الجمهـوريـة الجـزائريـة الديمقــراطيـة الشعبيـة

وزارة التعليم العالي والبحث

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون – تيارت –

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الإقتصادية

مطبوعـــــة

دروس في التحليل الرياضي

لمقياس الرياضيات1

موجهـة لطلبـــة

السنة الأولـــــى

جذع مشترك علوم اقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من إعداد

د.سويد محمد السعيد

السنة الجامعية 2021 /2022

مقدمـــــــــــــــة

التحليل الرياضي هو فرع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الدوال الرياضية وتحولاتها باستخدام أدوات ترتبط بمفاهيم النهاية، حيث تدرس خواص مثل الإستمرار والاشتقاق والتكامل والتفاضل، التقعر والانعطاف في منحنيات التوابع والدوال، وغالباً ما تدرس هذه المفاهيم على أعداد حقيقية أو أعداد عقدية والدوال المعرفة عليها ومن الممكن أن تدرس أيضاً على فضاءات أخرى كالفضاء المتري أو الطبولوجي.

يعد التحليل الرياضي الذي هو أحد فروع الرياضيات أداة ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والإحصاء وعلم الاجتماع وغيرها من العلوم وقد أصبح التحليل الرياضي في السنوات الأخيرة يشكل جزءاً أساسياً من الخلفية الرياضية المطلوبة في كثير من العلوم.

تحتوي هذه المطبوعة على دروس وأمثلة محلولة وتمارين مقترحة في التحليل الرياضي لمقياس الرياضيات1 موجهة بالدرجة الأولى لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم إقتصادية وتجارية وعلوم التسيير.

يمكن استخدام هذه المطبوعة كمقرر منهجي لطلبة لدراسة مقياس الرياضيات 1 وكمصدر مهم للعلوم الأخرى، ومن هنا كان التوجه للإسهام بهذا الجهد المتواضع نضعه بين أيدي طلبتنا الأعزاء ولرفد المكتبة العربية بإضافة جديدة. تتكون هذه المطبوعة من ثمانية فصول يشمل كل فصل على أمثلة مختلفة محلولة و تمارين مقترحة.

يتضمن الفصل الأول مبادئ نظرية المجموعات.

الفصل الثاني، يتناول عموميات حول الدوال العددية لمتغير حقيقي.

الفصل الثالث يتناول دراسة الإستمرار والفصل الرابع يدرس الإشتقاق.

يهتم الفصل الخامس بدراسة الدوال اللوغارتمية والدوال الأسية

يغطي الفصل السادس الدوال الاصلية وحساب التكامل.

أما الفصل السابع فهو يختص بمفاهيم عامة حول المتتاليات والسلاسل.

وأخيراً يتضمن الفصل الثامن دراسة الدوال ذات متغيرين.

الفـــهرس

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

1) المجموعـــة

ان مفهوم المجموعة أساسي في جميع فروع الرياضيات وتعرف المجموعة بأنها شيء يتألف من قائمة أو صنف من الأشياء التي قد تكون كما سنرى في الأمثلة لقادمة أعدادا – أحرفا – مدنا – أشكالا هندسية -مجموعات.... الخ .تسمى الأشياء المؤلفة لمجموعة ما عناصر او اعضاء هذه المجموعة .

كما يرمز عادة للمجموعات بأحرف كبيرة مثل مثل $A, B, C, D, X, Y, \cdots$ و يرمز لعناصر هذه المجموعة بأحرف صغيرة مثل $a, b, c, d, x, y, \cdots$.

تعيين المجموعـــة

تتعين المجموعة تماما اذا استطعنا أن نحكم فيها اذا اعطينا عنصر ما بأن هذا العنصر هو أحد عناصر المجموعة أم لا. ويتم هذا التعيين بأحد الشكلين الآتيتين :

(1) أن نكتب جميع عناصر المجموعة ضمن معترضتين . فمثلا اذا كانت المجموعة A مؤلفة من العناصر a, b, c فإننا نكتب $A = \{a, b, c\}$ وعندما تكون المجموعة مؤلفة من عدد كبير من العناصر؛ ويمكن بمعرفة بعض عناصرها ان نستنتج بقية العناصر فإننا نذكر عنصرين أو ثلاث و أستعيض عن العناصر الباقية بثلاث نقط على السطر كما هي الحال في المجموعات التالية :

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \qquad B = \{1,2,3, \dots, 100\}$$

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\} \qquad E = \{0,2,4, \dots, 2k\}$$

(2) هنالك حالات يصعب فها ذكر جميع عناصر المجموعة كما تؤدي الاستعاضة عن بعض عناصر بنقط إلى الالتباس وفي مثل هذه الحالات نعرف المجموعة بذكر الخواص او الشروط التي تميز عناصرها ونوضح ذلك في المثال التالي :

مثال:

اذا كانت A مجموعة المثلثات المتساوية الأضلاع في المستوى π فاننا نكتب :

$x\}$ مثلث في المستوى π و x متساوي الأضلاع $= \{xA|$

وهذه العبارة تقرأ« A هي مجموعة العناصر x حيث x مثلث في المستوى π و x متساوي الأضلاع ».
فالخواص المميزة لعناصر المجموعة A هي كون كل عنصر مثلها في المستوى π من جهة ، ومتساوي الاضلاع من جهة اخرى . و كل عنصر يتمتع بهاتين الخاصتين معا هو حتما عنصر من المجموعة A.

تعريف: نقول أن المجموعة $\boldsymbol{A}$ هي مجموعة منتهية إذا كانت مؤلفة من عدد منته من العناصر وإذا كانت تحتوي على عدد غير منته من العناصر فنقول أنها مجموعة غير منتهية.

مثال :

- المجموعة: $A = \{1,2,3, \dots, n\}$ هي مجموعة منتهية ، وكذلك مجموعة سكان القطر الجزائري
أما المجموعة: $\{x$ هوعدد صحيح $A = \{x\backslash$ فهي مجموعة غير منتية وكذلك مجموعة النقط الواقعة على مستقيم

الإنتماء

اذا كان a عنصرا من المجموعة A فإننا نرمز لذلك بـ$a \in A$ ونقول أن a ينتمي إلىA. واذا كانb لا ينتمي إلى A فاننا نكتب $b \notin A$. فمثلا اذا رمزنا بـ $\mathbb{N}$ لمجموعة الأعداد الطبيعية و$\mathbb{Z}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة و $\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الكسرية و$\mathbb{R}$ لمجموعة الأعداد الحقيقية و $\mathbb{C}$ المجموعة الأعداد العقدية نجد أن:

$$-2 \notin \mathbb{N} \text{ و } 4 \in \mathbb{Z} \text{ و } \frac{7}{3} \in \mathbb{Q} \text{ و } 3i \in \mathbb{C} \text{ و } 2+7\sqrt{3} \in \mathbb{R} \text{ و } -\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$$

تساوي مجموعتين

تعريف: نقول أن المجموعتين Aو Bمتساويتان أو متاطبقتان ا ذا كانت جميع عناصر Aتنتمي الى B وجميع عناصر B تنتمي الى A ونكتب $A=B$ واذا كانت المجموعتان A و Bغيرمتساويتان فإننا نكتب $A \neq B$.

مثال 1:

المجموعتان $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{b,d,a,c\}$ متساويتان ، ونلاحظ أن ترتيب العناصر لا أهمية له في تساوي المجموعات ، وكذلك الأمر بالنسبة لتكرار العناصر فالمجموعتان

$A=\{b,b,c,d\}$ و$B=\{b,c,c,d,d\}$ هما نفس المجموعة $A=\{b,c,d\}$

مثال 2 :

المجموعتان $A=\{3,-3,-7\}$ و $B=\{x \in \mathbb{Z} : (x^2-9)(x+7)=0\}$ متساويتان.

أمّا المجموعتان $E=\{3,4,5\}$ و $F=\{3,4\}$ فهما غير متساويتان لأنّ $5 \in E$ و $5 \notin F$.

المجموعات الجزئية:

اذا كان لدينا جموعتان E و F بحيث يكون كل عنصر من E هو بنفس الوقت عنصر من F فاننا نقول ان E محتواه في F أو ان E مجموعة جزئية من F ونرمز لذلك ب$E \subseteq F$

وإذا كانت $E \subseteq F$ وهنالك عناصر من F لا تنتمي للمجموعة E فإننا نقول أن F محتواه تماما فيF ونرمز لذلك بـ$E \subset F$

مثال :

إذا كانت $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ فأي المجموعات الآتية مجموعة جزئية من المجموعة E .

$B=\{2,4,7\}$.　　　　　　$C=\{1,5,6,10\}$.

المجموعة الخالية :

اذا كان لدينا مجموعة ما A وخاصية ما P غير محققة من أجل كل عنصر a من A فنقول ان الخاصية P تعين مجموعة جزئية من A لا تحتوي على أي عصر منها ، نسميها المجموعة الحالية ونرمز اليها بـ $\emptyset$ أو $\{\ \}$.

مثال:

$$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -3\} = \emptyset}$$

مجموعة الأجزاء

لتكن E مجموعة ما . أن المجموعة المؤلفة من كل المجموعات الجزئية لE تسمى مجموعة الأجزاء لـــــE ويرمز اليها بـ $P(A)$

مثال:

لتكن $A = \{a, b, c\}$، إذن $P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

ملاحظة:

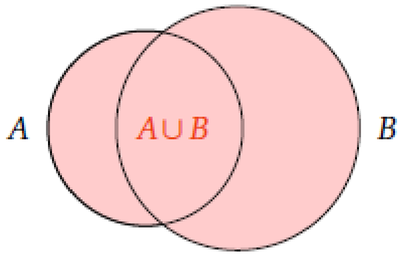
إذا كانت A مجموعة منتهيّة تحتوي على n عنصر فإنّ مجموعة الأجزاء $P(A)$ تحتوي على 2^n عنصرا.

هذا من جهة، و من جهة أخرى يجب أن نميّز بين a كعنصر من A و $\{a\}$ كعنصر من $P(A)$ أي كمجموعة جزئيّة من A.

اتّحاد مجموعتين

لتكن المجموعتان A و B إن المجموعة المؤلفة من عناصر هاتين المجموعتين معا تسمى اتّحاد المجموعتين A و B ويرمز لها بـــــ $A \cup B$. أي أن: $A \cap B = \{x : (x \in A)$أو$(x \in B)\}$

ويقصد بكلمة أو في هذه العبارة أن x تنتمي لواحدة على الأقل من المجموعتين A و B , وتمثل اتّحاد المجموعتين A و B بالقسم الخطط في الشكل المرافق :



مثال :

اذا كانت لدينا $= \{1,2,4,7,9\}$ و $B = \{2,3,9,13\}$ فإن : $A \cup B = \{1,2,3,4,7,9,13\}$

تعميم :

يمكننا تعريف اتّحاد عدد منته أو غير منته من المجموعات. فإذا كانت $A_1, A_2, \cdots A_n$ مجموعات جزئيّة من E فإنّ اتّحاد هذه المجموعات هو المجموعة المؤلّفة من جميع عناصر هذه المجموعات و نرمز لها بـ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. و نكتب إختصارا:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

خواصّ الإتحاد :

1) $A\cup A=A$

2) $A\cup\varnothing=A$

3) $A\cup B=B\cup A$

4) لتكن E مجموعة كلّية نسبيّا: $A\cup E=E$

5) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

6) $A\subset A\cup B$ و $B\subset A\cup B$

7) إذا كانت $A\subset B$ و $D\subset B$ فإنّ $A\cup D\subset B$

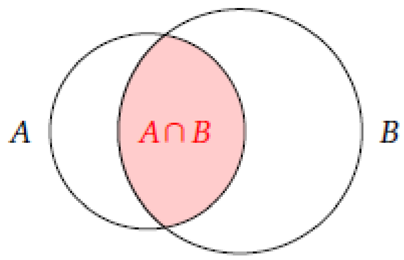
8) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$

تقاطع مجموعتين

لتكن المجموعتان A و B. ان المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة بين المجموعتين A و B تسمى تقاطع هاتين المجموعتين ويرمز اليها بـــ $A\cap B$ ، أي أن :

$$A\cap B=\{x:(x\in A)\ \text{و}\ (x\in B)\}$$

كما هو مبين في الشكل المرافق :



مثال :

اذا كانت لدينا $=\{1,2,4,7,9\}$ و $B=\{2,3,9,13\}$ فإن :

$$A\cap B=\{2,9\}$$

ملاحظة: إذا كان $A\cap B=\emptyset$ فإننا نقول أن المجموعتين A و B منفصلتان (أو أنهما لا تلتقيان)

تعميم :

يمكننا تعريف تقاطع عدد منته أو غير منته من المجموعات. فإذا كانت $A_1,A_2,\cdots A_n$ مجموعات جزئيّة من E فإنّ تقاطع هذه المجموعات هو المجموعة المؤلّفة من جميع العناصر المشتركة بين هذه المجموعات و نرمز لها بـ $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$. و نكتب إختصارا :

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

خواصّ التقاطع:

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

3) $A \cap B = B \cap A$

4) لتكن E مجموعة كلّية نسبيّا: $A \cap E = A$

5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6) $A \cap B \subset A$ و $A \cap B \subset B$

7) إذا كانت $D \subset A$ و $D \subset B$ فإنّ $D \subset A \cap B$

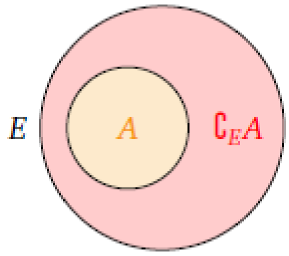
8) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

9) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

المتمّمة

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E . ان مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E ولا تنتمي إلى A تسمى متممة A بالنسبة ل E ويرمز لها بـــ بالرّمز $\overline{A}$ ، $C_E A$ أو A^C وبعبارة أخرى :

$$C_E A = \{x \in E : x \notin A\}$$



مثال:

اذا كانت $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$، $A = \{2,7,8\}$ ، $S = \{2,3,5,7\}$. فأوجد كلا مما يلي من المجموعات الاتية :

- 1) C_E^A ، 2) C_E^S، 3) $C_E^{A\cup S}$، 4) $C_E^{A\cap S}$، 5) C_E^{ϕ}، 6) C_E^E .

الحل :

1. $C_E^A = \{1,3,4,5,6,9\}$.
2. $C_E^S = \{1,4,6,8,9\}$.
3. $A \cup S = \{2,3,5,7,8\}$ و منه $C_E^{A\cup S} = \{1,4,6,9\}$.
4. $A \cap S = \{2,7\}$ ومنه $C_E^{A\cap S} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$.
5. $C_E^{\phi} = E$.
6. $C_E^E = \phi$.

خواصّ المتممة:

1) $C_E^E = \phi$ و $C_E^{\phi} = E$.

2) $A \subset B \Rightarrow C_E B \subset C_E A$ ، $A \subset E$ و $B \subset E$

3) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ و $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

تطبيق:

اختصر العبارات التالية :

$$1. A_1 = A \cap (A^C \cup B)$$
$$2. A_2 = A \cup (A^C \cap B)$$
$$3. B_1 = A \cap (A^C \cup B) \cap (A^C \cup B^C \cup C)$$
$$4. B_2 = A \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$$
$$5. C_1 = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A^C)$$

الحل :

لدينا :

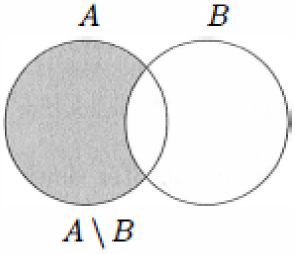
$$1. A_1 = A \cap (A^C \cup B) = \left(A \cap A^C\right) \cup \left(A \cap B\right) = A \cap B$$
$$2. A_2 = A \cup (A^C \cap B) = (A \cup A^C) \cap (A \cup B) = A \cup B$$
$$3. B_1 = A \cap (A^C \cup B) \cap (A^C \cup B^C \cup C)$$
$$= A_1 \cap \left((A \cap B)^C \cup C\right) = (A \cap B) \cap \left((A \cap B)^C \cup C\right) = A \cap B \cap C$$
$$4. B_2 = A \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C \cap C) = A_2 \cup \left[(A \cup B)^C \cap C\right]$$
$$= (A \cup B) \cup \left[(A \cup B)^C \cap C\right] = A \cup B \cup C$$

$$5. C_1 = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A^C) = \left[B \cup (A \cap C)\right] \cap (C \cup A^C)$$
$$= \left[B \cap (C \cup A^C)\right] \cup \left[(A \cap C) \cap (C \cup A^C)\right]$$
$$= (B \cap C) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \cap (C \cup A^C)$$

الفرق بين مجموعتين:

لتكن المجموعتان A و B إن المجموعة المؤلفة من العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B تسمى الفرق بين المجموعتين A و B و يرمز لها بالرّمز $A \setminus B$ أو $A - B$ ، أي أن :

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



خواصّ الفرق:

1) $A \setminus B = A \cap C_E B$

2) $A \setminus A = \varnothing$ ، $A \setminus \varnothing = A$ ، $\varnothing \setminus A = \varnothing$ ، $A \setminus E = \varnothing$

3) $A \setminus B \subset A$.

مثـــــال:

اذا كانت $A = \{2,3,5,7\}$، $B = \{2,4,6,8\}$ ، E مجموعة الاعداد الطبيعية من 1الى 10

اوجد ما يلي :

$A \bigcup B$ ، $A \bigcap B$ ، $A - B$ ، $B - A$ ، $C_E^{A\cup B}$ ، C_E^A.

الحل

- ✓ $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$.
- ✓ $A \cap B = \{2\}$.
- ✓ $A - B = \{3,5,7\}$.
- ✓ $B - A = \{4,6,8\}$.
- ✓ $C_E^A = \{1,4,6,8,9,10\}$.
- ✓ $C_E^{A\cup B} = \{1,9,10\}$.
- ✓ $C_E^A \cap C_E^B = \{1,8,9,10\}$

الجداء الدّيكارتي:

لتكن A و B بمجموعتين ما ، ولنشكل جميع الأزواج الممكنة (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ ، فنحصل على مجموعة من الأزواج المرتبة (اي الأزواج التي يكون فيها الحد الأول من A والحد الثاني من B) نسميها الجداء الديكارتي للمجموعتين Aو B ونرمز لها ب $A \times B$ ونكتب :

$$A \times B = \{(a,b) \setminus a \in A \text{ و } b \in B\}$$

مثال:

لتكن المجموعتان $A = \{1,2\}$و $B = \{a,b,c\}$

عندئذ الجداء الديكارتي $\boldsymbol{A \times B}$ يعطى بالعلاقة

$$\boldsymbol{A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}}$$

خواصّ:

1) $A \times \varnothing = \varnothing$ و $\varnothing \times A = \varnothing$

2) إذا كانت المجموعتين A و B غير متساويّتين و كانتا غير خاليّتين فإنّ $A \times B \neq B \times A$

3) و بالعكس إذا كان $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ فإنّه :

$$(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$$

4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ و $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

الجداء الدّيكارتي لمجموعة في نفسها:

الجداء الدّيكارتي للمجموعة A في نفسها تتألف من جميع الأزواج المرتّبة الّتي تكون فيها المركّبتان الأولى و الثّانيّة عنصرين في A و نكتب ذلك بالشّكل $A \times A$ أو A^2 و يكون

$$A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A\}$$

العلاقات الثنائية:

تعاريف: لتكن A و B مجموعتين.

نسمي علاقة من A في B الثلاثية $\Re = (A, B, G)$ حيث G جزء من الجداء الديكاري $A \times B$. إذا كان $(x, y) \in G$ فإننا نكتب $x \Re y$ ونقرأ x علاقة y ، إذا كان $A = B$ فإننا نقول أن $\Re$ هي علاقة ثنائية على A . المجموعة التي نشير لها بـ:

$$G = \{(x, y) \in A \times B : x \Re y\}$$

تسمى بيان العلاقة $\Re$.

إذا كانت $\Re$ علاقة ثنائية من A في B فإن العلاقة S المعرفة من B في A بالشكل :

$$\forall (y, x) \in B \times A : y S x \Leftrightarrow x \Re y$$

تسمى بالعلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ ويرمز لها بالرمز $\Re^{-1}$.

أمثلة :

لتكن E مجموعة ما.

1.العلاقة المعرفة على E والتي بيانها $G = \varnothing$ تسمى بالعلاقة الخالية .

2.العلاقة التي بيانها $G = E \times E$ تسمى بالعلاقة الخشنة . العلاقة التي بيانها :

$$G = \{(x, x), x \in E\}$$

هي المساواة في E وبيانها يسمى بقطر $E \times E$.

2) التطبيقات:

تعاريف:

لتكن E,F مجموعتين، $\Re$ علاقة ثنائية من E في F ، نسمي $\Re$ تطبيقا من E في F إذا وفقط إذا كان من أجل كل $x \in E$ يوجد $y \in F$ وحيد بحيث $x\Re y$.

أو بعبارة أخرى: $$\forall x \in E, \exists! y \in F : x\Re y$$

الرمز "$\exists!$" يعني **"يوجد واحد وواحد فقط** $y \in F$ **"** .

- تسمّى E مجموعة التّعريف (مجموعة الانطلاق)، و تسمّى F مجموعة القيم (مجموعة الوصول)، و يرمز للتّطبيق عادة بالأحرف $f, g, h, \cdots$.
- للدّلالة على أنّ f تطبيق من المجموعة E في المجموعة F نكتب:

$$f : E \longrightarrow F \qquad \text{أو} \qquad E \xrightarrow{f} F .$$

إذا كان العنصر $x \in E$ مرتبط بالعنصر $y \in F$ بواسطة التّطبيق f ، نقول عندئذ إنّ y صورة x وفق التّطبيق f و نكتب $f(x) = y$.

الصّورة العكسيّة :

- إذا كان f تطبيقا من E في F ، و كانت B مجموعة جزئيّة من F فإنّ الصّورة العكسيّة لـ B وفق f تعطى باالعلاقة:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

التّطبيق المطابق:

التطبيق id_E المعرف من E في E بالشكل: $\forall x \in E, id_E(x) = x$

يسمى بالتطبيق المطابق للمجموعة E .

التّطبيق المتباين، الغامر، المتقابل (تقابلي):

ليكن $f : E \to F$ تطبيقا ، نقول أن:

1) f متباين إذا وفقط إذا تحققت إحدى الخاصيتين المتكافئتين التاليتين:

$$1. \forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$
$$2. \forall x, x' \in E : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

2) f غامر إذا وفقط إذا كان: $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$

و عليه نرى أنّ f يكون غامرا إذا و فقط إذا كان $f(E) = F$.

3) f متقابل (تقابلي) إذا وفقط إذا كان متباينا و غامرا. بعبارة أخرى:

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

تركيب تطبيقين:

لتكن E,F,G ثلاث مجموعات و f تطبيقا من E في F ، و g تطبيقا من F في G ، نسمي تركيب f و g ، و نرمز لذلك بالرمز gof التطبيق المعرف من E في G بالشكل:

$$\forall x \in E, (gof)(x) = g(f(x))$$

التّطبيق العكسي :

نظرية : ليكن $E \xrightarrow{f} F$ تطبيقا، التطبيق f يقبل تطبيق عكسي إذا وفقط إذا كان f متقابلا (تقابليا) ونرمز لتطبيق العكسي لـ f بالرمز f^{-1} وهو تقابل من F في E ويحقق :

$$\forall (x,y) \in E \times F : x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

تمارين مقترحة

تمرين 1 :

لتكن A,B,C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E ، برهن العلاقات التالية:

1. $A=B \Leftrightarrow A\cap B = A\cup B$
2. $A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$
4. $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B = A$
5. $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$
6. $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$
7. $A\subset B \Leftrightarrow B^c\subset A^c$
8. $(A\setminus B)^c = A^c\cup(A\cap B)$
9. $A\cap B = A\setminus(A\setminus B)$
10. $A\cap B=\phi \Leftrightarrow B^c\cap(A\cup B)=A$

تمرين 2:

نعتبر المجموعتين :

$$B=\{x\in\mathbb{R}; x^2+2x>15\} \quad \text{و} \quad A=\{x\in\mathbb{R}; |x+1|>3\}$$

1. أكتب المجموعتين $C_{\mathbb{R}}^{A}$ و $C_{\mathbb{R}}^{B}$ المتممتين لـA وB.
2. بين أن : $C_{\mathbb{R}}^{A}\subset C_{\mathbb{R}}^{B}$.

تمرين 3 :

حدد في كل حالة مما يلي : $A\cup B$. $A\cap B$. $A\backslash B$. $B\backslash A$.

1. $A=[2,4]$ و $B=[-2,3]$.
2. $A=[1,+\infty]$ و $B=[-\infty,5]$.
3. $A=\{x\in\mathbb{R}; |x-2|<1\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}; x^2+3x>10\}$.

تمرين 4 :

لتكن المجموعتين A وB الجزئيتين منE.

1. بين أن $(A\cup B)-(A\cap B)=\left(A\cap C_E^B\right)\cup\left(B\cap C_E^A\right)$
2. بين أن $A=B \Leftrightarrow A\cap B = A\cup B$
3. بين أن $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$ ثم استنتج أن $A=B\Leftrightarrow (A-B)\cup(B-A)=\phi$.
4. بين أن $A=\phi \Leftrightarrow \left(A\cap C_E^B\right)\cup\left(B\cap C_E^A\right)=B$

تمرين 5 :

مدرسة فيها 300 طالب منهم 90 مشتركون في نادي السباحة، 100 مشتركون في نادي كرة القدم 150، غير مشتركين في اي من الناديين ، ارسم شكل من اشكال فن واستعمله في اجابة الاسئلة التالية :

1. ما عدد المشتركين في الناديين معا
2. ما عدد المشتركين في النادي كرة القدم فقط .

تمرين 6:

نعتبر التطبيق f للمجموعة $\mathbb{R}^*$ في المجموعة $\mathbb{R}-\{3\}$ معرفة كما يلي : $f(x)=\frac{3x-1}{x}$

أثبت أن التطبيق f تقابلي، ثم عين تطبيقه العكسي f^{-1}.

تمرين 7:

نعتبر التطبيق g للمجموعة $\mathbb{R}^*-\{1\}$ في المجموعة نفسها معرفة كما يلي : $g(x)=\frac{x-1}{x}$

1. أثبت أن التطبيق g تقابلي، ثم عين تطبيقه العكسي g^{-1}.
2. عين التطبيقات التالية : gog ، $gogog$.

تمرين 8:

نعتبر التطبيقان f و g للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها. عين التطبيقين gof ،fog في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f(x)=\frac{3}{2}x+5$ و $g(x)=4x-1$.
2. $f(x)=2x^2-1$ و $g(x)=4-3x$.
3. $f(x)=x^3$ و $g(x)=2x-1$.

تمرين 9:

نعتبر التطبيقان f و g للمجموعة $\mathbb{N}$ في نفسها حيث : $f(x)=2x$

و $g(x)=\frac{x}{2}$ إذا كان x زوجيا، $g(x)=\frac{x-1}{2}$ إذا كان x فرديا.

1. هل التطبيقان f ،g غامران؟ هل هما متباينان ؟
2. عين التطبيقين fog و gof.

تمرين 10:

نعتبر التطبيقان f و g للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها حيث :

$f(x)=3x+5$ و $g(x)=\frac{1}{2}x-1$.

1. هل التطبيقان f ،g تقابليان ؟
2. عين التطبيقات التالية : f^{-1} ،g^{-1}، $g^{-1}of^{-1}$، $f^{-1}og^{-1}$.
3. أثبت أن التطبيقين: gof ،fog تقابليان.
4. تحقق أن : $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ ،$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

الفصل الثاني: الدوال العددية لمتغير حقيقي

1)عموميات حول الدوال العددية لمتغير حقيقي

في بداية هذا الفصل نقوم بتقديم بعض التعاريف العامة المرتبطة بالدوال العددية بمتغير حقيقي.هذه ادوال العددية تكون معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$يدعى مجموعة تعريف f.

فيما يلي ليكن $f: D \to \mathbb{R}$ دالة عددية بمتغير حقيقي.

تعريف العمليات الجبرية على الدوال العددية

ليكن D جزء من $\mathbb{R}$ ، و$f: D \to \mathbb{R}$ و $g: D \to \mathbb{R}$ دالتين حقيقيين.

- نعرف الدالة المجموع $(g+f): D \to \mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x), \forall x \in D$$

- نعرف الدالة الجداء $(gf): D \to \mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$(gf)(x) = g(x)f(x), \forall x \in D$$

- نعرف الدالة القسمة $\left(\frac{f}{g}\right): D \to \mathbb{R}$ حيث التابع g لا ينعدم بالعلاقة:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D$$

- نعرف الدالة جداء الدالة بعدد حقيقي $(\alpha f): D \to \mathbb{R}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in D$$

تعريف تركيب دالتين

ليكن التابعين الحقيقيين$f: D_1 \to \mathbb{R}$ و $g: D_2 \to \mathbb{R}$ حيث D_1 و D_2 جزأين من $\mathbb{R}$. إذا تحقق $f(D_1) \subset D_2$ ، نعرف تركيب تابعين حقيقيين ونكتب $g \circ f$ بالعلاقة:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in D_1$$

تعريف الدالة الزوجية والفردية

- نقول عن دالة $f: D \to \mathbb{R}$ أنها زوجية إذا حقق: $\forall x \in D, -x \in D \wedge f(x) = f(-x)$
- نقول عن دالة $f: D \to \mathbb{R}$ أنها فردية إذا حقق: $\forall x \in D, -x \in D \wedge f(x) = -f(-x)$

أمثلة :

- الدوال: $x \mapsto cos(x)$ و $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto |x|$ دوال زوجية.
- الدوال: $x \mapsto sin(x)$ و $x \mapsto x$ و $x \mapsto x^3$ دوال فردية.
- الدوال: $x \mapsto x^2 + 2x^3$ و $x \mapsto |x| + x$ و $x \mapsto x + 1$ ليست زوجية وليست فردية.

تعريف الدوال الدورية

نقول عن دالة $f: D \to \mathbb{R}$ أنها دورية إذا وجد عدد حقيقي p يحقق: $\forall x \in D, (x+p) \in D \wedge f(x+p) = f(x)$

أمثلة :

الدالتين: $x \mapsto sin(x)$ و $x \mapsto cos(x)$ دوريين ودورتهما $p = 2\pi$.

الدالتين: $x \mapsto sin(2x)$ و $x \mapsto cos(2x)$ دوريين ودورتهما $p = \pi$.

في هذا المثال لاحظ أن الدالتين $sin(x)$ و $cos(x)$ معرفين من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

ملاحظة :

عند دراسة دالة زوجية أو فردية يكفي دراستها من أجل القيم الموجبة أو القيم السالبة لمجموعة تعريفها.

وإذا كانت الدالة دورية فيكفي دراستها على مجال طوله يساوي طول دورة $[a, a+p]$ حيث p هو الدور.

تعريف الدوال الرتيبة

لتكن الدالة $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- نقول عن f أنها متزايدة إذا حققت: $\forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- نقول عن f أنها متناقصة إذا حققت: $\forall x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- قول عن f أنها متزايدة تماما أو متناقصة تماما إذا استبدلنا في العلاقات السابقة المتراجحات الواسعة $\leq$ و $\geq$ المتراجحات التامة على التوالي $<$ و $>$.

ملاحظة : نقول عن دالة أنها رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

مثال نعتبر الدالة : $x \mapsto f(x) = x^2$ حيث $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- إن الدالة f متزايدة إذا أخذنا D جزء من $\mathbb{R}^+$.
- إن الدالة f متناقصة إذا أخذنا D جزء من $\mathbb{R}^-$.
- إن الدالة f غير رتيبة إذا أخذنا D يساوي $\mathbb{R}$.

تعريف الدالة العكسية

ليكن E و F جزأين من $\mathbb{R}$ ، و

$$f: E \to F \quad \text{حيث} \quad x \mapsto y = f(x)$$

دالة لمتغير حقيقي. إذا كان f تقابلا (أي متباينة وغامرة) فإنه يمكن تعريف الدالة العكسية لـ f بـ:

$$f^{-1}: F \to E \quad \text{حيث} \quad y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

ملاحظة :

إن تركيب الدالة f ودالتها العكسية f^{-1} ينتج دوما دالة التطبيق الحيادي حيث يكفي ضم العلاقتين $f^{-1}(y) = x$ و $f(x) = y$ أي $f^{-1}(f(x)) = x$ وهذا يعني $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

تعريف الدالة المحدود

لتكن الدالة $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- نقول عن الدالة f أنها محدودة من الأعلى على D إذا وجد عدد حقيقي M يحقق:

$$\forall x \in D, f(x) \leq M$$

- نقول عن الدالة f أنها محدودة من الأدنى على D إذا وجد عدد حقيقي m يحقق:

$$\forall x \in D, m \leq f(x)$$

- نقول عن دالة f أنها محدودة على D إذا كان محدودة من الأدنى و محدودة من الأعلى على D.

مثال

الدالة $f(x) = cos(x)$ محدودة لأنها تحقق $|cos(x)| \leq 1$ على $\mathbb{R}$.

الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$ غير محدودة على $\mathbb{R}^*$ لا من الأدنى ولا من الأعلى.

2) النهايات

نتعرض في هذه الفقرة إلى التعاريف وبعض الخواص المرتبطة بنهايات الدوال العددية لمتغير حقيقي.

تعريف

لتكن الدالة العددية لمتغير حقيقي $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة على D ولتكن x_0 نقطة من D.

نقول أن الدالة f تقبل نهاية ℓ (حيث $\ell \in D$) عند النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D: \ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ونكتب:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

ملاحظة 1

إن تعريف نهاية دالة عند النقطة x_0 غير مرتبط بقيمة الدالة عند النقطة x_0 إذ يمكن أن يكون $f(x_0)$ غير معرفة وتكون نهاية الدالة موجودة عند النقطة x_0 أو أن يكون $f(x_0)$ معرفة وقيمتها تختلف عن النهاية ℓ.

ملاحظة 2

العدد α في التعريف السابق يتعلق بـ : ε و x_0.

ملاحظة 3

إذا أردنا أثبات أن الدالة f لا تقبل نهاية عند النقطةx_0، يمكننا الاعتماد على النفي المنطقي للتعريف وهو: $\exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in D: |x - x_0| < \alpha \wedge |f(x) - \ell| > \varepsilon$

قضية : لتكن الدالة ذات المتغير الحقيقي$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و x_0 نقطة من D. إذا قبلت الدالة f نهاية عند النقطة x_0 فهي وحيدة.

الإثبات :

نفرض أن الدالة f تقبل نهايتين مختلفتين ℓ_1 و ℓ_2 عند النقطة x_0. وليكن $0 < \varepsilon$ إذن :

$$\exists\alpha_1 > 0, \forall x \in D: \ |x - x_0| < \alpha_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_1| \le \varepsilon$$

و

$$\exists\alpha_2 > 0, \forall x \in D: \ |x - x_0| < \alpha_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_2| \le \varepsilon$$

يمكننا كتابة $|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \le |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2|$

إذا أخذنا $\alpha = min(\alpha_1, \alpha_2)$ فإننا نحصل على: $\forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |\ell_1 - \ell_2| \le 2\varepsilon$

في الأخير بما أن ℓ_1 و ℓ_2 ثابتين و ε كيفي فإن $\ell_1 = \ell_2$.

تعريف النهاية من اليمين

لتكن الدالة ذات المتغير الحقيقي$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و x_0 نقطة من D. نقول أن الدالة f تقبل نهاية ℓ من اليمين عند النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0: x_0 < x < x_0 + \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \le \varepsilon$$

ونكتب: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ أو $\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ >}} f(x) = \ell$.

تعريف النـهاية من اليسار

لتكن الدالة ذات المتغير الحقيقي$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و x_0 نقطة من D. نقول أن الدالة f يقبل نهاية ℓ من اليسار عند النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ونكتب: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ أو $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = \ell$.

يمكننا كتابة التعاريف الخاصة بالنهايات في الحالات التي يكون فيها x_0 غير منته أو النهاية غير منتهية كما يلي:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D: x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in D: x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D: x > B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in D: x < B \Rightarrow f(x) > A$$

خواص نـهايات الدوال العددية لمتغير حقيقي

ليكن f و g دالتين عددتين لمتغير حقيقيي كل منهما يقبل نهاية منتهية ℓ_f و ℓ_g على التوالي (أي $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_f$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_g$) أو نهاية غير منتهية (أي $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$). وليكن $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **نهاية مجموع دالتين**، لدينا: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

أي يكون لدينا الحالات :

إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_f$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_g$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_f + \ell_g$

أو إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_f$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_f + (\pm\infty) = \pm\infty$

أو إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_g$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \pm\infty + \ell_g = \pm\infty$

أو إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \pm\infty + (\pm\infty)$

يجب الانتباه في هذه الحالة الأخيرة إلى حالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty +$ أو $\infty + \infty -$.

- **نهاية جداء دالتين**، لدينا: $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$

أي يكون لدينا الحالات :

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_f$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_g$ فإن $\lim_{x\to x_0}(f(x)\,g(x)) = \ell_f\,\ell_g$

أو إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_f$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell_f(\pm\infty) = \pm\infty, (0 < \ell_f)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell_f(\pm\infty) = \mp\infty, (\ell_f < 0)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell_f(\pm\infty) = ?, (\ell_f = 0)$$

أو إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_g$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \pm\infty\ell_g = \pm\infty, (0 < \ell_g)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \pm\infty\ell_g = \mp\infty, (\ell_g < 0)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \pm\infty\ell_g = ?, (\ell_g = 0)$$

أو إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \pm\infty(\pm\infty) = \pm\infty$

هنا أيضا يجب الانتباه إلى حالات عدم التعيين من الشكل $0(\pm\infty)$.

- **نهاية جداء دالة عددية لمتغير حقيقي بعدد حقيقي**، لدينا: $\lim_{x\to x_0}(\lambda g(x)) = \lambda\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$

أي يكون لدينا الحالات :

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_f$ فإن $\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda\ell_f$

أو إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ فإن

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda(\pm\infty) = \pm\infty, \qquad (0 < \lambda)$$
$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda(\pm\infty) = \mp\infty, \qquad (\lambda < 0)$$

▪ **نهاية مقلوب دالة** عددية لمتغير حقيقي، لدينا:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$$

أي يكون لدينا الحالات :

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_f$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_f}, (\ell_f \neq 0)$

أو إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ فإن

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+\right)$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty, \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-\right)$$

أو إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

حيث يرمز 0^+ إلى النهاية نحو الصفر بقيم أكبر أو من اليمين و 0^+ إلى النهاية نحو الصفر بقيم أصغر أو من اليسار.

ملاحظة :

إذا أردنا حساب نهاية قسمة دالتين لمتغيرين حقيقيين من الشكل $\frac{g(x)}{f(x)}$، يمكننا كتابته على الشكل $\frac{1}{f(x)} g(x)$، أي كمقلوب دالة ثم جداء دالتين.

حالات عدم تعيين النهايات

مرت بنا في الفقرة السابقة، عند تعرضنا لخواص نهايات الدوال العددية لمتغير حقيقي، حالات لم نتمكن من حساب النهاية مباشرة وأشرنا لها بحالات عدم التعيين. هذه الحالات تحتاج إلى إزالة الحالة المصادفة. من بين الحالات التي يمكن مواجهتها نجد:

حالة : $+\infty - \infty$

لنحسب مثلا النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - x^2)$. إذا حسبنا النهاية مباشرة نجد:
$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty - (+\infty)$$

وهي حالة عدم تعيين. لتخطي حالة عدم التعيين هذه يمكننا القيام بحساب النهاية كما يلي:
$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^2(x-1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \lim_{x\to+\infty} (x-1)$$
$$= (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

لاحظ أنه إذا أردنا حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x^3)$ وهي نفس حالة عدم التعيين $\infty - \infty+$، فإننا نحصل على:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x^3) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1-x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \lim_{x\to+\infty}(1-x)$$
$$= (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

حالة : $0\,(\pm\infty)$

لنحسب مثلا النهاية $\lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{1}{x+1}\right)$ ، الحساب المباشر بالشكل:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{1}{x+1}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\right) = (+\infty)0$$

يؤدي إلى حالة عدم التعيين. لإزالة حالة عدم التعيين نقوم بالحساب:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) - \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\right) = 1-0 = 1$$

حالة : $\frac{\infty}{\infty}$

لنحسب مثلا النهاية $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$:

أنها حالة عدم التعيين من الشكل $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)}{\lim_{x\to+\infty}(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$

لإزالة حالة عدم التعيين نقوم بالحساب الآتي:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

يمكن أن نلاحظ أيضا أن النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{\lim_{x\to+\infty}(x+1)}{\lim_{x\to+\infty}(x^2)} = \frac{+\infty}{+\infty}$

نزيل عدم التعيين :. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0+0 = 0$

إذن نجد لنفس حالة عدم التعيين نهايتين مختلفتين وهذا يؤكد عدم إمكانية الحكم مسبقا على النهاية.

حالة : $\frac{0}{0}$

لنحسب النهاية $\lim_{x\to0}\left(\frac{x(x+1)}{x^2}\right)$:

إنها حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to0}\left(\frac{x(x+1)}{x^2}\right) = \frac{\lim_{x\to0}(x(x+1))}{\lim_{x\to0}(x^2)} = \frac{0}{0}$

لإزالة حالة عدم التعيين نقوم بالحساب: $\lim_{x\to0}\left(\frac{x(x+1)}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+x}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$

3) خـــواص وتفسيـــرات هندسيـــة

1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow y = a$ يوازي مقارب مستقيم $(x'x)$

2) $\lim_{x \xrightarrow[<]{>} b} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = b$ يوازي مقارب مستقيم $(y'y)$

3) (C_f)مستقيم مقارب مائل لـ= $\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) \Leftrightarrow y = ax + b$

4) $\left.\begin{matrix} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f)

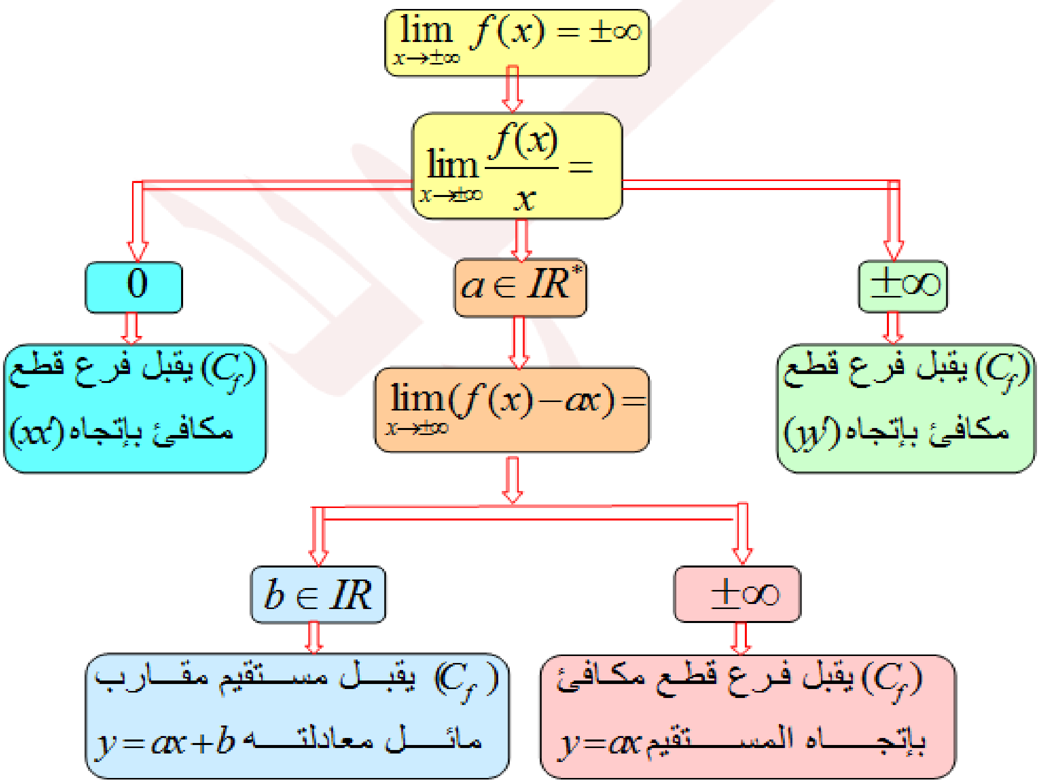
5) المبدأ O مركز تناظر لـ $(C_f) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$: من أجل كل $x \in D_f \Leftrightarrow f$ فردية دالة

6) $N(\alpha,\beta)$ مركز تناظر$(C_f) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (2\alpha - x) \in D_f : x \in D_f \text{ كل أجل من} \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{matrix}\right.$

7) (yy') محور تناظر لـ $(C_f) \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$: من أجل كل $x \in D_f \Leftrightarrow f$ دالة زوجية

8) $(x = \alpha)$ لـ تناظر محور $(C_f) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (2\alpha - x) \in D_f : x \in D_f \text{ كل أجل من} \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{matrix}\right.$

مخطط دراسة الفروع اللانهائية والستقيم المقارب المائل



تمارين مقترحة

تمرين1 :

بين باستعمال تعريف النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1, \lim_{x\to0}x^2+1=1$$

تمرين 2

أحسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)}{x-1},\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1},\ \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49},\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{sin(2x)}{sin(3x)}, \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin(x)-cos(x)}{1-tan(x)}$$

الفصل الثالث: الاستمرارية

1) تعاريف

تعريف الدالة المستمرة عند نقطة

لتكن الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة على D ولتكن x_0 نقطة من D. نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا تحقق:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ملاحظة 1

يمكننا التعبير عن هذا التعريف، بنفس الطريقة التي مرت بنا في تعريف النهاية، بالكتابة:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D: \ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

حيث α يتعلق بـ x_0 و ε.

إذا أردنا أن نعبر عن هذه الصيغة كتابة، فإننا نكتب:

من أجل كل ε موجب، يوجد α موجب متعلق بـ x_0 و ε بحيث من أجل كل x من مجال تعريف التابع فإنه $|x - x_0| < \alpha$ يستلزم أن $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

ملاحظة 2

- نقول أن الدالة f مستمرة من اليمين عند النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\lim_{\substack{x \xrightarrow{>} x_0}} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن الدالة f مستمرة من اليسار عند النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\lim_{\substack{x \xrightarrow{<} x_0}} f(x) = f(x_0)$$

- إذا كانت الدالة f مستمرة من اليمين ومستمر من اليسار عند النقطة x_0 فإنه مستمر عند x_0.

مثال 1

لنعتبر التابع الحقيقي $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ: $f(x) = x$.

يمكننا أن نبين أن الدالة f مستمرة عند كل نقطة x_0 من $\mathbb{R}$ ويكون ذلك كما يلي:

- إما بحساب النهاية: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)$

إذن f مستمرة عند كل نقطة x_0 من $\mathbb{R}$.

- أو بإثبات: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}\colon\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

أي إثبات: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}\colon\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ |x - x_0| \leq \varepsilon$

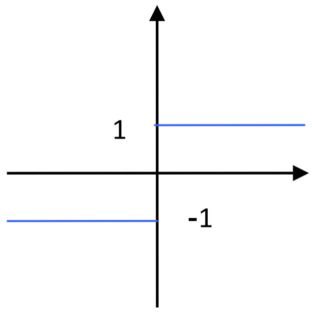
لاحظ أنه يكفي أخذ $\alpha = \varepsilon$ هذا معناه $|x - x_0| < \alpha = \varepsilon \ \Rightarrow\ |x - x_0| \leq \varepsilon$

مثال 2

نعتبر االدالة الحقيقي f المعرف كما يلي:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

هذه الدالة غير مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$ للتأكد من هذا يكفي حساب: $\lim\limits_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} 1 = 1$ و $\lim\limits_{x \underset{<}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\longrightarrow} 0} -1 = -1$.



بما أن النهاية من يمين و من يسار 0 غير متساويتين فالدالة غير مستمر عند 0.

الشكل المقابل يوضح أن الدالة f غير مستمر عند النقطة 0 ومستمر في كل نقاط $\mathbb{R}$ الأخرى.

تعريف الدالة المستمرة على مجال

لتكن الدالة العددية لمتغير حقيقي $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف على المجال I ، نقول عن الدالة f أنها مستمرة على المجال I إذا كانت مستمرة على كل نقاط المجال I.

أمثلة

- الدالة $f(x) = x$ مستمر على كل $\mathbb{R}$.
- الدالة الثابت على مجال مستمر على نفس المجال.
- الدالة f المعرف بـ: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

غير مستمرة عند كل نقاط $\mathbb{R}$.

2) خواص الدوال المستمرة

ليكن f و g دالتين لمتغيرين حقيقيين لديهما نفس مجال العريف D من $\mathbb{R}$. إذا فرضنا أن f و g مستمرين عند النقطة x_0 من D فإنه يكون لدينا:

- الدالة $f+g$ مستمر عند النقطة x_0.
- الدالة fg مستمر عند النقطة x_0.
- الدالة $\frac{f}{g}$ مستمر عند النقطة x_0، إذا كان $g(x_0) \neq 0$.
- الدالة λf مستمر عند النقطة x_0، إذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$.

قضية (استمرار الدالة المركبة)

ليكن E و F جزئين من $\mathbb{R}$ وليكن x_0 نقطة من E.

إذا كانت الدالة $f: E \longrightarrow F$ مستمرة عند النقطة x_0 وإذا كانت الدالة $g: F \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ تكون مستمرة عند النقطة x_0.

مثال

الدالة المعرفة بـ: $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto h(x) = \sqrt{x^2+1}$

مستمرة على $\mathbb{R}$ باعتبارها مركب الدالتين المستمرتين:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto f(x) = x^2 + 1$$

$$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$$

حيث يكون لدينا: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$.

التمديد بالإستمرار

لتكن f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ ماعدا عند نقطة x_0 منه. إذا قبلت الدالة f نهاية عند النقطة x_0 و لتكن α عندها تكون الدالة المعرفة بـ:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in I \backslash \{x_0\} \\ \alpha, x = x_0 \end{cases}$$

تمديدا بالاستمرار لدالة f على المجال I كله.

مثال

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ المعرفة على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ وغير معرفة وغير مستمرة عند النقطة $x_0=2$. لنحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 1}(x+2)=4$$

بما أن النهاية موجودة فيمكن تمديد الدالة f بالاستمرار عند النقطة $x_0=1$ و نعرف $\tilde{f}$ تمديد f بـ:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, x\in ▯\backslash\{2\}\\ 4, x=2\end{cases}$$

خواص الدوال المستمرة على مجال مغلق و محدود

نظرية : إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$. فإن الدالة f محدودة و تدرك حديها الأدنى و الأعلى على $[a,b]$.

نظرية القيم المتوسطة

ليكن الدالة $f:I\to\mathbb{R}$ المستمرة على I و ليكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين كيفيتين لـ f عند x_1 و x_2 حيث $x_1<x_2$ عندئذ إذا كان y عدد حقيقي محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ فإنه يوجد عدد $x\in]x_1,x_2[$ بحيث $f(x)=y$.

نتيجة (نظرية القيم المتوسطة): لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ المستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$. إذا كان لدينا $f(a)f(b)<0$ فإنه يوجد $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

نظرية: لتكن: $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto y=f(x)$ دالة مستمرة ورتيبة تماما. عندئذ f تقابلا من I في $f(I)$ و تقبل دالة عكسية نرمز لها f^{-1}: حيث: $f^{-1}:f(I)\longrightarrow I$ معرفة ب :

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

تمارين مقترحة

تمرين1 :

أثبت أن المعادلات الآتية تقبل حل واحد على الأقل في المجال المرفق

- $x^5 - x^4 + 1 = 0, I = [-1,0]$
- $sin(x) + 1 = x, I = \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

تمرين 2

أثبت أن الدالة الآتية معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}^*$ أدرس إمكانية تمديدها باالإستمرار على$\mathbb{R}$

$$f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$$

تمرين 3

ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ و f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx \leq 0 \\ \frac{\sin ax}{x} x > 0 \end{cases}$$

أدرس استمرار f على $\mathbb{R}$ بدلالة a و b.

الفصل الرابع: الاشتقاق

1) تعاريف

تعريف الدالة القابلة للاشتقاق

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي حيث I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ و لتكن x_0 نقطة من I. نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت النهاية:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

موجودة ومنتهية. تسمى النهاية في حالة وجودها بالعدد المشتق لدالة f عند النقطة x_0 ويرمز لها بـ $f'(x_0)$ ونكتب:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

كما يمكننا وضع $h = x - x_0$ فنحصل على كتابة مكافئة:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

أمثلة

- نعتبر f الدالة الثابتة على $\mathbb{R}$ ولتكن قيمتها a أي $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$

  ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

إذن $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 0$.

- نعتبر الدالة : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = ax + b$

  ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a(x_0+h)+b)-(ax_0+b)}{h} = \frac{a\ h}{h} = a$$

- نعتبر الدالة: $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$
- ليكن $x_0 \in \mathbb{R}^+$ لدينا:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

قابلية الإشتقاق من اليمين

تعريف: نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليمين عند النقطة x_0 إذا كانت النهاية من اليمين موجودة

أي: $$\lim_{\substack{x \xrightarrow{>} x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

وتدعى هذه النهاية العدد المشتق من اليمين ويرمز لها بـ $f_d'(x_0)$.

قابلية الإشتقاق من اليسار

تعريف: نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليسار عند النقطة x_0 إذا كانت النهاية من اليسار موجودة

أي: $$\lim_{\substack{x \xrightarrow{<} x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

وتدعى هذه النهاية العدد المشتق من اليسار ويرمز لها بـ $f_g'(x_0)$.

تكون دالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا قبلت الاشتقاق من اليمين و من اليسار

وتساوى قيمتي العدد المشتق من اليمين و العدد المشتق من اليسار أي: $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$.

ملاحظة: قد تكون دالة f قابلة للاشتقاق من اليمين و من اليسار عند نقطة x_0 دون أن تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 والمثال الموالي يوضح ذلك.

مثال: نعتبر الدالة $f(x) = |x-1|$ ونأخذ $x_0 = 0$ فيكون لدينا:

$$\lim_{\substack{x \xrightarrow{>} 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \xrightarrow{>} 0}} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \xrightarrow{>} 1}} 1 = 1$$

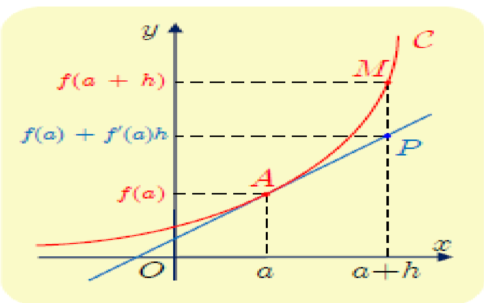
و $$\lim_{\substack{x \xrightarrow{<} 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} 1}} \frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \xrightarrow{<} 1}} -1 = -1$$

وهذا يعني أن الدالة f غير قابلة الإشتقاق عند $x_0 = 1$ لأن $f_g'(1) = -1 \neq f_d'(1) = 1$

ملاحظات:

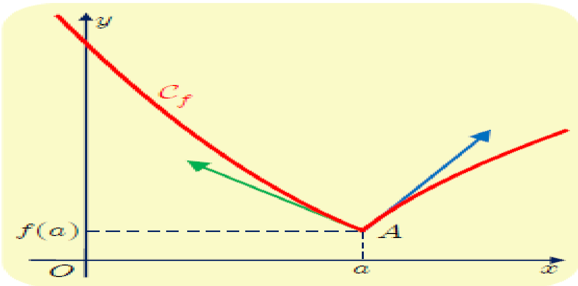
1) إذا قبلت الدالة f الإشفاق عند x_0 فإن منحناها البياني يقبل مماسا معادلته:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$



2) إذا $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند $\boldsymbol{x_0}$ ومنحناها البياني يقبل مماســــا يوازي حامل محور التراتيب معادلتـــــه: $x = x_0$

3) إذا كان $f_g'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ فإن f غير قابلة الاشتقاق عند $\boldsymbol{x_0}$ ومنحناها البياني يقبل نصفي مماسين معاملي توجيههما $f_g'(x_0)$ و $f_d'(x_0)$ و تسمى $\boldsymbol{A(x_0, f(x_0))}$ نقطة زاوية



4) إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ فإن f قابلة الاشتقاق عند $\boldsymbol{x_0}$ ومنحناها البياني يقبل مماســــا يوازي حامل محور افواصل معادلتـــــه: $y = f(x_0)$

نرمز لمشتقة الدالة f' بالرمز f و $n \in$ □

مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x) =$	$f(x) =$	مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{-an}{x^{n+1}}$	$\frac{a}{x^n}$	$\mathbb{R}$	0	a
$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}$	a	$\boldsymbol{ax+b}$
$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$a.n.x^{n-1}$	ax^n
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

2) العمليات على المشتقات:

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ و$g: I \to \mathbb{R}$ دالتين معرفين على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ وقابلين للاشتقاق عند النقطة x_0 من I

- الدالة المجموع $f + g$ تقبل الاشتقاق عند x_0 ويكون لدينا:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- الدالة الجداء fg تقبل الاشتقاق عند x_0 ويكون لدينا:

$$(fg)'(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- الدالة الكسرية $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا تحقق $g(x_0) \neq 0$، ويكون لدينا:

$$\frac{f}{g}(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

ينتج من هذه الخواص وبالتحديد الخاصية الثانية المتعلقة بالجداء النتيجة التالية:

مشتق مركب دالتين

ليكن الدالتين $f: I \to \mathbb{R}$ و$g: J \to \mathbb{R}$ حيث I و J مجالين مفتوحين من $\mathbb{R}$ يحققان $f(I) \subset J$. إذا كان لدينا ادالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in I$ ، وإذا كان لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق عند $f(x_0) \in J$ ، فإن الدالة المركيب $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in I$ ويكون لدينا العلاقة:

$$(g \circ f)'(x_0) = \left(g'(f(x_0))\right) f'(x_0)$$

نتائج:

1) مشتقة الدالة : $x \to \sqrt{f(x)}$

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على المجال I ، فإن الدالة $\sqrt{f}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$.\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

2)مشتقة الدالة: $x \to [f(x)]^n$

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال مفتوح I وقابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 من I ، فإن الدالة f^n قابلة للاشتقاق و الدالة المشتقة لها تعطى بالعلاقة:

$$.(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x_0)f'(x_0), \forall n \geq 1$$

مشتقة الدالة العكسية

نعتبر $f: I \to \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي متباينة و مستمرة على المجال المفتوح I. إذا قبلت f الاشتقاق عند النقطة x_0، فإن الدالة العكسية $f^{-1}: f(I) \to I$ تقبل الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$ إذا كان $f'(x_0) \neq 0$ ويكون لدينا:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال:

حساب مشتقة الدوال العكسية لبعض الدوال المثلثية

- الدالة sin المعرف بـ:

$$\begin{aligned} sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\mapsto sin(x) \end{aligned}$$

رتيبة تماما وقابلة للاشتقاق تقبل دالة عكسية:

$$\begin{aligned} arcsin: [-1,1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto arcsin(x) \end{aligned}$$

الدالة العكسية arcsin تقبل الاشتقاق عند أي نقطة x_0 من المجال $]-1,1[$ حيث:

$$\begin{aligned} (arcsin(x))' &= \frac{1}{sin'(arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{cos(arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(arcsin(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

يمكننا بنفس الطريقة حساب مشتقة الدالة قوس جيب التمام $\arcos(x)$

على المجال $]-1,1[$ فنحصل على:

$$\forall x \in]-1,1[, (arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

أما بالنسبة للتابع قوس الظل $\arctan(x)$ فإنه يكون لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} (arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

نظرية : لتكن الدالة $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$. إذا كانت f تقبل الاشتقاق عند x_0 من I فإنها مستمرة عند x_0.

البرهان

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0.إذن لدينا:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

نريد إثبات أن $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ للقيام بهذا نكتب:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ . \ (x - x_0)$$
$$= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ . \ \lim_{x \longrightarrow x_0} (x - x_0)$$
$$= f'(x_0) \ . \ 0 = 0$$

إذن $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ أي مستمر عند النقطة x_0.

ملاحظة:

إن عكس النظرية السابقة غير صحيح على العموم أي أنه إذا كان لدينا دالة مستمرة عند نقطة لا يستلزم أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة. المثال الموالي يوضح ذلك.

مثال:

نعتبرالدالة: $x \mapsto f(x) = |x - 1| \qquad , \qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

هذه الدالة مستمرة عند النقطة و لكن غير قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة $x_0 = 1$ كما سبق وأن رأينا.

المشتقات من الرتب العالية

ليكن التابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ القابل للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$.

- في البداية نصطلح على تسمية التابع f بالمشتق من الرتبة 0 ونكتب $f^{(\circ)} = f$.
- نقول عن المشتق f' بأنه المشتق من الرتبة الأولى.
- إذا كانت f' تقبل الاشتقاق على مجال I فإننا نقول أن f تقبل مشتقة من الرتبة الثانية ونرمز لها بـ f''

- بالتراجع يمكننا أن نعرف المشتقة من الرتبة n لـ f ونرمز له بـ $f^{(n)}$ باعتبارها مشتقة الدالة $f^{(n-1)}$ ونكتب:

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \quad f^n = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

- إذا كانت f يتقبل الاشتقاق n مرة وكانت f^n مستمرة على المجال I، فإننا نقول أن الدالة f من الصنف C^n على المجال I إذن إذا كان f مستمرة فإنه يكون من الصنف C^0.

أمثلة

- $\forall a \in \mathbb{R}, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; (a)^{(n)} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; (sin(x))^{(n)} = sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

خواص الدوال القابلة للاشتقاق

نتطرق في هذه الفقرة لبعض الخواص، الأكثر أهمية، المتعلقة بالدوال القابلة للاشتقاق. قبل التطرق لهذه الخواص نبدأ بتقديم تعريف مفهوم القيم الحدية (القصوى) لدوال.

3) القيم الحدية (القصوى)

لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ المعرفة والمستمرة على المجال المفتوح $I \subset \mathbb{R}$.

تعريف القيمة العظمى المحلية

نقول عن الدالة f أنها تقبل قيمة عظمى محلية عند نقطة x_0 من المجال I إذا وجد جزء D من المجال I بحيث $x_0 \in D \subset I$ وتحققت العلاقة: $\qquad \forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$

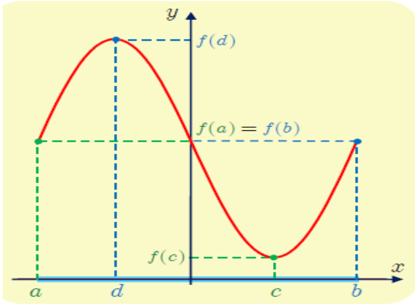
تدعى $f(x_0)$ بقيمة عظمى محلية لدالة f.

تعريف القيمة الصغرى المحلية

نقول أن الدالة f تقبل قيمة صغرى محلية عند نقطة x_0 من المجال I إذا وجد جزء D من المجال I بحيث $x_0 \in D \subset I$ وتحققت العلاقة: $\qquad \forall x \in D, f(x_0) \leq f(x)$

تدعى $f(x_0)$ في هذه الحالة بقيمة صغرى محلية لدالة f.

ملاحظة 1:



إذا كانت $f(x_0)$ قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية فنقول عنها أنها قيمة حدية (قصوى) محلية.

ملاحظة 2

- إذا كان لدينا: $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$ فإننا نقول عن $f(x_0)$ أنها قيمة عظمى مطلقة.
- وإذا كان لدينا: $\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x)$ فإننا نقول عن $f(x_0)$ أنها قيمة صغرى مطلقة.

أمثلة

- الدالة الثابتة تقبل قيمة عظمى وصغرى عند كل نقطة من المجال I الذي يكون معرف عليه وهي قيمة الثابت.
- الدالة $sin(x)$ المعرفة على المجال $]0,2\pi[$

1) تقبل قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{2}$.

2) تقبل قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{3\pi}{2}$.

نظرية: لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ المعرف على المجال $I \subset \mathbb{R}$.

إذا كانت f تقبل قيمة حدية عند نقطة $x_0 \in I$ وإذا كان f يقبل الاشتقاق عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.

نظرية رول

لتكن الدالة $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ المعرفة والمستمرة على $[a, b]$ والقابلة للاشتقاق على $]a, b[$ بحيث $f(a) = f(b)$. عندئذ توجد نقطة $c \in]a, b[$ بحيث $f'(c) = 0$.

البرهان

بما أن f مستمرة على مجال مغلق ومحدود فهو محدود. حديه هما m و M حيث m حده الأدنى و M حده الأعلى.

- إذا كان $M = m$ فإن التابع f ثابت وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$$\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

▪ إذا كان $m \neq M$ فإن الدالة f ، باعتبارها مستمرة على مغلق ومحدود، لها حد أعلى أوجد أدنى يختلف عن $f(a) = f(b)$. إذن يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $f'(c) = 0$ أي $f(c)$يمثل قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

نظرية التزايدات المنتهية

لتكن ال الدالة $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ المعرفة و المستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ والقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح$]a,b[$. عندئذ توجد نقطة $c \in]a,b[$ بحيث يكون لدينا:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

البرهان

برهان هذه النظرية يعتمد على نظرية رول.

نضع: $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

إن الدالة h تحقق:

- مستمرة على $[a,b]$
- قابلة للاشتقاق على $]a,b[$
- $h(a) = h(b) = 0$

نطبق نظرية رول على الدالة h فنحصل على وجود $c \in]a,b[$ بحيث:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

ومنه فإن: $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

بعض تطبيقات نظرية التزايدات المنتهية

حالة انعدام الدالة المشتقة

لتكن الداالة $f: I \to \mathbb{R}$ القابلة للاشتقاق علىI ، إذا كانت الداللة المشتقة منعدمة على I (أي $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$) فإن: f دالة ثابتة على المجال I.

حالة تساوي مشتقة دالتين

لتكن الدالتين$f : I \to \mathbb{R}$ و$g: I \to \mathbb{R}$ القابلتان للاشتقاق على I ، إذا كان لدينا:

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = g'(x)$$

فإنه يكون لدينا: $\forall x \in I, f(x) = g(x) + c$

حيث c عدد حقيقي.

حالة عدم تغير إشارة المشتقة (اتجاه تغير دالة)

لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ القابلة للاشتقاق على I، إذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة على I (أي $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$) فإن الدالة f متزايدة.

وإذا كانت الدالة المشتق f' سالبا على I (أي $\forall x \in I, \quad f'(x) \leq 0$) فإن الدالة f متناقصة.

حالة عدم انعدام المشتق

لتكن الدالة $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ المستمرة على $[a, b]$ والقابلة للاشتقاق على $]a, b[$ بحيث $\forall x \in]a, b[, f'(x) \neq 0$. عندئذ الدالة f رتيبة تماما (أي متزايدة تماما أو متناقصة تماما)

ملاحظة:

لدراسة إتجاه تغيردالة f، يكفي دراسة إشارة $f'(x)$.

نظرية لوبيتال :

إذا كان $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ و $g:]a, b[\to \mathbb{R}$ دالتين معرفين قابلين للاشتقاق على المجال $[a, b]$

ولهما مشتقات محدودة ومستمرة و $g'(x) \neq 0$ في كل نقطة من المجال $]a, b[$ واذا كانت هناك نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $(f(x_0) = g(x_0) = 0)$ أو $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0)$

فيكون لدينا: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال

يمكننا استعمال هذه النظرية لحساب النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(2x+1)}{3x}$ كما يلي:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(2x+1)}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(ln(2x+1))'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{2x+1}}{3} = \frac{2}{3}$$

نتيجة 1

اذا كان $f'(x) = g'(x) = 0$ يحققان شروط نظرية لوبيتال في جوار ما للنقطة x_0 فان

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

مثال

يمكننا استعمال هذه النتيجة لحساب النهاية $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+x^2-6x+4}{x^2-2x+1}$ كما يلي:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^2-6x+4}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^4+x^2-6x+4)'}{(x^2-2x+1)'}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4x^3+2x-6}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(4x^3+2x-6)'}{(2x-2)'}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{12x^2+2}{2}=7$$

نتيجة 2

ان النظرية الصحيحة في الحالة التي تكون فيها $x_0=\infty$ وذلك لأنه اذا عوضنا x بـ $\frac{1}{t}$ نحصل على :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+x_0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+x_0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نتيجة3

لتكن الدالتين f و g مستمرتين وقابلين للاشتقاق من أجل كل نقطة $x\neq x_0$ من جوار ما لـx_0 و $g'(x)\neq x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty)$ و $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ فإن نظرية لوبيتال تبقى صحيحة.

نقطة الإنعطاف

ليكن (C_f) منحنى الدالة f، إذا كان f'' ينعدم و يغير إشارته عند x_0 فـــإن $M(x_0,f(x_0))$ نقطة إنعطاف لـ (C_f).

ملاحظة:

إذا كان f' ينعدم و يغير إشارته عند x_0 فـــإن $M(x_0,f(x_0))$ نقطة إنعطاف لـ (C_f).

دستور ليبنيتز Leibniz

لتكن الدالتان $f,g:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ القابلتان للاشتقاق n مرة عند النقطة $x_0\in\,]a,b[$، العلاقة الآتية محققة:

$$(f\,.\,g)^n(x_0)=\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,f^p(x_0)\;\;g^{n-p}(x_0)$$

حيث: $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ يمثل عدد التوفيقات C_n^p.

4) النشر المحدود

تعريف

لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ ، حيث I مجال من $\mathbb{R}$ و $0 \in I$ وليكن $n \in \mathbb{N}$. نقول عن الدالة f أنها تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار الـ0, إذا وجد كثير حدود $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_t\, x^k$ من الرتبة أقل أو تساوي n وإذا وجد تابع حقيقي $O(x^n)$ معرف على I ومستمر عند الـ 0 بحيث:

$$f(x) = P_n(x) + O(x^n) \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0} O(x^n) = 0$$

المصطلح $O(x^n)$ أدخل من طرف الرياضي **Landau**. نجد أحيانا $\varepsilon(x^n)$ عوض $O(x^n)$.

وحدانية النشر المحدود

نظرية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار الصفر أي $f(x) = P_n(x) + 0(x^n)$. عندئذ المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_n$ تعرف بطريقة وحيدة.

دالة كثير الحدود $P_n(x)$ تدعى بالجزء الرئيسي أو النظامي للنشر المحدود لـ f من الرتبة n و$O(x^n)$ تدعى بالباقي.

ملاحظة:

إذا كانت f زوجية أو فردية فإن $P_n(x)$ تكون زوجية أو فردية على الترتيب.

نظرية تايلور Taylor

ليكن I مجالا يشمل الصفر وليكن f دالة تقبل الاشتقاق حتى الرتبة n على الأقل وبحيث المشتقة $f^{(n)}(x)$ تكون مستمرة. عندئذ نشر تايلور–يونغ المحدود لدالة f في جوار النقطة $x = x_0$ يكتب على الشكل:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(x^n)$$

أما في جوار $x_0 = 0$ تدعى هذه العلاقة بدستور ماك لوران و تكتب على الشكل:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

خواص النشور المحدودة

- النشر المحدود لمجموع دالتين يساوي مجموع النشور المحدودة لهما.
- النشر المحدود لضرب دالتين يساوي ضرب النشور المحدودة لهما مع الاحتفاظ بالحدود من الرتب الدنيا.

مثلا : $DL(f.g)_n = Tronc_n\{DL(f)_n \,.\, DL(g)_n\}$

حيث :

- $DL(f)_n$ يمثل النشر المحدود لـ f من الرتبة n.
- $DL(g)_n$ يمثل النشر المحدود لـ g من الرتبة n.
- $Tronc_n\{P(x)\}$ يمثل بتر $P(x)$ من الرتبة n أي الاحتفاظ بالحدود الأولى من الجداء $DL(f)_n D\,.\,L(g)_n$

مثال :

ليكن النشرين المحدودين لـ f و g الآتيين:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + O(x^3)$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + O(x^3)$$

النشر المحدود لـ fg هو:

$$DL(fg)_2 = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + O(x^3)$$

- النشر المحدود لقسمة دالتين يساوي قسمة الجزء الرئيسي لنشر دالة البسط على الجزء الرئيسي لنشر دالة المقام وفق الأسس المتزايدة إلى الرتبة n.

تطبيق النشر المحدود لحساب النهايات

لتكن f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتب n في جوار الصفر. الحد غير المعدوم من الرتبة الأدنى من الجزء الرئيسي يمثل نهاية f في جوار الصفر.

مثال :

لدينا $DL(sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$

إذن: $\frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^3)$ ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$

النشر المحدود لبعض الدوال الأولية في جوار الصفر

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + ax + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

$$tan\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^8)$$

تمارين مقترحة

تمرين1 :

أحسب مشتقات الدوال الآتية:

$$f(x) = \sqrt{1+(x\cos x)^2},\qquad g(x) = \ln(\tan(x))$$

$$t(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1},\qquad l(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}$$

تمرين 2

أحسب، باستعمال التعريف، مشتق الدالة: $f(x) = x^2 - 4x + 5$ عند النقطة $x_0 = 2$.

تمرين 3

أدرس الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لدوال الآتية: $f(x) = x|x|$ ، $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$، $k(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$.

تمرين 4

أدرس الدالة ذات المتغير الحقيقي $f: x \to f(x) = x^5 - 5x + 1$ وأستنتج أن المعادلة $x^5 - 5x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول حقيقية.

تمرين 5

أكتب النشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة الثالثة لدوال المعرفة على$\mathbb{R}$ الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ ، } g(x) = \log\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \text{ ، } h(x) = \sqrt{x^2+1}$$

تمرين 6

نعتبر النشور المحدودة في جوار الصفر لدوال الآتية:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + O(x^3)\text{، } g(x) = 1 + 2x + x^3 + O(x^4)$$

$$h(x) = 4 + x^2 + O(x^3)$$

أكتب النشور المحدودة من الرتبة الأقصى في جوار الصفر للتوابع $f+h$ ،$f+g$ ،fg ، $\frac{f}{g}$، $\frac{g}{h}$

تمرين 7

أحسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{1-e^{2x}} \text{ ، } \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2(x)}{x-\sin x} \text{ ، } \lim_{x\to 0}\frac{2^x-4}{x-2} \text{ ، } \lim_{x\to 0}\frac{x.\tan x}{\sin 3x}\text{، } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\text{،}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{1-\cos x} \text{ و } \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

الفصل الخامس: الدوال الآسية و اللوغاريتمية

1) الدالـــــــة الأسيـــــة

تعريف : f حيث $f' = f$ و $f(0) = 1$ هي الدالة الوحيدة $f(x) = e^x$ و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

يسمى أساس اللوغاريتم النيبيري $e \simeq 2{,}718$ حيث:

الخواص الجرية: x و y عددان حقيقيان و n عدد صحيح

(1 $e^0 = 1$ **(2** $(e^x)^n = e^{nx}$ **(3** $e^{x+y} = e^x \times e^y$

(4 $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ **(5** $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$ **(6** $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

(7 $e^x > 0$ **(8** $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

مثال :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

(1 $e^{2x} + 3 = 0$، **(2** $e^{-2x+1} - 1 = 0$ ، **(3** $e^{-2x-1} - e^x < 0$ **(4** $e^{2x} > 2 - e^x$

الحل:

(1 تعني $\boldsymbol{e^{2x} = -3}$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $e^{2x} > 0$.إذن $S = \varphi$.

(2 تعني $\boldsymbol{e^{-2x+1} = 1}$ أي $\boldsymbol{e^{-2x+1} = e^0}$ أي $-2x + 1 = 0$ و منه $x = 0{,}5$ إذن $S = \{0{,}5\}$.

(3 تعني $\boldsymbol{e^{-2x-1} < e^x}$ أي $-2x - 1 < x$ أي $x > -\frac{1}{3}$ و منه $S = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

(4 تعني $\boldsymbol{e^{2x} + e^x - 2 \leq 0}$. بوضع $e^x = X$ نحصل على $\boldsymbol{X^2 + X - 2 \leq 0}$

جذرا كثير الحدود $\boldsymbol{X^2 + X - 2}$ هما -2 و 1 و منه $\boldsymbol{X^2 + X - 2 \leq 0}$ تعني $X < -2$ أو $X > 1$.

$X < -2$ تعني $e^x < -2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X > 1$ تعني $e^x > 1$ أي $x > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة $(\boldsymbol{4})$ هي $S =]0; +\infty[$.

دراسة الدالة الأسية : $\boldsymbol{x \mapsto e^x}$

1. اتجاه تغير الدالة الأسية

الدالة $x \mapsto e^x$ معوفة على $\mathbb{R}$ ومستمرة وقابلة الإشتقاق حيث: $(e^x)' = e^x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x \neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $e^x > 0$. ومنه الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

نتائج:

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a < e^b$ يعني $a < b$ و $e^a = e^b$ يعني $a = b$.
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$.

2. النهايات

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = e^x - x$. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x) = e^x - 1$.

و بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ $e^x \geq 1$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $f(0) = 1$.

إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x) \geq 0$ أي $e^x \geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

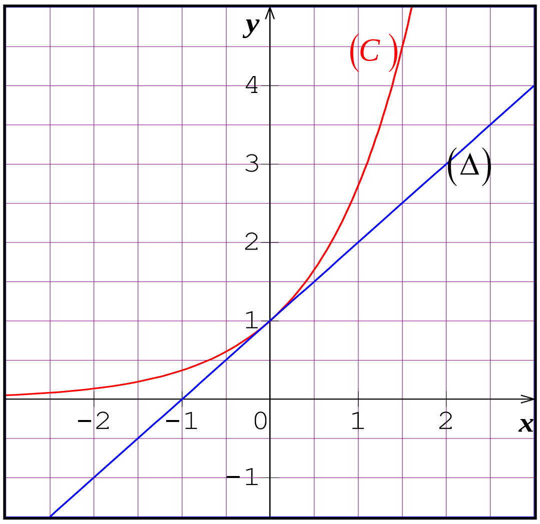
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty\right)$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

3. جدول تغيرات

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$

4) التمثيل البياني



النهـــايـــات الشـهيرة:

1	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
2	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
4	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$
5	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

النشر المحدود لدالـــــة الأسيـــة

النشر المحدود لدالة الأسية $x \mapsto e^x$ وفي جوار الصفر يعطى بالعلاقة:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

مشتقـــة الدالة المركبة من دالة أسية: $x \mapsto e^{f(x)}$

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\,.\,e^{f(x)}$$

إشارتها من نفس إشارة $f'(x)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لأن $e^{f(x)} > 0$

مثال : (دراسة دالة مركبة من دالة أسية)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني (C) معلم متعامد و متجانس.

الحـــل : 1. لدينا

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = -1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

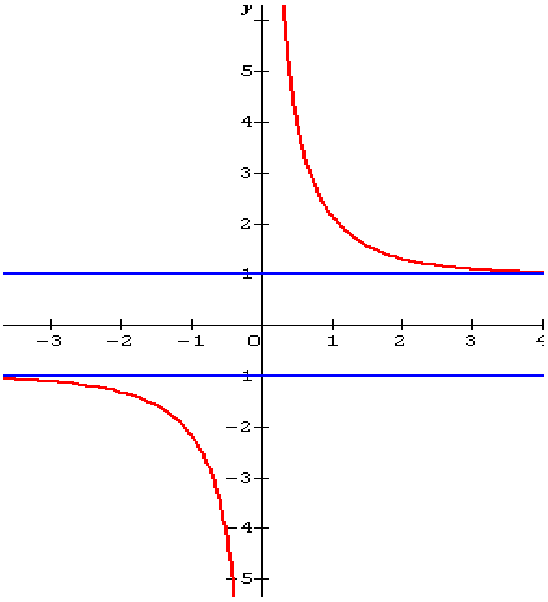
و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$.

نعلم أن $e^x<1$ يعني $x<0$ و$e^x>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=+\infty$ **.**

يقبل المنحني(C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها : $x=0$، $y=-1$ و $y=1$.



2. f قابلة للاشتقاق على المجالين$]-\infty;0[$،$]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$ و

بالتالي فالدالةf متناقصة تماما على كل من المجالين$]-\infty;0[$،$]0;+\infty[$.

2) الدالـــــــة اللوغارتمية النيبيرية

تعريف: الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $f(1)=0$ هي:

$$f(x)=\ln x$$

نتائج :

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$: $x=e^y$ يعني $y=\ln x$.
2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$.
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\ln(e^x)=x$.
4. بما أن $e^0=1$ فإن $\ln 1=0$ و بما أن $e^1=e$ فإن $\ln e=1$.

ملاحظة:

نعبر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" هي الدالة العكسية للدالة الأسية "exp".

خاصية:

في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة$y=x$ (المنصف الأول).

إشارة : $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

الخواص الجبرية:

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما و n عدد ناطق

1) $\ln e = 1$ 2) $\ln ab = \ln a + \ln b$ 3) $\ln a^n = n \ln a$

4) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ 5) $\ln \frac{a}{b} = -\ln \frac{b}{a}$ 6) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

دراسة الدالة اللوغارتمية النيبيرية: $x \mapsto \ln x$

1) النهايات

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما. الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و منه إذا كان x عددا حقيقيا يحقق $x > e^A$ فإن $\ln x > A$ و هكذا فإن المجال $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم $\ln x$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. و هذا يعني أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

من أجل x من $]0;+\infty[$ ، نضع $X = \frac{1}{x}$ و منه $\ln X = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$. لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} X = +\infty$.

و من النتيجة (1) لدينا: $\lim\limits_{X \to +\infty}(-\ln X) = -\infty$ و هكذا فإن $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty}(-\ln X) = -\infty$.

2. اتجاه تغير الدالة اللوغارتمية

- نقبل بدون برهان أن الدالة $x \mapsto \ln x$ مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $f(x) = e^{\ln x}$. f هي مركب الدالة " $\ln$ " متبوعة بالدالة " $\exp$ " فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x}$ و بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$

فإن من جهة $f'(x) = \ln'(x) \times x$ و $f'(x) = 1$ $\quad (f(x) = x)$

و من جهة ثانية. نستنتج هكذا أن $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

ليكن a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0;+\infty[$ حيث $a<b$. $a<b$ يعني $e^{\ln a}<e^{\ln b}$ و بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a<\ln b$.

ومنه الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

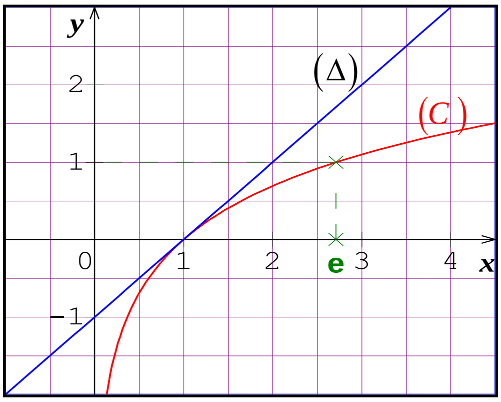
نتائج:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1) $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$ **2)** $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$.

3) $a>1$ يعني $\ln a>0$ و $\ln a<0$ يعني $0<a<1$ كما أن $\ln 1=0$.

.1

4) التمثيل البياني	**3. جدول تغيرات**		
	x	0	1 $+\infty$
	$\ln'(x)$	$+$	
	$\ln x$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

- المنحني (C) الممثل للدالة " ln " يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

النهـــايـــات الشهيرة:

	النهاية
1	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$
2	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0^{+}$
4	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0^{-}$
5	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

مثال 1:

حل المعادلة و المتراجحتين التالية :

1) $ln(2x-1)=2$ 2) $ln(x-1)\geq -3$ 3) $ln(x+2)\leq 5$

طريقة:

لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)]=p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $ln[u(x)]<p$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<e^p$).

الحل:

1) لدينا $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\frac{1+e^2}{2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$

2) لدينا $D=]1;+\infty[$. (2) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]1+e^{-3};+\infty[$

3) لدينا $D=]-2;+\infty[$. (3) تعني $x+2\leq e^5$ أي $x\leq e^5-2$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]-2;e^5-2]$

مثال2:

حل المعادلة و المتراجحة التالية :

1) $ln(x^2-1)=ln(x)$ 2) $ln(x^2-1)\leq ln(x)$

الحل:

1) تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x>0$

و منه $D=]1;+\infty[$.

المعادلة (1) تعني $x^2-1=x$ أي $x^2-x-1=0$. حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما

$x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D.

و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]1;+\infty[$. المعادلة (2) تعني $x^2-x-1\leq 0$.

مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\leq 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

مثال 3:

حل المعادلتين التاليتين :

1) $\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2$ 2) $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2$

الحل:

1) تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$.

-3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.

2) تكون المعادلة (2) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$.

من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D

و منه مجموعة الحلول هي $S=\{2\}$.

مثال 5:

حل المعادلتين التاليتين :

1) $\ln(x-1)(x+2)\leq 2\ln 2$ 2) $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2$

الحل:

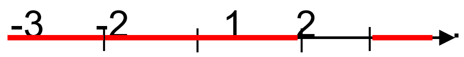
1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)\leq\ln 4$ أي $x^2+x-6\leq 0$.

مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=[-3;-2[\cup]1;2]$

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)\leq \ln 4$ أي $x^2+x-6\leq 0$



مشتقات بعض الدوال المركبة من دوال لوغارتمية

الدالة	الدالة المشتقة	إشارة المشتقة من إشارة
$\ln f(x)$ $f(x)>0$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$f'(x)$
$\ln\lvert f(x)\rvert$ $f(x)\neq 0$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	الجداء $f'(x)f(x)$
$\ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ مع $f(x)g(x)>0$	$\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{f(x)g(x)}$	البســـــط
$\ln\left\lvert\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\rvert$ مع $f(x)g(x)\neq 0$	$\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{f(x)g(x)}$	**جداء (البسط والمقام)**

دالة اللوغاريتم العشري:

تعريف: هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ والتي نرمز لها بالرمز $Logx=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$

نتـــائج:

(1 $x\in IR$ $\quad n<Logx<n+1 \Leftarrow 10^n<x<10^{n+1}$ **(2** $Log10=1$

ملاحظة: الدالتان لهمـــا نفس الخواص الجبرية Log n

النشر المحدود : **(** للدالتين $x\mapsto ln(1+x)$ و $x\mapsto ln(1-x)$ **)**

في جوار الصفر لدينا :

$$ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+O(x^n)$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+O(x^n)$$

مثال1 : (دراسة دالة مركبة من دالة لوغارتمية**)**

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

2. عين الدالة f'. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحـل:

1. نعلم أن $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و منه $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty$.

لدينا $f(x)=\ln x\left[(\ln x)-1\right]$ و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. بما أن الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

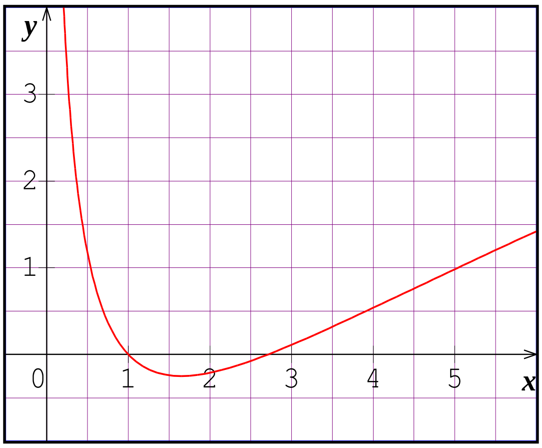
و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2\ln x-1)$.

بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(2\ln x-1)$. لدينا $2\ln x-1\geq 0$

تعني $\ln x\geq\frac{1}{2}$ أي $x\geq e^{\frac{1}{2}}$ ومنه:

- من أجل كل x من $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$، $f'(x)\leq 0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$.
- من أجل كل x من $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$، $f'(x)\geq 0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

3. جدول التغيرات والتمثيل البياني للدالة f.



x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

مثال 2 :

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$ حيث:. $f(x)=\ln\left(x^2+4x\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
3) عين نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل .
4) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=-2$ محور تناظر لـ (C_f).
5) أرسم (C_f).

الحل :

1) حساب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x \xrightarrow{<} -4} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$$

2) حساب مشتقة الدالة f :

$$\forall x\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[;f'(x)=\frac{2x-4}{x^2+4x}$$

الإشارة :

لدينا $\forall x\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[;x^2+4x\succ 0$

و $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ مرفوض

$\forall x\in]-\infty;-4[;f'(x)\prec 0$ الدالة f متناقصة تماما

$\forall x\in]0;+\infty[;f'(x)\succ 0$ الدالة f متزايدة تماما

جدول التغييرات :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$

3) نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل .

لدينا $f(x)=0$ و منه

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x^2+4x)=0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x^2+4x)=\ln 1$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x=1$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x-1=0$$

ومنه $\begin{cases} \Delta = 20 \\ x_1=-2+\sqrt{5} \\ x_2=-2-\sqrt{5} \end{cases}$

$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(-2-\sqrt{5};0\right);\left(-2+\sqrt{5};0\right)\right\}$$

4) نبين أن المستقيم ذا المعادلة $x=-2$ محور تناظر لـ (C_f).

$$\forall x\in D_f;(-4-x)\in D_f : f(-4-x)=f(x)$$

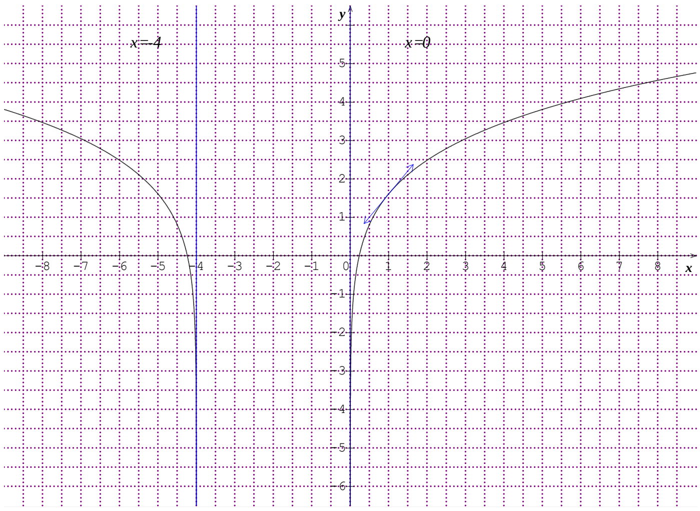
$$x\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[\Leftrightarrow -x\in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow (-4-x)\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$$
$$\Leftrightarrow (-4-x)\in D_f$$

$$\forall x\in D_f : f(-4-x)=f(x) \Leftrightarrow f(-4-x)-f(x)=0$$

$$f(-4-x)-f(x)=\ln\left[(-4-x)^2+4(-4-x)\right]-\ln(x^2+4x)$$
$$=\ln\left[16+8x+x^2-16-4x\right]-\ln(x^2+4x)$$
$$=\ln(x^2+4x)-\ln(x^2-2x-3)$$
$$=0$$

5) رسم (C_f).

المنحني (C_f) يقبلمستقيمان مقاربان معادلاتهما: $x=0; x=-4$



تمارين مقترحة

تمرين 1 :

fدالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2) أحسب مشتقة الدالة f وعين اتجاه تغيرها ، ثم أكتب جدول تغيراتها.
3) عين تقاطع (C_f) مع محور الفواصل و محور التراتيب.
4) أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.
5) أرسم (C_f) .

التمرين الثاني:

f دالة عددية معرفة على $D_f=]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$ حيث: $f(x)=\ln(x^2-2x-3)$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) عين تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
4) أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=4$.
5) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f).
6) أرسم (C_f).

التمرين الثالث:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $D_f=]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1+\ln(x-1)$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسر هذه النتيجة هندسيا .
2. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. (لاحظ ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$)
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
4. أ) أحسب $f(2)$.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]4.5,4.6[$

5. أ) أحسب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$.

ب) أنشئ (Δ) و (C_f) .

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=e^{2x}-3e^{x}+x+2$
و (C) تمثيلها البياني في المعلم السابق (الوحدة $4cm$).

1. أ) عين نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$.

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C).

جـ) ادرس وضع المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x)=e^{x}\left(e^{x}-3+\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}\right)$ ثم استنتج نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$.

2. أ) احسب $f'(x)$ ثم تحقق أن : $f'(x)=(2e^{x}-1)(e^{x}-1)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $ln\left(\frac{2}{3}\right)$. ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين (T) و (D)؟

ب) أنشئ (T) و (D) و (C) في نفس المعلم.

التمرين الخامس:

f دالة عددية معرفة عل $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2-5x)e^{-x}+2$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$).

1) احسب نهايات الدالة f عندما $x\to-\infty$ و عندما $x\to+\infty$.

2) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=(5x-7)e^{-x}$.

ب) ادرس أشارة $f'(x)$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

3) مثل الجزء من المنحنى (C) الذي فواصل نقطه بين 0 و 6.

4) أ) بين أن المعادلة $f(x)=1{,}5$ تقبل، في المجال $[0;6]$، حلين α و β حيث α هو الحل الأصغر.

ب) أعط قيمة مقربة لكل من الحلين α و β (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

ج) حل في المجال $[0;6]$ المتراجحة $f(x) \leq 1{,}5$.

التمرين السادس:

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-\ln x$.

- أدرس تغيرات الدالة g .
- أدرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ حيث :. $f(x)=-x+\dfrac{\ln x}{x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- أحسب مشتقة الدالة f وبين أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم أكتب جدول تغيراتها
- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.
- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
- أنشئ (C_f) و (Δ) .

الفصل السادس: الدوال الاصلية وحساب التكامل

1) تعاريف ونظريات

تعريف: لتكن f عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نقول عن الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I أنها دالة أصلية لدالة f إذا تحقق:

$$\forall x \in I \ , \ F'(x) = f(x)$$

ويمكن كتابة:

$$F(x) = \int f(x)$$

ملاحظات

- إن الدالة F قابلة للاشتقاق فهي إذن مستمرة.
- الدالة الأصلية لـ f في حالة وجودها ليست وحيدة. إذا قبلت الدالة f دالة أصلية F على المجال I فإن f تقبل عددا غير منته من الدوال الأصلية على المجال I، حيث تكون الدالة G دالة أصلية لدالة f إذا وجد عدد حقيقي c يحقق:

$$\forall x \in I \ , \ G(x) = F(x) + c$$

نظرية : كل دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ تقبل عدد غير منته من الدوال الأصلية.

الدالة $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ هي دالة أصلية لـ f .

نظرية : لتكن G دالة أصلية كيفية لـ f حيث f مستمرة على $[a,b]$، إذن $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ دالة أصلية لـ f و $F - G = C$ حيث C ثابت حقيقي. إذن نكتب:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left(G(b) + C\right) - \left(G(a) + C\right) \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

وهذا يعني:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

إذن إذا كان f دالة أصلية على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن العدد: $F(b) - F(a)$ يدعى تكامل الدال f من a إلى b وهو:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(a) - F(b)$$

ونقول أن f تقبل المكاملة على $[a,b]$.

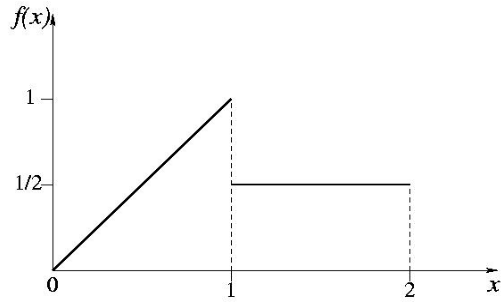
أمثلة :

- لتكن الدالة: $x \mapsto f(x) = \alpha$ حيث $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

إذا أردنا حساب تكامل هذا الدالة فإننا نحصل على: $\int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a)$

- لتكن الدالة المعرفة بـ :

$$f: [0,2] \to \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad x \mapsto f(x) = f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 1/2, & x \in]1,2] \end{cases}$$



إن تكامل هذه الدالة هو:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2) طرق حساب الدوال الأصلية

طريقة المكاملة بالتجزئة

ليكن u و v دالتين من الصف C^1 على المجال $[a,b]$، عندئذ تكون الدالتين uv دالة أصلية لدالة $uv'+u'v$ و نكتب $(uv)' = uv' + u'v$. بما أن الدالة uv والدالتين $u'v$ و uv' دوال مستمرة على $[a,b]$ ومن الخواص السابقة للتكامل فإن:

$$\int_a^b (uv)'dx = [uv]_a^b = (uv)(b) - (uv)(a) = \int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx$$

$$= \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

من هذه العبارة نحصل على صيغة المكاملة بالتجزئة الآتية: إذا كان u و v تابعين من الصف C^1 على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال 1 :

أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة (التكامل بالتجزئة):

1) $\int x \ln x dx$ ، 2) $\int (x^2 - 2x) e^x dx$ ، 3) $\int x \sin(x) dx$

الحل :

1) $\int x \ln x dx$: لدينا $\int f.g' = [f.g] - \int f'.g$

نضع
$$\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ g'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

و منه
$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - x + c \ / \ c \in \mathbb{R}$$

2) $\int (x-1)e^x dx$: لدينا $\int f.g' = [f.g] - \int f'.g$

نضع
$$\begin{cases} f(x) = (x-1) \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \end{cases}$$

و منه
$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx$$
$$= (x-1)e^x - e^x + c \ / c \in \mathbb{R}$$
$$= (x-2)e^x + c \ / c \in \mathbb{R}$$

3) $\int x \sin(x) dx$: لدينا $\int f.g' = [f.g] - \int f'.g$

نضع
$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

و منه
$$\int x \sin(x) dx = -x\cos(x) + \int \cos(x) dx$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c \ \ / \ c \in \mathbb{R}$$

مثال 2 :

حساب التكامل $n \in \mathbb{N}, \ \int x^n \log(x)\, dx$

التوابع الموجودة في التكامل من الصنف C^1 على $[0,+\infty[$.

الحل :

نضع:

$$v'(x)=x^n \xrightarrow{n\neq -1} v(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{و} \quad u(x)=\log(x)\longrightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$$

إذن:

$$\int x^n \log(x)\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x)-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x)-\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$$

من أجل $n=-1$ لدينا:

$$\int\frac{\log(x)}{x}dx=\log^2(x)-\int\frac{\log(x)}{x}dx+k$$

إذن

$$\int\frac{\log(x)}{x}dx=\frac{\log^2(x)}{2}+k$$

جدول الدوال الأصلية:

هذا الجدول مستنتج مباشرة من مشتقات بعض الدوال.

الدالة	الدالة الأصلية لها	الدالة	الدالة الأصلية لها $c\in\mathbb{R}$
0	a $a\in IR$	$f^n\times f'$ $n\in Q-\{-1\}$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}+c$
a $a\in IR$	$ax+c$	$f\times f'$	$\frac{1}{2}f^2+c$
x^n و $n\in Q-\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\frac{1}{x^n}$ و $n\in Q-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}ln\lvert ax+b\rvert+c$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\frac{f'}{f}$	$ln\lvert f\rvert+c$
$\frac{f'}{f^n}$ و $n\in Q-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}+c$	$f'\times e^f$	e^f+c
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

مثال:

أحسب التكاملات التالية

(1 $\int (2x^4 - x^2 + 4)dx$ ، **(2** $\int \frac{-5}{x^2-1}dx$ ، **(3** $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$ ،

(4 $\int \frac{-2e^x}{e^x+1}dx$ ، **(5** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$ ، **(6** $\int \frac{1}{5x-1}dx$

الحل :

(1 $\int (2x^4 - x^2 + 4)dx$

$$\int (2x^4 - x^2 + 4)dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 4x + c \;/\; c \in \mathbb{R}$$

(2 $\int \frac{-5}{x^2-1}dx$

$$\int \frac{-5}{x^2-1}dx = \int \frac{-5}{(x-1)(x+1)}dx$$

لدينا : $\frac{-5}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x+1)}$

نعين العدادان الحقيقيان b،a ... بالحساب نجد ان : $a = -5/2$ ، $b = 5/2$ و بالتالي

$$\int \frac{-5}{x^2-1}dx = \int \left[\frac{-\frac{5}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{5}{2}}{(x+1)} \right] dx$$

$$= -\frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x+1| + c \;/\; c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c \;/\; c \in \mathbb{R}$$

(3 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$

لدينا M $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$

نعين الأعداد الحقيقية c،b،a ... بالحساب نجد ان : $a = 1$ ، $b = -1$ $c = 1$ و بالتالي

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

و منه

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{1}{(x-1)}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+c \ / \ c\in\mathbb{R}$$

4)

$$\int \frac{-2e^x}{e^x+1}dx=-2\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=-2\ln\left(e^x+1\right)+c \ / \ c\in\mathbb{R}$$

5)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

$$=\sqrt{x^2+9}+c \ / \ c\in\mathbb{R}$$

6)

$$\int \frac{1}{5x-1}dx=\frac{1}{5}\int \frac{5}{5x-1}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln|5x-1|+c \ / \ c\in\mathbb{R}$$

الدوال الأصلية لبعض الدوال الأولية

الدالة	احد الدوال الأصلية	الدالة	احد الدوال الأصلية
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$(a\in\mathbb{R} \quad a\neq -1), \quad x^a$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\cosh(\omega x)$	$\frac{1}{\omega}\sinh(\omega x)$	$\frac{1}{x-a}$	$\log\lvert x-a\rvert$
$\sinh(\omega x)$	$\frac{1}{\omega}\cosh(\omega x)$	$(\lambda\neq 0), \quad e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$
$\frac{1}{\sqrt{x^{2+1}}}$	$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$, \ \omega\neq 0 \quad \cos(\omega x)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\left\lvert\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right\rvert$	$, \omega\neq 0 \quad \sin(\omega x)$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$

طريقة تبديل المتغير

ليكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ و φ تابعا من الصف C^1 على مجال $[\alpha,\beta]$ بحيث $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$.

عندئذ يكون لدينا الدالة: $t \to f(\varphi(t))\varphi'(t)$

قابلا للمكاملة على $[\alpha,\beta]$ ولدينا العلاقة:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

الإثبات :

لتكن F الدالة الأصلية لـ f ينعدم عند $x=a$. إن مشتق الدالة المركبة $t \mapsto F(\varphi(t))$ هو الدالة

$t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ويحقق: $F(\varphi(\alpha))=0 \wedge F(\varphi(\beta))=F(b)$. نستنتج

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$$

$$= F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

مثال :

أحسب باستعمال المكاملة بتبديل المتغير:

1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$ (نضع: $t=\sqrt{x+1}$) **2)** $\int \frac{x}{x^4+1}dx$ (نضع: $t=x^2$)

الحل :

1) حساب $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$. لدينا :

$t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2=x+1 \Rightarrow x=t^2-1$ و $t^2=x+1 \Rightarrow 2tdt=dx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{2t}{t(t^2-1)}dt = 2\int \frac{1}{(t^2-1)}dt$$

$$= 2\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt = 2\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$

$$= 2\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= ln|t-1| - ln|t+1| + c/c \in \mathbb{R}$$

$$= ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c/c \in \mathbb{R} = ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c/c \in \mathbb{R}$$

2) حساب$\int \frac{x}{x^4+1}dx$. لدينا :

$t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}$ و $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} \times \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt$$
$$= \frac{1}{2} \times arctan(t) + c; c \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{1}{2} \times arctan(x^2) + c; c \in \mathbb{R}$$

لدينا
$$\int \frac{1}{t^2+a^2}dt = \frac{1}{a}Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c : c \in \mathbb{R}$$

3) بعض التقنيات لحساب بعض أنماط التكاملات

حساب تكامل من الشكل:$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

في البداية يمكن إعادة كتابة هذا التكامل على الشكل: $\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

ثم نقوم بتبديل المتغير حيث نضع: $t=\frac{x}{a} \Rightarrow dx = adt$. بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a}Arctgt + c = \frac{1}{a}Arctg\frac{x}{a} + c$$

حساب تكامل من الشكل:$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$

نميز حالتين بالنسبة لـ: α

من أجل $\alpha=1$:
$$\int \frac{dx}{x-x_0} = \log|x-x_0| + C$$

من أجل $\alpha>1$:
$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \int (x-x_0)^{-\alpha}dx = -\frac{1}{(1-\alpha)(x-x_0)^{1-\alpha}} + c$$

مثال :

أحسب باستعمال المكاملة بتبديل المتغير:

(1 $I=\int \frac{5}{(x-1)(x+3)}dx$ **(2** $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$ **(3** $\int \frac{-5}{x^2-1}dx$

الحل :

(1 حساب $I=\int \frac{5}{(x-1)(x+3)}dx$. لدينا

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x+3)}$$

نعين العدادان الحقيقيان a،b ... بالحساب نجد أن : $a=+1/4$, $b=-1/4$ و و بالتالي

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5}{(x-1)(x+3)}dx \\ &= 5\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx \\ &= 5\int \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)}+\frac{-\frac{1}{4}}{(x+3)}dx \\ &= \frac{5}{4}\left[\ln|x-1|-\ln|x+3|\right]+c \ / \ c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(2 حساب $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$. لدينا

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-1)}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

نعين الاعدادالحقيقية a،b،c ... بالحساب نجد أن : $a=1$, $b=-1$ و $c=1$ و بالتالي

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$ و منه

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)^2}dx &= \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx-\int \frac{1}{(x-1)}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+c \ / \ c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(3 حساب. $\int \frac{-5}{x^2-1}dx$ نبدأ بكتابة : $\int \frac{-5}{x^2-1}dx=\int \frac{-5}{(x-1)(x+1)}dx$

لدينا $\dfrac{-5}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{a}{(x-1)}+\dfrac{b}{(x+1)}$

نعين العدادان الحقيقيان a،b ... بالحساب نجد ان : $a = -5/21$, $b = 5/2$ و بالتالي

$$\int \frac{-5}{x^2-1}dx=\int\left[\frac{-\frac{5}{2}}{(x-1)}+\frac{\frac{5}{2}}{(x+1)}\right]dx$$
$$=-\frac{5}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x+1|+c\ /\ c\in\mathbb{R}$$
$$=-\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c\ /\ c\in\mathbb{R}$$

حساب تكامل من الشكل : $\displaystyle\int \frac{(Bx+C)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\beta}}dx$ ***أو*** $\displaystyle\int \frac{(Bx+C)dx}{(x^2+px+q)^{\beta}}$

لاحظ أنه يمكننا كتابة (x^2+px+q) على الشكل $\left((x-a)^2+b^2\right)$.

لحساب هذا التكامل، نقوم بالتبديل الآتي للمتغير: $x=a+bt$ ومنه $dx=bdt$. وهذا يمكننا من الحساب الآتي:

$$\int \frac{Bx+C}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\beta}}dx=\int b\frac{B(a+bt)+C}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\beta}}dt$$
$$=\int b\frac{Ba+C}{b^{2\beta}(1+t^2)^{\beta}}dt+b\int\frac{Bbt}{b^{2\beta}(1+t^2)^{\beta}}dt$$
$$=\frac{b(Ba+C)}{b^{2\beta}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{\beta}}dt+\frac{b^2B}{b^{2\beta}}\int\frac{t}{(1+t^2)^{\beta}}dt$$

إذن حساب هذا النوع من التكاملات يعود إلى حساب تكاملين :

1) من الشكل $\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha}}$ و **2)** من الشكل $\displaystyle\int\frac{tdt}{(1+t^2)^{\alpha}}$.

حساب تكامل من الشكل: $\displaystyle\int\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}dt$

نضع : $u=1+t^2$ ومنه $du=2t\,dt$. وهذا يمكننا من الحساب الآتي:

من أجل $\alpha=1$:

$$\int\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{\alpha}}=\frac{1}{2}\log(1+t^2)+C$$

من أجل $\alpha>1$:

$$\int\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{\alpha}}=\left[\frac{-1}{2(1-\alpha)(1+t^2)^{\alpha-1}}\right]+C$$

حساب تكامل من الشكل $I_{\alpha}=\int\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha}}$:

لحساب هذا التكامل نستعمل طريقة المكاملة بالتجزئة كما يلي:

$$u=\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha}}\ \Rightarrow\ du=\frac{-2\alpha t}{(1+t^2)^{1+\alpha}}dt$$ و $$dv=dt\Rightarrow\ v=t$$

بالتعويض نحصل على:

$$\begin{aligned}I_{\alpha}&=\int\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha}}dt=\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}+2\alpha\int\frac{t^2}{(1+t^2)^{1+\alpha}}dt\\&=\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}+2\alpha\int\frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{\alpha+1}}dt\\&=\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}+2\alpha\int\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha}}-2\alpha\int\frac{dt}{(1+t^2)^{1+\alpha}}\\&=\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}+2\alpha\ I_{\alpha}-2\alpha\ I_{1+\alpha}\end{aligned}$$

ومن هذا يمكننا استنتاج العلاقة التراجعية الآتية:

$$\begin{cases}I_1=\int\frac{dt}{(1+t^2)}\\2\alpha.I_{1+\alpha}=\frac{t}{(1+t^2)^{\alpha}}+(2\alpha-1)I_{\alpha}\end{cases}$$

حساب تكامل من الشكل: $\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$.

حيث R( ) يمثل دالة ناطقة بدلالة $x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}}$. (ما يوجد بين قوسين).

في هذه الحالة، نستعمل التبديل: $x=t^k$ ومنه $dx=kt^{k-1}dt$ حيث k

هو المقام المشترك للكسور $\frac{m}{n},\dots,\frac{r}{s}$.

مثال :

إذا أردنا حساب مثلا التكامل: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$ يكون الحل كالتالي.

الحل :

، نستعمل التبديل الآتي: $x=t^4$ ومنه يكون $dx=4t^3dt$. بالتعويض نحصل على:

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}4t^3dt = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}dt = 4\int\left(t^2-\frac{t^2}{1+t^3}\right)dt$$
$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\log\left|t^3+1\right|+C$$
$$=\frac{3}{4}\left(\sqrt[4]{x^3}-\log\left|1+\sqrt[4]{x^3}\right|\right)$$

حساب تكامل من الشكل: $\int R\left\{x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right\}dx$

في هذه الحالة، نستعمل التبديل: $t^k=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث k هو المقام المشترك للكسور $\frac{m}{n},\dots,\frac{r}{s}$.

مثال :

إذا أردنا حساب مثلا التكامل: $\int_c^x \frac{1dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt[3]{1+t}}$، يكون الحل كالتالي.

الحل :

نستعمل التبديل الآتي: $u=\sqrt[6]{1+t}$ ومنه $t=u^6+1$ و $dt=6u^5du$. بالتعويض نحصل:

$$\int_c^x \frac{1dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt[3]{1+t}} = \int_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^5}{u^3+u^2}du = \int_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^3}{u+1}du$$
$$=6\int_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}}\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$
$$=6\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\log(u+1)\right]_{\sqrt[6]{1+c}}^{\sqrt[6]{1+x}}$$

حساب تكامل من الشكل: $I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx;\ a\neq 0$

في هذه الحالة، نحاول كتابة هذا التكامل على شكل تكامل دالة ناطقة بسيط يمكن حساب تكامله.

A. إذا كان $0<a$: نقوم بتبديل المتغير حيث نضع : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$

ومنه $ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2$ أي : $x=\dfrac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}t}$.

بهذا التبديل نحصل على تكامل دالة ناطقة المتغير فيها هو t.

مثال :

إذا أردنا حساب مثلا التكامل: $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$ يكون الحل كالتالي.

الحل :

لدينا : $\sqrt{x^2+c}=-x+t \Rightarrow x^2+c=x^2-2xt+t^2$

إذن نضع: $x=\dfrac{t^2-c}{2t}$ ومنه يكون لدينا: $dx=\dfrac{4t^2-2(t^2-c)}{4t^2}dt=\dfrac{t^2+c}{2t^2}dt$.

بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int\frac{t^2+c}{t(t^2+c)}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log\left|\sqrt{x^2+c}+x\right|+C$$

B. إذا كان α و β جذرين حقيقيين للمعادلة: $ax^2+bx+c=0$ ،

نضع: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$

ومنه فإن: $a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2 \quad\Rightarrow\quad a(x-\beta)=(x-\alpha).t^2$

أي: $x=\dfrac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$. نحصل بهذا التغير على تكامل دالة ناطقة بسيط نسبيا.

مثال :

إذا أردنا حساب مثلا التكامل: $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ ، يكون الحل كالتالي.

الحل :

لدينا : $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}=\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x+2)(x+1)}}$

نضع: $\sqrt{(x+2)(x+1)}=(x+2)t\Rightarrow(x+1)=(x+2)t^2$ ومنه فإن: $x=\dfrac{2t^2-1}{(1-t^2)}$ و $dx=\dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$

بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}=\int\frac{2t}{\left(1-t^2\right)}dt$$

هذا التكامل الأخير يسهل حسابه.

حساب تكامل من الشكل: $\int R(\sin\ x,\ \cos x, tg\ x)dx$

يمكننا على العموم استعمال التبديل $t = tg\frac{x}{2}$ للحصول على تكامل دالة ناطقة من الأشكال البسيطة بدلالة t. بهذا التبديل المشار إليه يكون لدينا:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{\left(tg\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{و} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2-\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1-\left(tg\frac{x}{2}\right)^2}{\left(tg\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

مثال :

إذا أردنا حساب مثلا التكامل: $\int \frac{dx}{\sin x}$، يكون الحل كاتالي.

الحل :

نضع $t = tg\frac{x}{2}$ ، فنحصل على: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

مثال :

إذا أردنا حساب مثلا التكامل: $\int \frac{dx}{\cos x}$ ، يكون الحل كاتالي.

الحل :

نضع $t = tg\frac{x}{2}$، فنصل إلى:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{2dt}{(1+t)(1-t)} = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{1-t} = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

ونعود إلى المتغير x عن طريق نفس التبديل $t = tg\frac{x}{2}$.

تمارين مقترحة

تمرين1 :

1) عين a، b و c التي تحقق: $\dfrac{1}{t(1+t^2)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{bt+c}{1+t^2}$

2) عين التكامل $\int \dfrac{dt}{t(1+t^2)}$ على المجال $]0,+\infty[$

تمرين2 :

أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة التكاملات الأتية:

1) $\int x\ln x dx$ ، **2)** $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ، **3)** $\int x\sin(x)dx$

تمرين 3

باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين أحسب التكاملين $\int e^x \sin t dt$ و $\int (x^2-2x)e^x dx$

تمرين 4

1) أحسب التكامل المجال $\int \dfrac{dt}{t^2-2t+2}$

2) أحسب التكامل $\int \dfrac{tdt}{(1+t^2)(1+t)}$ على المجال $]-1,+\infty[$.

3) أحسب التكامل $\int \sqrt{1-t^2}dt$ على $]-1,1[$

الفصل السابع : مفاهيم عامة حول المتتاليات والسلاسل

1) تذكير بالمتتاليات العددية

تعريف :. متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

اتّجاه تغيّر متتالية عددية.

متتالية متزايدة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل

عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) .

متتالية متناقصة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) .

متتالية ثابتة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

متتالية رتيبة : إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب) .

مثال

أثبت أن المتتالية ذات الحد العام $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$ متناقصة.

الجواب

- **الطريقة الأولى :**

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

- **الطريقة الثانية :**

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 < U_n$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2n+5}{n+2}}{\frac{2n+3}{n+1}} = \frac{2n^2+7n+5}{2n^2+7n+6} = 1 - \frac{1}{2n^2+7n+6} < 1$$

- **الطريقة الثالثة :**

نضع $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$، f يقبل الاشتقاق على $[0,+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$$

تقارب متتالية عددية - نهاية متتالية عددية.

تعريف : (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية(u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة .

نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ أو $\lim u_n=l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$).

نقول: في هذه الحالة أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $]\alpha,+\infty[$، حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$.

مثال

لتكن المتتالية(u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\frac{-4n+1}{3n+2}$. عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل :

المتتالية (u_n) من الشكل$u_n=f(n)$ حيث fدالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{-4x+1}{3x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{4}{3}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\frac{4}{3}$.ومنه المتتالية (u_n) متقاربة .

تعاريف: (u_n) متتالية عددية.

- القول أنّ نهاية المتتالية(u_n) هي$+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي$-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

تذكير : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $]\alpha,+\infty[$ ، α عدد حقيقي .

➢ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

➢ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مثال 1

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n^2-5n+1}{n^2+5}$. عين نهاية هذه المتتالية .

الحل :

لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و منه $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x^2+5}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

مثال 2

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$. عين نهاية هذه المتتالية .

الحل:

المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(v_n)$ حيث $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ و f الدالة العددية حيث $f(x) = \sqrt{x}$ المعرفة على $[0, +\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية(v_n) هي الدالة g حيث $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0, +\infty[$.

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = 4$. و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$.

المتتاليات الهندسية

تعريف: نقول أن المتتالية(u_n) متتالية هندسية حدها الأولu_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = u_n \times q \text{ .}$$

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

إذا $q \neq 1$ $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.

و إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$.

نهاية متتالية هندسية

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

مثال

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2. أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).

3. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

4. أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S. أحسب نهاية u_n .

الحل :

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$

2. $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = -1$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

3. $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}$

إذن $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

.4 $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $\left(-1<\frac{1}{3}<1\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} S = \lim_{n\to+\infty} -\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = -\frac{3}{2}$$

$u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة

تعريف : (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n :

  $u_n \le A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n :

  $u_n \ge B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مثال

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{2n+3}{n}$.

.i المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و5 عنصر حاد من الأعلى .

.ii المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و2 عنصر حاد من الأسفل .

.iii و منه المتتالية (u_n) متتالية محدودة .

مبرهنة : _ تقبل بدون برهان .

.i إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .

.ii إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

مثال 1

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $\boldsymbol{u_n = \frac{n^2+n+9}{n}}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل.

طريقة : لإثبات أن متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B

(أو محدودة من الأعلى بعدد A) يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية :

- ✓ استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- ✓ المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .
- ✓ إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $]0;+\infty[$.

الحل :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث: $f(x) = \frac{x^2+x+9}{x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على جدول التغيرات الآتي :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	↘	7	↗	

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n \geq 7$ ، و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل.

مثال 2

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+4}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

الحل :

نحسب الفرق $u_n - 2$.

$$u_n - 2 = \frac{2n^2+1}{n^2+4} - 2 = \frac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4} = \frac{-7}{n^2+4}$$

من أجل كل عدد طبيعيn : $\frac{-7}{n^2+4} \le 0$ و بالتالي:

من أجل كل عدد طبيعيn : $u_n - 2 \le 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 2 عنصر حاد من الأعلى .

مثال 3

ليكن $\{U_n\}_n$ متتالية معرفة بـ$U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1) أثبت بالتراجع أن U_n محدودة من الأعلى بـ :2.

2) أثبت أن $\{U_n\}_n$ متقاربة وأحسب نهايتها.

الحل :

1) نبين أن $\{U_n\}_n$ محدودة من الأعلى ونبين في أن واحد أن $\{U_n\}_n$ معرفة جيدا وللقيام بذلك يكفي أن نبين أن $U_n \ge -2$.

إذن سوف نبين بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ 0 \le U \le 2$

- ✓ الخاصية محققة من أجل الرتبة الأولى : $0 \le U_0 = 1 \le 2$
- ✓ نفرض أن $U_n \le 2$ إذن $U_n + 2 \le 4$ و منه
$$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \le \sqrt{4} \le 2$$
- ✓ إثبات أن المتتالية $\{U_n\}_n$ متقاربة

لدينا التابع $x \to x + 2$ متزايدة على $\mathbb{R}$ والتابع $x \to \sqrt{x}$ متزايدة على $\mathbb{R}$ ،
إذن U_n متزايدة و لدينا كذلك $\{U_n\}_n$ محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة
ونهاية المتتالية تحقق المساواة $x = f(x)$ أي $x = \sqrt{2 + x}$ أي لدينا

$$x \ge 0 \wedge x^2 = 2 + x$$

إذن علينا حل المعادلة: $x^2 - x - 2 = 0$.

لدينا $\Delta = 1 + 8 = 9$ ومنه فإن $x_1 = -1 \wedge x_2 = 2$

بما أن $\{U_n\}_n$ موجبة فالنهاية المقبولة هي : $\ell = 2$

المتتاليتان المتجاورتان

تعريف : تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا :

i. إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ،

ii. و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مثال:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

i. $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$.

و منه $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

ii. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$. و منه

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

iii. $u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ و منه $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

مبرهنة : إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

مثال

لتكن المتتالية(u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

أحسب w_n بدلالة n. ما هي نهاية (w_n) ؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n) ؟

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل :

1) لدينا $w_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+2v_n}{3} - \frac{u_n+3v_n}{4}$

$w_{n+1} = \frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12} = \frac{u_n-v_n}{12}$ أي $w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$.

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 11$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

بما أن $-1 < \frac{1}{12} < 1$ فإن (w_n) و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (w_n) متقاربة.

2) $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n+2v_n)}{3} + \frac{8(u_n+3v_n)}{4}$

أي $t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n$ و منه $t_{n+1} = t_n$

و المتتالية (t_n) ثابتة على $\mathbb{N}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$.

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n+2v_n-3u_n}{3} = \frac{-2(u_n-v_n)}{3} = -\frac{2}{3}w_n$.

إذن: $u_{n+1} - u_n = -\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n < 0$

والمتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n+3v_n-4v_n}{4} = \frac{(u_n-v_n)}{4} = \frac{1}{4}w_n$.

إذن: $v_{n+1} - v_n = \frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n > 0}$

والمتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ و أن $w_n = u_n - v_n$ و بالتالي $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0}$.

نستنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$$

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 11\,l = 44$

نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

2) السلاسل العددية

تعاريف:

لتكن $(U_n)_{n\in IN}$ متتالية الأعداد الحقيقية.

- نسمي المجموع $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ بالسلسلة العددية .
- يدعى, U_n بالحد العام للسلسلة العددية .
- المجموع $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ يسمى بالجمع الجزئي ذات الرتبة n للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$.
- المتتالي $(S_n)_{n\in IN}$ تسمى بمتتالية المجاميع للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$.
- نقول أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كانت المتتالية $\{S_n\}_{n\in IN}$ متقاربة و العدد

$S = \lim\limits_{n\to=\infty} S_n$ يسمى مجموع السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ ونكتب $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$

ملاحظة:

نقول أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متباعدة إذا كانت غير متقاربة أي لا تقبل نهاية أو $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$

مثال 1

نعتبر السلسلة العددية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1} = \alpha q^1 + \alpha q^2 + \ldots + \alpha q^{n-1} + \ldots \quad , \quad (\alpha \neq 0)$$

يطلق على هذه السلسة عادة اسم السلسلة الهندسية.

لنبرهن على أن هذه السلسلة تتقارب اذا كانت $|q| < 1$.

الحل :

بنية ذلك لنكتب أولا الحد العام S_n لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة لدينا :

$$S_n = \alpha q^1 + \alpha q^2 + \ldots + \alpha q^{n-1} = \alpha \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ اذا كانت $|q| < 1$ فاننا نجد :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\alpha}{1-q}, \qquad (|q| < 1)$$

من هذا نستنتج أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1}$ تكون متقاربة اذا كانت $|q| < 1$ ونهايتها تساوي: $S = \frac{\alpha}{1-q}$

اعتمادا على تعريف تقارب سلسلة عددية نستنتج أن السلسلة الهندسية : $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1}$ تكون متقاربة اذا كانت $|q| < 1$ ومجموعها في هذه الحالة يساوي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1} = \frac{\alpha}{1-q}$$

إذا كانت $|q| > 1$ فان السلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1}$ تكون متباعدة لأن حدها العام $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha q^{n-1} \neq 0$

مثال 2

لنأخذ السلسلة العددية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

والتي تسمى بالسلسلة التوافقية . ولنبرهن على أن هذه السلسلة متباعدة .

الحل :

من المعلوم لدينا أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ و المتتالية $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ متزايدة

ومنه : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \qquad \forall n = 1,2,3,\ldots.$

بأخذ اللوغاريتم لطرفي هذه المتراجحة نجد أن :

$$1 > n\, ln\frac{n+1}{n} \qquad \forall n = 1,2,3,\ldots.$$

ومنه $\frac{1}{n} > ln(n+1) - ln\, n \qquad \forall n = 1,2,3,\ldots.$

لنعوض في هذه النتيجة n بـــ $1,2,3,\ldots.$ فنجد

$$1 > ln\, 2 - ln\, 1:$$
$$\frac{1}{2} > ln\, 3 - ln\, 2$$
$$\frac{1}{3} > ln\, 4 - ln\, 3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{n} > ln(n+1) - ln\, n$$

بجمع هذه المتراجحات طرفا الى طرف نجد:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > ln(n+1)$$

أي أن : $S_n > ln(n+1)$ و منه : $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

وهذا يعني أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لسلسلة التوافقية متباعدة

اذن السلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة ولدينا : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$

مثال 3:

السلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ متباعدة لأن متتالية المجاميع الجزئية لا تقبل نهاية.

خواص السلاسل العددية

خاصية 1 : ليكن $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}V_n$ سلسلتان عدديتان متقاربتان إذن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n+V_n)$ متقاربة .

ولدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(U_n+V_n) = \sum_{n=0}^{\infty}U_n + \sum_{n=0}^{\infty}V_n$$

خاصية 2 : إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ متقاربة و λ عدد حقيقي فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda U_n$ متقاربة

و لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda U_n = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}U_n$$

خاصية 3 : (الشرط الضروري)

إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

البرهان :

بما أن السلسلة $\sum a_n$ تتقارب بالفرض فهذا يعني أن متتالية المجاميع الجزئية S_n لهذه السلسلة متقاربة .

إذن ليكن : $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. لدينا: $U_n = S_n - S_{n-1}$ ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

نتيجة

إذا كانت النهاية $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$ متباعدة.

مثال :

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)$ متباعدة لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$

ملاحظة:

عكس الاستلزام غير صحيح أي أنه إذا كان لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ فليس بالضرورة أن تكون

السلسلة العددية $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة .

مثال

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ لكن السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

السلاسل ذات الحدود الحقيقية الموجبة

تعريف : تسمى السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$, سلسلة ذات حدود حقيقية موجبة إذا كانت كل حدودها موجبة

أي : $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ U_n \geq 0$

ملاحظة :

إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ ذات حدود موجبة هذا يستلزم أن متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$,

متزايدة أي : $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$

خاصية :

تكون السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ ذات الحدود الحقيقية الموجبة, متقاربة إذا و فقط إذا كانت متتالية

المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ محدودة من الأعلى

أي : $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متقاربة $\exists M > 0 \ /\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ S_{n+1} \leq M$

مثال

إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n^2}$

متقاربة وذلك لأن متتالية المجاميع الجزئية لها محدودة من الأعلى :

$$S_n=\frac{1}{2^1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\frac{1}{2^3+n^2}+\cdots \ldots\ldots \frac{1}{2^n+n^2}$$

وبما أن : $\frac{1}{2^n+n^2} < \frac{1}{2^n}$ $\quad n = 1,2,3,.$

اذن : $S_n < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots \ldots \ldots .+\frac{1}{2^n} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

ومنه: $0 < S_n < 2$ ، $n = 1,2,3$

اعتماد على الخاصية السابقة نستنتج أن السلسلة المفروضة متقاربة .

معاييرتقارب السلاسل

معيار المقارنة

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين موجبتين بحيث إبتداءا من رتبة ما تتحقق المتراجحة :

$U_n \leq V_n$ أي : $\exists n > n_0 \ / \ \forall n \geq n_0 : \ U_n \leq V_n$ فإنه

- ✓ إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة فإن هذا يؤدي إلى تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$
- ✓ إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة فإن هذا يؤدي إلى تباعد السلسلة $\sum_{n\geq 0} V_n$

ملاحظة :

إذا تحققت المتراجحة $U_n \leq V_n$ من اجل كل عدد طبيعي n فإن $\sum_{n\geq 0} U_n \leq \sum_{n\geq 0} V_n$.

البرهان :

✓ لنفرض أن $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,$

$$U_n \leq V_n \Rightarrow U_{n_0} + U_{n_0+1} + \ldots + U_n \leq V_{n_0} + V_{n_0+1} + \ldots + V_n \leq \sum_{n\geq 0} V_n = S$$

إذن المجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ محدودة من الأعلى وبالتالي $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة

✓ إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ متباعدة ، فانه ضمن الشرط $U_n \leq V_n$: من أجل $n \geq n_0$ ، تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ أيضا متباعدة ، لأنه اذا فرضنا العكس أي $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ متقاربة فانا نحصل بحسب البرهان على أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ تكون متقاربة و هذا يتناقض مع الفرض من أن $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ سلسلة متباعدة .

مثال 1

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ متقاربة لأن :

$$\frac{1}{n\,2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad n = 1,2,\ldots\ldots\ldots$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة (لأنها السلسلة الهندسية التي أساسها $q = \frac{1}{2} < 1$)

فإن السلسة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ تتقارب اعتمادا على اختبار المقارنة .

مثال 2

لنعتبر السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

لدينا: $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$ و بما أن $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة .

نتيجة : (معيار المقارنة)

لتكن السلسلتين ذات الحدود الحقيقية الموجبة $\sum_{n\geq 0} U_n$ و $\sum_{n\geq 0} V_n$

1- لهما نفس الطبيعة $\sum_n V_n$ و $\sum_n U_n$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = k \in \mathbb{R}_+^*$.

2- تقاربة $\sum_n U_n$ $\Rightarrow$ متقاربة $\sum_n V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$.

3- متباعدة $\sum_n U_n$ $\Rightarrow$ متباعدة $\sum_n V_n$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = +\infty$.

مثال 1

السلسلة التي حدها العام $a_n = \frac{\sqrt{n^4+7}}{n^3-17n}$ متباعدة. لأن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = 1$

نستنتج أن السلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة .

مثال 2

دراسة طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \log n}$. لنعتبر السلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \times n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

بما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ سلسلة متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \log n}$ متقاربة.

نتيجة : (معيار كوشي)

لتكن $\sum_{n\geq 0} U_n$ سلسلة ذات الحدود الحقيقية الموجبة حيث $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$

1- إذا كانت $l < 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة .

2- إذا كانت $l > 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة .

ملاحظة هامة:

إذا كانت $l = 1$ فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$.

أمثلة:

1- السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ متباعدة لأن:

$$\lim \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim(1+\frac{1}{n})^{n} = e > 1$$

2- السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln n} x^n$ متقاربة من أجل $0\leq x \leq 1$ لأن :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\ln n} x^n} = X \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{\ln n}{2}} = X.2^0 = X < 1$$

نتيجة : (معيار دالمبار)

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ ذات الحدود الحقيقية الموجبة. حيث : $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$:

- إذا كانت $l < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة .
- إذا كانت $l > 1$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة .
- إذا كانت $l = 1$ فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة

مثال 1

1- لدينا $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$: $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 1$

ومنه السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ متقاربة حسب معيار آلمبار

2- لدينا $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$: $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

إذن لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة.

مثال 2

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ متقاربة بينما $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ متباعدة :

في الحالة الأولى لدينا : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(1+1/n)^n} = \frac{2}{e} < 1$

أما في الحالة الثانية فان : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+1/n)^n} = \frac{3}{e} < 1$

تعريف و نتيجة : (سلسلة ريمان)

نسمي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ بسلسلة ريمان

يمكن البرهان بإستعمال معيار دالمبار و النشر المحدود لدالة $x \mapsto (1-x)^{\alpha}$ لحساب نهاية النسبة وعندئذا نميز حالتين السلسلة :

i. تكون متقاربة اذا كان $\alpha > 1$

ii. و تكون متباعدة اذا كان $\alpha \leq 1$

ملاحظة :

واضح مما سبق أن اختباري دلامبير و كوشي يعتمدان في الأساس على مقارنة السلسلة المفروضة بسلسلة المتوالية الهندسية، إلا أن هذين الإختبارين لا يظهران أي حساسية تجاه السلاسل التي تتقارب بشكل أبطأ من سلسلة المتوالية الهندسية، من أجل هذه السلاسل هناك اختبارات أقوى حيث تشير هنا بشكل خاص إلى الاختبار التكاملي الذي يمكن التعرف عليه فيما يلي.

نتيجة : (معيار التكامل)

لتكن الدالة f المعرفة من $[1,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}_+$ مستمرة ومتناقصة. نضع $U_n = f(n)$

$$\sum_{n\geq 1} U_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \lim_{A\to\infty} \int_1^A f(n)\, dn \text{ موجود}$$

مثال 1

لدينا السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ نضع $a_n = \frac{1}{n^2} = f(n)$ أي

$$f:\ [1,+\propto[\longrightarrow \mathbb{R}_+\ ;\quad n \mapsto f(n) = \frac{1}{n^2}$$

f مستمرة و متناقصة و

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A f(n)\, dn = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{n^2}\, dn = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{n}\right]_1^A = 1$$

و بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة .

مثال 2

في هذا المثال نستخدم معيار التكامل لإثبات أن السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{n}\, dn = \lim_{A\to\infty} [\ln n]_1^A = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = +\propto$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

التقارب المطلق:

تعريف: نقول أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة مطلقا إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |U_n|$ متقاربة

ملاحظة :

كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة و العكس غير صحيح دوما

مثال مضاد:

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة لكن $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ متباعدة.

نتيجة : (قاعدة التقارب المطلق لكوشي)

لتكن السلسلة العددية $\sum_{n} U_n$ فإذا كانت $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|}$ موجودة بحيث: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lambda$

فإن :

1. إذا كانت $\lambda < 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كانت $\lambda > 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متباعدة.

نتيجة : (قاعدة التقارب المطلق لدالمبار)

لتكن السلسلة العددية $\sum_{n} U_n$ بحيث تكون النهاية $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$ موجودة مع $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lambda$

فإنه :

1. إذا كانت $\lambda < 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كانت $\lambda > 1$ فان السلسلة $\sum_{n} U_n$ متباعدة.

السلاسل المتناوبة :

تعريف:نسمي كل سلسلة من النوع $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 + \dots$ بالسلسلة المتناوبة بحيث حدود المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من نفس الإشارة.

مثال

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ هي سلسلة متناوبة

نتيجة : (معيار ليبنيز)

تكون السلسلة المتناوبة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ متقاربة إذا كانت

i. المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة, موجبة

ii. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

مثال 1

نعتبرالسلسلة المتناوبة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$. نضع $a_n=\frac{n}{n^2+1}$

و منه :
$$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}=\frac{n+1}{n^2+2n+2}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\frac{n}{n^2+1}$$
$$=\frac{(n+1)(n^2+1)-n(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n^3+n^2+n+1)-(n^3+2n^2+2n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$
$$=\frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$
$$=\frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\geq 0$$

نستنتج أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متناقصة .

ومن جهة أخرى : $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$

و بالتالي السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ متقاربة.

مثال 2

نعتبرالسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$. نضع : $a_n=\frac{1}{(2n-1)!}$

ومنه $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}=\frac{1}{(2n+1)(2n)}<1$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متناقصة .

و من جهة أخرى: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0$

و بالتالي السلسلة متناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ متقاربة.

مثال 3

لنأخذ السلسلة المتناوبة : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

إن هذه السلسلة تحقق شروط معيار ليبنتز وبالتالي فان هذه السلسلة متقاربة

تمارين مقترحة

تمرين1 :

أثبت أن المتتالية التي حدها العام $a_n=\frac{1+2+3+\cdots\ldots.+n}{n^2}$ لها نهاية تساوي $\frac{1}{2}$.

تمرين2:

أثبت أن المتتالية التي حدها العام :

$$a_n=\frac{1}{x^n}(1+x+x^2 \ldots \ldots.+x^n)$$

تتقارب عندما تكون $x>1$ من النهاية $\frac{x}{x-1}$.

تمرين3:

عين السلاسل المتقاربة ، والسلاسل المتباعدة في مجموعة السلاسل العددية التالية
(مستخدما من أجل ذلك ، اختبار المقارنة) :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1}/n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

تمرين4:

اعتمادا على اختبار دلامبير برهن على تقارب السلاسل العددية التالية :

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n.n\,!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.5\ldots\ldots.(3n-1)}{1.5\ldots\ldots.(4n-3)}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

تمرين5:

اعتمادا على اختبار كوشي أثبت تقارب السلاسل العددية التالية :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Ln^{n}(n+1)}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} arc\ \sin^{n} \frac{1}{n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^{n}}$

تمرين6:

عين السلاسل المتقاربة والسلاسل المتباعدة فيما يلي :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2 n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

الفصل الثامن: الدوال ذات متغيرين

1) تعاريف

الدوال ذات متغيرين حقيقيين

تعريف:

(1) $$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

(2) الدالة f ذات متغيرين حقيقيين هي الدالة f من $\mathbb{R}^2$ (أو جزء من $\mathbb{R}^2$) الى $\mathbb{R}$ ونرمز له:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y)$$

(3) لتكن f دالة بمتغيرين، مجال تعريف الدالة f (أو ميدان الدالة f) ونرمز له بـ D_f هي المجموعة: $D_f = \{(x, y),\ f(x, y) \text{ معرّفة}\}$

مثال 1:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x, y) \to \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$f(x, y)$ معرّفة إذا وفقط إذا كان: $x^2 + y^2 \neq 0$

ونعلم أنّ: $x^2 + y^2 = 0$ إذا وفقط إذا كان: $y^2 = 0$ و $x^2 = 0$ أي $y = 0$ و $x = 0$

وبالتالي:

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

مثال 2:

$$f : (x, y) \to \frac{x^2 + y^2 - 3}{x^2 + y^4 + 1}$$

$f(x, y)$ معرّفة إذا وفقط إذا كان: $x^2 + y^4 + 1 \neq 0$

ونعلم أنّ : $x^2 \geq 0$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $y^4 \geq 0$ من أجل $y \in \mathbb{R}$

إذن : $x^2 + y^4 \geq 0$ من أجل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

و لدينا : $x^2 + y^4 + 1 \geq 1$ من أجل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

و منه : $x^2 + y^4 + 1 \neq 0$ من أجل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

وبالتالي: $D_f = \mathbb{R}^2$

ملاحظات:

يمكننا تعريف الدالة المحدودة ، القيم الحدية لدوال ذات متغيرين حقيقيين كما هو معمول به في الدوال ذات متغير حقيقي.

مثال 1

لتكن $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \;;\; (x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}$

الدالة f محدودة : باستخدام المتباينة $2|ab| \le a^2+b^2$ نستنتج أن من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{2}$$

مثال 2

الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;;\; (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2+y^2$ محدودة من الأسفل بـ $(0,0)$.

بالفعل لدينا : $f(x,y) = x^2+y^2 \ge (0,0) = f(0,0)$ من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) النهايات :

تعريف : نقول أن ℓ هي نهاية الدالة f عند (a_1,a_2). و نكتب :

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = \ell$$

مثال 1..

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+xy+y^2} = 0 \quad ؛ \quad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{x^2+xy+y^2} = 1$$

مثال 2

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$ لان $x^2+y^2 \to 0$ مع $x^2+y^2 > 0$.

مثال 3

1. بين انه إذا كان x و y أعداد حقيقية لدينا: $2|xy| \le x^2+y^2$
2. لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \;;\; (x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{3x^2+x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) بين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ لدينا : $|f(x,y)| \le 4\|(x,y)\|_2$

حيث $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

b) استنتج ان f تقبل نهاية عند $(0,0)$

الحل :

1. لدينا:

$$\left(|x|-|y|\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2|xy| \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy|$$

2. نبين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ لدينا : $|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2$

يمكن كتابة العلاقة السابقة كمايلي : $|xy| \leq \dfrac{\|(x,y)\|_2^2}{2}$

و منه نستنتج ثم بإستخدام المتراجحة المثلثية :

$$|f(x,y)| \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2+\dfrac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2} \leq 4\|(x,y)\|_2$$

و منه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|=0$.

3) الاستمرار:

تعاريف :

- نقول أن الدالة $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مستمرة عند (a_1,a_2) إذا و فقط إذا كانت :

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)=f(a_1,a_2)$$.

- نقول أن الدالة $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مستمرة على X إذا و فقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من X .

مثال1

الدوال الثابتة مستمرة.

مثال 2

لتكن الدالة f معرفة على كمايلي :

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{إذا} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

و $f(x,y)=(0,0)$ إذا $(x,y)=(0,0)$.

هل الدالة f مستمرة عند $(0,0)$ ؟

الحل :.

نضع $x=y=t$ و $t\to 0$ نجد : $f(t,t)=\frac{1}{2}$

و بالتالي $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq(0,0)$ إذن الدالة f غير مستمرة عند $(0,0)$.

4) الاشتقاق :

المشتقات الجزئية:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقين y, x و $m_0(x_0,y_0)\in D_f$.

تعريف 1: إذا كانت الدالة $f_x : x\mapsto f(x,y_0)$ معرفة في جوار x_0 بحيث $(x_0,y_0)\in D_f$.

- ➢ إذا قبلت الدالة f_x الاشتقاق عند x_0 نقول أن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي x عند النقطة (x_0,y_0).
- ➢ و نرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_x' أو $\frac{\partial f}{\partial x}$ بحيث:

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

تعريف 2 : إذا كانت الدالة $f_y : y\mapsto f(x_0,y)$ معرفة في جوار y_0 بحيث $(x_0,y_0)\in D_f$.

- ➢ إذا قبلت الدالة f_y الاشتقاق عند y_0 نقول أن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي y عند النقطة (x_0,y_0).
- ➢ و نرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_y' أو $\frac{\partial f}{\partial y}$ بحيث:

$$f_y'(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

ملاحظة :

إذا وجدت المشتقات الجزئية f'_x و f'_y نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق.

قاعدة :

مشتقة الدالة f هي مشتقتها بالنسبة لأحد المتغيرين مع إبقاء المتغير الثاني ثابت .

مثال

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^4y^3$.

لدينا : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3y^3$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^4y^2$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=36$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=12$.

أمثلة

.1 لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي : $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2$.

لدينا : $f'_x(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ ، $f'_y(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$.

.2 لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي : $f:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=5x+y^3-2z^2$.

لدينا : $f'_x(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=5$ ، $f'_y(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3y^2$ ،

$$f'_z(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-4z.$$

.3 لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ كمايلي : $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$.

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-(2x+y)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2+2y^2-4x^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{-2x^2+2y^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)-(2x+y)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2-4xy-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{x^2-y^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

المشتقات الجزئية من رتب أعلى:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقين y,x تقبل الاشتقاق مرتين ، فإننا نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية كمايلي:

(1 $f''_{x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f'_x\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial x}f$

(2 $f''_{y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f'_y\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial y}f$.

(3 $f''_{xy}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f$

(4 $f''_{yx}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f'_x\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f$.

مثال

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^4y^3$ ؛ لدينا :

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3y^3 \quad ، \quad f'_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^4y^2$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial f'_y}{\partial x}(x,y)=12x^3y^2 \quad ، \quad f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial f'_x}{\partial y}(x,y)=12x^3y^2$$

نظرية شوارتز:

إذا قبلت الدالة f في جوار (x_0,y_0) مشتقات جزئية f''_{xy} و f''_{yx} مستمرة ، فهي متساوية :

$$f''_{xy}=f''_{yx}$$

مثال

لتكن الدالة fذات المتغيرين الحقيقيين x,y المعرفة على $IR_+^*\times IR_+^*$ كمايلي:

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+2x^3y^5$$

احسب $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

الحل .:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{y}+6x^2y^5$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}+10x^3y^4$ و منه :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}+6x^2y^5\right)=12xy^5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}+10x^3y^4\right)=\frac{2x}{y^3}+40x^3y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}+10x^3y^4\right)=-\frac{1}{y^2}+30x^2y^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}+6x^2y^5\right)=-\frac{1}{y^2}+30x^2y^4$$

5) القيم الحدية والنقاط الحرجة:

القيم الحدية

تعريف : لتكن f دالة ذات متغيرين x و y و $(a,b) \in D_f$:

- $f(a,b)$ **قيمة عظمى محلية** للدالة f عند النقطة (a,b) إذا وجد $r > 0$ حيث :

$$\forall (x,y) \in B\big((a,b),r\big) \;:\; f(x,y) \leq f(a,b).$$

- $f(a,b)$ **قيمة صغرى محلية** للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان يوجد $r > 0$ حيث :

$$\forall (x,y) \in B\big((a,b),r\big) \;:\; f(x,y) \geq f(a,b)$$

- $f(a,b)$ **قيمة حدية محلية** للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة (a,b).

- $f(a,b)$ **قيمة عظمى مطلقة** للدالة f عند النقطة $(,b)$ إذا كان :

$$\forall (x,y) \in D_f \;:\; f(x,y) \leq f(a,b)$$

- $f(a,b)$ **قيمة صغرى مطلقة** للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان :

$$\forall (x,y) \in D_f \;:\; f(x,y) \geq f(a,b)$$

- $f(a,b)$ **قيمة حدية مطلقة** للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان $f(a,b)$ قيمة عظمى مطلقة أو قيمة صغرى مطلقة للدالة f.

مثال

لتكن: $f(x,y) = x^2 - 3x + y^2 - 2y + 5$ ، لدينا:

$$f(x,y) = x^2 - 3x + y^2 - 2y + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - 1^2 + 5$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{9}{4} - 1 + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \frac{7}{4}$$

نعلم أنّ: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ من أجل $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = D_f$

وبالتالي من أجل $(x,y) \in D_f = \mathbb{R}^2$. :

$$f(x,y) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \frac{7}{4} \;\geq\; \frac{7}{4}$$

فإنّ : $f\left(\frac{3}{2},1\right) = \frac{7}{4}$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة $\left(\frac{3}{2},1\right)$.

مثال

لتكن : $f(x,y)=e^{x-1}+y^2+2y+4$ ؛ لدينا من أجل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$e^{x-1}>0$ حيث لا يمكنها أن تصل إلى 0 و $(y+1)^2=y^2+2y+1\geq 0$

و منه من أجل $(x,y)\in\mathbb{R}^2=D_f$.

$$f(x,y)=e^{x-1}+y^2+2y+4 \;\geq\; e^{x-1}+3> \;3 \;\;(\forall x\in\mathbb{R})$$

وبالتالي لا توجد قيم حدية للدالة f.

النقاط الحرجة:

تعريف : لتكن f دالة بمتغيرين x و y و $(a,b)\in D_f$. نقول أن (a,b) **نقطة حرجة** للدالة f إذا:

1) f لها مشتقات جزئية أولية عند (a,b) و لدينا : $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$

2) أو لا توجد $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ أو $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

مثال

أوجد النقاط الحرجة للدالة f حيث: $f(x,y)=y^2-x^2$

الحل :

f لها مشتقات جزئية أولية عند كل نقطة إذن فإنّ (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

أي: $-2x=0$ و $2y=0$

أي: $x=0$ و $y=0$

و منه $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

مثال

لتكن f حيث:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أوجد النقاط الحرجة للدالة f.

الحل :

نعلم أنّ f لها مشتقّات جزئية أولية عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نلاحظ أنّ $(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f.

في حالة $(x,y)\neq(0,0)$ فإن (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا كان وفقط إذا كان:

$$\begin{cases}\dfrac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0\\ \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y(-x^2+y^2)=0\\ x(x^2-y^2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=x^2 \text{ أو } y=0\\ y^2=x^2 \text{ أو } x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x \text{ أو } y=-x\\ x\neq0\end{cases}$$

إذن (a,a)، $(a,-a)$ هي نقط حرجة للدالة f من أجل $a\in\mathbb{R}$.

نظرية : لتكن f دالة ذات متغيرين x و y و $(a,b)\in D_f$.

إذا كان $f(a,b)$ قيمة حدية محلية للدالة f عند النقطة (a,b) فإنّ (a,b) نقطة حرجة للدالة f.

ملاحظة:

- ✓ بالعكس النقيض، إذا كانت (a,b) ليست نقطة حرجة للدالة f فإنّ $f(a,b)$ ليست قيمة حدية محلية للدالة f عند النقطة (a,b).
- ✓ وعليه للبحث عن نقطة حدية في المجموعة D_f نبحث أولا عن مجموعة النقط الحرجة التي سوف تكون بعدد منتهي و صغير ثم نبحث عن النقط الحدية في المجموعة

مثال

أوجد القيم الحدية المحلية للدالة:

$$f(x,y)=6x-4y-x^2-2y^2$$

الحل :

النقاط الحرجة:

بما أنّ f لها مشتقات جزئية أولية عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ فإنّ (x,y) نقطة حرجة إذا وفقط إذا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

أي: $6-2x=0$ و $-4-4y=0$

أي: $x=3$ و $y=-1$

و منه $(3,-1)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم الحدية المحلية: لنتحقق إن كانت هذه النقطة الحرجة نقطة حدية أم لا

لدينا: $f(3,-1)=11$ ، فإنّه من أجل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$f(x,y)-f(3,-1)=6x-4y-x^2-2y^2-11$$
$$=-[(x^2-6x+9)+2(y^2+2y+1)]$$
$$=-[(x-3)^2+2(y+1)^2]\leq 0$$

إذن $f(x,y)\leq f(3,-1)$ من أجل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

وبالتالي: $f(3,-1)=11$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f عند النقطة $(3,-1)$.

مثال

أوجد النقاط الحرجة والقيم الحدية المحلية للدالة:

$$f(x,y)=x^2-6x+y^2-4y$$

الحل :

النقاط الحرجة:

بما أنّ f لها مشتقات جزئية أولية عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ فإنّ (x,y) نقطة حرجة إذا وفقط إذا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

أي: $2x-6=0$ و $2y-4=0$

أي: $x=3$ و $y=2$

و منه $(3,2)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم الحدية المحلية: لنتحقق إن كانت هذه النقطة الحرجة نقطة حدية أم لا

لدينا: $f(3,2) = -13$ و من أجل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ لدينا:

$$f(x,y) - f(3,2) = x^2 - 6x + y^2 - 4y - (-13)$$
$$= (x-3)^2 + (y-2)^2 \geq 0$$

إذن $f(x,y) \geq f(3,2)$ من أجل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

وبالتالي: $f(3,2) = -13$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f.

مثال

أوجد النقاط الحرجة والقيم الحدية المحلية للدالة:

$$f(x,y) = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

الحل :

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

النقاط الحرجة:

نحسب الاشتقاق الجزئي عند النقطة $(0,0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{4-2\sqrt{x^2}-4}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2|x|}{x} = \begin{cases} -2; & x>0 \\ 2; & x<0 \end{cases}$$

فإنّ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ غير موجود وبالتالي $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة .

نحسب الاشتقاق الجزئي عند $(x,y) \neq (0,0)$:

لدينا $(x,y) \neq (0,0)$ نقطة حرجة للدالة f إذا :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

نرى أن كل $(x,y) \neq (0,0)$ ليست نقطة حرجة للدالة f .

وبالتالي فإنّ $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم الحدية المحلية: لنتحقق إن كانت هذه النقطة الحرجة نقطة حدية أم لا

لدينا $f(0,0) = 4$

$$f(x,y) - f(0,0) = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2} - 4 = -2\sqrt{x^2+y^2} \leq 0$$

إذن من أجل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. لدينا $f(x,y) \leq 4$

ومنه $f(0,0) = 4$ هي القيمة الحدية (عظمى) المحلية (هي مطلقة).

نظرية : لتكن f دالة بمتغيرين، مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية مستمرة عند كل نقطة من قرص مركزه (a,b) ونصف قطره $r > 0$. نعتبر الدالة :

$$g(a,b) = \frac{d^2f}{dx^2}(a,b) \times \frac{d^2f}{dy^2}(a,b) - \left(\frac{d^2f}{dxdy}(a,b)\right)^2$$

حيث (a,b) نقطة حرجة للدالة f.

1) إذا كان $g(a,b) > 0$ و $\frac{d^2f}{dx^2}(a,b) < 0$ فإنّ $f(a,b)$ **قيمة عظمى** محلية للدالة f.

2) إذا كان $g(a,b) > 0$ و $\frac{d^2f}{dx^2}(a,b) > 0$ فإنّ $f(a,b)$ **قيمة صغرى** محلية للدالة f.

3) إذا كان $g(a,b) < 0$ فإنّ (a,b) **نقطة سرجية** للدالة f.

ملاحظة :

(1) يمكن كتابة

$$g(a,b) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

والمصفوفة تسمى هاسيان *(Hessien)* للدالة f عند النقطة (a,b).

(2) إذا كان f لها مشتقات من الرتبة الثانية مستمرة عند النقطة (a,b) فإنّ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

(3) إذا كان $g(a,b) > 0$ فإنّ:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ أو $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$

مثال:

إذا كانت : $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$

1) أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة.

2) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك السرجية إن وجدت لهاته الدالة.

الحل:

f هي دالة لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.

(1 (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان: $\frac{df}{dy}(a,b) = \frac{df}{dx}(a,b) = 0$

لدينا : $\begin{cases} x^2 - 1 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \text{ أو } y = 0 \end{cases}$

وعليه فإنّ كل النقاط الحرجة للدالة f هي : $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

(2 لدينا :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}(a,b) & \frac{d^2f}{dydx}(a,b) \\ \frac{d^2f}{dxdy}(a,b) & \frac{d^2f}{dy^2}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

وعليه : $g(x,y) = 4(x^2 - y^2)$

عند النقاط $(0,1)$, $(0,-1)$:

لدينا : $g(0,1) = g(0,-1) = -4 < 0$

وعليه فإنّ $(0,1)$, $(0,-1)$ نقاط سرجية للدالة f.

عند النقاط $(1,0)$, $(-1,0)$:

لدينا $g(1,0) = g(-1,0) = 4 > 0$ و $\frac{d^2f}{dx^2}(1,0) = 2 > 0$

وعليه : $f(1,0) = -\frac{2}{3}$ قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(1,0)$،

ولدينا $g(-1,0) = 4 > 0$ و $\frac{d^2f}{dx^2}(-1,0) = -2 < 0$

وعليه : $f(1,0) = \frac{2}{3}$ قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة $(-1,0)$

تمارين مقترحة

تمرين 1 :

أحسب f''_{x^2} ، f''_{y^2} ، f''_{xy} f''_{yx} للدوال التالية :

-1 $f(x,y)=\ln(xy)$.

-2 $f(x,y)=x^2e^{3y}$.

-3 $f(x,y)=e^{xy}$.

تمرين 2 :

لتكن الدالة f ذات متغيرين حقيقيين معرفة كمايلي: حيث:

$$f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$$

1) أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة.

2) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لهاته الدالة.

تمرين 4 :

اثبت أن $f''_{xy}=f''_{yx}$ لكل مايلي :

.1 $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$.

.2 $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

.3 $f(x,y)=e^{-3x}\sin(3y)$

تمرين 5 :

باستخدام $f''_{xy}=f''_{yx}$ أوجد قيمة الثابت a و التي توجد من أجله الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$f'_y=x^2+6xy \quad \text{و} \quad f'_x=axy+3y^2$$

تمرين 6 :

لتكن الدالة f ذات متغيرين حقيقيين معرفة كمايلي: حيث:

$f(x,y)=x^4+y^2$

أوجد النقاط الحرجة للدالة f.

المراجـــــع

1) المراجع العربية :

1. سعود محمود، التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
2. بابا حامد ،محاضرات في التحليل ، ديوان المطبوعات الجامعية، 1988.
3. ق. علاب، عناصر من التحليل الرياضي، التوابع لمتغير واحد، ترجمة أ.خ.سعد الله، ديوان المطبوعات
4. بن عيسى لخضر ، التحليل الرياضي ، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
5. أ.علي حميدة, التحليل دروس وتمارين محلولة الجزء 2-3، جامعة منتوري قسنطينة.

2) المراجع الأجنبية:

1. Bass J., Mathématiques Analyse, Tome II, Masson et Cie, 1972
2. Tous les exercices d'analyse PC-PSI Par Pr EL-HAJ LAAMRI ; Pr PHILIPPE CHATEAUX , Pr GÉRARD EGUETHER , Pr ALAIN MANSOUX , Pr DAVID RUPPRECHT et Pr LAURENT SCHWALD.
3. Analyse Mathématique 1 UMONS université de Mons.
4. Medjadi D.E., Boukra M., Djadane A., Sadallah B.-K., Analyse Mathématique, Tome1, O.P.U. 1996
5. Boukra M., Djadane A., Medjadi D. & Sadallah B.-K. : analyse mathématique, Office des Publications Universitaires, Alger, 1992.
6. Analyse DEUG Sciences 2^{e} année G. A. Sedogbo ; Docteur en mathématiques.
7. Calcul des primitives, Bernard Ycart; Université Joseph Fourier, Grenoble.
8. Cours d'Analyse1; Laurent Schwartz-Professeur à l'école polytechniques et à la Faculté des sciences de Paris HERMANN,Paris 1967.
9. problèmes d'analyse I (nombres réels,suites et séries)exercices corrigés WieslawaJ, Kaczor et MariaT, Nowak. 2008, EDP Sciences,
10. problèmes d'analyse III (intégration) exercices corrigés WieslawaJ, Kaczor et MariaT, Nowak. 2008, EDP Sciences.
11. Mathématiques en économie-gestion , Stéphane rossignol - openbook DUNOD 2015.