقوس (X_1, X_3):
  - $(\lambda_3 - \lambda_1) = 150 - 90 = 60 \neq C(X_0, X_3) = 180$

بما أن $(\lambda_3 - \lambda_1) \neq C(X_0, X_3)$ فإن القوس (X_1, X_3) سوف لا يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار

- **القمـة** X_2 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_2 هي: (X_3, X_2)،(X_0, X_2)

- بالنسبة للقوس (X_3, X_2):
  - $(\lambda_2 - \lambda_3) = 210 - 150 = 60 = C(X_3, X_2) = 60$

بما أن $(\lambda_2 - \lambda_3) = C(X_3, X_2)$ فإن القوس (X_3, X_2) سوف يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار

- بالنسبة للقوس (X_0, X_2):
  - $(\lambda_3 - \lambda_0) = 150 - 0 = 150 \neq C(X_0, X_3) = 240$

بما أن $(\lambda_3 - \lambda_0) \neq C(X_0, X_3)$ فإن القوس (X_0, X_2) سوف لا يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار

- **القمـة** X_1 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_1 هي: (X_0,X_1)
  - بالنسبة للقوس (X_0,X_1):
    - $(\lambda_1-\lambda_0)=90-0=90=C(X_0,X_1)=90$

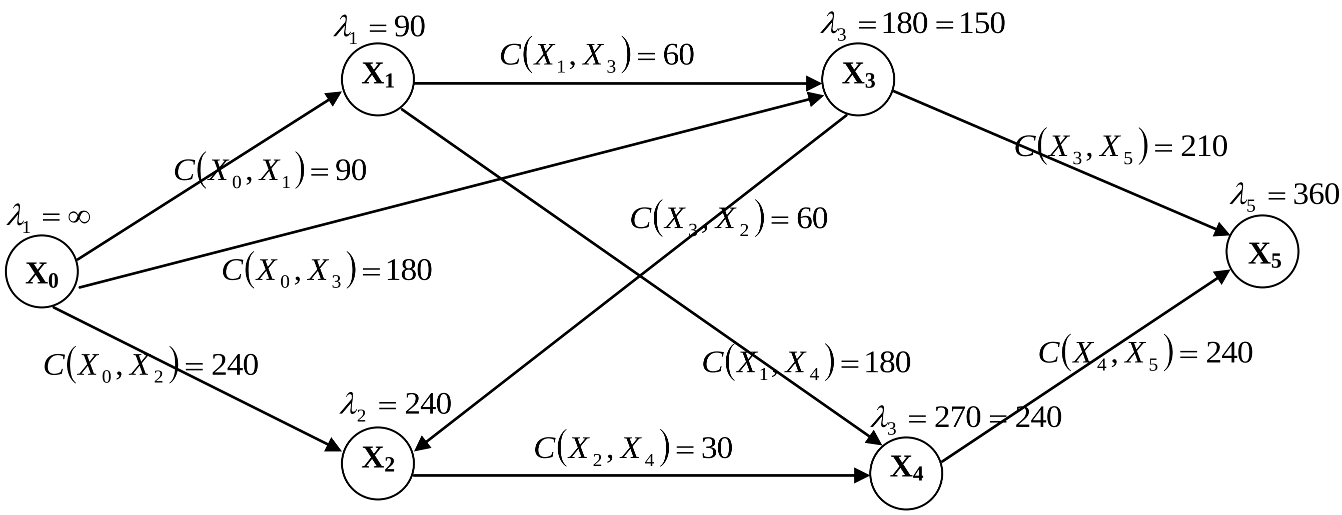
بما أن $(\lambda_1-\lambda_0)=C(X_0,X_1)$ فإن القوس (X_0,X_1) سوف يكون ضمن الأنشطة التي تشكل أقصر مسار

- **القمـة** X_0 : لا يصل إليها أي قوس

بذلك نكون قد حددنا مختلف الأقواس (الطرق) التي تشكل المسار الأمثل (أقصر) الذي يمكن سلوكه أو المرور عبره انطلاقا من النقطة الابتدائية A إلى النقطة النهائية B هذا المسار الأمثل هو التالي:

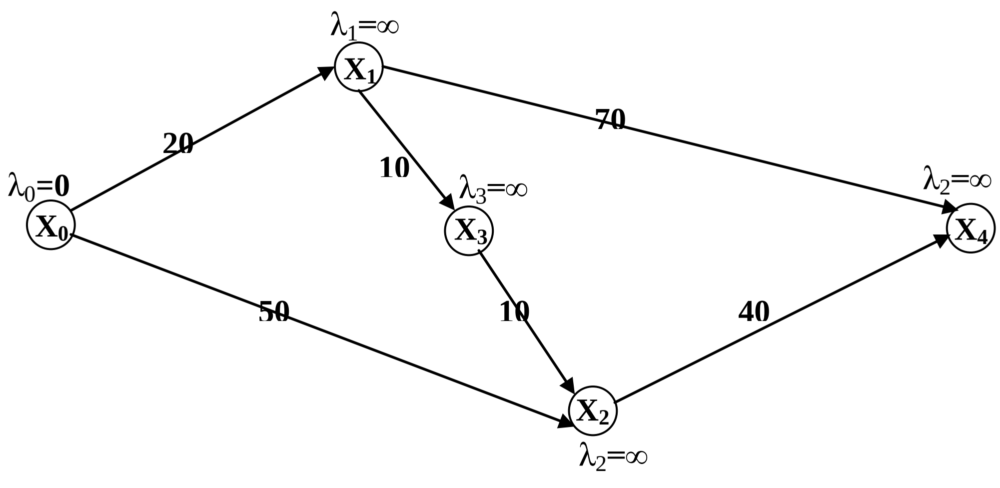
$$U=[(X_0,X_1),(X_1,X_3),(X_3,X_2),(X_2,X_4),(X_4,X_5)]$$

المسار الأمثل يمر على القمم التالية: $A\ ,\ B\ ,\ D\ ,\ C\ ,\ E\ ,\ F$



مثـــال 02.07:

لتكن الشبكة التالية:



I - مرحلـة الذهاب:

- **القمـة** X_0 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_0 هي التالية: (X_0, X_1)، (X_0, X_2)

- بالنسبة للقوس (X_0, X_1):

$$\lambda_0 = 00 < \lambda_1 - C(X_0, X_1) = \infty - 20 = \infty \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + C(X_0, X_1) = 00 + 20 = 20 \Rightarrow \lambda_1 = 20$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_1 = \infty$ بـ $\lambda_1 = 20$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- بالنسبة للقوس (X_0, X_2):

$$\lambda_0 = 00 < \lambda_2 - C(X_0, X_2) = \infty + 50 = \infty \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_0 + C(X_0, X_2) = 00 + 50 = 50 \Rightarrow \lambda_2 = 50$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_2 = \infty$ بـ $\lambda_2 = 50$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_1 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_1 هي التالية: (X_1, X_3)، (X_1, X_4)

- بالنسبة للقوس (X_1, X_3):

$$\lambda_1 = 20 < \lambda_3 - C(X_1, X_3) = \infty - 10 = \infty \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1 + C(X_1, X_3) = 20 + 10 = 30 \Rightarrow \lambda_3 = 30$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_3 = \infty$ بـ $\lambda_3 = 30$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- بالنسبة للقوس (X_1, X_4):

$$\lambda_1 = 20 < \lambda_4 - C(X_1, X_4) = \infty - 70 = \infty \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_1 + C(X_1, X_4) = 20 + 70 = 90 \Rightarrow \lambda_4 = 90$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_4 = \infty$ بـ $\lambda_4 = 90$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_3 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_3 هي التالية: (X_3, X_2)

- بالنسبة للقوس (X_3, X_2):

$$\lambda_3 = 30 < \lambda_2 - C(X_3, X_2) = 50 - 10 = 40 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 + C(X_3, X_2) = 30 + 10 = 40 \Rightarrow \lambda_2 = 40$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_2 = 50$ بـ $\lambda_2 = 40$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

- **القمـة** X_2 : الأقواس التي تنطلق من القمة X_2 هي التالية: (X_2, X_4)

- بالنسبة للقوس (X_2, X_4):

$$\lambda_2 = 40 < \lambda_4 - C(X_2, X_4) = 90 - 40 = 50 \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_2 + C(X_2, X_4) = 40 + 40 = 80 \Rightarrow \lambda_4 = 80$$

على مستوى الشبكة نقوم بتعويض $\lambda_4 = 90$ بـ $\lambda_4 = 80$ كما هو موضح في الشبكة ادناه

II- مرحلـة الإيـاب (العودة):

- **القمـة** X_4 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_4 هي التالية: (X_1, X_4) ، (X_2, X_4)

- بالنسبة للقوس (X_1, X_4): $\lambda_4 - \lambda_1 = 80 - 20 = 60 \neq C(X_1, X_4) = 70$ و عليه فإن: القوس (X_1, X_4) لا ينتمي إلى أقصر مسار.

- بالنسبة للقوس (X_1, X_4): $\lambda_4 - \lambda_1 = 80 - 20 = 60 \neq C(X_1, X_4) = 70$ و عليه فإن: القوس (X_1, X_4) لا ينتمي إلى أقصر مسار.

- **القمـة** X_2 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_2 هي التالية: (X_3, X_2) ، (X_0, X_2)

- بالنسبة للقوس (X_0, X_2): $\lambda_2 - \lambda_0 = 40 - 00 = 40 \neq C(X_0, X_2) = 50$ و عليه فإن: القوس (X_0, X_2) لا ينتمي إلى أقصر مسار.
- بالنسبة للقوس (X_3, X_2): $\lambda_2 - \lambda_3 = 40 - 30 = 10 = C(X_3, X_2) = 10$ و عليه فإن: القوس (X_3, X_2) ينتمي إلى أقصر مسار.

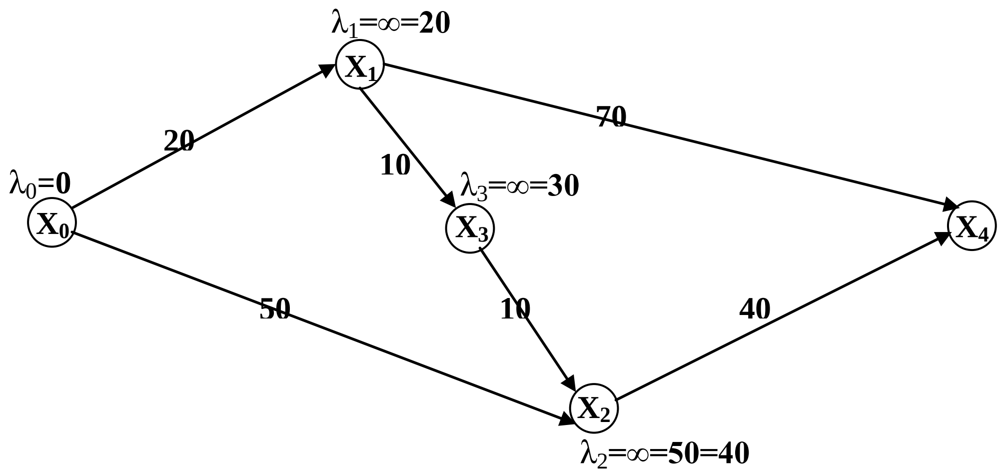
- **القمة** X_3 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_3 هي التالية: (X_1, X_3)

- بالنسبة للقوس (X_1, X_3): $\lambda_3 - \lambda_1 = 30 - 20 = 10 = C(X_1, X_4) = 10$ و عليه فإن: القوس (X_2, X_4) ينتمي إلى أقصر مسار.

- **القمة** X_1 : الأقواس التي تصل إلى القمة X_1 هي التالية: (X_0, X_1)

- بالنسبة للقوس (X_0, X_1): $\lambda_1 - \lambda_0 = 20 - 00 = 20 = C(X_0, X_1) = 20$ و عليه فإن: القوس (X_0, X_1) ينتمي إلى أقصر مسار.

أقصر مسار هو التالي: X_0-X_1-X_3-X_2-X_4



03.07 – حــل مسائــل التـدفــق الأعظمـــي:

تهتم نظرية المسارات المثلى بإيجاد أو البحث عن أمثل مسار (أقصر أو أطول) يربط نقطتين أو قمتين ممثلتين في قمة ابتدائية و قمة نهائية من بين العديد أو من بين مجموعة كبيرة من المسارات المكونة للشبكة. نشير إلى أن الحل الأمثل في مسائل المسار الأمثل يتمثل في المسار الأمثل، أي أقصر مسار في حالة تدنئة التكاليف، أو أطول مسار في حالة تعظيم الأرباح.

بغرض ايجاد الحل الأمثل في مسائل المسارات المثلى يتم استخدام العديد من الطرق أو الخوارزميات نذكر منها ما يلي:

1. خوارزمية فورد فليكرسون l'Algorithme Ford Fulkerson
2. طريقة المصفوفات: Méthode Matricielle

3. خوارزمية l’Algorithme De Dijkstra
4. خوارزمية l’Algorithme De Bellman

سوف نقتصر على التطرق بالتفصيل إلى الطريقة الأولى الممثلة في خوارزمية فورد l’Algorithme De FORD

01.03.07 – خـوارزميـــة فـورد فليكرسـون l’Algorithme de Ford Fulkerson

وفقا لهذه الطريقة أو الخوارزمية يتم الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق اتباع مجموعة من الخطوات و التي نتناولها من خلال المثال التالي:

مثــــال 03.07:

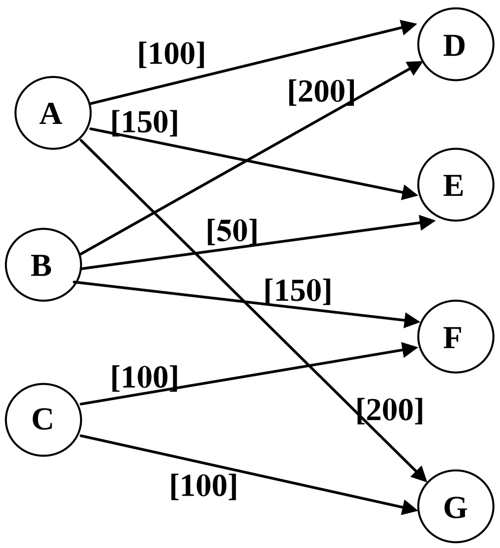
تتوفر إحدى بلديات ولاية تيارت على ثلاثة خزانات A,B,C تقوم بتزويد أربعة أحياء D,E,F,G بالماء الصالح للشرب حيث أن:

- الخزان A يستطيع تصريف 450 لتر/ الدقيقة
- الخزان B يستطيع تصريف 250 لتر/ الدقيقة
- الخزان C يستطيع تصريف 200 لتر/ الدقيقة

أما فيما يخص احتياجات القرى من الماء فهي كالتالي:

- الحي D يحتاج 300 لتر/ الدقيقة
- الحي E يحتاج 100 لتر/ الدقيقة
- الحي F يحتاج 200 لتر/ الدقيقة
- الحي G يحتاج 300 لتر/ الدقيقة

توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالقرى علما أن هذه القنوات لها طاقة تصريف محدودة و التي توضحها الشبكة التالية:



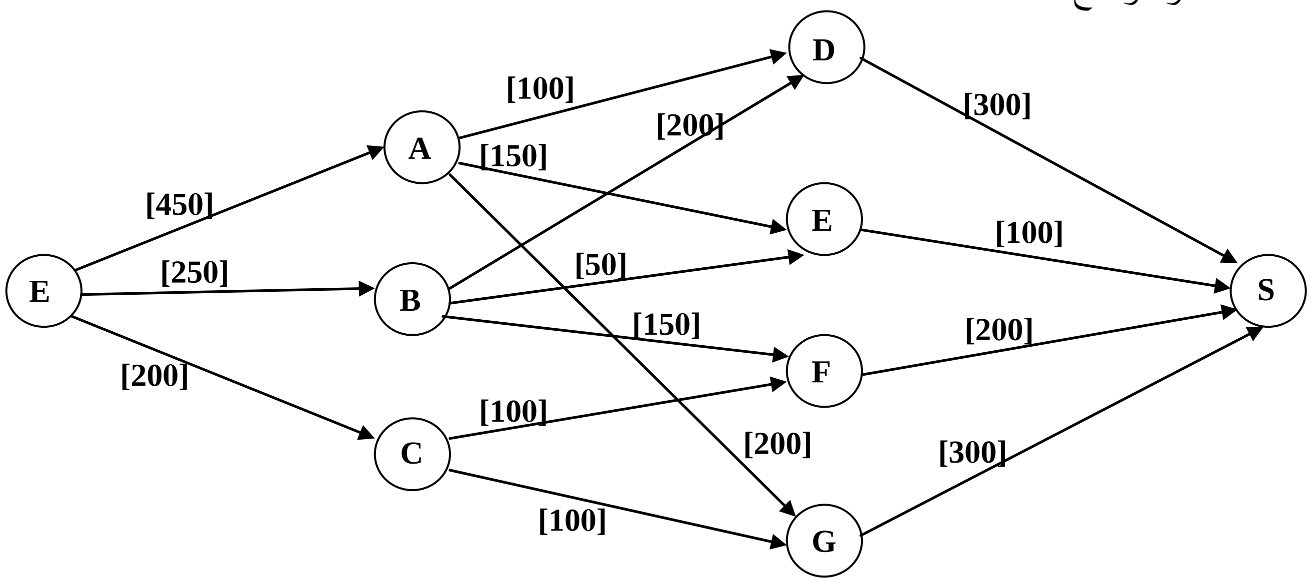
من خلال المسألة أعلاه نهدف إلى ايجاد و تحديد الكميات المثلى (العظمى) الواجب تمريرها عبر مختلف قنوات التصريف التي تخضع لقيود تتمثل في طاقة التصريف المحدودة، بعبارة أخرى نود تحديد أمثل (أكبر) كمية الواجب تمريرها عبر كل قناة تصريف من مختلف المنابع الثلاثة A,B,C بغرض تلبية طلبات مختلف المصبات D,E,F,G.

بغرض الوصول إلى ذلك لدينا طريقة تسمى: خوارزمية l'Algorithme De Ford Fulkerson و التي مضمونها إتباع مجموعة من الخطوات نوردها فيما يلي:

1. نقوم بإضافة قمتين وهميتين إلى الشبكة

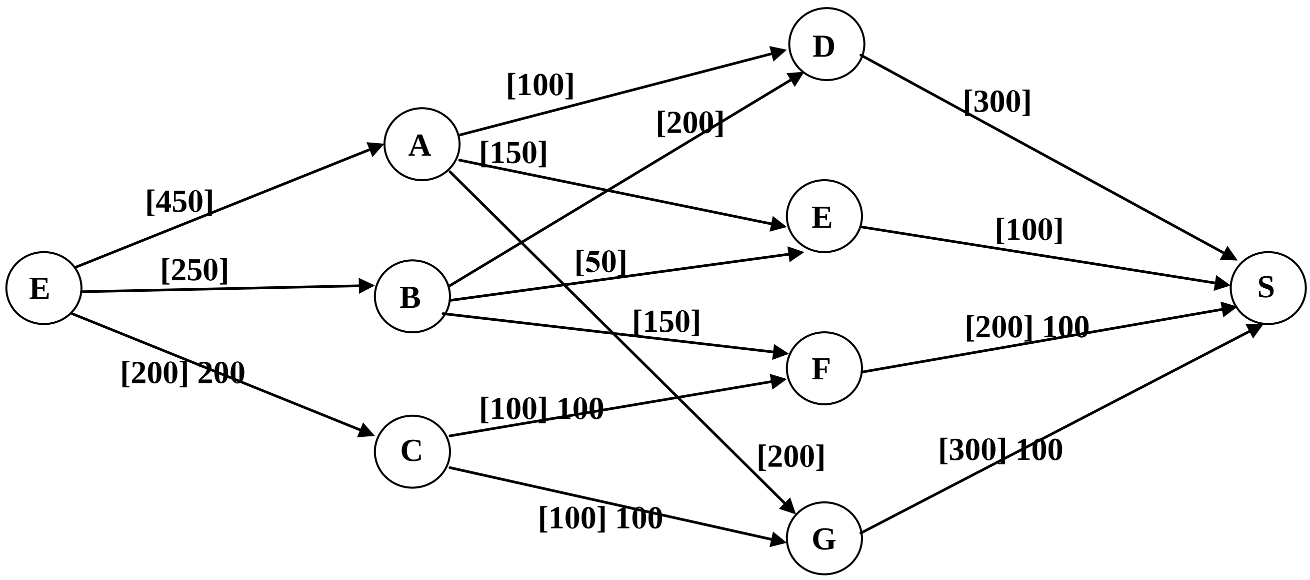
- قمة البداية (المدخل) و نسميها E حيث نقوم بربطها بأقواس مع قمم المنبع A,B,C حيث أن حمولة الأقواس هي على التوالي طاقة المنابع A,B,C
- قمة النهاية (المخرج) و نسميها S حيث نقوم بربطها بأقواس مع قمم المصبات D,E,F,G حيث أن حمولة الأقواس هي على التوالي احتياجات المصبات D,E,F,G

كما هو موضح أدناه:



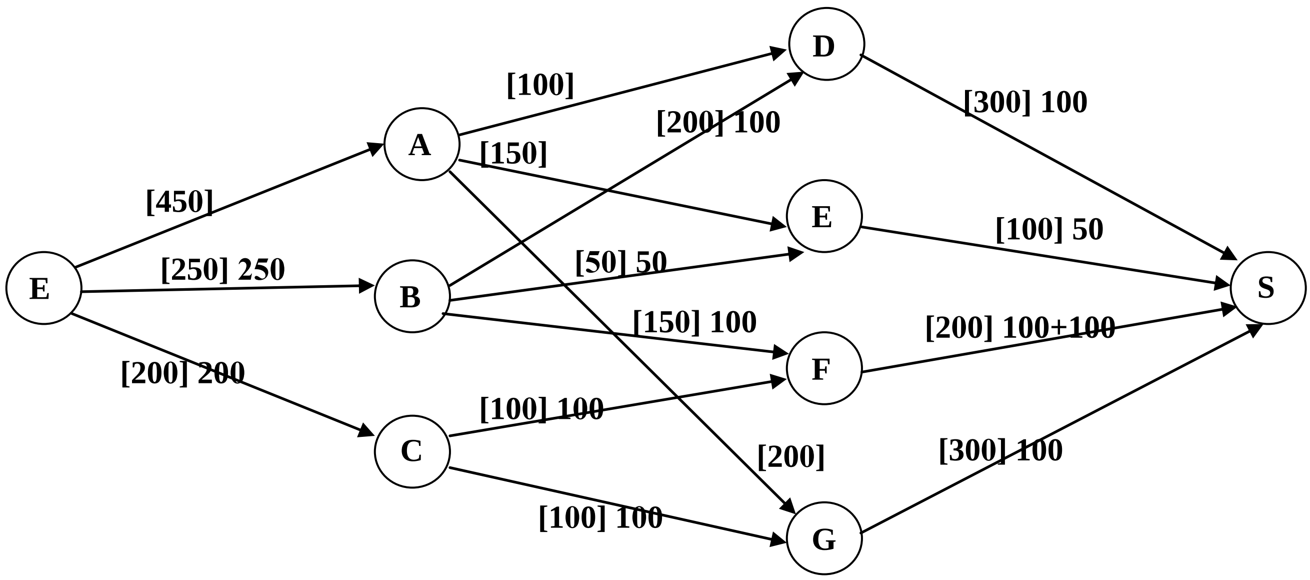
1. من القمة E : نقوم بتمرير الكمية 200 لتر من قمة بداية (مدخل) الشبكة E عبر القوس E-C إلى القمة C كما هو موضح في الشبكة، يترتب عن ذلك أن القوس E-C يصبح قوسا مشبعا أي تم كلية استخدام طاقة تصريفه التي تساوي 200 لتر و بالتالي يصبح على مستوى القمة C كمية تساوي 200 لتر يتم تصريفها كما يلي:

- تمرير أو تصريف كمية تساوي 100 لتر عبر القوس C-F إلى القمة F ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس F-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: تشبع القوسC-F في حين أن القوس F-S بقي له طاقة تصريف تساوي 100 لتر
- تمرير أو تصريف كمية تساوي 100 لتر عبر القوس C-G إلى القمة G ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس G-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: تشبع القوسC-G في حين أن القوس G-S بقي له طاقة تصريف تساوي 200 لتر



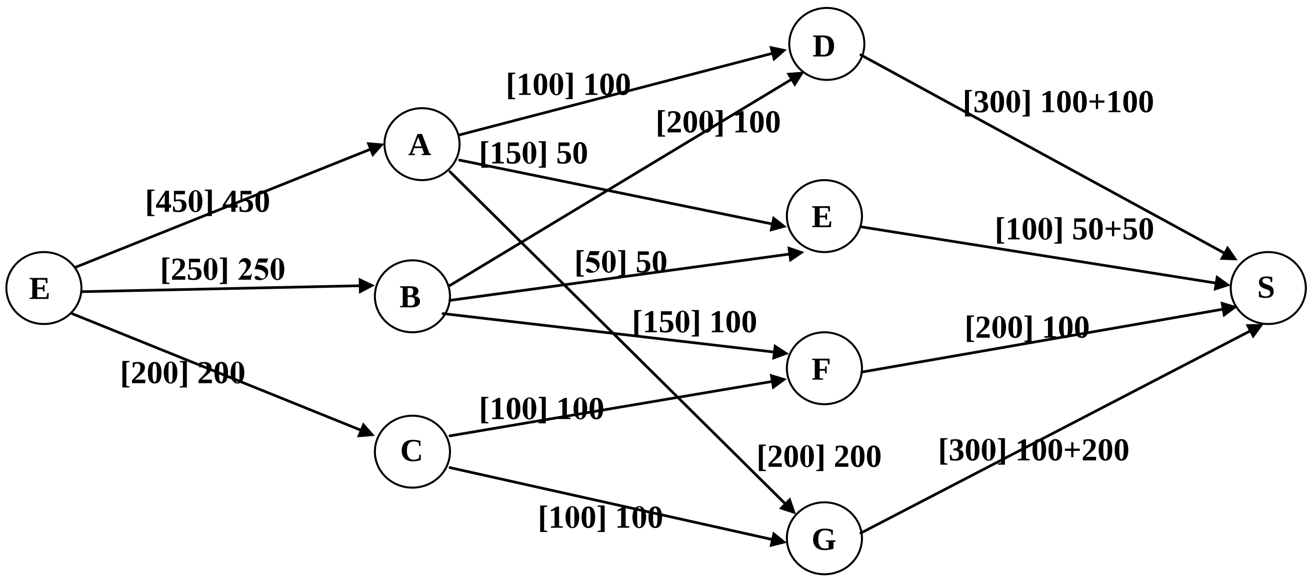
2. من القمـة E : نقوم بتمرير الكمية 250 لتر من قمة بداية (مدخل) الشبكة E عبر القوس E-B إلى القمة B كما هو موضح في الشبكة، يترتب عن ذلك أن القوس E-B يصبح قوسا مشبعا أي تم كلية استخدام طاقة تصريفه التي تساوي 250 لتر و بالتالي يصبح على مستوى القمة B كمية تساوي 250 لتر يتم تصريفها كما يلي:

- تمرير أو تصريف كمية تساوي 100 لتر عبر القوس B-F إلى القمة F ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس F-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: عدم تشبع القوسB-F حيث بقي له طاقة تصريف غير مستغلة تساوي 05 في حين تشبع القوس F-S
- تمرير أو تصريف كمية تساوي 50 لتر عبر القوس B-E إلى القمة E ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس E-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: تشبع القوسB-E و عدم تشبع القوس E-S حيث بقي له طاقة تصريف غير مستغلة تساوي 50 لتر
- تمرير أو تصريف كمية تساوي 100 لتر عبر القوس B-D إلى القمة D ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس D-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: عدم تشبع القوسB-D حيث بقي له طاقة تصريف غير مستغلة تساوي 100 و عدم تشبع القوس D-S حيث بقي له طاقة تصريف غير مستغلة تساوي 200 لتر



3. من القمة E : نقوم بتمرير الكمية 450 لتر من قمة بداية (مدخل) الشبكة E عبر القوس E-A إلى القمة A كما هو موضح في الشبكة، يترتب عن ذلك أن القوس E-A يصبح قوسا مشبعا أي تم كلية استخدام طاقة تصريفه التي تساوي 450 لتر و بالتالي يصبح على مستوى القمة A كمية تساوي 045 لتر يتم تصريفها كما يلي:

- تمرير أو تصريف كمية تساوي 100 لتر عبر القوس A-D إلى القمة D ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس D-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: تشبع القوسA-D في حين أن القوس D-S لم يتشبع حيث بقي له طاقة تصريف تساوي 200 لتر
- تمرير أو تصريف كمية تساوي 50 لتر عبر القوس A-E إلى القمة E ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس E-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: عدم تشبع القوسA-E حيث بقي له طاقة تصريف غير مستغلة تساوي 100 في حين أن القوس E-S قد تشبع
- تمرير أو تصريف كمية تساوي 200 لتر عبر القوس A-G إلى القمة G ليتم بعد ذلك تمريرها عبر القوس G-S إلى قمة نهاية (مخرج) الشبكة S يترتب عن هذين الاجرائين ما يلي: تشبع كل من القـوس A-G و القوس G-S



ملاحظة:

الكمية التي وصلت إلى القمة A تساوي 450 لتر غير أنه تم تصريف منها فقط 350 لتر كما يلي:

- 100 عبر القوس A-D إلى القمة D ليتم تصريفه بعد ذلك عبر القوس D-S إلى القمة S
- 50 عبر القوس A-E إلى القمة E ليتم تصريفه بعد ذلك عبر القوس E-S إلى القمة S
- 200 عبر القوس A-G إلى القمة G ليتم تصريفه بعد ذلك عبر القوس G-S إلى القمة S

معنى ذلك أنه:

- سوف يتبقى على مستوى الخزان (القمة) A كمية غير مستغلة أو غير مصرفة تقدر بـ 100 لتر
- القرية (القمة) D لم يتم احتياجها كلية حيث أن لها عجز يساوي 100 لتر

إذن بذلك تم التوصل إلى أن:

الكميات الواجب أو التي يتم تصريفها عبر كل أنبوب (قوس) بحيث أنه يتم نقل كمية متاحة على مستوى مختلف المنابع إلى مختلف المصبات

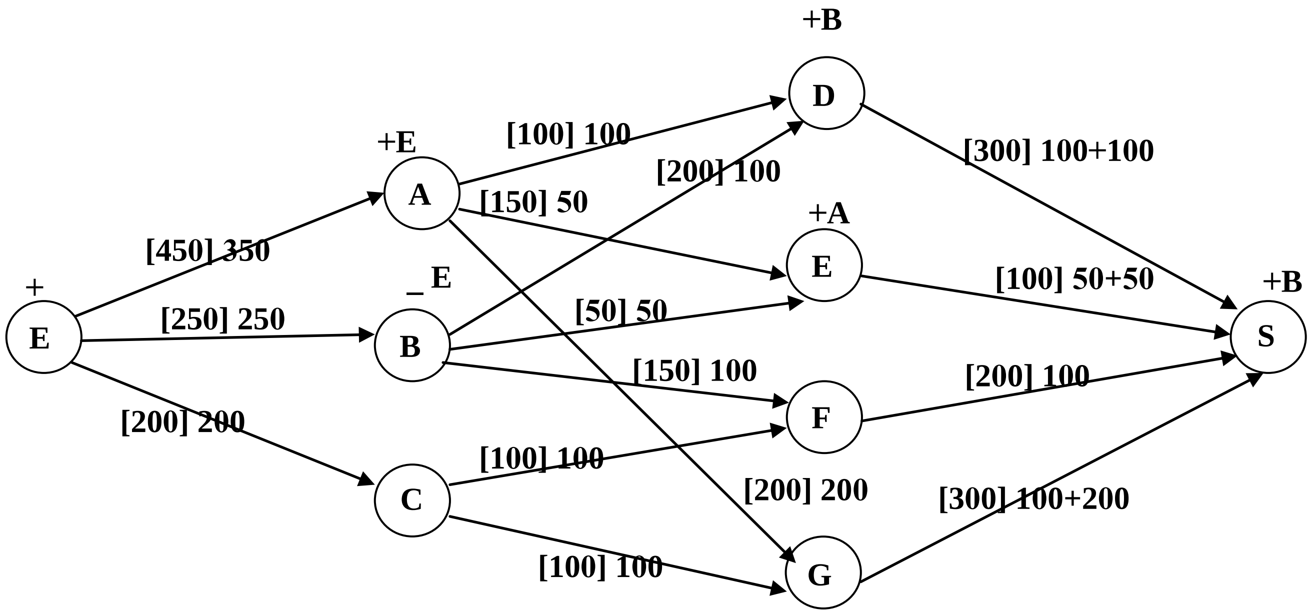
السؤال الذي يطرح هو التالـي: هل التصريف (الحل) المتوصل إليه أعلاه هو تصريف (حل) أمثل

للإجابة على هذا السؤال ننتقل إلى المرحلة الثانية من خوارزمية Ford Fulkerson

II – اختبـار أمثليـة الحـل: نعني بهذه فيما إذا كان التصريف المتحصل عليه أعلاه هو تصريف أمثل أم لا

من أجل ذلك نقوم بتفحص جميع قمم الشبكة قمة تلوى الأخرى بغرض معرفة فيما إذا كان ينطلق منها قوس غير مشبع أم لا:

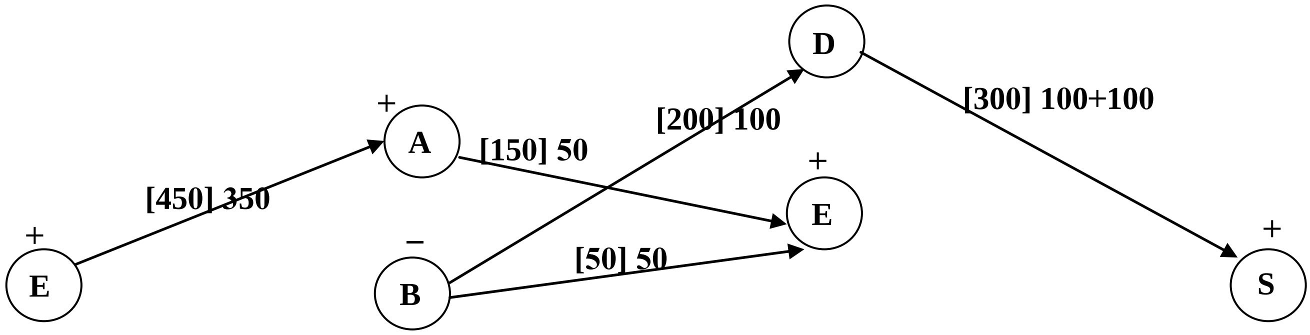
1. القمة E : نوسم قمة بداية الشبكة بإشارة + ، هذه القمة ينطلق منها قوس غير مشبع E-A نقوم بوضع تعيين Marquage قمة نهاية هذا القوس و هي A بإشارة A+ كما هو موضح في الشبكة.
2. القمة A : ينطلق منها قوس غير مشبع A-E نقوم بوضع تعيين قمة نهاية هذا القوس و هي E بإشارة E+ كما هو موضح في الشبكة أدناه:
3. القمة E :لا ينطلق منها قوس غير مشبع و إنما يصل إليها قوس غير معدوم (أي قوس به حمولة أما قوس معدوم يعني قوس ليس به حمولة يعني قوس لا يحمل أو لا يصرف أي قيمة) و هو B-E نقوم بوضع تعيين على مستوى قمة بداية هذا القوس و هي B بإشارة E− كما هو موضح في الشبكة أدناه:
4. القمة B : ينطلق منها قوس غير مشبع B-D نقوم بوضع تعيين قمة نهاية هذا القوس و هي D بإشارة + كما هو موضح في الشبكة أدناه:
5. القمة D : ينطلق منها قوس غير مشبع D-S نقوم بوضع تعيين قمة نهاية هذا القوس و هي S بإشارة + كما هو موضح في الشبكة أدناه:



ما دمنا وصلنا إلى تعيين قمة نهاية الشبكة فإن التصريف (الحل) المتحصل أو المتوصل إليه أعلاه لا يمثل التصريف (الحل) الأمثل و بالتالي هناك إمكانية لتحسين الحل

III – تحسيـن الحـل: يتم ذلك بالاستعانة بالأقواس التي تم تعيينها أثناء عملية اختبار الحل الأمثل.

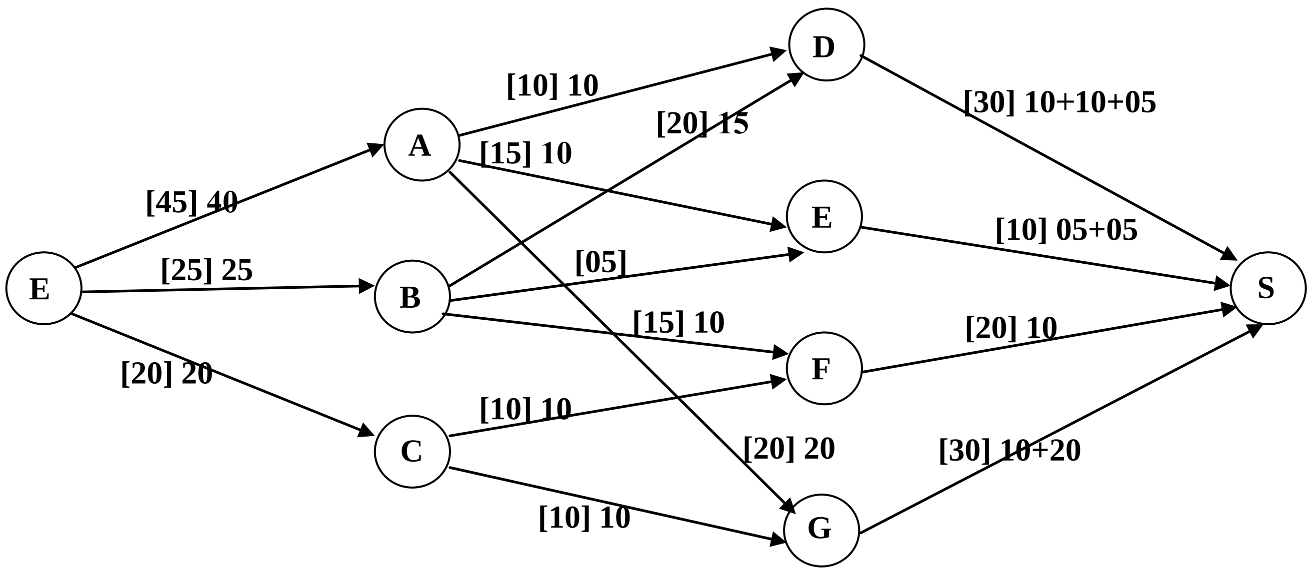
الأقواس أو المسار الذي تم المرور عبره أثناء عملية اختبار الحل الأمثل



المسار يوضح لنا مسار تحسين الحل أما كيفية تحسين فتكون كالتالي:

- التخفيض من القوس B-E بكمية تساوي 50
- الزيادة في الأقواس المتبقية للمسار بكمية تساوي 50

و عليه سوف نحصل على الشبكة الجديد التالي الذي يتضمن التصريف الجديد التالي:



04.07 – حـــل مسائـــل الشجـرة المثلــــى:

تهتم نظرية الشجرة المثلى في ايجاد و تحديد أقل و ادنى تكلفة و مسافة أو أعلى الأرباح و العوائد و التدفقات بغرض ربط جميع قمم و رؤوس الشبكة فيما بينها.

بغرض ايجاد الحل الأمثل في مسائل الشجرة المثلى يتم استخدام العديد من الطرق أو الخوارزميات نذكر منها ما يلي:

1. خوارزمية كريسكال l'Algorithme De J.B.Kruskal
2. خوارزمية سولان l'Algorithme De G.Sollin

01.04.07 – خوارزمية كريسكال l'Algorithme De J.B.Kruskal

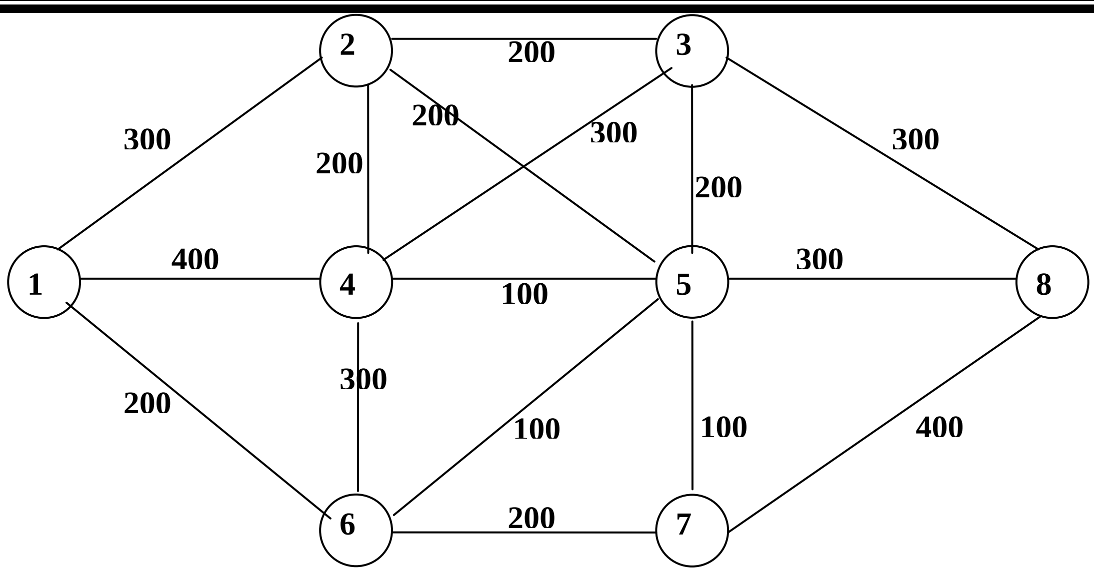
وفقا لهذه الطريقة أو الخوارزمية يتم الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق اتباع مجموعة من الخطوات و التي نوردها فيما يلي:

1. نقوم بتمييز الأقواس المتساوية الحمولة باضافة المقادير a , $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, ...
2. نقوم بترتيب الأقواس تصاعديا تبعا و حسبا لحوملتها
3. نقوم برسم الأقواس التي تم ترتيبها في الخطوة الثانية أعلاه مع عدم رسم أي تفادي رسم الأحرف التي تشكل حلقة.
4. حساب التكاليف الاجمالية.

بغرض أكثر توضيح لهذه الخطوات نأخذ الأمثلة التالية:

مثـــال 04.07:

بغرض ربط مجموعة من القرى النائية لبلدية السوقر بولاية تيارت بشبكة الطرق المعبدة، تم إجراء دراسة حول هذه العملية. إمكانيات الربط المتاحة و كذا التكلفة المترتبة عن عملية الربط بين مختلف هذه القرى تقدمها الشبكة التالي:

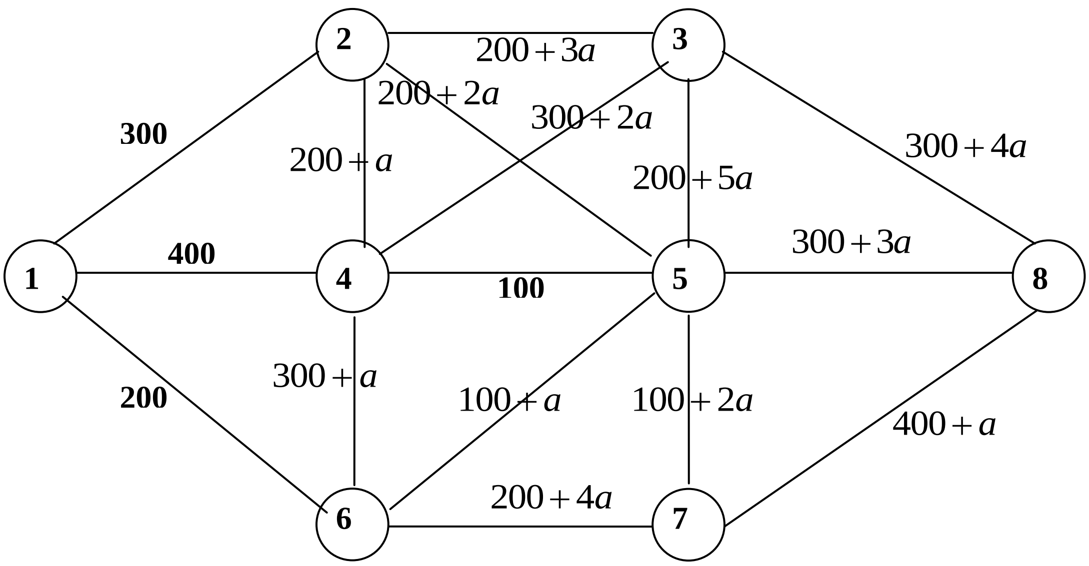


- **المطلـوب:**

1. حدد الشجرة المثلى لربط جميع قرى البلدية بأقل تكلفة ممكنة و هذا باستخدام خوارزمية كريسكال l'Algorithme De J.B.Kruskal

بغرض الوصول إلى الشجرة المثلى التي تسمح لنا بربط جميع قرى البلدية بأقل تكلفة ممكنة باستخدام خوارزمية كريسكال l'Algorithme De J.B.Kruskal نتبع الخطوات التالية:

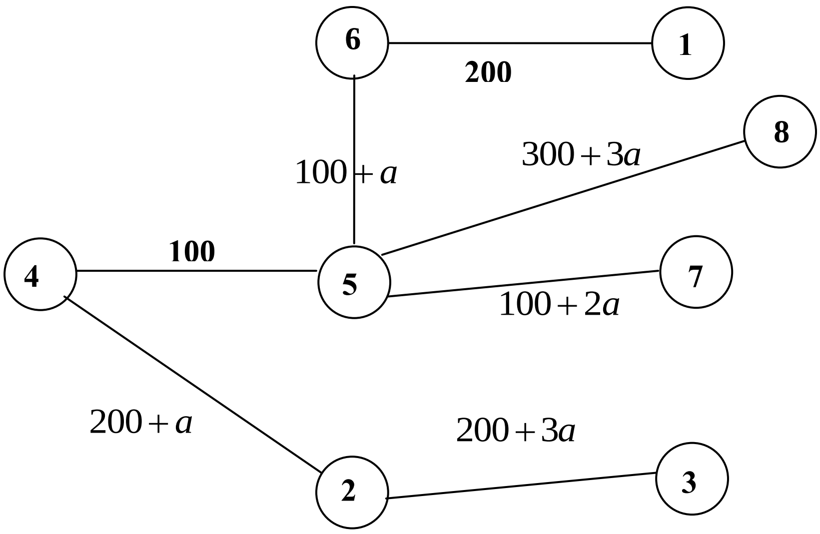
1. نقوم بتمييز الأقواس المتساوية الحمولة باضافة المقادير ...... , $5a$, $4a$, $3a$, $2a$, a كما هو موضح في الشبكة أدناه:



2. ترتيب الأقواس تصاعديا تبعا و حسبا لحوملتها

القوس	الحمولة	القوس	الحمولة	القوس	الحمولة	القوس	الحمولة
4-5	100	2-4	200+a	3-5	200+5a	5-8	300+3a
6-5	100+a	2-5	200+2a	1-2	300	3-8	300+4a
5-7	100+2a	2-3	200+3a	4-6	300+a	1-4	400
1-6	200	6-7	200+4a	4-3	300+2a	7-8	400+a

3. نقوم برسم الأقواس التي تم ترتيبها في الخطوة الثانية أعلاه مع عدم رسم أي تفادي رسم الأحرف التي تشكل حلقة.



لا يتم رسم القوس $5-2$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $7-6$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $5-3$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $2-1$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $6-4$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $3-4$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $8-3$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $4-1$ لأنه يشكل حلقة

لا يتم رسم القوس $8-7$ لأنه يشكل حلقة

4. حسلب التكلفة الاجمالية :

$$200+a+100+100+a+200+300+3a+100+2a+200+3a=1200+10a$$

بوضع $a=0$ تصبح التكلفة الاجمالية تساوي 1200.

ملاحظـــة: متعلقة خوارزمية كريسكال **لإيجاد الشجرة المثلى في حالة تعظيم الارباح أو العوائد**

1. نقوم بتمييز الأقواس المتساوية الحمولة باضافة المقادير $a\ ,\ 2a\ ,\ 3a\ ,\ 4a\ ,\ 5a\ ,\ ......$

2. نقوم بترتيب الأقواس **تنــازليـــــا** تبعا و حسبا لحوملتها

3. نقوم برسم الأقواس التي تم ترتيبها في الخطوة الثانية أعلاه مع عدم رسم أي تفادي رسم الأحرف التي تشكل حلقة.

4. حساب الأربح أو العوائد الاجمالية.

02.04.07 – خوارزمية ســــولان l’Algorithme De G.Sollin

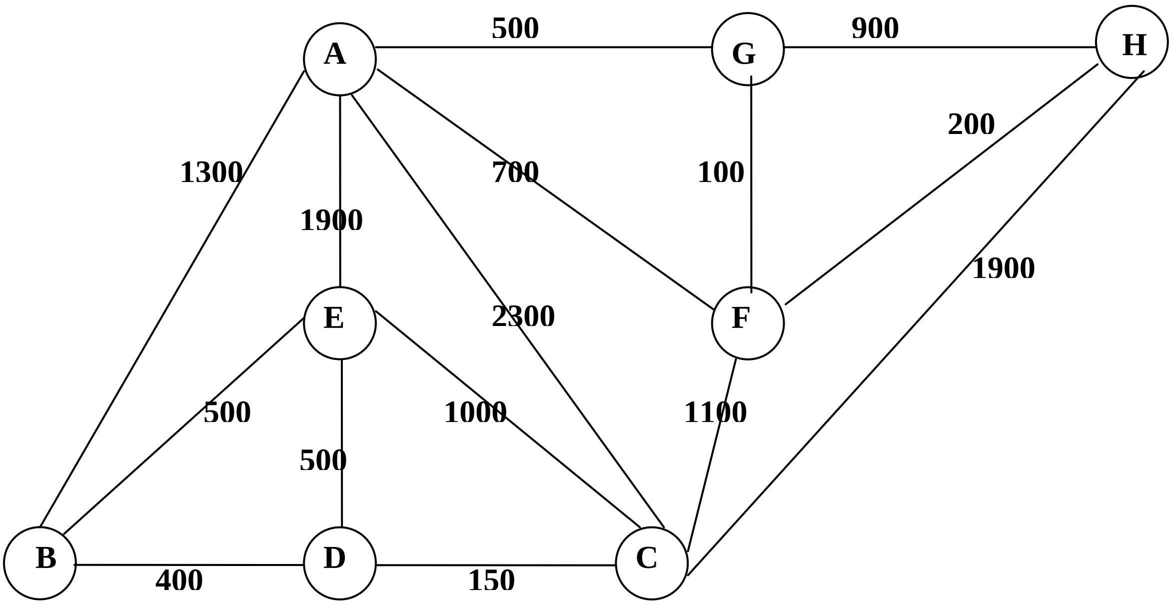
وفقا لهذه الطريقة أو الخوارزمية يتم الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق اتباع مجموعة من الخطوات و التي نوردها فيما يلي:

1. تمييز الأقواس المتساوية الحمولة باضافة المقادير ...... , $5a$, $4a$, $3a$, $2a$, a
2. نقوم بتفحص قمم الشبكة قمة بعد قمة حيث يتم اختيار و رسم القوس ذو أقل حمولة على مستوى أي قمة تم تفحصها مع تفادي و عدم اعادة أخذ القوس الذي تم اختاره.
3. نقوم برسم الأقواس التي تم اختيارها على مستوى كل قمة في الخطوة الثانية أعلاه
4. حساب التكاليف الاجمالية.

بغرض أكثر توضيح لهذه الخطوات نأخذ الأمثلة التالية:

مثـــال 05.07:

أسفرت دراسة عملية تزويد و ربط أحياء دائرة فرندة بولاية تيارت بشبكة الانترنت عن المعطيات التالية و التي تقدمها الشبكة التالية:

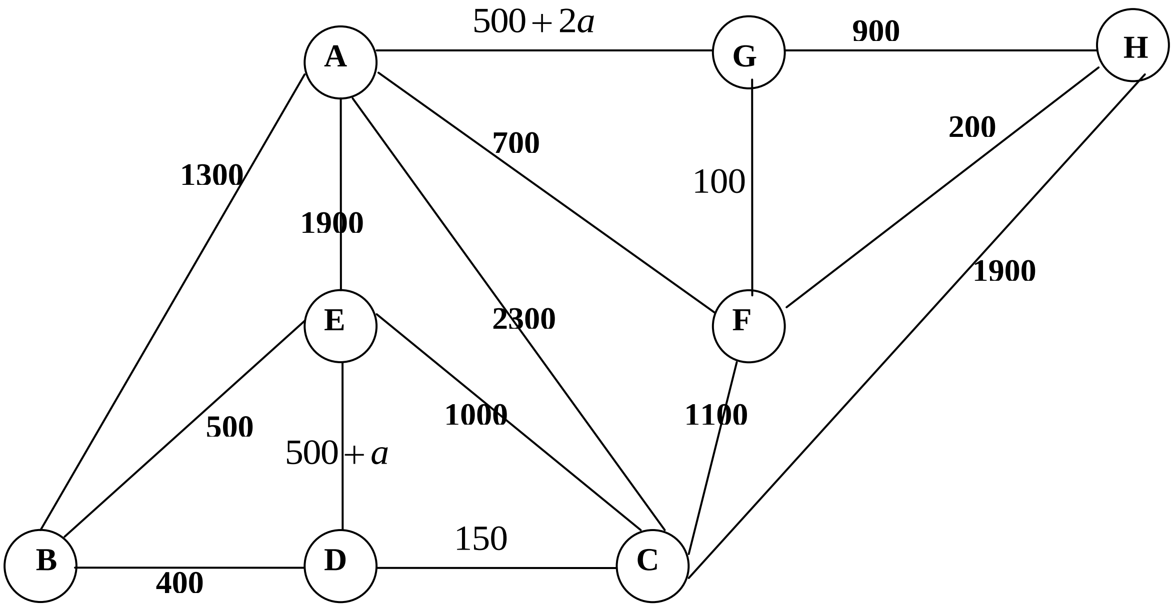


– المطلـوب:

1. حدد الشجرة المثلى التي من خلالها ربط جميع القرى بشبكة الانترنت بأقل تكلفة ممكنة.و هذا باستخدام خوارزمية سولان l’Algorithme De G.Sollin

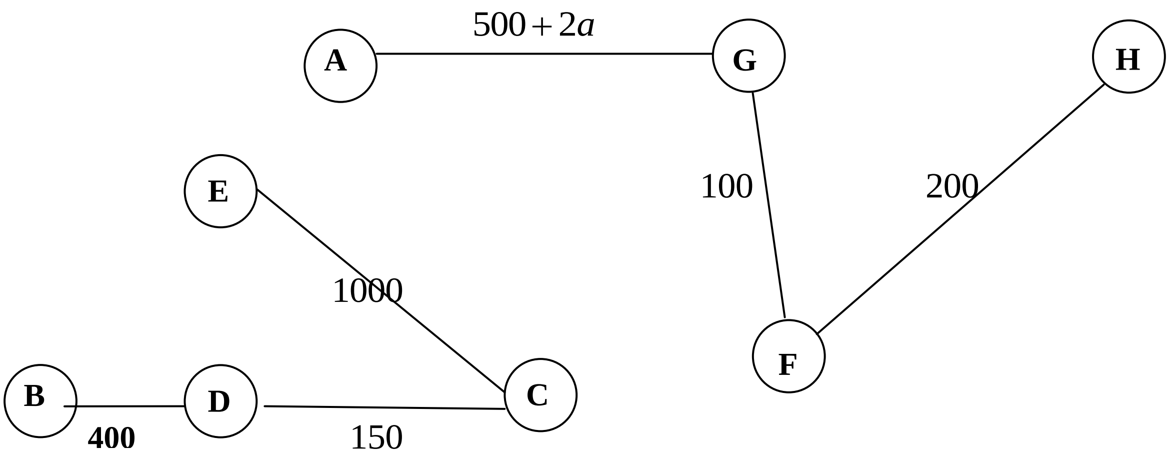
بغرض الوصول إلى الشجرة المثلى التي تسمح لنا بربط جميع قرى البلدية بأقل تكلفة ممكنة باستخدام خوارزمية خوارزمية سولان l’Algorithme De G.Sollin نتبع الخطوات التالية:

1. نقوم بتمييز الأقواس المتساوية الحمولة باضافة المقادير ...... , $5a$, $4a$, $3a$, $2a$, a كما هو موضح في الشبكة أدناه:



2. نقوم بتفحص قمم الشبكة قمة بعد قمة حيث يتم اختيار و رسم القوس ذو أقل حمولة على مستوى أي قمة تم تفحصها مع تفادي و عدم اعادة أخذ القوس الذي تم اختاره.

- ✓ عند النقطة A : القوس أقل حمولة هو: $A-G=500+2a$ حيث نقوم برسمة كما هو موضح أدناه:
- ✓ عند النقطة B : القوس أقل حمولة هو: $B-D=400$ حيث نقوم برسمة كما هو موضح أدناه:
- ✓ عند النقطة C : القوس أقل حمولة هو: $C-E=1000$ حيث نقوم برسمة كما هو موضح أدناه:
- ✓ عند النقطة D : القوس أقل حمولة هو: $D-C=150$ لا نرسمه لأنه تم اختيار و رسم هذا القوس
- ✓ عند النقطة E : القوس أقل حمولة هو: $E-C=1000$ لا نرسمه لأنه تم اختيار و رسم هذا القوس
- ✓ عند النقطة F : القوس أقل حمولة هو: $F-H=200$ حيث نقوم برسمة كما هو موضح أدناه:
- ✓ عند النقطة G : القوس أقل حمولة هو: $G-F=100$ حيث نقوم برسمة كما هو موضح أدناه:
- ✓ عند النقطة H : القوس أقل حمولة هو: $H-F=200$ لا ن رسمه لأنه تم اختيار و رسم هذا القوس



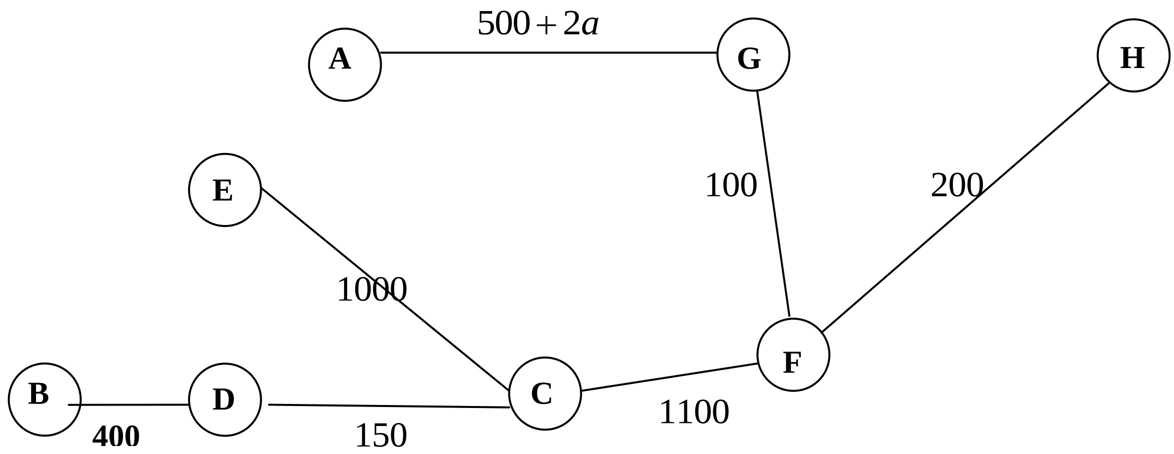
بعد عملية الرسم تم الحصول على شجيرتين هما:

1. الشجيرة الأولى: $A-G-F-H$
2. الشجيرة الثانية: $B-D-C-E$

سوف نحاول الربط بين الشجرتين بأقل تكلفة. امكانيات الربط المتوفرة و المتاحة هي التالية:

امكانات الربط	الحمولة
A-E	1900
A-C	2300
F-C	1100
H-C	1900

نختار القوس F-C=1100 ذو أقل حمولة بين امكانيات الربط و عليه تصبح الشجرة المثلى هي التالية:



3. حساب التكاليف الاجمالية: $400+150+1000+1100+200+100+500+2a=3450$

ملاحظـــة: متعلقة بخوارزمية سولان **لإيجاد الشجرة المثلى في حالة تعظيم الارباح أو العوائد**

1. تمييز الأقواس المتساوية الحمولة باضافة المقادير ...... , $5a$, $4a$, $3a$, $2a$, a
2. نقوم بتفحص قمم الشبكة قمة بعد قمة حيث يتم اختيار و رسم القوس ذو **أكبـر** حمولة على مستوى أي قمة تم تفحصها مع تفادي و عدم اعادة أخذ القوس الذي تم اختاره.
3. نقوم برسم الأقواس التي تم اختيارها على مستوى كل قمة في الخطوة الثانية أعلاه
4. حساب الأرباح أو العوائد الاجمالية.

المحور الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود

الفصـــل الثامـــن

مدخـــــل للبـرمجـــة غيـــر الخطيـــة
بقيـــود أو بـــــدون قيـــــــود

Introduction à la programmation non linéaire

avec contraintes ou sans contraintes

أهداف الفصل:

بعد انتهائك من دراسة و الاطلاع بعناية على محتويات هذا الفصل، فإنك تستطيع الإلمام بما يلي:

- الشكل العام لنماذج البرمجة غير الخطية.
- نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل معادلات.
- طريقة مضاعف لاغرانج.
- نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل متراجحات.
- طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل متراجحات.

01.08 – تمهيــد:

تم التطرق من خلال الفصول السابقة الى البرمجة الخطية و تطبيقاتها المختلفة في العديد من مجالات الحياة. لقد تم افتراض من خلال نماذج البرمجة الخطية أن كل من دالة الهدف المراد تعظيمها أو تدنئتها، و القيود الوظيفية أنها دوال و معادلات خطية بمتغيرات النموذج. في بعض الحالات هذه الشروط الممثلة في العلاقة الخطية قد لا تتوفر، في هذه الحالة نكون أمام نماذج البرمجة غير الخطية. هذه الأخيرة قد تتضمن عدم خطية دالة الهدف كما قذ تتضمن عدم خطية القيود الوظيفية لهذه النماذج.

02.08 – الشكل العـام لنماذج البرمجـــة غيـر الخطيـــة:

تكون الصيغة العامة لنماذج البرمجة غير الخطية على الشكل التالي:

$$Max\ \ (Min)\ \ Z = f(X) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n)$$

Soumise aux Contraintes

$$g_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n) \begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} b_i \ \ ; \ \ i = 1,2,3, ..., m$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n) \ge 0$$

حيث أن:

- $f(X)$ و $g_i(X)$ دوال معينة في المتغيرات $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n)$ يمكنها أن تأخذ أي شكل رياضي.
- $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n)$ تعني أن المتغيرات غير سالبة أي $x_j \ge 0$ من أجل جميع قيم $j = 1,2,3, ..., n$.

تتلخص الصياغة الرياضية لنماذج البرمجة غير الخطية في ايجاد قيم $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n)$ التي تحقق في آن واحد ما يلي:

1. اعطاء دالة الهدف Z امثل قيمة أي اعطاء دالة الهدف Z اعظم قيمة في حالة دالة الهدف من النوع Max و ادنى قيمة في حالة دالة الهدف من النوع Min .
2. احترام او تحقيق القيود الوظيفية $g_i(X)$
3. احترام او تحقيق قيود عدم سلبية المتغيرات $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n) \ge 0$

ان نماذج البرمجة الخطية التي تم التطرق اليها في الفصول السابقة ما هي الا حالة خاصة لنماذج البرمجة غير الخطية المقدمة وفقا للصيغة أعلاه. حيث عندما تكون كل من $f(X)$ و $g_i(X)$ دوال

خطية في المتغيرات $X=\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_j,.......,x_n\right)$ ، فإن مجموعة الحلول المقبولة للنموذج تشكل مجموعة محدبة و بالتالي فإن الحل الأمثل تم التوصل اليه بسهولة و ذلك بمجرد ايجاد النقطة الرأسية أو المتطرفة التي تعطي لدالة الهدف أمثل قيمة أي اعظم قيمة في حالة دالة الهدف من النوع Max و ادنى قيمة في حالة دالة الهدف من النوع Min . أما في نماذج البرمجة غير الخطية فإنه ليس ضروريا ان تشكل مجموعة الحلول الممكنة مجموعة محدبة و ليس ضروريا ان يكون الحل الأمثل هو احد النقاط الرأسية في مجموعة الحلول الممكنة حيث قد يكون نقطة داخلية.

تبعا للصيغة العامة لنماذج البرمجة غير الخطية فإننا نميز النماذج التالية:

1. نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل معادلات.
2. نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل متراجحات.

03.08 – نمـاذج البرمجـة غيـر الخطيـة بقيـود فـي شكـل معــادلات:

تعطى الصيغة العامة لنماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل معادلات على الشكل التالي:

$$Max\ \ (Min)\ \ Z=f(X)=f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_j,.......,x_n\right)$$

Soumise aux Contraintes

$$g_i\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_j,.......,x_n\right)\ =\ b_i\ \ ;\ \ i=1,2,3,........,m$$

$$X=\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_j,.......,x_n\right)\geq 0$$

حيث أن m أقل أو تساوي n. في حالة $m=0$ يصبح نموذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل معادلات، عبارة عن نموذج البرمجة غير الخطية بدون قيود. توجد عدة طرق تستخدم لحل هذا النوع من النماذج نذكر منها ما يلي:

1. طريقة التعويض المباشر.
2. طريقة تغيير القيود.
3. طريقة مضاعف لاغرانج Multiplicateur de Lagrange

سوف نكتفي بالتطرق الى الطريقة الثالثة بشيء من التفصيل.

04.08 – طريقـة مضاعـف لاغرانــج Multiplicateur de Lagrange:

وفقا لهذه الطريقة يتم اضافة متغير واحد مناضر لكل قيد، فإذا كان نموذج البرمجة غير الخطية الأصلي يتكون من m متغيرة و n قيد، فإنه يصبح العدد الاجمالي للمتغيرات (المجاهيل) $(n+m)$ و هذا طبعا بعد اضافة m متغيرة جديدة. فبعد اضافة هذه المتغيرات الجديدة تصبح طريقة الحل بسيطة. بغرض تناول الخطوات المتبعة لحل نماذج البرمجة غير الخطية وفقا لهذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثـــــال 01.08:

ليكن نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$Z = f(X_1, X_2) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 2)^2$$

Soumise aux Contraintes

$$01X_1 + 01X_2 \quad = \quad 06$$

– المطلـــــوب:

1. اوجد القيمة الصغرى لنموذج البرمجة غير الخطية أعلاه.

نقوم بتكوين دالة لاغرانج

$$L(X_1, X_2, \lambda) = f(X_1, X_2) + \lambda g(X_1, X_2)$$

بالتعويض ينتج لدينا:

$$L(X_1, X_2, \lambda) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 2) + \lambda(X_1 + X_2 - 6)$$

الشروط الضرورية لتصغير دالة لاغرانج أعلاه هي ان المشتقات الجزئية بالنسبة للمجاهيل X_1, X_2, λ تساوي الصفر أي

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda)}{\partial X_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda)}{\partial X_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(X_1 - 2) + \lambda = 0 \text{..........................01} \\ 2(X_2 - 2) + \lambda = 0 \text{..........................02} \\ X_1 + X_2 = 0 \text{................................03} \end{cases}$$

بطرح المعادلة 02 من 01 نحصل على:

$$[2(X_1 - 2) + \lambda] - [2(X_2 - 2) + \lambda] = 0 \Rightarrow 2(X_1 - 2) = 2(X_2 - 2) \Rightarrow 4 - 2X_1 = 4 - 2X_2$$

أي أن: $X_1^* = X_2^*$

و بالتعويض في المعادلة 03 نحصل على: $X_1^* = X_2^* = 3$

مثـــــال 02.08:

ليكن نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$Z = f(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2}\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)$$

Soumise aux Contraintes

$$01X_1 - 01X_2 \quad = \quad 00$$

$$01X_1 + 01X_2 + 01X_3 - 01 \quad = \quad 00$$

- المطلـــــوب:

1. اوجد القيمة الصغرى لنموذج البرمجة غير الخطية أعلاه.

نقوم بتكوين دالة لاغرانج

$$L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(X_1, X_2, X_3) + \lambda_1 g_1(X_1, X_2, X_3) + \lambda_2 g_2(X_1, X_2, X_3)$$

$$L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right) + \lambda_1(X_1 - X_2) + \lambda_2(X_1 + X_2 + X_3 - 1)$$

الشروط الضرورية لتصغير دالة لاغرانج أعلاه هي التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial X_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial X_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial X_3} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 01 \\ X_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 02 \\ X_3 + \lambda_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 03 \\ X_1 - X_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 04 \\ X_1 + X_2 + X_3 - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 05 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلات أعلاه نحصل على: $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = 00$, $X_1^* = X_2^* = X_3^* = \frac{1}{3}$ ، و عليه فإن أدنى قيمة للدالة $f(X_1, X_2, X_3)$ عند النقطة $X^* = \left[\frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{3}\right]$ و هي $f(X^*) = \frac{1}{6}$

مثـــــال 03.08:

ليكن نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$Z = f(X_1, X_2) = (X_1 - 3)^2 + (X_2 - 4)^2$$

Soumise aux Contraintes

$$02X_1 + 01X_2 \quad = \quad 07$$

- المطلـــــوب:

1. اوجد القيمة الصغرى لنموذج البرمجة غير الخطية أعلاه.

نقوم بتكوين دالة لاغرانج

$$L(X_1, X_2, \lambda) = f(X_1, X_2) + \lambda g(X_1, X_2)$$

الشروط الضرورية لتصغير دالة لاغرانج أعلاه هي التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda)}{\partial X_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda)}{\partial X_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(X_1 - 3) + 2\lambda = 0 ....01 \\ 2(X_2 - 4) + \lambda = 0 ....02 \\ 2X_1 + X_2 - 7 = 0 ....03 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلات أعلاه على: $X_1^* = 1.8 \ , \ X_2^* = 3.4 \ , \ \lambda = -1.2$

05.08 – نمـاذج البرمجـة غيـر الخطيـة بقيـود في شكــل متراجحــات:

تعطى الصيغة العامة لنماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل متراجحات على الشكل التالي:

$$Max \ (Min) \ Z = f(X) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n)$$

Soumise aux Contraintes

$$g_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n) \ \le \ b_i \ ; \ i = 1,2,3, ..., m$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_j, ..., x_n) \ge 0$$

06.08 – طـرق حــل نمـاذج البرمجـة غيـر الخطيـة بقيـود فـي شكــل متراجحــات:

توجد عدة طرق تستخدم مثل هذا النوع من النماذج، هذه الطرق يمكن تصنيفها إلى ثلاثة أنواع هي:

01.06.08 – الطـريقـــة التقليـديـــة:

تعتمد هذه الطريقة على شروط **كون–توكر** Kuhn-Tucker و مضاعف لاغرانج و هي التي سوف يتم الاعتماد عليها لحل هذا النوع من النماذج، لذلك سوف يتم التطرق اليها بشيء من التفصيل.

02.06.08 – الطـرق المبــاشـــرة:

تتناول هذه الطرق القيود بطرق واضحة، و من أهمها و اكثرها شيوعا الطرق التالية:

1. الطريقة المركبة.
2. طرق الاتجاهات المقبولة.
3. طريقة تقريب القيود.

03.06.08 – الطـرق غيـر المبـاشـــرة:

من خلال هذه الطرق يتم تحويل المسألة الى متتابعة من المسائل غير المقيدة، حيث تصنف هذه الطرق الى ما يلي:

1. طرق تحويل المتغيرات.
2. طرق الدالة الجزئية.

- طريقة الدالة الجزئية الداخلية.
- طريقة الدالة الجزئية الخارجية.

07.08 – الطريقـة التقليديـة بشـروط كون–توكـر و مضـاعـف لاغـرانـج:

لقد تم من خلال الفقرة 04.08 أعلاه التطرق الى طريقة استخدام مضاعف لاغرانج في حل نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل مساواة. اما من خلال هذه الفقرة سوف يتم التطرق الى استخدام هذا المضاعف في حل نماذج البرمجة غير الخطية بقيود في شكل متراجحات، و ذلك بتحويلها الى قيود في شكل معادلات عن طريق اضافة متغيرات متممة (فجوة) الى القيود في شكل متراجحات لتصبح معادلات.

أولا نعرف متغير متمم μ_i بقيمة حقيقية لكل قيد في شكل متراجحة، أي أن:

$$\mu_i^2 = g_i(X) \geq 0 \qquad i = 1,2,3,......., m$$

حيث تتحقق المتراجحة بتحقيق المعادلة، و ذلك لكل قيمة حقيقية للمتغير μ_i و نلاحظ أن دالة لاغرانج تأخذ الصيغة التالية:

$$L(X, \lambda, \mu) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\; g_i(X) - \mu_i^2 \; \right)$$

بتطبيق شروط لاغرانج الضرورية ينتج لدينا ما يلي:

- $\frac{\partial L(X,\lambda,\mu)}{\partial X_j}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X_j}\left[f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(g_i(X)-\mu_i^2\right)\right]=0 \Rightarrow \frac{\partial f(X)}{\partial X_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X)}{\partial X_j}=0$
  $j=1,2,3,.......,n$

- $\frac{\partial L(X,\lambda,\mu)}{\partial \lambda_i}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left[f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(g_i(X)-\mu_i^2\right)\right]=0 \Rightarrow g_i(X)-\mu_i^2=0$
  $i=1,2,3,.......,m$
- $\frac{\partial L(X,\lambda,\mu)}{\partial \mu_i}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu_i}\left[f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(g_i(X)-\mu_i^2\right)\right]=0 \Rightarrow -2\lambda_i\mu_i=0$

من المعادلة الاخيرة نحصل على $\lambda_i^*=0$ أو $\mu_i^*=0$ أو $\lambda_i^*=\mu_i^*=0$

الحالة الاولى:

اذا كان $\lambda_i^*=0$ و $\mu_i^*\neq 0$ فهذا يعني أننا تجاهلنا القيود $g_i(X)\geq 0$ لان $g_i(X^*)=(\mu_i^*)^2>0$ و بالتالي فإن الحل الأمثل لا يتغير بوجود هذا القيد اذا كانت كل $\lambda_i=0$ لجميع قيم $i=1,2,3,.......,m$ و من ذلك نلاحظ أن المعادلة الاولى تتحول إلى $\nabla f(X)=0$ و هو القيد الضروري في حالة نماذج البرمجة غير الخطية غير المقيدة.

الحالة الثانية:

اذا كان $\lambda_i^*=0$ و $\mu_i^*=0$ فهذا يعني أن $g_i(X^*)=0$ و عندئذ الحل الأمثل يقع على حدود القيد رقم i و حيث إذا كان $\lambda_i^*=0$ فإن الحل الأمثل لا يحقق الشرط الضروري $\nabla f(X^*)=0$.

الحالة الثالثة:

اذا كان $\lambda_i^*=\mu_i^*=0$ لكل قيم i فإن $g_i(X^*)=0$ و عندئذ الحل الأمثل يحقق الشرط الضروري $\nabla f(X^*)=0$ أي أن الحل الأمثل يقع على النقطة الرأسية للقيود.

مثـــــال 04.08:

ليكن نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$Z=f(X_1,X_2)=2X_1^2-3X_2^2-2X_1$$

Soumise aux Contraintes

$$01X_1^2+01X_2^2 \leq 01$$

- المطلــــوب:

1. اوجد النهايات العظمى و الصغرى لنموذج البرمجة غير الخطية أعلاه.

نعرف ما يلي:

$$\mu^2=1-X_1^2-X_2^2 \geq 01$$

حيث أن عدد حقيقي. دالة لاغرانج الموافقة هي التالية:

$$L(X_1, X_2, \lambda, \mu) = 2X_1^2 - 3X_2^2 - 2X_1 + \lambda(\mu^2 - 1 + X_1^2 + X_2^2)$$

الشروط الضرورية للاغرانج هي التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda, \mu)}{\partial X_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda, \mu)}{\partial X_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L(X_1, X_2, \lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X_1 - 2 + 2\lambda X_1 = 0 \\ -6X_2 + 2\lambda X_2 = 0 \\ \mu^2 - 1 + X_1^2 + X_2^2 = 0 \\ 2\mu\lambda = 0 \end{cases}$$

نميز الحالات الثلاث السابقة الذكر

الحالة الاولى:

اذا كان $\mu = 0$ (حل مقيد) عندئذ تصبح شروط لاغرانج كما يلي:

$$\begin{cases} 4X_1 - 2 + 2\lambda X_1 = 0 \\ -6X_2 + 2\lambda X_2 = 0 \\ -1 + X_1^2 + X_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X_1 - 2 + 2\lambda X_1 = 0 \\ X_2(2\lambda - 6) = 0 \\ X_1^2 + X_2^2 = 1 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية، و بفرض أن $X_2 \neq 0$، فإننا نحصل على $\lambda = 0$. و من المعادلة الأولى نجد أن $X_1 = 0.2$ و من المعادلة الثالثة $X_2 = \pm\sqrt{0.96}$ و بذلك نكون قذ حصلنا على حلين للمعاذلة. بعذ ذلك نفرض أن $X_2 = 0$ في المعادلة الثالثة و تكون $X_1 = \pm 1$ و من اجل ذلك نحصل على القيمتين المتناظرتين للمتغير λ من المعادلة الأولى. أي أن الحلول لجملة المعادلات السابقة هي التالية:

• $f(X_1^*, X_2^*) = -3.2$	• $\lambda^* = +3$	• $X_2^* = \pm\sqrt{0.96}$	• $X_1^* = 0.2$
• $f(X_1^*, X_2^*) = 00$	• $\lambda^* = -1$	• $X_2^* = 00$	• $X_1^* = +1$
• $f(X_1^*, X_2^*) = 04$	• $\lambda^* = -3$	• $X_2^* = 00$	• $X_1^* = -1$

الحالة الثانية:

$\lambda = 0$ (حل غير مقيد) و عليه نحصل على:

$$\begin{cases} 4X_1 - 2 = 0 \\ -6X_2 = 0 \\ \mu^2 - 1 + X_1^2 + X_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X_1 - 2 = 0 \\ -6X_2 = 0 \\ 1 + X_1^2 + X_2^2 = \mu^2 \end{cases}$$

و يكون حل هذه المعادلات هو التالي:

- $X_1^* = 0.5$
- $X_2^* = 00$
- $\mu^2 = 1.25$
- $f(X_1^*, X_2^*) = -0.50$

مما سبق يتضح أن النهاية الصغرى للدالة $f(X_1, X_2)$ تتحقق عند النقطة $(X_1^* = 0.2, X_2^* = \pm\sqrt{0.96})$ و تكون قيمتها $f(X_1^*, X_2^*) = -3.2$ ، أما القيمة العظمى فتتحقق عند النقطة $(X_1^* = -1, X_2^* = 0)$ و تكون قيمتها $f(X_1^*, X_2^*) = 4$.

المـراجــــع

I-/ المراجـع باللغة العربيــة:

1. ابراهيم نائب و انعام باقية، **بحوث العمليات: خوارزميات و برامج حاسوبية**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الاردن، 1999.
2. أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، 2014.
3. جلال ابراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، الطبعة الأولى، دار الجامعة الجديدة للنشر ، الاسكندرية، مصر، 2004.
4. عيسى حيرش، **الأساليب الكمية في الادارة**، الطبعة الأولى، دار الهدى للطباعة و النشر و التوزيع، عين مليلة، الجزائر، 2012.
5. ماجد سعد نور الشمرتي و علي خليل الزبيدي، **مدخل الى بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2007.
6. محمد اسماعيل بلال، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الجامعة الجديدة للنشر ، الاسكندرية، مصر، 2008.
7. محمد الطروانة و سليمان عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار زهران للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2000.
8. محمود الفياض و عيسى قدادة، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، اليازوري، عمان، الاردن، 2007.
9. محمد راتول، بحوث العمليات، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر، 2008.
10. محمد عبد العال نعيمي و آخرون، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2011.
11. مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية: دروس و مسائل محلولة**، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر، 2016.
12. منعم رمزي ، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، الاردن، 2009.

II-/ المراجـع باللغة الأجنبيــة:

13. Azoulay Piere, **Recherche opérationnelle de gestion**, Dunod, Paris, 1976.

14. Chein M. , **Optimisation dans les graphes**, Univ.Paris IV , 1981.

15. Cullmann G., **Recherche opérationnelle**, théorie et pratique, 1972.

16. Dezbazeilelle G., **Exercices et problèmes de recherche opérationnelle**, Dunod, Paris, 1976.

17. Desplas A., **Mathématique de la décision économique**, Dunod, Paris, 1967.

18. Ecoto F., **Initiation à la recherche opérationnelle**, Ellipses, 1986.

19. Faure C., **Guide de la recherche opérationnelle**, Masson, Paris, 1986.

20. Faure R. & Kaufmann A. , **Initiation à la recherche opérationnelle**, Dunod, Paris, 1976.

21. Gérard Desbazeille, **Exercice et problème de recherche opérationnelle**, Dunod, Paris.

22. Kaufman A. & Brunet A., **Méthode et modèles de la recherche opérationnelle**, Dunod, Paris, 1994.

23. Kaufman A., **Invitation à la recherche opérationnelle**, Dunod, Paris, 1979.

24. Maurin H. , **Programmation linéaire appliquée**, Technip, 1967.

25. Robert Faure, **Précis de recherche opérationnelle**, Imprimerie OFFSET AUBIN, 1978.

26. Roseaux, **Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle**, Dunod, Paris, 2000.