الجمهـوريـة الجـزائريـة الديمقــراطيـة الشعبيـة

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون – تيارت –

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الإقتصادية

مطبوعـــــة

أعمال موجهة لمقياس الرياضيات2

تحتوي على:

تذكير مختصر بالدروس

تمارين محلولة وأخرى مقترحة

حلول بعض إمتحانات السنوات الماضية

موجهـة لطلبـــة

جذع مشترك علوم اقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من إعداد

د.سويد محمد السعيد

السنة الجامعية 2020 /2021

الفهـــــــرس

مقدمـــــــــة

يعد الجبر الخطي الذي هو أحد فروع الجبر الحديث أداة ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والإحصاء وعلم الاجتماع وغيرها من العلوم وقد أصبح الجبر الخطي في السنوات الأخيرة يشكل جزءاً أساسياً من الخلفية الرياضية المطلوبة في كثير من العلوم.

تعتبر المصفوفات من اهم المحاورفهي تلعب دوراً هاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى وضع الحلول لهذه العلاقات، فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها مجالات تطبيقية عديدة فى الاقتصاد والإحصاء وبحوث العمليات وغيرها من العلوم الأخرى.

يمكن استخدام هذه المطبوعة كمقرر منهجي لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير لمقياس الرياضيات 2 وكمصدر مهم للعلوم ألأخرى ومن هذا كان التوجه للإسهام بهذا الجهد المتواضع نضعه بين أيدي طلبتنا الأعزاء ولرفد المكتبة العربية بإضافة جديدة. هذه المطبوعة تحتوي على ستتة فصول

الفصول الخمسة الأتية:

الفصل الأول: الفضاءات الشعاعية

الفصل الثاني: التطبيقات الخطية

الفصل الثالث: المصفوفات والمحددات

الفصل الرابع: جمل المعادلات الخطية

الفصل الخامس: القيم الذاتية والأشعة الذاتي.

يشمل كل فصل على تذكير بالدرس وتمارين محلولة وأخرى مقترحة.

وأخيراً يتضمن **الفصل السادس** حلول بعض نماذج امتحانات للسنوات الماضية ونمادخ أخرى مقترحة حتى يتمكن الطالب من التحضير الجيد للامتحانات.

الرموز المستعملة في هذه المطبوعة

$\Longrightarrow$ يسمى **استلزاما** (إذا كان فإن)

$\Longleftrightarrow$ يسمى **تكافؤا** منطقيا (إذا وفقط إذا)

$\forall$ **تعني:** (مهما يكن) او(من اجل كل عنصر)

$\exists$ **تعني:** يوجد على الأقل

$\exists!$ **تعني:** يوجد عنصر وحيد

$CardE$ **عدد** عناصر E

$\operatorname{Im} f$ **صورة** التطبيق f

$\operatorname{Ker} f$ **نواة** التطبيق f

$E_1 \oplus E_2$ **المجموع المباشر** لـ E_1 و E_2

$\dim_{\mathbb{k}} E$ **بُعد** الف.ش. E على الحقل $\mathbb{k}$

$M_{mn}(\mathbb{k})$ **مجموعة المصفوفات** ذات سطر m و n عمود عناصرها من $\mathbb{k}$

A^t **منقول** المصفوفة A

A^{-1} **مقلوب** المصفوفة المربعة A

$\det A$ **محدد** المصفوفة المربعة A

$\det A_{ij}$ **محدد** المصفوفة الناتجة **من حذف** السطر رقم i والعمود رقم j في A

$P_A(\lambda)$ **كثير الحدود المميز** للمصفوفة المربعة A

E_λ **الفضاء الشعاعي الذاتي** المرفق بالقيمة الذاتية λ

$rg(A)$ **مرتبة** المصفوفة $A \in M_{mn}(\mathbb{k})$

ℓ_i **السطر** رقم i

C_j **العمود** رقم j

$\wedge$ *معناها* " **و** "

$\vee$ *معناها* " **أو** "

الفصل الأول: الفضاءات الشعاعية

تذكير بالدرس

الفضاء الشعاعي الجزئي

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ و F مجموعة جزئية من E.

نقول أن F فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا تحققت الشروط الأتية:

$$1)\ 0_E \in F$$
$$2)\forall x, \mathrm{y} \in F,\ x+y \in F$$
$$3)\forall x \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{k},\ \ \alpha x \in F$$

أو بطريقة أخرى:

$$1)\ 0_E \in F$$
$$2)\forall x, \mathrm{y} \in F,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k},\ (\alpha x + \beta y) \in F$$

ملاحظـــــــة: $\{0_E\}$ و E فضاءان شعاعيان جزئيان من E

المزج الخطي

تعريف: ليكن E ف.ش. على الحقل التبديلي $\mathbb{k}$ ، n من IN^* وعائلة الأشعة $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ من E ، ولنعتبر عائلة السلميات $\{\lambda_i\}_{1\le i\le n}$ من الحقل K ، عندئذ:

- يدعى الشعاع $u = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$ **مزجًا خطيا** للأشعة $\{u_i\}_{1\le i\le n}$.

الإستقلال الخطي

تعريف: ليكن n من IN^*. نقول عن عائلة $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ من عناصر الـ ف.ش. E

على الحقل التبديلي $\mathbb{k}$ إنها **مستقلة خطيا** أو إنها جملة **حرة**، إذا كان من أجل كل عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{1\le i\le n} \subseteq \mathbb{k}$ لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.u_i = 0_E \Rightarrow \alpha_i = 0_{\mathbb{k}} \quad \forall i : 1 \le i \le n$$

(0_E و $0_{\mathbb{k}}$ يمثلان صفر الف.ش. E وصفر الحقل التبديلي $\mathbb{k}$ على الترتيب).

ملاحظـــة: إذا لم تكن الجملة $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ مستقلة خطيا نقول أنها مرتبطة خطيا

المجموعة المولدة

نقول أن المجموعة $F=\{u_1,u_2,.......,u_n\}$ مولدة لــ E إذا وفقط إذا:

يمكن كتابة كل شعاع من E بشكل **مزج خطي** لأشعة F **أي:**

$$\forall u \in E,\ \exists \beta_1,\beta_2,...,\beta_n \in \mathbb{k} \,/\, u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+......+\beta_n u_n$$

الأساس والبــعد

الأساس: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ وليكن $F=\{u_1,u_2,......,u_n\}$ مجموعة جزئية من E نقول أن F أساس للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الأتيان:

1) **F مولدة لــ E**

2) **F مستقلة خطيا**

البـعـد: نسمي عدد أشعة الأساس F $CardF$ **بعــد** الفضاء الشعاعي E

ونرمز له بالرمز $\dim_{\mathbb{k}} E$ **أو** بإختصار $\dim E$ ونصطلح $\dim\{0\}=0$

ملاحـــــظة: إذا كان E فضاء شعاعي ذو بعد منته أي $\dim E=n$ فإن :

F أساس للفضاء الشعاعي E $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} CardF=\dim E \\ F \text{ مستقلة خطيا أو مولدة لــ } E \end{array} \right.$

مبرهنة: ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته أي $\dim E=n$ على الحقل $\mathbb{k}$ وليكن F فضاءا شعاعيا جزئيا من E $(F\subseteq E)$ فإن:

1) $\dim F \le \dim E$

2) $(\dim F=\dim E) \Rightarrow E=F$

مبرهنة: E_1 و E_2 ف.ش.ج. من الف.ش. E على الحقل $\mathbb{k}$ فإن:

$$\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1\cap E_2)$$

مبرهنة: E_1 و E_2 و فضاءين شعاعيين على الحقل $\mathbb{k}$

إذا كان: $\dim E_1=n$ و $\dim E_2=m$

فإن: $\dim(E_1\times E_2)=\dim E_1+\dim E_2=n+m$

تعاريف: يكن E_1 و E_2 ف.ش.ج من الف.ش E على الحقل $\mathbb{k}$

تقاطع فضائين شعاعيين جزئيين: $E_1\bigcap E_2=\{\, x\in E:\ x\in E_1\wedge x\in E_2 \,\}$

اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين: $E_1\bigcup E_2=\{\, x\in E:\ \ x\in E_1\vee x\in E_2 \,\}$

مجموع فضائيين شعاعيين: $E_1+E_2=\{\, x+y\ /\ x\in E_1\ \ y\in E_2 \,\}$

للمجموع المباشر لـ E_1 و E_2 بالرمز $E_1\oplus E_2$ **ونكتب:** $E=E_1\oplus E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} E_1\bigcap E_2=\{0_E\} \\ E=E_1+E_2 \end{cases}$

ونقول حينئذ إن E_1 هو **فضاء إضافي** لـ E_2 أو E_2 هو **فضاء إضافي** لـ E_1 .

مبرهنة: تقاطع فضاءين شعاعيين جزئيين و مجموع فضائيين شعاعيين جزئيين و **المجموع المباشر** لـ فضائيين شعاعيين جزئيين من ف.ش. E هو كذلك ف.ش.ج. من E .

ملاحظة : اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين **ليس** بشكل عام فضاءا شعاعيا جزئيا

نتيجة : $\dim(E_1\oplus E_2)=\dim E_1+\dim E_2$

تمارين محلولة

التمرين الأول: لتكن المجموعة التالية: $F=\{e_1(1,1,1),e_2(1,-1,1),e_3(1,1,0)\}$

بين أن F تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$

الحـــــــــل:

بمأن $CardF=\dim\mathbb{R}^3=3$ يكفي أن نبين أن الأشعة $e_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};e_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};e_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ مستقلة خطيا

يكفي أن نبين $\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=0\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha-\beta+\gamma=0\\\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه المجموعة $F=\left\{e_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};e_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};e_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$

التمرين الثاني:

ليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ معرفين كمايلي:

$$E_1=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R}\}\ ,\ E_1=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\in\mathbb{R}\}$$

هل $E_1\cup E_2$ ليس فضاءا شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^2$ ؟

لدينا: $E_1\cup E_2=\{v/v\in E_1 \quad أو \quad v\in E_2\}$

ليكن $v_1(3,0)\in V_1\Rightarrow v_1\in E_1\cup E_2$ و $v_2(0,2)\in V_2\Rightarrow v_2\in E_1\cup E_2$

لكن $v_1+v_2=(3,0)+(0,2)=(3,2)\notin E_1\cup E_2$

ومنه $E_1\cup E_2$ ليس فضاءا شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^2$

التمرين الثالث:

من بين المجموعات التالية، عين تلك التي تمثل ف.ش.ج من الف.ش. الحقيقي

$\mathbb{R}^3$ مع التبرير:

$$E_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=a,\ a\in\mathbb{R}^*\right\}$$
$$E_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x\le 0\right\}$$
$$E_3 = \left\{(1,y,z) \,/\, y,z\in\mathbb{R}\right\}$$
$$E_4 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=2y, z=0\right\}$$
$$E_5 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$$
$$E_6 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\right\}$$

الحـــــــــــل :

$$E_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=a,\ a\in\mathbb{R}^*\right\}$$

نلاحظ أن الشرط الأول غير محقق $(0,0,0)\notin E_1$ إذن E_1 ليست فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$

$$E_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x\le 0\right\}$$

الشرط الأول محقق لأن : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)\in E_2$

الشرط الثالث غير محقق لأن : نأخذ مثلا $X=(-3,2,1)$ و $\alpha = 2$

عندئذ $\alpha X = -2(-3,2,1) = (6,4,-2)\notin E_2$

ومنه E_2 ليست فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$

$$E_3 = \left\{(1,y,z) \,/\, y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)\notin E_3$ إذن E_3 ليست فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$

$$E_4 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=2y, z=0\right\}$$

1) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)\in E_4$

2) $\forall X=(x,y,z),\ Y=(x',y',z')\in E_4,\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha X+\beta\, Y\in E_4$

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x'+y'+z')$$
$$=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z')$$
$$=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$$

$\alpha X+\beta Y\in A\Leftrightarrow \alpha x+\beta x'=2(\alpha y+\beta y')$ و $\alpha z+\beta z'=0$

بما أن:

$$\alpha x+\beta x'=2\alpha y+2\beta y'=2(\alpha y+\beta y')$$

و $\alpha z+\beta z'=\alpha\times 0+\beta\times 0=0$

و منه $\alpha X+\beta Y\in E_4$

ومنه D فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

$$E_5=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$$

الشرط الثالث غير محقق لأن : نأخذ مثلا $X=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ و $\alpha=3$

عندئذ $\alpha X=3(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=(1,1,1)$ و $1^2+1^2+1^2=3>1$ و منه $\alpha X\notin E_5$ إذن E_5 ليست فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$

$$E_6=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$$

نتحقق من الشرطين :

1) $0+0+0=0\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in A$

2) $\forall X=(x,y,z),\ Y=(x',y',z')\in A,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow\ \alpha X+\beta\ Y\in A$

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x'+y'+z')$$
$$=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z')$$
$$=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$$

$$\alpha X+\beta Y\in A\Leftrightarrow \alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z'=0$$

بما أن:

$$\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z'=\alpha(x+y+z)+\beta(x'+y'+z')$$
$$=\alpha\times 0+\beta\times 0$$
$$=0$$

إذن $\alpha X+\beta Y\in A$

ومنه E_6 فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

التمرين الرابع:

من بين المجموعتين التاليتين، عين تلك التي تمثل ف.ش.ج من الف.ش. الحقيقي

$\mathbb{R}^4$ مع التبرير:

$$E_1=\left\{\ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=z\ \right\}$$
$$E_2=\left\{\ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+z=1\ \right\}$$

الحــــــــــل:

$E_1=\left\{\ (x,y,x,t) : x,y,t\in\mathbb{R}\ \right\}$ هو ف.ش.ج. من $\mathbb{R}^4$ ، **إذ أن:**

الشرط الأول محقق لأن : $0_{\mathbb{R}^4}=(0,0,0,0)\in E_1$

ولدينا: $\forall(x,y,z,t),\ (x',y',z',t')\in E_1,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R};$

$$\alpha\cdot(x,y,z,t)+\beta\cdot(x',y',z',t')=\alpha\cdot(x,y,x,t)+\beta\cdot(x',y',x',t')$$
$$=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha x+\beta x',\alpha t+\beta t')\in E_1$$

$E_2=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+z=1\right\}$ ليس ف.ش.ج. من $\mathbb{R}^4$ ،

إذ أنه مثلا **من أجل:** $(x,y,z,t)=(0,5,1,-3)\in E_2$ و

$(x',y',z',t')=(-1,7,2,3)\in E_2$ و $\alpha=2\in\mathbb{R}$ و $\beta=1\in\mathbb{R}$ لكن

$$\alpha\cdot(x,y,z,t)+\beta\cdot(x',y',z',t')=2\cdot(0,5,1,-3)+1\cdot(-1,7,2,3)$$
$$=(0-1,10+7,2+2,-6+3)$$
$$=(-1,17,4,-3)\notin E_2$$

التمرين الخامس: لتكن المجموعتين الأتيتين:

$$V_1=\{(0,y,z)/x,y\in\mathbb{R}\}\ ,\quad V_2=\{(x,0,z)/x,z\in\mathbb{R}\}$$

1) بين أن كل من V_1 و V_2 يشكل فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$

2) أوجد $V=V_1\cap V_2$ ثم بين أن V يشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

3) تحقق من أن $V_1\cup V_2$ ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

الحـــــــــــل:

1) إثبات أن V_1 فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

1) **الشرط الأول** محقق لأن : $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in V_1$

الشرط الثاني $\forall X=(0,y,z),\ Y=(0,y',z')\in V_1,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha X+\beta\,Y\in V_1$

$$\begin{aligned}\alpha X+\beta Y&=\alpha(0,y,z)+\beta(0+y'+z')\\&=(0,\alpha y,\alpha z)+(0,\beta y',\beta z')\\&=(0,\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')\in V_1\end{aligned}$$

و منه $\alpha X+\beta Y\in V_1$

ومنه V_1 فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

وبنفس الطريقة نثبت أن V_2 فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

2) إيجاد $\mathrm{V}=\mathrm{V}_1\cap\mathrm{V}_2$

$$X\in V\Leftrightarrow X\in V_1\ \text{و}\ X\in V_2$$
$$X\in V_1\Leftrightarrow X=(0,y,z),\ \mathrm{y,z}\in\mathbb{R}$$
$$X\in V_2\Leftrightarrow X=(x,0,z),\ \mathrm{x,z}\in\mathbb{R}$$
$$X\in V_1\cap V_2\Rightarrow X=(0,0,z),\ \mathrm{z}\in\mathbb{R}$$

ومنه $V_1\cap V_2=\{(0,0,z),\ \ \mathrm{z}\in\mathbb{R}\}$

وبنفس الطريقة السابقة نثبت أن $V_1\cap V_2$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

3) التحقق من أن $\mathrm{V}_1\cup\mathrm{V}_2$ ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

نأخذ مثال مضاد أي نأخذ $X,Y\in V_1\cup V_2$ و نجد $X+Y\notin V_1\cup V_2$

نأخذ مثلا $X=(0,1,1)\in V_1\bigcup V_2$ و $Y=(2,0,2)\in V_1\bigcup V_2$

عندئذ $X+Y=(2,1,2)\not\in V_1\bigcup V_2$ ومنه الشرط الثاني غير محقق

إذن : $V_1\cup V_2$ ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

التمرين السادس:

ليكن V_1 و V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفين كما يلي:

$$V_1=\{(x,y,z)/x=-2y,y=z\}\qquad V_2=\{(x,y,z)/y+z=0\}$$

1) أوجد أساس لكل من V_1 و V_2

2) أوجد أساس وبعد V_1+V_2

الحـــــــــــل

1) إيجاد أساس لكل من V_1 و V_2

لدينا $V_1=\{(x,y,z)/x=-2y,y=z\}$

$$\begin{aligned} X=(x,y,z)\in V_1 &\Leftrightarrow x=-2y,\ y=z\\ &\Leftrightarrow X=(-2y,y,y)\\ &\Leftrightarrow X=y(-2,1,1)\end{aligned}$$

ومنه المجموعة $\{e_1(-2,1,1)\}$ مولدة لـ V_1 وبما أنها تتألف من شعاع واحد فهو مستقل خطي إذن فهي تشكل أساس لـ V_1

بنفس الطريقة لدينا $V_2=\{(x,y,z)/y+z=0\}$

$$\begin{aligned} X=(x,y,z)\in V_2 &\Leftrightarrow x+y=0\\ &\Leftrightarrow x=-y\\ &\Leftrightarrow X=(x,-z,z)\\ &\Leftrightarrow X=x(1,0,0)+z(0,-1,1)\end{aligned}$$

ومنه المجموعة $\{e_2(1,0,0),e_3(0,-1,1)\}$ مولدة لـ V_2

$\{e_2, e_3\}$ مستقلان خطيا $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه $\{e_2(1,0,0), e_3(0,-1,1)\}$ مستقلان خطيا

إذن $\{e_2(1,0,0), e_3(0,-1,1)\}$ تشكل أساس لـ V_2

1) إيجاد أساس وبعد $V_1 + V_2$

$$X \in V_1 + V_2 \Rightarrow X = X_1 + X_2 \setminus X_1 \in V_1, X_2 \in V_2$$

إذن واضح أن الأشعة $\{e_1(-2,1,1), e_2(1,0,0), e_3(0,-1,1)\}$ مولدة لـ $V_1 + V_2$

يبقى التأكد من الإستقلال الخطي

$\{e_1, e_2, e_3\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 0 \ ....(1) \\ \alpha - \gamma = 0 \ ....(2) \\ \alpha + \gamma = 0 \ ....(3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد $\alpha = 0$ بالتعويض بقيمة α في (1) و (2) نجد $\alpha = \beta = \gamma = 0$

إذن الأشعة $\{e_1(-2,1,1), e_2(1,0,0), e_3(0,-1,1)\}$ مستقلان خطيا

وبالتالي فهي تشكل أساس لـ $V_1 + V_2$ ومنه $\dim(V_1 + V_2) = 3$

التمرين السابع:

لتكن المجموعة التالية: $F = \{e_1(1,1,1), e_2(1,-1,1), e_3(1,1,0)\}$

بين أن F تشكل أساسا لــ $\mathbb{R}^3$

الحـــــــل :

بماأن $CardF=\dim\mathbb{R}^3=3$ يكفي أن نبين أن الأشعة $e_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};e_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};e_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ مستقلة خطيا

بما أن الأشعة $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$

ومنه المجموعة $F=\left\{e_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};e_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};e_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ تشكل أساس لـ$\mathbb{R}^3$

التمرين الثامن:

لنعتبر في الف.ش. الحقيقي IR^4 الف.ش.ج.:

$$E_1=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\ v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\quad E_2=\left\{w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ w_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

1. أوجد $\dim E_1$ و $\dim E_2$.
2. أوجد أساسًا لـ (E_1+E_2).
3. استنتج $\dim(E_1\cap E_2)$ ثم أوجد أساسًا لـ $(E_1\cap E_2)$.
4. هل $IR^4=(E_1\oplus E_2)$ ؟ برر الإجابة.

الحـــــــــل:

1. لدينا فرضا $E_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ ، ولنختبر الاستقلال الخطي للأشعة v_1,v_2,v_3 في IR^4 :

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in IR$ بحيث $\alpha.v_1+\beta.v_2+\gamma.v_3=0_{\mathbb{R}^4}$ ومنه:

$$\alpha.\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma.\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

وهو ما يكافئ $\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta=0\\ \beta+\gamma=0\\ \gamma=0\end{cases}$ ، أي أن $\alpha=\beta=\gamma=0$ ،

إذن الجملة $\{v_1,v_2,v_3\}$ مستقلة خطيا في IR^4 .

ومنه $\dim E_1=\{v_1,v_2,v_3\}=3$.

ولدينا فرضًا $E_2=\{w_1,w_2\}$ ، ولنختبر الاستقلال الخطي للشعاعين

w_1,w_2 في IR^4 : ليكن $\alpha,\beta\in IR$ بحيث

$$\alpha.w_1+\beta.w_2=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\alpha.\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

وهو ما يكافئ $\begin{cases}\alpha=0\\ 2\beta=0\\ \alpha+\beta=0\\ \beta=0\end{cases}$ أي أن $\alpha=\beta=0$ ، إذن الجملة $\{w_1,w_2\}$ مستقلة خطيا في IR^4 .

ومنه $\dim E_2=\{w_1,w_2\}=2$.

2. إيجاد أساس لـ(E_1+E_2) : ليكن $x\in(E_1+E_2)$ ، إذن $x=x_1+x_2$ حيث:

$x_1\in E_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ و $x_2\in E_2=\{w_1,w_2\}$ ، أي أنه توجد خمسة أعداد $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\delta$ حقيقية

بحيث: $x=\alpha.v_1+\beta.v_2+\gamma.v_3+\lambda.w_1+\delta.w_2$

وبما أنه من السهل التحقق من أن:

فإن: $x=(\alpha+\delta).v_1+(\beta+\delta).v_2+(\gamma+\delta).v_3+(\lambda-\delta).w_1$.

ولكون الجملة $\{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ مستقلة خطيا في الف.ش. الحقيقي IR^4 ، فبالتالي ينتج أن الجملة $\{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ تشكل أساسًا لـ (E_1+E_2)،

أي أن $(E_1+E_2)=\{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ ، و $\dim(E_1+E_2)=4$

(وهذا يعني $(E_1+E_2)=IR^4$).

3 . حساب $\dim(E_1 \cap E_2)$:

لدينا $\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1 \cap E_2)$

وبالتالي $\dim(E_1 \cap E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1+E_2)=3+2-4=1$.

إيجاد أساس لـ$(E_1 \cap E_2)$: لكون $\dim(E_1 \cap E_2)=1$، فإنه يمكن اعتبار كل جملة مكونة من شعاع وحيد غير معدوم من $(E_1 \cap E_2)$ كأساس لهذا الفضاء.

يمكن التحقق بسهولة أن: $\underbrace{v_1+v_2+v_3}_{\in E_1}=\underbrace{w_1+w_2}_{\in E_2}$ ، إذن:

الشعاع $v_1+v_2+v_3=w_1+w_2=u \in (E_1 \cap E_2)$ غير معدوم و بالتالي:

$(E_1 \cap E_2)=\{u\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$، والجملة $\{u\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ تشكل أساسا لـ $(E_1 \cap E_2)$.

4. $IR^4 \neq (E_1 \oplus E_2)$ لأن $E_1 \cap E_2=\{u\} \neq \{0_E\}$

التمرين التاسع:

ما هي قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها:

يكون الشعاع $w=\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}$ مزجا خطيا للشعاعين $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ و $v=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$؟

الحـــــــل:

يكون الشعاع $w=\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}$ مزجا خطيا للشعاعين $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ و $v=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

إذا وفقط إذا وُجد عددان حقيقيان α و β بحيث: $\alpha u+\beta v=w$

يعني $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha+\beta=1............(1)\\2\alpha+\beta=2...........(2)\\3\alpha-\beta=m..........(3)\end{cases}$

بحل المعادلتين (1) و(2) نجد $\alpha=1$ و $\beta=0$ وبالتعويض بقيمة α و β

في (3) نجد $m=3$

التمرين العاشر:

ما هي قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها:

يكون الشعاع $\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}$ مزجا خطيا للشعاعين $\begin{pmatrix}1\\2m\\3\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\1\\-m\end{pmatrix}$؟

الحل: يكون الشعاع $\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}$ مزجا خطيا للشعاعين $\begin{pmatrix}1\\2m\\3\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\1\\-m\end{pmatrix}$ إذا وفقط إذا وُجد عددان

حقيقيان t و t' بحيث: $\begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}=t.\begin{pmatrix}1\\2m\\3\end{pmatrix}+t'.\begin{pmatrix}1\\1\\-m\end{pmatrix}$ أي أن: $\begin{cases}t+t'=1\\2tm+t'=2\\3t-mt'=m\end{cases}$

وهو ما يكافئ القول إن: $\begin{cases}t+t'=1\\t(2m-1)=1\\t(3+2m^2)=3m\end{cases}$

إذا كان $m\neq\frac{1}{2}$: في هذه الحالة، نحصل على أن m يحقق المعادلة $4m^2-3m-3=0$ ، وأن

$t=\frac{1}{2m-1}$ حيث $t+t'=1$. وبالتالي إما أن:

$m=\frac{3+\sqrt{57}}{8}$ و $t=\frac{4}{-1-\sqrt{57}}$ و $t'=\frac{-5-\sqrt{57}}{-1-\sqrt{57}}$.

أو $m=\frac{3-\sqrt{57}}{8}$ و $t=\frac{4}{-1+\sqrt{57}}$ و $t'=\frac{-5+\sqrt{57}}{-1+\sqrt{57}}$.

الخلاصة:

قيم العدد الحقيقي m المطلوبة هي: $\frac{3-\sqrt{57}}{8}$ و $\frac{3+\sqrt{57}}{8}$.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

من بين المجموعات التالية، عين تلك التي تمثل ف.ش.ج من الف.ش.

الحقيقي IR^4 مع التبرير:

.1 $E_1 = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \}$.

.2 $E_2 = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z = 0 \}$.

.3 $E_3 = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0 \}$

.4 $E_4 = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : xz = 0 \}$

.5 $E_5 = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \}$

ب) في حالة ما إذا كانت المجموعة E_i $(1 \le i \le 5)$ هي ف.ش.ج.

من $\mathbb{R}^4$ ، فعين $\dim E_i$.

التمرين الثاني:

ليكن E الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ والمولد بواسطة الأشعة

$$v_1(2,1,3,1)\ ,\ v_2(1,2,0,1)\ ,\ v_3(-1,1,-3,0)$$

أوجد أساس وبعد E

التمرين الثالث:

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ نعتبر الأشعة: $v_1(1,1,-1)\ ,\ v_2(2,1,3)\ ,\ v_3(3,2,2)$

1) هل الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا ؟

2) إستنتج دون حساب أن الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ ليست مولدة لـ $\mathbb{R}^3$

3) ليكن F الفضاء الشعاعي المولد بـ $\{v_1, v_2, v_3\}$

a) عين أساس لـ F

b) أكمل أساس F للحصول على أساس لـ $\mathbb{R}^3$

التمرين الرابع:

لتكن المجموعة التالية: $F=\{e_1(1,1,1),e_2(1,2,3),e_3(2,-1,1)\}$

بين أن F تشكل أساسا لــ $\mathbb{R}^3$

التمرين الخامس:

لتكن المجموعة التالية: $F=\{e_1(1,1,2,1),e_2(1,-1,0,1),e_3(0,0,-1,1),e_4(1,2,2,0)\}$

1) بين أن المجموعة F تشكل أساس لــ $\mathbb{R}^4$

2) أوجد إحداثيات الشعاع $u(1,1,1,1)$ بالنسبة لهذا الأساس.

التمرين السادس:

لتكن المجموعة $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\right\}$

1) تحقق أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

2) أوجد أساس لـ E ثم $\dim E$

3) أعط مكمل لـ E في $\mathbb{R}^3$

التمرين السابع:

نعرف في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\{e_1,e_2,e_3\}$ الأشعة:

$$v_1=e_1+e_3\ ,\ v_2=e_2+2e_3\ \ ,\ v_3=-e_1+e_2$$

1) بين أن المجموعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ تشكل أساس لــ $\mathbb{R}^3$

2) عين إحداثيات الشعاع $v(1,-2,3)$ بالنسبة للأساس $\{v_1,v_2,v_3\}$

التمرين الثامن:

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ المعرف على الحقل $\mathbb{R}$ نعتبر المجموعة :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x+3z=y,\ \mathrm{z=2t}\right\}$$

1) أثبت أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^4$

2) أوجد بعد F

3) ماهو بعد G الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بـــ: $\{u_1(1,-1,3,0),\ u_2(0,0,1,-2)\}$

4) أثبت أن $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

التمرين التاسع:

أي من هذه المجموعات يمثل ف.ش.ج. من $E = IR^3$ ؟ برر الإجابة:

.1 $E_1' = \left\{(a,b,a+b) \in E:\quad (a,b)IR^2\right\}$

.2 $E_2' = \left\{(a^2,b^2,a^2+b^2) \in E:\quad (a,b) \in IR^2\right\}$

.3 $E_3' = \left\{(a+1,b-1,a+b) \in E:\quad (a,b) \in IR^2\right\}$

.4 $E_4' = \left\{(a,b,1) \in E:\quad (a,b) \in IR^2\right\}$

.5 $E_5' = \left\{(|a|,|b|,0) \in E,\quad (a,b) \in IR^2\right\}$

الفصل الثاني: التطبيقات الخطية

تذكير بالدرس

التطبيق الخطي

تعريف: E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K و f تطبيق من E نحو F

f **خطـــي** $\Leftrightarrow$ $$\begin{cases} 1)\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ 2)\forall x \in E, \forall \alpha \in K,\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

أوبطريقة أخرى

f **خطي** $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

نواة وصورة تطبيق خطي

f تطبيق خطي من E نحو F

نواة f **:** $Kerf = \{x \in E / f(x) = o_F\} \subset E$

صورة f **:** $\operatorname{Im} f = \{f(x) \in F / x \in E\} \subset F$

ملاحظة: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K و f

تطبيق خطي من E نحو F فإنه لدينا:

* f **متباين** $\Leftrightarrow Kerf = \{0_E\}$

* f **غامر** $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$

* f **تقابلي** $\Leftrightarrow$ **(** f **متباين وغامر)**

* إدا كان f تقابلي فهو يقبل تطبيق عكسي نرمز له بالرمز f^{-1} وهو معرف من F نحو E

نظرية الأبعاد

إذا كان E ف.ش بعده منته و E' ف.ش كيفي و $f: E \to E'$ تطبيق خطي فإن :

$$\dim E = \dim Kerf + \dim \operatorname{Im} f$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

f تطبيق معرف كما يلي:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto f(x,y)=x-y\end{aligned}$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$

الحــل

1) لإثبات أن f خطي يكفي أن نبين

$$\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

$$\begin{aligned}f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) &= f((\alpha x,\alpha y)+(\beta x'+\beta y'))\\ &= f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')\\ &= \alpha x+\beta x'-\alpha y+\beta y'\\ &= \alpha(x-y)+\beta(x'-y')\\ &= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')\end{aligned}$$

إذن f **خطي**

2) تعين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$

$$\begin{aligned}Kerf &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)=o_{\mathbb{R}}\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x-y=0\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=y\right\}\\ &= \left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{x(1,1)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

إذن : $Kerf$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بـــ الشعاع $u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\operatorname{Im} f=\left\{f(x,y)\in\mathbb{R}\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{x-y\in\mathbb{R}\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathbb{R}$$

التمرين الثاني: f تطبيق معرف كما يلي:

$$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=(2x-4y,x-2y)$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ ثم بعديهما

3) هل f متباين؟ f غامر؟

الحـــــــــل:

1) لإثبات أن f خطي يكفي أن نبين

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \ f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

$$f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))=f((\alpha x,\alpha y)+(\beta x'+\beta y')$$
$$=f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')$$
$$=\left[2(\alpha x+\beta x')-4(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-2(\alpha y+\beta y')\right]$$
$$=\left[2(\alpha x+\beta x')-4(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-2(\alpha y+\beta y')\right]$$
$$=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

2) **تعين** $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$

$$Kerf=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,(2x-4y,x-2y)=(0,0)\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,2x-4y=0\quad,\quad x-2y=0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x=2y\right\}$$
$$=\left\{(2y,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{x(2,1)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\in\mathbb{R}\right\}$$

إذن $Kerf$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بالشعاع $v(2,1)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{ f(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ (2x-4y, x-2y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ (2x,x) + (-4y,-2y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ x(2,1) - 2y(2,1) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ (x-2y)(2,1) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ \alpha(2,1) / \alpha \in \mathbb{R} \}
\end{aligned}$$

إذن $\operatorname{Im} f$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بالشعاع $v(2,1)$

نستنتج أن $\operatorname{Im} f = Kerf$ ومنه $\dim \operatorname{Im} f = \dim Kerf = 1$

بمأن $\dim Kerf \neq 0$ فإن f ليس متباين

ومن جهة أخرى بمأن $\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ فإن f ليس غامر

التمرين الثالث:

f تطبيق معرف كما يلي:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = (2x-4y, x-2y) \end{aligned}$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ ثم بعديهما

3) هل f متباين؟ f غامر؟

الحــــــــــــــل:

2) إثبات أن f خطي

f خطي $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = \alpha f(x,y) + \beta f(x',y')$

$$f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f((\alpha x,\alpha y)+(\beta x'+\beta y')$$
$$=f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')$$
$$=\left[2(\alpha x+\beta x')-4(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-2(\alpha y+\beta y')\right]$$
$$=\left[2(\alpha x+\beta x')-4(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-2(\alpha y+\beta y')\right]$$
$$=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

2) تعين $Kerf$ و $\mathrm{Im} f$

$$Kerf = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (2x-4y,x-2y)=(0,0)\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x-4y=0 \;\;,\;\; x-2y=0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=2y\right\}$$
$$=\left\{(2y,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{x(2,1)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\in\mathbb{R}\right\}$$

إذن $Kerf$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بـــ الشعاع $v(2,1)$

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ f(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{(2x-4y,x-2y) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{(2x,x)+(-4y,-2y) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{x(2,1)-2y(2,1) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{(x-2y)(2,1) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{\alpha(2,1) \,/\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

إذن $\mathrm{Im} f$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بـــ الشعاع $v(2,1)$

نستنتج أن $\mathrm{Im}\, f = Kerf$ ومنه $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim Kerf = 1$

بمأن $\dim Kerf \neq 0$ فإن f ليس متباين

ومن جهة أخرى **بمأن** $\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ فإن f ليس غامر

التمرين الرابع: f تطبيق معرف كما يلي:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x,y) \mapsto f(x,y) = (3x-4y, x-y) \end{aligned}$$

1) بين أن f تقابلي ثم عين f^{-1}

2) إستنتج بعدي $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$

الحـــــــل:

1) نتأكد أنه من أجل كل زوج $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ يوجد زوج وحيد $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = (X,Y)$

نجد $x = 4Y - X$ و $y = 3Y - X$ وعليه يكون f تقابليا

تعيين f^{-1} **:**

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) &\mapsto (4Y-X, 3Y-X) \end{aligned}$$

بمأن f تقابليا فهو متباين وعليه $\dim Kerf = 0$

وهو كذلك غامر وعليه $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

التمرين الخامس:

f تطبيق معرف كما يلي:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z) \end{aligned}$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و ثم بعديهما

الحـــــــل:

3) إثبات أن f خطي

f **خطي** $\Leftrightarrow \forall(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z'))=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$

$$f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) = f((\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x'+\beta y',\beta z')$$
$$=f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$$
$$=\left[-(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z'),(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')\right]$$
$$=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$$

2) تعين $Kerf$ لدينا تعريفا

$$Kerf = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^2}\right\}$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ (-x+y+z,x-y+z)=(0,0)\right\}$$

نحصل على الجملة الخطية: $\begin{cases}-x+y+z=0\\ x-y+z=0\end{cases}$

بحل هذه الجملة نجد $x=y$ و $z=0$ ومنه:

$$Kerf=\left\{(x,x,0),x\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{x(1,1,0),x\in\mathbb{R}\right\}$$

إذن: $Kerf$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بـــ الشعاع $v(1,1,0)$

إذن: $\dim Kerf=1$

تعيين $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f=\left\{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\left\{(-x+y+z,x-y+z) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\left\{(-x+z)(1,-1)+z(1,1) \ / \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{\alpha(1,-1)+\beta(1,1) \ / \ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

إذن $\operatorname{Im} f$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بــواسطة الشعاعيين

$u(1,-1)$ و $v(1,1)$ ويمكن التحقق بـسهولة بأن هذين الشعاعين مستقلان خطيا

فهما يشكلان أساسا لـ $\operatorname{Im} f$ ومنه $\dim \operatorname{Im} f=2$

تمارين مقترحة

التمرين الأول: f تطبيق معرف كما يلي:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (y,x,x+y)$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ ثم بعديهما

التمرين الثاني: f تطبيق معرف كما يلي:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x,2y-x)$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ وماذا تستنتج؟

التمرين الثالث:

ليكن f تطبيقا خطيا معرفا من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وليكن g التطبيق االمعرف كمايلي:

$$g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto g(x,y) = (x,y-f(x))$$

1) بين أن g خطي

2) عين $Kerg$ و وماذا تستنتج؟

التمرين الرايع: f تطبيق معرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (2x+y,x-z,0)$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ ثم بعديهما

التمرين الخامس: f تطبيق معرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (2x+y-z,\ 2x+y-z,\ 2x+y-z)$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ ثم بعديهما

3) تحقق من نظرية الأبعاد

التمرين السادس: ليكن $f\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي الذي يحقق:

$$f(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3,\ f(e_2) = -e_1 + 5e_2 - e_3,\ f(e_3) = 2e_1 + 4e_2$$

حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ هو الأساس القانوني لــ $\mathbb{R}^3$

1) عين $f(x,y,z)$ لكل $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$ ثم بعديهما

3) هل $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus Kerf$ ؟

التمرين السابع

ليكن الفضاء الشعاعي الحقيقي $E = IR_2[x]$، لكثيرات الحدود ذات درجة أقل أو تساوي 2، وذات معاملات حقيقية.

باعتبار $E = IR_2[x]$ مزودًا بأساسه القانوني $\{1, x, x^2\}$، نعرف التطبيق f بالشكل:

$$f : E \longrightarrow E$$
$$\mathrm{P}(x) \mapsto f(\mathrm{P}) = 2(x+1)\mathrm{P}(x) - (x-1)^2\,\mathrm{P}'(x)$$

P' هو مشتق P.

أ) أثبت أن التطبيق f خطي.

ب) عين A مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس القانوني للفضاء الشعاعي E.

ج) هل التطبيق f تقابلي؟ برر إجابتك.

د) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$.

هـ) استنتج من جديد إذا ما كان التطبيق f تقابليا أم لا؟

الفصل الثالث المصفوفات والمحددات

تذكير مختصر بالدرس

المصفوفـــــات:

تعريف: ليكن الحقل $\mathbb{k}$.نسمي **مصفوفة** A ذات m سطر و n عمود بمعاملات في $\mathbb{k}$ كل جملة متكونة من $n \cdot m$ عنصرا من $\mathbb{k}$ موضوعة في **جدول من الشكل:**

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}}^{\textbf{عمود } n} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ . \\ . \\ . \\ a \end{matrix}}\right\} \textbf{سطر } m$$

حيث n و m عددين طبيعيين و a_{ij} عناصر من الحقل $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) مع

$i = 1, 2, ..., m$ و $j = 1, 2, ..., n$

ونسمي مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول سطرا ومجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني عمودا ونقول أن المصفوفة ذات m سطر و n عمود ونرمز للمصفوفات بالرموز A ، B ،...،الخ ونكتب:

$A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ ،**...،الخ.**

ملاحظات:

1) a_{ij} هو عنصر من المصفوفة يقع في السطر رقم i والعمود رقم j

2) نرمز لمجموعة المصفوفات ذات m سطر و n عمود والتي عناصرها من الحقل $\mathbb{k}$ بالرمز

$M_{mn}(\mathbb{k})$

أنواع المصفوفات

1) المصفوفة الصفرية: وهي المصفوفة التي كل عناصرها معدومة أي:

A مصفوفة صفرية $\Leftrightarrow$ $\forall i \in \{1,2,...,m\}$ و $\forall j \in \{1,2,...,n\} : a_{ij} = 0$

2) المصفوفة المربعة: وهي المصفوفة التي عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها

أي: $A \in M_{mn}(\mathbb{k})$ مصفوفة مربعة $\Leftrightarrow m = n$

عندئذ نسمي A مصفوفة من الرتبة n ونرمز للمصفوفات المربعة من الرتبة n بالرمز $M_n(\mathbb{k})$

نسمي العناصر $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ بالقطر الرئيسي للمصفوفة A

أي: القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة هو جميع العناصر a_{ij} **بحيث:** $i = j$

3) المصفوفة المثلثيه العلوية : وهي مصفوفة مربعة كل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة

أي: $a_{ij} = 0$ ، من أجل كل i وكل j ، $i < j$ وهي تكتب على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4) المصفوفة المثلثيه السفلية: وهي مصفوفة مربعة كل عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة

أي: $a_{ij} = 0$ ، من أجل كل $\boldsymbol{i}$ و كل j ، $j < i$ وهي تكتب على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5) المصفوفة القطرية : وهي مصفوفة مربعة كل عناصرها معدومة ماعدا القطر الرئيسي

أي: $a_{ij}=0$ ، من أجل كل i و كل j ، $i\neq j$ وهي تكتب على الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6)مصفوفة الوحدة : وهي مصفوفة قطرية كل عناصر قطرها الرئيسي تساوي **1**

أي: $(\forall i: a_{ii}=1)$ و$(a_{ij}=0$ من أجل كل i وكل j ، $i\neq j)$ ونرمز لها بالرمز I_n وهي من الشكل:

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) المصفوفة المتماثلة(المتناظرة): وهي مصفوفة مربعة فيها كل العناصر المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية

أي: Aمصفوفة متماثلة $\Leftrightarrow \forall i , j \in\{1,2,...,n\}: a_{ij}=a_{ji}$

العمليات على المصفوفات

1) مجموع مصفوفتين

$A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتين من $M_{mn}(\mathbb{k})$ (أي من نفس الدرجة)

مجموع المصفوفتين A و B يساوي $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ **و نكتب:**

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & . & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & . & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & . & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & . & . & . & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

2) ضرب مصفوفة في مقدار سلمي: ليكن α مقدارا سلميا من $\mathbb{k}$ و A

مصفوفة من $M_{mn}(\mathbb{k})$ نعرف جداء A في α بــ : $\alpha A=\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$

أي نضرب جميع عناصر المصفوفة A بالمقدار السلمي α **ونكتب بالشكل:**

$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & . & . & . & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & . & . & . & \alpha a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & . & . & . & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

الجداء السلمي لشعاعين

ليكن الشعاعين u و v حيث :

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

الجداء السلمي لشعاعين u و v هو المقدار الذي نرمز له بالرمز $u.v$

حيث: $$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

4) جداء مصفوفتين: ليكن $\mathbb{k}$ حقلا تبديليا ولتكن المصفوفتين $A \in M_{mn}(\mathbb{k})$ و $B \in M_{np}(\mathbb{k})$

(أي: بشرط أن يكون عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر B) عندئذا :

جداء المصفوفتين A و B بهذا الترتيب يساوي المصفوفة $AB \in M_{mp}(\mathbb{k})$

حيث: $AB = (\ell_i . c_j)$ مع $i \in \{1,2,...,m\}$ و $j \in \{1,2,...,p\}$

و $\ell_i . c_j$ هو الجداء السلمي للسطر رقم i في المصفوفة A و العمود رقم j في المصفوفة B كما هو موضح في الشكل الموالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \ell_1 \\ \to \ell_2 \\ . \\ . \\ . \\ \to \ell_m \end{matrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} \ell_1.c_1 & \ell_1.c_2 & . & . & . & \ell_1.c_p \\ \ell_2.c_1 & \ell_2.c_2 & . & . & . & \ell_1.c_p \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \ell_m.c_1 & \ell_m.c_2 & . & . & . & \ell_m.c_p \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & . & b_{np} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & . & . & . & \downarrow \\ c_1 & c_2 & . & . & . & c_p \end{matrix}$$

ملاحظة:

يكون الضرب $A\cdot B$ معرفا إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر B و بصفة عامة ضرب المصفوفات غير تبديلي.

4) منقول مصفوفة: **منقول** المصفوفة $A=(a_{ij})$ من $M_{m,n}(\mathbb{k})$ هي

المصفوفة $B=(a_{ji})$ من $M_{n,m}(\mathbb{k})$

أي: أننا نجعل أسطر المصفوفة A أعمدة في B وأعمدة A أسطر في B

ونرمز لمنقول المصفوفة A بالرمز A^t

خواص المنقول

1) $(A^t)^t = A$

2) A **مصفوفة متماثلة(متناظرة)** $\iff A=A^t$

3) $\forall A,B\in M_{m,n}(\mathbb{k}):(A+B)^t = A^t + B^t$

4) $\forall \alpha\in\mathbb{k},\forall A\in M_{m,n}(\mathbb{k}):(\alpha A)^t=\alpha A^t$

5) $\forall A,B\in M_{m,n}(\mathbb{k}):(AB)^t = B^t A^t$

5) أثر مصفوفة: أثر المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ من $M_n(\mathbb{k})$ هو العدد الذي نرمز له بـ $Tr(A)$ ويساوي مجموع جميع عناصر القطر الرئيسي

أثر المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ من $M_n(\mathbb{k})$ هو العدد الذي نرمز له بـ $Tr(A)$ ويساوي مجموع جميع عناصر القطر الرئيسي

أي: $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$

خواص الأثر

1) $\forall A,B\in M_n(\mathbb{k}):Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$

2) $\forall \alpha\in\mathbb{k},\forall A\in M_n(\mathbb{k}):Tr(\alpha A)=\alpha Tr(A)$

3) $\forall A,B\in M_n(\mathbb{k}):Tr(AB)=Tr(BA)$

4) $\forall A \in M_n(\mathbb{k}) : Tr(A) = Tr(A^t)$

5) $Tr(I_n) = n$

6) تساوي مصفوفتين: نقول إن المصفوفتين $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ متساويتان ونكتب $A = B$ إذا كانت جميع العناصر المتقابلة متساوية، أي أن $(a_{ij}) = (b_{ij})$ لجميع قيم $i \in \{1, 2, ..., m\}$ و $j \in \{1, 2, ..., p\}$

المحددات

تعريف: محدد المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{k})$ هو التطبيق الذي نرمز له بالرمز

$\det A$ أو $|A|$ والمعرف كمايلي: $\det A : M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$

طرق حساب المحدد

1) إذا كانت $A = (a)$ و $a \in \mathbb{k}$ فإن $\det A = a$

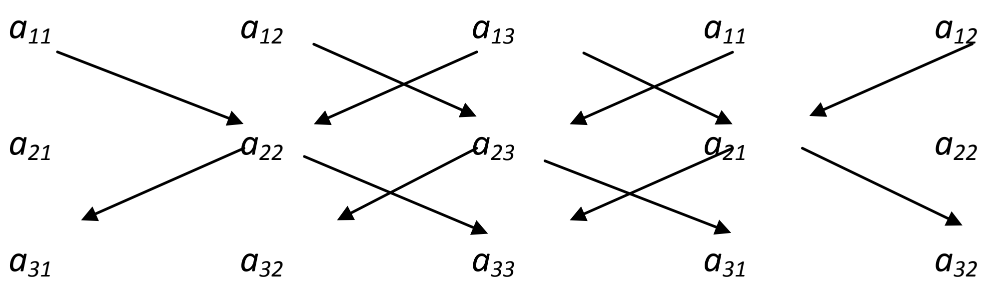
2) **محدد مصفوفة من الدرجة الثانية**

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ فإن $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

3) **طريقة ساريس (Sarrus) لحساب محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{k})$$

نكتب عناصر المصفوفة كما هي ثم نضيف على يمينها مباشرة العمود الأول ثم العمود الثاني، فينتج لدينا خمسة أعمدة وثلاثة أسطر كما يلي:



وتكون قيمة المحدد مساوية:

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$-(a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

4)وبصفة عامة إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{k})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فـــــإن : $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

حيث: $\det(A_{ij})$ هو**محدد** المصفوفة الناتجة من حذف السطر رقم i والعمود

رقم j وذلك بتثبيت j أو i بأحد القيم $1, 2, ..., n$

خواص المحدد

(1 $\forall A \in M_n(\mathbb{k}), \det A^t = \det A$

(2 $\forall A, B \in M_n(\mathbb{k}), \det AB = \det BA = \det A \times \det B$

(3 إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{k})$ مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية أوقطرية فإن محددها يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي.

(4 $\det(I_n) = 1$

(5 $\forall A \in M_n(\mathbb{k}), \ \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

(6 إذا كان عمودان (سطران) متساويان أو أحد الأعمدة(الأسطر) معدوما أو احد

الأعمدة(الأسطر) مكتوب بشكل مزج خطي للأعمدة(الأسطر) الأخرى فإن المحدد يساوي الصفر

مقلوب مصفوفة مربعة

تعريف: من أجل $A \in M_n(\mathbb{k})$ إذا وجدت مصفوفة $B \in M_n(\mathbb{k})$ **بحيث:** $AB = BA = I_n$ نقول عن B إنها مقلوب A و**نرمز** لها بـ $B = A^{-1}$

نتيجة : $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

حساب مقلوب مصفوفة مربعة

$A \in M_n(\mathbb{k})$ قابلة للقلب $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

إذا كانت A قابلة للقلب فإن **مقلوبها** A^{-1} يعطى بالعلاقة : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t$

حيث C^t تسمى قرينة المصفوفة A و $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ تسمى المصفوفة ا لمرافقة لـ A تعطى بالشكل:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{nn} \end{bmatrix}$$ و $$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

حيث: $\det(A_{ij})$ هو محدد المصفوفة الناتجة من حذف السطر رقم i والعمود رقم j .

ملاحـــــــــظة: ليكن E فضاء شعاعي و المجموعة $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$

إذا كان $CardF = \dim E = n$ فإنه لإثبات أن أشعة F مستقلة خطيا

أو إثبات أن F مولدة لـــ E أو إثبات أن F تشكل أساس لـــ E يكفي أن

نبين أن $\det F \neq 0$

حيث : $\det F$ هو محدد المصفوفة المشكلة من الأشعة $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$

مرتبة مصفوفة

تعريف: **مرتبة** المصفوفة $A \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ هي أكبرمحدد غير معدوم

لأي مصفوفة جزئية مربعة من A ونرمز لها بالرمز $\boxed{rg(A)}$

خواص مرتبة مصفوفة

(1 $rg(A) = rg(A^t)$

(2 A مصفوفة صفرية $\Leftrightarrow rg(A) = 0$

(3 $A \in M_n(\mathbb{k})$ و $\det A \neq 0$ فإن $rg(A) = n$

المصفوفتان المتكافئتان

$\boxed{}$ **المصفوفتان** $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ **متكافئتان** $\Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

أو بطريقة أخرى

نقول عن مصفوفتان $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ أنهما **متكافئتان** إذا أمكن الحصول

على إحداهما انطلاقا من الأخرى وذلك بواسطة **التحويلات الأولية** و هي :

عمليات نجريها على مصفوفة وهي كمايلي:.

1) مبادلة بين السطر رقم i والسطر رقم j

2) مبادلة بين العمود رقم i والعمود رقم j

3) نضرب السطر رقم i في مقدار سلمي α

4) نضرب العمود رقم j في مقدار سلمي β

5) نضرب السطر رقم i في مقدار سلمي λ ونضيف إليه سطر أخر

6) نضرب العمود رقم j في مقدار سلمي k ونضيف إليه عمود أخر

المصفوفاتان المتشابهتان

تعريف: لتكن $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ نقول أن A و B **متشابهتان** إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة مربعة

$P \in M_n(\mathbb{k})$ وقابلة للقلب بحيث:

$$AP = PB \text{ : أي } B = P^{-1}AP$$

المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

f تطبيق خطي معرف من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^m$ كما يلي:

$$f: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

حيث:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, ...,$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)$$

نسمي المصفوفة $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ والمعرفة **كمايلي:**

$$A = \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{a_{11} \quad a_{12} \quad . \quad . \quad . \quad a_{1n}}}^{\textbf{عمود } n} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} & \Bigg\} \textbf{سطر } m \end{array}$$

بالمصفوفة المرافقة بالتطبيق الخطي f وفق الأساسين القانونيين لفضاءات البدء والوصول

كما نسمي أيضا f بالتطبيق المرافق للمصفوفة $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$

تمارين محلولة

التمرين الأول

أوجد قيم x, y, z بحيث تكون المصفوفتان متساويتان

$$A = \begin{bmatrix} x & y+2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2z-1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحـــــــــــل

المصفوفتان لهما نفس الرتبة ومنه لكي $A = B$ لابد من تساوي العناصر المتقابلة:

$$\begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 2 = 7 \\ 2z - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

أي :

التمرين الثاني: أحسب محددات المصفوفات الأتية

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

حساب محدد المصفوفة A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times (-3) = 4 + 6 = 10$$

حساب محدد المصفوفة B

طريقة 1 بماأن المصفوفة B من الدرجة الثالثة يمكن أن نستعمل طريقة ساريس

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\det B=[(2\times 0\times(-2))+(1\times(-1)\times 1)+(3\times 3\times 2)]$$
$$-[(3\times 0\times 1)+(2\times(-1)\times 2)+(1\times 3\times(-2)]=27$$

طريقة 2 نستعمل القانون العام لحساب المحددات

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=+2\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$
$$=2\left[0(-2)-(2)(-1)\right]-\left[3(-2)-(1)(-1)\right]+3\left[3(2)-(1)(0)\right]$$
$$=4+5+18$$
$$=27$$

حساب محدد المصفوفة C

نلاحظ أن العمود الثالث يحوي أصفاراً أكثر من غيره، لذا نقوم بنشره وفق عناصر هذا العمود، فنجد:

$$\det C=(-1)\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-1\left[3(-1)-4(-2-6)+1(-2)\right]-0+0-1\left[0-1(9-2)+2(3-8)\right]=-10$$

التمرين الثالث: أوجد مقلوب المصفوفة الآتية : $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$

الحـــــل : نحسب محدد المصفوفة A

$\det A=-7\neq 0$ إذن A قابلة للقلب ومقلوبها A^{-1}

نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ فى الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$C=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}7 & -7 & -7\\ -5 & 3 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow C^t=\begin{bmatrix}7 & -5 & 4\\ -7 & 3 & -1\\ -7 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

إذن A^{-1} تعطى بالعلاقة: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}C^t$

$$A^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}7 & -5 & 4\\ -7 & 3 & -1\\ -7 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7}\\ 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7}\\ 1 & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

ولكى نتأكد من صحة هذا الحل نقوم بضرب المصفوفة فى مقلوبها والنتيجة

يجب أن تكون مصفوفة الوحدة.

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7}\\ 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7}\\ 1 & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

<u>التمرين الرابع:</u> : بين أن F تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ حيث:

$$F=\left\{u_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};u_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};u_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

الحـــــــــل:

بماأن $CardF = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ يكفي أن نبين أن $\det F \neq 0$

حيث: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

بإستعمال طريقة **ساريس** نجد أن $\det F = 2 \neq 0$ ومنه F تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$

التمرين الخامس: f تطبيق خطي معرف كما يلي:

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (-2x+3y+4z, 3x-5y+2z)$$

عين المصفوفة A المرافقة لتطبيق الخطي f وفق الأساسين القانونيين لفضاءات البدء والوصول

الحـــل: الممصفوفة A المرافقة لتطبيق f هي مصفوفة ذات سطران

وثلاثة أعمدة أي $A \in M_{23}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

التمرين السادس: أحسب محددات المصفوفات الأتية:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & -5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & -5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

لاحظ أن A *مصفوفة مثلثية علوية* إذن: $\det A = 2\times(-1)\times 5 = -10$

لاحظ أن B *مصفوفة مثلثية سفلية* إذن: $\det B = 3\times 4\times(-5) = -60$

لاحظ أن A *مصفوفة مثلثية قطرية* إذن: $\det C = -2\times(-7)\times 1 = 14$

لاحظ أن العمود الأول في D معدوما إذن $\det D = 0$

لاحظ أن سطران متساويان في F إذن $\det F = 0$

لاحظ أن العمود الثاني مكتوب بشكل مزج خطي للعمود الأول في G **أي:** (العمود الثاني يساوي *2* **في العمود الأول** $c_2 = 2c_1$ **)** إذن**:** $\det G = 0$

التمرين الثامن :

لتكن المصفوفات $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

أحسب PB و AP وماذا تستنتج

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$PB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

إذن $AP = PB$ **ومنه** A و B مصفوفتان متشابهتان

التمرين التاسع :

أوجد مرتبة المصفوفتين $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

الحـــــــل

$\det A = 1\times 4 - (-3)\times 2 = 10 \neq 0$ **إذن** $rg(A) = 2$ **لأن** $A \in M_2(\mathbb{R})$

ولدينا $\det B=0$ إذن $rg(B)\neq 3$ نأخذ مصفوفة من B ولتكن $B_1=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

$\det B_1 = 1\times(-1)-2\times 3=-7\neq 0$ إذن $rg(B)=2$

التمرين العاشر :

A و B و C ثلاث مصفوفات معرفة كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{bmatrix}\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

1-أحسب $A+C$ ، $2C-\frac{1}{2}A$ ، B^t ، $Tr(A)$ ، BC .

2-أحسب A^2 وماذا نستنتج ؟

3- استنتج A^n بدلالة A من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

الحــــــــــل:

1-حساب $A+C$ ، $2C-\frac{1}{2}A$ ، B^t ، $Tr(A)$ ، BC .

$$A+C=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13+1 & -8+3 & -12+3\\ 12+1 & -7+4 & -12-2\\ 6+1 & -4+0 & -5+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14 & -5 & -9\\ 13 & -3 & -14\\ 7 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

$$2C-\frac{1}{2}A=2\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&-2\\1&0&4\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times1&2\times3&2\times3\\2\times1&2\times4&-2\times2\\2\times1&2\times0&2\times4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times13&\frac{1}{2}(-8)&\frac{1}{2}(-12)\\\frac{1}{2}\times12&\frac{1}{2}(-7)&\frac{1}{2}(-12)\\\frac{1}{2}\times6&\frac{1}{2}(-4)&\frac{1}{2}(-5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&6&6\\2&8&-4\\2&0&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{13}{2}&-4&-6\\6&-\frac{7}{2}&-6\\3&-2&\frac{-5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{9}{2}&10&12\\-4&\frac{23}{2}&2\\-1&2&\frac{21}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&2\end{bmatrix}\in M_{23}(\mathbb{R})\Rightarrow \mathrm{B}^t=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\\3&-2\end{bmatrix}\in M_{32}(\mathbb{R})$$

$$Tr(A)=13-7-5=1$$

$$BC=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&-2\\1&0&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}4&10&0\\5&11&7\end{bmatrix}$$

2- حساب A^2

$$A^2=\begin{bmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

الإستنتاج: بما أن $A^2 = A\times A = I_n$ فإن $A = A^{-1}$

2- استنتاج A^n بدلالة A من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا:

$$A^1 = A$$
$$A^2 = A\times A = I_n$$
$$A^3 = A^2\times A = I_n\times A = A$$
$$A^4 = A^3\times A = A^2 = I_n$$
$$A^5 = A^4\times A = I_n\times A = A$$

استنتاج A^n

$A^{n} = \begin{cases} \textbf{و فردى } \boldsymbol{n=2k+1} \\ \textbf{و زوجى } \boldsymbol{n=2k} \end{cases}$

ونبرهن على هذا الإستنتاج بواسطة الإستذلال بالتراجع

<u>التمرين الحادي عشر:</u>

A و B مصفوفتان من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ حيث:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}$$

1- أحسب $Tr(A), Tr(B)$ $Tr(A+B)$ ، $Tr(2019A)$.

2- أحسب AB ثم BA ثم استنتج A^{-1} مقلوب المصفوفة A .

<u>الحـــــــل</u>:

1- حساب $Tr(B)$, $Tr(A)$ ، $Tr(A+B)$ ، $Tr(2019A)$ ،

$$Tr(A)=3+1+1=5$$

$$Tr(B)=1+5-5=1$$

$$Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)=5+1=6$$

$$Tr(2019A)=2019Tr(A)=2019\times 5=10095$$

2 - حساب AB ثم BA ثم استنتج A^{-1} مقلوب المصفوفة A .

$$AB=BA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

الإستنتاج: مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة B أي $A^{-1}=B$

<u>التمرين الثاني عشر</u>: لتكن A , B مصفوفتين **بحيث:**

$$A-B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&2\end{bmatrix} \quad A+B=\begin{bmatrix}2&-5&1\\3&4&0\end{bmatrix}$$

- عين كل من A و B .

<u>الحـــل</u>:

نحل الجملة:

$$\begin{cases} A+B=\begin{bmatrix}2&-5&1\\3&4&0\end{bmatrix}\text{.........}(1)\\ A-B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&2\end{bmatrix}\text{..........}(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) **نجد**

$$2A=\begin{bmatrix}4&-4&0\\4&6&2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-4&0\\4&6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\2&3&1\end{bmatrix}$$

بطرح (2) من (1) نجد

$$2B=\begin{bmatrix}0 & -6 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -6 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

التمرين الثالث عشر:

لتكن A , B مصفوفتين حيث: $AB=\begin{bmatrix}x & 2\\ 8 & y\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 13 & 12\end{bmatrix}$

أحسب كل من y و x .

الحـــــــــل: حسب خواص أثر ومحدد مصفوفة لدينا الجملة:

$$\begin{cases}\det(AB)=\det(BA)\\ Tr(AB)=Tr(BA)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-16=36-52\\ x+y=3+12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=0\Rightarrow x=0 \ \vee\ y=0\\ x+y=15..........(2)\end{cases}$$

ومنه و بالتعويض بـ $x=0$ في (2) نجد $y=15$

و بالتعويض بـ $y=0$ في (2) نجد $x=15$

التمرين الرابع عشر: لتكن المصفوفة A من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ بحيث:

$$A=\begin{pmatrix}-x & 1 & 1\\ 1 & -x & 1\\ 1 & 1 & -x\end{pmatrix}$$

1- عين أكبر وأصغر قيمة حقيقية لـ $\det A$

2- عين قيم x التي من أجلها يكون: $\det A+4\det A^{-1}=4$

حيث: A^{-1} مقلوب المصفوفة A

الحـــــل:نستخدم طريقة ساريس لحساب المحدد: $\det A=-x^3+3x+2$

لتعيين أكبر وأصغر قيمة لـ $\det A$ **ندرس إتجاه تغير الدالة** $\det A$

مشتقة الدالة $\det A$ هي: $(\det A)'=-3x^2+3$

$$(\det A)'=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$(\det A)'$	$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	
$\det A$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

من جدول التغيرات نجد أن اكبر قيمة لـ $\det A$ **هي** 4 **من أجل** $x=1$

وأصغر قيمة لـ $\det A$ **هي** 0 **من أجل** $x=-1$

عين قيم x التي من أجلها يكون: $\det A+4\det A^{-1}=4$

$$\det A+4\det A^{-1}=4 \Leftrightarrow \det A+4\frac{1}{\det A}=4$$
$$\Leftrightarrow (\det A)^2-4\det A+4=0$$
$$\Leftrightarrow (\det A-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \det A=2$$
$$\Leftrightarrow -x^3+3x+2=2$$
$$\Leftrightarrow -x^3+3x=0$$
$$\Leftrightarrow x(-x^2+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee -x^2+3=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$$

<u>**التمرين الخمس عشر:**</u> لنعتبر التطبيق f المعرف بالشكل:

$$f: IR^3 \longrightarrow IR^2$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)=(x+y-z, 2x-4z)$$

ليكن $\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني للفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR، وليكن $\{e_1',e_2'\}$ الأساس القانوني للفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR.

1. أثبت أن التطبيق f خطي.

2. عين M مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساسين القانونيين لـ IR^3 و IR^2.

3. لنعرف جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ بالشكل: $v_1 = e_1 - e_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_3$.

أ) أثبت أن جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ تشكل أساسا جديدًا للفضاء الشعاعي IR^3.

ب) أكتب A مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ إلى الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

ج) أكتب B مصفوفة الانتقال من الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ إلى الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$.

د) تأكد حسابيًا من أن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A.

الحل:

1. لنثبت أن التطبيق f خطي:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha, \beta \in IR, \forall (x, y, z), (x', y', z') \in IR^3 : \\
&f\left(\alpha \cdot (x, y, z) + \beta \cdot (x', y', z')\right) = f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right) \\
&\qquad = \left((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z'), 2(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha z + \beta z')\right) \\
&\qquad = \alpha \cdot \left(x + y - z, 2x - 4z\right) + \beta \cdot \left(x' + y' - z', 2x' - 4z'\right) \\
&\qquad = \alpha f\left(x, y, z\right) + \beta f\,(x', y', z')
\end{aligned}$$

وهذا ما معناه أن التطبيق f خطي.

2. لدينا:

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (1 + 0 - 0, 2(1) - 4(0)) = (1,2) = 1 \cdot e_1' + 2 \cdot e_2' \\
f(e_2) &= (0 + 1 - 0, 2(0) - 4(0)) = (1,0) = 1 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' \\
f(e_3) &= (0 + 0 - 1, 2(0) - 4(1)) = (-1,-4) = (-1) \cdot e_1' + (-4) \cdot e_2'
\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\
M = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \end{array}
\end{array}$$

3. لدينا: $v_1 = e_1 - e_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_3$.

أ) بما أن عدد عناصر جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ هو $3 = \dim IR^3$، فلكي تشكل هذه الجملة أساسا جديدًا للفضاء الشعاعي IR^3، يكفي أن نثبت أنها مستقلة خطيا:

لتكن α، β و γ أعدادًا حقيقية بحيث: $\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2+\gamma\cdot v_3=\mathrm{O}_{IR^3}$.

ومنه: $\alpha\cdot(e_1-e_2+e_3)+\beta\cdot(e_1+e_2)+\gamma\cdot e_3=\mathrm{O}_{IR^3}$

أي أن:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\alpha+\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}$$

إذن: $\alpha=\beta=\gamma=0$، ومنه جملة الأشعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ تشكل أساسا جديدًا لـIR^3 .

ب) تعيين A مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ إلى الأساس $\{v_1,v_2,v_3\}$: لدينا

$$\begin{aligned}v_1&=1\cdot e_1+(-1)\cdot e_2+1\cdot e_3\\ v_2&=1\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3\\ v_3&=0\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3\end{aligned}$$

ومنه:

$$A=\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix}\end{array}$$

ج) تعيين B مصفوفة الانتقال من الأساس $\{v_1,v_2,v_3\}$ إلى الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$:

بما أن: $v_1=e_1-e_2+e_3, v_2=e_1+e_2, v_3=e_3$، ينتج:

$$\begin{aligned}e_1&=\tfrac{1}{2}\cdot v_1+\tfrac{1}{2}\cdot v_2-\tfrac{1}{2}\cdot v_3\\ e_2&=-\tfrac{1}{2}\cdot v_1+\tfrac{1}{2}\cdot v_2+\tfrac{1}{2}\cdot v_3\\ e_3&=0\cdot v_1+0\cdot v_2+1\cdot v_3\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & \\ \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

د) نتأكد حسابيًا من أن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A: لدينا:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

وكذلك:

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

وهذا يعني بالضبط أن: المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A.

التمرين السادس عشر :

تنتج شركة صناعية نوعين من المنتجات. وكل نوع له 3 أحجام صغير، متوسط، كبير. والجدول التالى يبين الإنتاج (بالآلاف) فى المصنع الأول.

النوع الحجم	صغير	متوسط	كبير
الأول	20	28	30
الثانى	16	22	20

كما يبين الجدول التالى مستوى الإنتاج (بالآلاف) فى المصنع الثانى.

النوع الحجم	صغير	متوسط	كبير
الأول	30	40	36
الثانى	24	20	28

والمطلوب :

(1) أكتب المصفوفة التى تعبر عن مستوى الإنتاج الكلى فى كلا المصنعين.

(2) إذا قررت الشركة أن تفتتح مصنعاً ثالثاً بطاقة إنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثانى. أكتب المصفوفة التى تعبر عن مستوى الإنتاج فى المصنع الثالث.

(3) حدد المصفوفة التى تعبر عن حجم الإنتاج الكلى فى الشركة.

الحــــــل :

(1) مستوى الإنتاج فى المصنعين معاً يساوى إنتاج المصنع الأول مضافاً إليه إنتاج المصنع الثانى.

$$\begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 68 & 50 \\ 48 & 42 & 40 \end{bmatrix}$$

أى ينتج المصنعين معاً : 50 وحدة حجم صغير من النوع الأول.

68 وحدة حجم متوسط من النوع الأول.

66 وحدة حجم كبير من النوع الأول.

40 وحدة حجم صغير من النوع الثانى.

42 وحدة حجم متوسط من النوع الثانى.

48 وحدة حجم كبير من النوع الثانى.

(2) حيث أن المصنع الثالث طاقته الإنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثانى فإنه لإيجاد طاقة المصنع الثالث الإنتاجية نضرب مستوى إنتاج المصنع الثانى فى ($1,20$) **ومنه:**

الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث:

$$1,20 \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43,2 & 48 & 36 \\ 33,6 & 24 & 28,8 \end{bmatrix}$$

(3) الطاقة الإجمالية للشركة ككل = الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول + الطاقة الإنتاجية للمصنع الثانى + الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث.

$$\begin{bmatrix} 43,2 & 48 & 36 \\ 33,6 & 24 & 28,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 109,2 & 116 & 86 \\ 81,6 & 66 & 68,8 \end{bmatrix}$$

و $x_1 = 2$.

تمارين مقترحة

التمرين الأول : A و B و C ثلاث مصفوفات معرفة كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1-أحسب $3C-\frac{1}{3}A$ ، B^t ، $Tr(C)$ ، $\det A$ ، BC ، $\det AC$

التمرين الثاني:

A مصفوفة حيث: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & \alpha \\ 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

1– عين α بحيث يكون $\det A$ أكبر ما يمكن

2– نعتبر قيمة α المحصل عليها سابقا.

بين أن A قابلة للقلب ثم أحسب A^{-1} مقلوب المصفوفة A

التمرين الثالث : لتكن المصفوفة $A\in M_n(\mathbb{R})$ تحقق العلاقة الأتية:

$$A^2-2A-I_n=0..................(1)$$

1– بين أن المصفوفة A قابلة للقلب

2– بين ان المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ تحقق العلاقة (1) ثم إستنتج A^{-1}

التمرين الرابع:

1- بين أن إذا كانت A متشابهة مع B فإن $Tr(A)=Tr(B)$ وماذا تستنتج؟

2– هل المصفوفتان A و B متشابهتان حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ -1 & 4 & -5\end{bmatrix}$$

التمرين الخامس:

لتكن المصفوفتين $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ و $B=\begin{bmatrix}i & -i\\ 2i & i\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$

بين أن A و B قابلتين للقلب ثم أحسب مقلوبيهما A^{-1} و B^{-1}

التمرين السادس: **أوجد مرتبة المصفوفتين الأتيتين :**

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

التمرين السابع:

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$

1) ماهو الشرط حتى تكون المصفوفة A و قابلة للقلب

2) عين بصفة عامة A^{-1} مقلوب A (1

التمرين الثامن:

لتكن المصفوفتين $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ و $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$

بين أن A و B متشابهتان

الفصل الرابع: جمل المعادلات الخطية

تذكير مختصر بالدرس

طرق حـــــل الجمل الخطية

لتكن الجملة الخطية ذات n معادلة و n مجهول معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ .... \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...+ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} ....(\mathrm{I})$$

يمكن كتابة الجملة (I) على الشكل:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Leftrightarrow AX = B......................(\mathrm{II})$$

حيث :

A تسمى مصفوفة **الأمثال** عناصرها هي معاملات المجاهيل $x_1, x_2, ...x_n$

B تسمى مصفوفة **الثوابت** عناصرها هي الأعداد الواقعة في الطرف الثاني للجملة

X تمثل مصفوفة **المجاهيل** التي نبحث عنها.

عندئذا حل الجملة (I) يكافئ حل المعادلة المصفوفية : (II)

لحل الجملة (I) توجد عدة طرق منها :

1) طريقة مقلوب مصفوفة

إذا كان $\det A \neq 0$ فإن A قابلة للقلب و منه المعادلة المصفوفية (II) وبالتالي

الجملة (I) تقبل حلا وحيدا يعطى بالعلاقة: $X = A^{-1}B$ **حيث**: A^{-1} مقلوب A

2) طريقة كرامر (Cramer)

تعريف: نسمي **جملة لكرامر** كل جملة فيها عدد المعادلات يساوي عددالمجاهيل و $\det A \neq 0$ ،

a) إذا كان $\det A \neq 0$ فإن الجملة (I) لكرامر تقبل حلا وحيدا يعطى بالعلاقة:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \ , \ j = 1, 2, ..., n.$$

حيث: $\det A_j$ هو محدد المصفوفة الناتجة من حذف العمود رقم j وتعويضه

بالعمود B في المصفوفة A.

b) إذا كان $\det A = 0$ **فإن:**

* **الجملة** (I) **لها مالا نهاية من الحلول** $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, ..., n\} : \det A_j = 0$

أي: $\det A_1 = \det A_2 = ... = \det A_n = 0$

* **الجملة** (I) **مستحيلة الحل** $S = \phi \Leftrightarrow (\exists\, j \in \{1, 2, ..., n\} : \det A_j \neq 0)$

أي: $\det A_1 \neq 0$ **أو** $\det A_2 \neq 0$ **أو** • • • **أو** $\det A_n \neq 0$

3) طريقة غوص

بفضل استعمال العمليات الأساسية على أسطر المصفوفة A، تعتبر طريقة غوص طريقة منهجية تسمح بتحويل الجملة الخطية (I) إلى جملة خطية أخرى (I') مكافئة لها بحيث تكون مصفوفة الجملة الخطية (I') مثلثية علوية وكل عناصرها القطرية غير معدومة. طريقة غوص تسعى إلى جعل جميع عناصر المصفوفة التي تقع أسفل القطر الرئيسي معدومة

ملاحظات:

(1) إذا كانت مصفوفة الثوابت B مصفوفة صفرية فإن الجملة (I) تسمى جملة خطية متجانسة

(2) إذا كان $\det A \neq 0$ فإن الجملة الخطية المتجانسة تقبل حلا وحيدا

وهو الحل المعدوم

تمارين محلولة

التمرين الأول

حل بطريقة مقلوب مصفوفة جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

الحـــــــــل: الجملة (1) تكافئ المعادلة المصفوفية $AX = B$ **حيث:**

مصفوفة المجاهيل: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ، مصفوفة الثوابت $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

، مصفوفة الأمثال $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

وبحساب محدد المصفوفة نجد أن: $\det A = 26 \neq 0$ ومنه A قابلة للقلب

لحساب A^{-1} نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ فى الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 1 \\ 10 & 13 & 11 \\ -4 & -13 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 13 & 13 & -13 \\ 1 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

إذن A^{-1} تعطى بالعلاقة: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل $X = A^{-1}.B$

$$X = \underbrace{\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

<u>التمرين الثاني:</u>

حـــــــــــل بطريقة مقلوب مصفوفة جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \quad ....(1) \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11 \end{cases}$$

<u>الحـــل</u>

الجملة (1) تكافئ المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

وبحساب محدد المصفوفة نجد أن: $\det A = -7 \neq 0$

إذن A قابلة للقلب والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل: $X = A^{-1}.B$

لحساب A^{-1} نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ فى الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$C=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}7 & -7 & -7\\ -5 & 3 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow C^t=\begin{bmatrix}7 & -5 & 4\\ -7 & 3 & -1\\ -7 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

إذن A^{-1} **تعطى بالعلاقة:** $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}C^t$

$$A^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}7 & -5 & 4\\ -7 & 3 & -1\\ -7 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7}\\ 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7}\\ 1 & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل $X=A^{-1}.B$

$$X=\underbrace{\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}7 & -5 & 4\\ -7 & 3 & -1\\ -7 & 2 & -3\end{bmatrix}}_{A^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ -6\\ -11\end{bmatrix}}_{B}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

<u>التمرين الثالث</u>: حـل بطريقة كرامر الجملة (I) ثم إستنتج حلول الجملة (II)

$$\begin{cases} x+y-3z=-11\\ 2x-y+z=4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)\\ x-2y+2z=5\end{cases}$$

$$\begin{cases} e^a + e^b - 3e^c = -11 \\ 2e^a - e^b + e^c = 4 \qquad ....(II) \\ e^a - 2e^b + 2e^c = 5 \end{cases}$$

الحـــــــل:

الجملة (1) تكافئ المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

محدد الجملة (1): $\det A = 6 \neq 0$

ومنه، الجملة الخطية (1) تقبل حلا وحيدا نُعينه باستعمال طريقة كرامر في حل

الجمل الخطية و باستعمال علاقات كرامر وخواص المحددات نجد:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

و منه: $$x = \frac{\det A_1}{\det A} = 1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -11 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

ومنه: $$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -11 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 30$$

ومنه: $$z=\frac{\det A_3}{\det A}=\frac{30}{6}=5$$

إذن حل الجملة الخطية (1) هو: $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

إستنتاج حلول الجملة (II)

بوضع $\begin{cases}e^a=x\\e^b=y\\e^c=z\end{cases}$ نتحصل على الجملة (I)

ومنه $$\begin{cases}e^a=x\\e^b=y\\e^c=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^a=1\\e^b=3\\e^c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\ln 1=0\\b=\ln 3\\c=\ln 5\end{cases}$$

إذن حل الجملة الخطية (II) هو: $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\ln 3\\\ln 5\end{pmatrix}$

<u>التمرين الرابع</u> حـــل بطريقة **كرامر** الجملة:

$$(S)\quad\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1\\4x_1+x_2=1\\-2x_1+2x+x_3=3\end{cases}$$

مصفوفة المجاهيل: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ، مصفوفة الثوابت $B=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة الأمثال ،

يصبح لدينا $(S)\quad \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1 \\ 4x_1+x_2=1 \\ -2x_1+2x+x_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=B$

نحساب محدد هذه الجملة:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8\neq 0$$

ومنه الجملة الخطية (S) تقبل حلا وحيدا نُعينه باستعمال طريقة كرامر في حل

الجمل الخطية و باستعمال علاقات كرامر وخواص المحددات نجد:

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

و منه: $x_1=\dfrac{\det A_1}{\det A}=\dfrac{-1}{8}$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12$$

ومنه: $x_2=\dfrac{\det A_2}{\det A}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

$$\det A_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2$$

ومنه: $x_3=\frac{\det A_3}{\det A}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$

إذن حل الجملة الخطية (S) هو: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

التمرين الخامس: حل الجملة الخطية التالية باستعمال طريقة غوص:

$$(S)\quad\begin{cases}x_1+6x_3=-5\\2x_1-x_2+x_3=4\\x_1+8x_2+2x_3=0\end{cases}$$

لحل هذه الجملة، سوف نلجأ إلى الكتابة المصفوفية أثناء جميع مراحل الحل.

الجمل التالية متكافئة:

$$\begin{pmatrix}1&0&6\\2&-1&1\\1&8&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&6\\0&-1&-11\\0&8&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\14\\5\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&6\\0&-1&-11\\0&0&-92\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\14\\117\end{pmatrix}$$

ومنه: $x_3=-\frac{117}{92}$ ، $x_2=-14-11,\ x_3=\frac{-1}{92}$ ، $x_1=-5-6x_3=\frac{121}{46}$.

التمرين السادس: لتكن جملة المعادلات الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=1\\x_1+kx_2+x_3=1\\x_1+x_2+kx_3=1\end{cases}$$

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k حلول الجملة (S):

الحــــــل: لدينا:

الجملة تكافئ
$$(S)\qquad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنه: أ) حتى يكون للجملة (S) حل وحيد، يلزم ويكفي أن تكون (S) جملة لكرامر، أي أن محددها غير معدوم، وبالتالي:

$$\det A=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k-1)^2(k+2)\neq 0$$

أي أن $(k-1)^2(k+2)\neq 0$ وهو ما يعني أن $k\notin\{1,-2\}$ وفي هذه الحالة **تقبل** الجملة (S) الحل الوحيد الذي نقوم بحسابه بواسطة علاقات **كرامر** (نستعمل خواص المحددات) **كما يلي:**

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k-1)^2$$

ومنه: $x_1=\dfrac{\det A_1}{\det A}=\dfrac{1}{k+2}$.

$$\det A_2=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k-1)^2$$

ومنه: $x_2=\dfrac{\det A_2}{\det A}=\dfrac{1}{k+2}$.

$$\det A_3=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(k-1)^2$$

ومنه: $x_3=\dfrac{\det A_3}{\det A}=\dfrac{1}{k+2}$.

إذن حل الجملة الخطية (S) هو: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k+2}\\\frac{1}{k+2}\\\frac{1}{k+2}\end{pmatrix}$.

ب) من أجل $k=-2$ فإن $\det A=0$

بالتعويض بقيمة $k=-2$ في $\det A_1$ نجد $\det A_1=(2-1)^2=1\neq 0$

إذن الجملة الخطية (S) مستحيلة الحل ومجموعة الحلول هي مجموعة خالية

ج) من أجل $k=1$ فإن $\det A=0$

بالتعويض بقيمة $k=1$ في $\det A_1$ نجد $\det A_1=(1-1)^2=0$

بالتعويض بقيمة $k=1$ في $\det A_2$ نجد $\det A_2=(1-1)^2=0$

بالتعويض بقيمة $k=1$ في $\det A_3$ نجد $\det A_3=(1-1)^2=1\neq 0$

إذن $\det A=\det A_1=\det A_2=\det A_3=0$

وبالتالي الجملة (S) تقبل مالانهاية من الحلول

التمرين السابع: حل بطريقة غوص الجمل الخطية التالية :

$$(S)\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=2\\2x_1+x_2+2x_3-3x_4=4\\5x_1-4x_2+3x_3-6x_4=6\\-x_1+5x_2-x_3+x_4=2\end{cases}\text{،}\quad(S')\begin{cases}x_1-x_3=1\\2x_1+3x_2+2x_3=9\\2x_1+4x_2+2x_3=-1\end{cases}$$

$$(S'')\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4\\3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6\\3x_1-x_2-x_3+2x_4=6\\3x_1-x_2+3x_3-x_4=6\end{cases}.$$

الحـــــــــل:

أ) لحل الجملة الخطية (S) سوف نلجأ إلى الكتابة المصفوفية:

الجمل الخطية التالية مكافئة للجملة (S):

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&2&-3\\5&-4&3&-6\\-1&5&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\ell_3-5\ell_1\\ \ell_4+\ell_1}]{\ell_2-2\ell_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&3&4&-5\\0&-9&8&-11\\0&6&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\\4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_4+2\ell_2]{\ell_3-3\ell_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&3&4&-5\\0&0&-4&4\\0&0&6&-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\\4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\ell_4+3\ell_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&3&4&-5\\0&0&-4&4\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

ومنه: $x_4=1$ ، $x_3=-2$ ، $x_1=\frac{16}{3}$ و $x_2=\frac{13}{3}$

ب) حل الجملة الخطية (S'):

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&2\\2&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&4\\0&4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\-3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&4\\0&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\-\frac{37}{3}\end{pmatrix}$$

ومنه: $x_3=\frac{37}{4}$ ، $x_2=\frac{7-4x_3}{3}=-10$ ، $x_1=1+x_3=\frac{41}{4}$.

ج) حل الجملة الخطية (S'''):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_3-\ell_1 \\ \ell_4-\ell_1}]{\ell_2+3\ell_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2+\ell_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_4-9\ell_2]{\ell_3-\ell_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_4+3\ell_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و منه: $x_4 = 0$ ، $x_3 = 0$

<u>التمرين الثامن:</u> ،

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل فى مرحلة التصنيع وساعتين فى مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل فى مرحلة التصنيع و 3 ساعات فى مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هى 2400 ساعة لمرحلة التصنيع، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج فى المصنع هى استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

<u>الحـــــــل:</u> يمكن تلخيص بيانات المشكلة فى الجدول التالى.

مرحلة الإنتاج / النوع	التصنيع	التشطيب
10 قدم	4	2
12 قدم	5	3
الساعة المتاحة	2400	1300

بفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 10 قدم = x وحدة

وأن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 12 قدم = y وحدة

فإن المعادلات الآتية تمثل النظام :

$$\begin{cases} 4x+5y=2400 \\ 2x+3y=1300 \end{cases}$$

وهو نظام معادلات خطية فى متغيرين ويمكن حل هذا النظام باستخدام طريقة المصفوفات كالآتى :

مصفوفة المعاملات : $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$: عمود الثوابت $B=\begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$

مقلوب مصفوفة المعاملات هي: $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2- \end{bmatrix}$

ومنه: $\begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

إذن لكى تحقق شركة الأحلام للثلاجات الخطة الإنتاجية يجب أن تنتج 350 ثلاثجة من النوع 10 قدم، 200 ثلاجة من النوع 12 قدم.

تمارين مقترحة

التمرين الأول :

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ +2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1-بين أن المصفوفة A قابلة للقلب ثم أحسب A^{-1} مقلوب المصفوفة A

2-حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3-تحقق من نتائج السؤال الثاني باستعمال طريقة كرامر

التمرين الثاني :

ناقش حسب قيم m حيث $(m \in \mathbb{R})$ حلول الجملة
$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+z+my=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$$

التمرين الثالث: نعتبر في IR^3 الجملة التالية :

$$\begin{cases} x+2y+z=12 \\ x-y+2z=6 \\ 2x-3y-z=-6 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=12 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=6 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=-6 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

1- بين أن الجملة تقبل حلا وحيدا.

2 - حل الجملة بطريقة مقلوب مصفوفة.

1- إستنتج حلول الجملة (2)

<u>التمرين الرابع</u> : و ca أعداد حقيقية موجبة تماما

حل بطريقة كرامر الجملة:
$$\begin{cases} \ln a - 3\ln b + 2\ln c = 1 \\ \ln(abc) = 6 \\ \ln \dfrac{a}{b} + 3\ln c^{-1} = -10 \end{cases}$$

<u>التمرين الخامس</u>

أوجد المصفوقة $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ علما أن: المعادلة المصفوفية $BX = C$

تقبل الحل الوحيد $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ حيت $C = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>التمرين السادس:</u>

جد قيم $x,\ y,\ z$ التي من أجلها يكون الشعاع $v(1,-2,4) \in \mathbb{R}^3$ عبارة

عن مزج خطي للأشعة $v_1(1,1,1)$ و $v_2(1,2,3)$ و $v_2(1,0,2)$

الفصل الخامس: القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تذكير مختصر بالدرس

نعتبر في كل ما يلي:

E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ و المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{k})$ و العدد $\lambda \in \mathbb{k}$

كثير الحدود المميز

تعريف: كثير الحدود المميز للمصفوفة $A \in M_n(K)$ يعطى بالعلاقة: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تعريف : نقول عن العدد $\lambda \in \mathbb{k}$ أنه قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وُجِد شعاع غير معدوم $u = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in \mathbb{k}^n$ يحقق: $(A - \lambda I_n)\, u = 0_{\mathbb{k}^n}$ ونقول أن u هو الشعاع الذاتي للمصفوفة A الموافق للقيمة الذاتية λ .

مبرهنة: القيم الذاتية للمصفوفة $A \in M_n(\mathbb{k})$ هي بالضبط الحلول λ للمعادلة

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

حيث : I_n هي مصفوفة الوحدة.

ملاحظـــــة: مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بقيمة ذاتية λ تشكل فضاء شعاعي جزئي من E ونسميه فضاءا شعاعيا جزئيا ذاتيا مرفقا بالقيمة الذاتية λ ونرمز له بالرمز E_λ حيث: $E_\lambda = \{u \in \mathbb{k}^n / (A - \lambda I_n)u = 0_{\mathbb{k}^n}\} \neq \{0\}$

تأقطر مصفوفة

مبرهنة

المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{k})$ قابلة للتأقطر $\Leftrightarrow$ A تملك n شعاع ذاتي مستقل خطياً

نتيجة:

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{k})$ تملك n قيماً ذاتية مختلفة فإن المصفوفة A قابلة للتأقطر

مثـــــال

في المثال السابق المصفوفة تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين هما $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$

وهي من الدرجة الثانية فهي حسب النتيجة السابقة قابلة للتأقطر

ملاحظة: كثيرالحدود المميزللمصفوفة $A \in M_n(\mathbb{k})$ يعطى بالشكل:

$$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(TrA)\lambda^{n-1} + ... + \det A}$$

ملاحظات:

(1 محدد المصفوفة A يساوي جداء قيمها الذاتية أي: $\det A = \lambda_1 \times \lambda_2 \times ... \times \lambda_n$

(2 أثرالمصفوفة A يساوي مجموع قيمها الذاتية أي: $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

(3 القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية هي عناصر قطرها الرئيسي.

(4 إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة $\det(A - \lambda I_n) = 0$ مختلفة، فإن الأشعة الذاتية المقابلة لها تكون مستقلة خطياً.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

أحسب القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

الحـــــل:

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{bmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(4-\lambda)+2$$
$$P_A(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$$

القيم الذاتية: هي حلول المعادلة $P_A(\lambda)=0$

$$P_A(\lambda)=0\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$$

الان نعين ونحل الجملة $u_1=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ المرفقة بالقيمة الذاتية $\lambda_1=2$

نعوض بقيتها في $(A-\lambda_1 I_2)u_1=0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda_1 & -1\\ 2 & 4-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x+y=0$$
$$\Leftrightarrow x=-y$$

إإذن : $u_1=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=2$ هو $u_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

وبنفس الطريقة نجد ان الشعاع الذاتي $u_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2=3$

ملاحظــــة: مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بقيمة ذاتية λ تشكل فضاء شعاعي

جزئي من E ونسميه فضاءا شعاعيا جزئيا ذاتيا مرفقا بالقيمة الذاتية λ ونرمز

له بالرمز E_λ حيث: $E_\lambda=\left\{u\in\mathbb{k}^n\,/\,(A-\lambda I_n)u=0_{\mathbb{k}^n}\right\}\neq\{0\}$

<u>التمرين الثاني:</u> لتكن المصفوفة A

$$A=\begin{pmatrix}-4&-6&0\\3&5&0\\3&6&5\end{pmatrix}$$

1 - أحسب $P_A(\lambda)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

2 - احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A ، هل A قابلة للتقطير؟

3-استنتج $Tr(A)$ ثم $\det(A)$

4- أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

<u>الحــــــــل:</u>

1- كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A هو المعرف بالعلاقة التالية

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-4-\lambda&-6&0\\3&5-\lambda&0\\3&6&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-4-\lambda&-6&0&-4-\lambda&-6\\3&5-\lambda&0&3&5-\lambda\\3&6&5-\lambda&3&6\end{vmatrix}$$

$$=(-4-\lambda)(5-\lambda)^2+18(5-\lambda)$$

$$=(5-\lambda)\left[(-4-\lambda)(5-\lambda)+18\right]$$

$$P_A(\lambda)=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

2) لحساب القيم الذاتية للمصفوفة A نحل المعادلة $P_A(\lambda)=0$

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

$$\begin{cases} 5-\lambda=0 \\ \lambda^2-\lambda-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=5 \\ \lambda=-1 \vee \lambda=2 \end{cases}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1=5$ و $\lambda_2=-1$ و $\lambda_3=2$

بمأن: A من الدرجة الثالثة وتقبل ثلاثة قيم ذاتية مختلفة فهي قابلة لتقطير

-3 استنتاج $Tr(A)$ ثم $\det(A)$

$$Tr(A)=5-1+2=6$$

$$\det(A)=5\times(-1)\times 2=-10$$

-4 إيجاد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

E_{λ_1} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=5$:

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-\lambda_1 I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-5I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_1(x,y,z)$ من E_{λ_1} **يحقق:**

$$(A-5I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4-\lambda_1 & -6 & 0\\ 3 & 5-\lambda_1 & 0\\ 3 & 6 & 5-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4-5 & -6 & 0\\ 3 & 5-5 & 0\\ 3 & 6 & 5-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9 & -6 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x-6y=0\\ 3y=0\\ 3x+6y=0\end{cases}\Rightarrow\{x=y=0\Rightarrow u_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_1} مولد بالشعاع u_1

ونكتب: $E_{\lambda_1}=\left\{u_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

E_{λ_2} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2=-1$

$$E_{\lambda_2}=\left\{u_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A-\lambda_2I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$
$$=\left\{u_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A+I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

إن أي شعاع $u_2(x,y,z)$ من E_{λ_2} يحقق:

$$(A+I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4-\lambda_2 & -6 & 0\\ 3 & 5-\lambda_2 & 0\\ 3 & 6 & 5-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4+1 & -6 & 0\\ 3 & 5+1 & 0\\ 3 & 6 & 5+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3 & -6 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-6y=0\\ 3x+6y=0\\ 3x+6y+6z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2y\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\ u_2=\begin{pmatrix}-2y\\ y\\ 0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_2} مولد بالشعاع u_2 ونكتب:

$$E_{\lambda_2}=\left\{u_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

E_{λ_3} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2=2$

$$\begin{aligned}E_{\lambda_3}&=\left\{u_3(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,(A-\lambda_2 I_3)u_3=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\\ &=\left\{u_3(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,(A-2I_3)u_3=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_3(x,y,z)$ من E_{λ_3} يحقق:

$$(A-2I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4-\lambda_3 & -6 & 0\\ 3 & 5-\lambda_3 & 0\\ 3 & 6 & 5-\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4-2 & -6 & 0\\ 3 & 5-2 & 0\\ 3 & 6 & 5-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6x-6y=0\\ 3x+3y=0\\ 3x+6y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y\\ z=-y\end{cases}\Rightarrow u_3=\begin{pmatrix}-y\\ y\\ -y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي E_{λ_3} مولد بالشعاع u_3 ونكتب:

$$E_{\lambda_3}=\left\{u_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>التمرين الثالث</u> : لتكن المصفوفة A من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ **بحيث:**

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

1 - أحسب $P_A(\lambda)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

2 - احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A

3- استنتج $Tr(A)$ ثم $\det(A)$

4- أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

الحـــــــل

1- كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A يعطى بالعلاقة التالية:

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda\\ 1 & -1 & 3-\lambda & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)^2(2-\lambda)-(2-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2-1\right]$$

$$P_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

2) لحساب القيم الذاتية للمصفوفة A نحل المعادلة $P_A(\lambda)=0$

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=0$$

$$\begin{cases}2-\lambda=0\\ \lambda^2-6\lambda+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=4\vee\lambda=2\end{cases}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1=2$ **قيمة ذاتية مضاعفة و** $\lambda_2=4$

-3 استنتاج $Tr(A)$ ثم $\det(A)$

$$Tr(A)=2+2+4=10$$

$$\det(A)=2\times2\times4=16$$

4- الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

E_{λ_1} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية المضاعفة $\lambda_1=5$

$$E_{\lambda_1}=\left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-\lambda_1 I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$
$$=\left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-2I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

إن أي شعاع $u_1(x,y,z)$ من E_{λ_1} يحقق:

$$(A-2I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-\lambda_1 & -1 & 1\\ 0 & 2-\lambda_1 & 0\\ 1 & -1 & 3-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-2 & -1 & 1\\ 0 & 2-2 & 0\\ 1 & -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\ 0x+0y+0z=0\\ x-y+z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\{x-y+z=0$$

$$\Rightarrow\{x=y-z\ \Rightarrow u_1=\begin{pmatrix}y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\ 0\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_1} مولد بالشعاعين

$u''=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ و $u_1'=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ ونكتب: $E_{\lambda_1}=\left\{u_1'\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad u''\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

E_{λ_2} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_2=4$

$$E_{\lambda_2}=\left\{u_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A-\lambda_2I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$
$$=\left\{u_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A-4I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

إن أي شعاع $u_2(x,y,z)$ من E_{λ_2} يحقق:

$$(A-4I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-\lambda_2 & -1 & 1\\ 0 & 2-\lambda_2 & 0\\ 1 & -1 & 3-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-4 & -1 & 1\\ 0 & 2-4 & 0\\ 1 & -1 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y+z=0\\ -2y=0\Rightarrow y=0\\ x-y-z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\{y=0\wedge x=z\Rightarrow u_2=\begin{pmatrix}z\\ 0\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_2} مولد بالشعاع $u_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

ونكتب: $E_{\lambda_2}=\left\{u_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

تمارين مقترحة

<u>التمرين الأول :</u> لتكن المصفوفة A من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ **بحيث:**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1 - أحسب $P_A(\lambda)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

2- تحقق أن $\lambda = 5$ قيمة ذاتية للمصفوفة A

3- احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A ، هل A قابلة للتقطير؟

4 - أ وجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

5 - استنتج $\det(A)$ ثم $Tr(A)$

<u>التمرين الثاني</u> :لتكن المصفوفة A بحيث:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1- أحسب $P_A(\lambda)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

2- تحقق أن $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي للمصفوفة A مرفق بقيمة ذاتية

يطلب تعيينها

- 3- احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A

4-أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

5 - استنتج $\det(A)$ ثم $Tr(A)$

<u>التمرين الثالث:</u> لتكن المصفوفتين A ومن المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ **بحيث:**

$$B=\begin{pmatrix}-3 & -6 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ -4 & -6 & 8\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

-1 بين أن المصفوفة A قابلة لتأقطر

-2 بين أن المصفوفة B غير قابلة لتأقطر

نماذج إمتحانات السنوات الماضية

النموذج الأول

التمرين الأول:

لتكن المصفوفات $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -3 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5\\ 5\\ 16\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 7\\ -4 & 5 & -2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

1- حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX=B$

2-أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة C ثم إستنتج $\det(C)$ و $Tr(C)$

3- بين أن المجموعة E المشكلة من الأشعة الذاتية للمصفوفة C تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$ وماذا تستنتج؟

التمرين الثاني : حل بطريقة كرامر الجملة

$$\begin{cases}\ln a-3\ln b+2\ln c=1\\ \ln(abc)=6\\ \ln\dfrac{a}{b}+3\ln c^{-1}=-10\end{cases}$$

حيث و ca أعداد حقيقية موجبة تماما

التمرين الثالث :

حلاق عنده ثلاثة أشخاص ، بعد أن حلق لهم أراد أن يأخذ ثمن الحلاقة فقال:

للأول :ضع في هذا الدرج قدر ما به من مال وخذ منها 20 دينارا . ففعل الأول.

وقال للثاني :ضع في هذا الدرج قدر ما به من مال وخذ منها 20 دينارا ففعل الثاني.

وقال للثالث :ضع في هذا الدرج قدر ما به من مال وخذ منها 20 دينارا ففعل الثالث

وفي النهاية اكتشف الحلاق أن الدرج لم يعد به أي مبلغ

أوجد بإحدى طرق حل الجمل المبلغ الموجود بالدرج من البداية ؟

حــــــل النموذج الأول

التمرين الأول

1- حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX = B$

$\det A = 26 \neq 0$ ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا

إذن A قابلة للقلب والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل: $X = A^{-1}.B$

لحساب A^{-1} نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ في الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 1 \\ 10 & 13 & 11 \\ -4 & -13 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 13 & 13 & -13 \\ 1 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

إذن A^{-1} **تعطى بالعلاقة:** $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 13 & 13 & -13 \\ 1 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل $X = A^{-1}.B$

$$X = \underbrace{\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 13 & 13 & -13 \\ 1 & 11 & -7 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ومنه حل الجملة يعطى بالعلاقة $S=\left\{(1,-3,-2)^t\right\}$

1- كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A هو المعرف بالعلاقة التالية

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=(5-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21)$$

2) لحساب القيم الذاتية للمصفوفة A نحل المعادلة $P_A(\lambda)=0$

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21)=0$$

$$\begin{cases} 5-\lambda=0 \\ \lambda^2-4\lambda-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=5 \\ \lambda=-3 \vee \lambda=7 \end{cases}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1=5$ و $\lambda_2=-3$ و $\lambda_3=7$

-3 استنتاج $Tr(A)$ ثم $\det(A)$

$$Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5-1+2=6$$

$$\det(A)=\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=5\times(-1)\times 2=-10$$

-4 إيجاد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

E_{λ_1} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=5$:

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-\lambda_1 I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-5I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_1(x,y,z)$ من E_{λ_1} **يحقق:**

$$(A-5I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+7z=0\\-4x-2z=0\\3x-5z=0\end{cases}\Rightarrow\{x=z=0$$

$$\Rightarrow\ u_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_1} مولد بالشعاع u_1

ونكتب: $E_{\lambda_1}=\left\{u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

E_{λ_2} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2=-3$

$$\begin{aligned}E_{\lambda_2}&=\left\{u_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A-\lambda_2I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\\&=\left\{u_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A+3I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_2(x,y,z)$ من E_{λ_2} يحقق:

$$(A+I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+7z=0\\-4x+8y-2z=0\\3x+3z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=-x\\y=-\dfrac{1}{4}x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ u_2=\begin{pmatrix}x\\-\dfrac{1}{4}x\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_2} مولد بالشعاع u_2 ونكتب:

$$E_{\lambda_2} = \left\{ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_{λ_3} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_3 = 7$

$$\begin{aligned} E_{\lambda_3} &= \left\{ u_3(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_2 I_3) u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ &= \left\{ u_3(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A - 7 I_3) u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_3(x,y,z)$ من E_{λ_3} يحقق:

$$(A - 2I_3)u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 7z = 0 \\ -4x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{7}x \\ y = \dfrac{-17}{7}x \end{cases} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-17}{7} \\ \dfrac{3}{7} \end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي E_{λ_3} مولد بالشعاع u_3 ونكتب:

$$E_{\lambda_3} = \left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-17}{7} \\ \dfrac{3}{7} \end{pmatrix} \right\}$$

- $E = \{u_1; u_2; u_3\}$

بماأن $CardE = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ يكفي أن نبين أن الأشعة $u_1; u_2; u_3$ مستقلة خطيا

بماأن $CardF = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ يكفي أن نبين أن $\det E \neq 0$

حيث: $E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{7} \\ 0 & -1 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

بإستعمال طريقة **ساريس** نجد أن $\det E=\frac{-10}{7}\neq 0$ ومنه E تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$

نستنتج $\dim E=3$

حل التمرين الثاني

حل بطريقة كرامر الجملة $\begin{cases} \ln a-3\ln b+2\ln c=1 \\ \ln(abc)=6 \\ \ln\frac{a}{b}+3\ln c^{-1}=-10 \end{cases}$ **حيث** و ca أعداد حقيقية موجبة تماما

الجملة تكافئ $\begin{cases} \ln a-3\ln b+2\ln c=1 \\ \ln a+\ln b+\ln c=6 \\ \ln a-\ln b-3\ln c=-10 \end{cases}$

نضع $\begin{cases} \ln a=x \\ \ln b=y \\ \ln c=z \end{cases}$ ومنه مصفوفة الأمثال هي $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\det A=-18\neq 0$ ومنه الجملة (1) تقبل حلا وحيدا

$$\det A_1=-18 \quad \Rightarrow x=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{-18}{-18}=1$$

$$\det A_2=-36 \quad \Rightarrow y=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{-36}{-18}=2$$

$$\det A_3=-54 \quad \Rightarrow z=\frac{\det A_3}{\det A}=\frac{-36}{-18}=3$$

لدينا
$$\begin{cases}\ln a = x\\ \ln b = y\\ \ln c = z\end{cases}$$
ومنه
$$\begin{cases}\ln a = 1\\ \ln b = 2\\ \ln c = 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = e^{1}\\ b = e^{2}\\ c = e^{3}\end{cases}$$

حل التمرين الثالث

$$\begin{cases}2x - 20 = y\\ 2y - 20 = z\\ 2z - 20 = 0\end{cases} . \Rightarrow \begin{cases}x = 17,5\\ y = 15\\ z = 10\end{cases}$$

المبلغ الموجود بالدرج من البداية $x = 17,5$

النموذج الثاني

التمرين الأول :- حل في $\mathbb{R}^3$ و بطريقة كرامر الجملة:

$$\begin{cases} x+y-3z=-11 \\ 2x-y+z=4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ x-2y+2z=5 \end{cases}$$

التمرين الثاني: لتكن المصفوفة A من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ بحيث:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1- احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A

2- أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

ثم بين أنها تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$

التمرين الثالث: f تطبيق معرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(2x+y-z,2x+y-z,2x+y-z)$$

1) بين أن f خطي

2) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im}f$

التمرين الرابع: ما هي قيم الأعداد الحقيقية γ,β,α التي من أجلها:

يكون الشعاع $u=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ مزجا خطيا للأشعة $u_1=\begin{pmatrix} -m \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$، $u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ و $u_3=\begin{pmatrix} -m \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

حيث m وسيط حقيقي

حـــــــل النموذج الثاني

التمرين الأول

حل بطريقة كرامرجملة (1)

$\det A = 6 \neq 0$ ومنه الجملة (1) تقبل حلا وحيدا

$$\det A_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\det A_2 = 18 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\det A_3 = 30 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{30}{6} = 5$$

ومنه حل الجملة يعطى بالعلاقة $S = \left\{(1,3,5)^t\right\}$

التمرين الثاني

أنظر حل التمرين في الصفحة رقم 81

التمرين الثالث

1) إثبات أن f خطي

f **خطي** $\Leftrightarrow \forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) &= f((\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z')) \\
&= f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z') \\
&= \begin{bmatrix} 2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z'),2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z'), \\ 2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z') \end{bmatrix} \\
&= \alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')
\end{aligned}$$

2) تعين $Kerf$ لدينا تعريفا

$$Kerf=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (2x+y-z,2x+y-z,2x+y-z)=(0,0,0)\right\}$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z=2x+y\right\}$$
$$=\left\{x(1,0,2)+y(0,1,1)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

إذن: $Kerf$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بـــ الشعاعين $v_1(0,1,1)$ و $v_2(1,0,2)$

إذن: $\dim Kerf=1$

تعيين $\mathrm{Im} f$

$$\mathrm{Im}\, f=\left\{f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\left\{(2x+y-z,2x+y-z,2x+y-z)\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\left\{(2x+y-z)(1,1,1)\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\left\{\alpha(1,1,1)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

إذن $\mathrm{Im} f$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بــواسطة الشعاع $u(1,1,1)$

التمرين الرابع

يكون الشعاع u مزجا خطيا للأشعة u_3,u_2,u_1 و $\begin{pmatrix}1\\1\\-m\end{pmatrix}$ إذا وفقط إذاُ وجد ثلاثة أعداد حقيقية α,β,γ

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma_3=0_{\mathbb{R}^3}\ \Leftrightarrow\ \alpha\begin{pmatrix}-m\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\m\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-m\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m\alpha+\beta-m\gamma=0\\ \alpha+m\beta+\gamma=0\\ -\alpha+\beta+2\gamma=0\end{cases}$$

$\det A = 3m^2 + 3 \neq 0$ ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا

$$\det A_1 = m^2+4m+4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{m^2+4m+4}{3m^2+3}$$

$$\det A_2 = 4m^2+2m-3 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4m^2+2m-3}{3m^2+3}$$

$$\det A_3 = -m^2-m+2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-m^2-m+2}{3m^2+3}$$

النموذج الثالث

التمرين الأول : A و B و C **ثلاث مصفوفات معرفة كما يلي:**

$$A=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 7\\ -4 & 5 & -2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1- أحسب $A+C$ ، $2A-C$ ، A^T ، $\det A$ ، $Tr(A)$

2 – بين أن $A=A^{-1}$ (يكفي أن تبن أن $A^2=I_3$) ثم إستنتج A^{2018}

3- حل المعادلة المصفوفية : $AX=B$ حيث : $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

6- احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة C ثم إستنتج $\det C$ ، $Tr(C)$

7– عين f التطبيق المرفق بالمصفوفة C ثم عين $Kerf$

التمرين الثاني :

لتكن المجموعة: $E=\{A\in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) / \det A=0\}$

بين بواسطة مثال أن E فضاء شعاعي غير جزئي من $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

التمرين الثالث: لتكن المجموعتين الآتيتين:

$$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}\ ,\ \mathrm{V}_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-3z=0\}$$

1) أوجد $\mathrm{V}_1\cap\mathrm{V}_2$

2) بين أن $\mathrm{V}_1\cap\mathrm{V}_2$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

حـــــل النموذج الثالث

التمرين الأول

$$A+C=\begin{bmatrix}17 & -8 & -5\\ 8 & -2 & -14\\ 9 & -4 & -5\end{bmatrix}\qquad 2A-C=\begin{bmatrix}22 & -16 & -31\\ 28 & -19 & -22\\ 9 & -8 & -10\end{bmatrix}$$

$$Tr(A)=13-7-5=1\qquad \det A=-1$$

$$A^t=\begin{bmatrix}13 & 12 & 6\\ -8 & -7 & -4\\ -12 & -12 & -5\end{bmatrix}$$

2 – إثبات أن $A=A^{-1}$ (يكفي أن تبن أن $A^2=I_3$) ثم إستنتج A^{2018}

حساب A^2

$$A^2=\begin{bmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

الإستنتاج: بما أن $A^2=A\times A=I_3$ فإن $A=A^{-1}$

إستنتج A^{2018}

لدينا:

$$A^1=A$$
$$A^2=A\times A=I_n$$
$$A^3=A^2\times A=I_n\times A=A$$
$$A^4=A^3\times A=A^2=I_n$$
$$A^5=A^4\times A=I_n\times A=A$$

استنتاج A^n

$$A^n = \begin{cases} A & \text{و فردى } n=2k+1 \\ I_3 & \text{و زوجى } n=2k \end{cases}$$

إذن $A^{2018} = I_3$

7) حل في بطريقة كرامرالجملة : $AX = B$

$$\det A_1 = -35 \qquad \Rightarrow x = \frac{-35}{-1} = 35$$

$$\det A_2 = -26 \qquad \Rightarrow y = \frac{-26}{-1} = 26$$

$$\det A_3 = \ \text{-19} \qquad \Rightarrow z = \frac{-19}{-1} = 19$$

4- كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A هو المعرف بالعلاقة التالية

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21)$$

2) لحساب القيم الذاتية للمصفوفة A نحل المعادلة $P_A(\lambda) = 0$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21) = 0$$

$$\begin{cases} 5-\lambda = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = -3 \vee \lambda = 7 \end{cases}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -3$ و $\lambda_3 = 7$

-3 استنتاج $Tr(A)$ ثم $\det(A)$

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 - 1 + 2 = 6$$

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 5 \times (-1) \times 2 = -10$$

تعيين f **التطبيق المرافق للمصفوفة** C

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (4x+7z, -4x+5y-2z, 3x)$$

$$\begin{aligned} Kerf &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (4x+7z, -4x+5y-2z, 3x) = (0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(0,0,0)\right\} \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني

: $$E = \left\{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, \det A = 0\right\}$$

بين بواسطة مثال أن E فضاء شعاعي غير جزئي من $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

لتكن المصفوفتان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in E$$

$$\det(A+B) = 18 \neq 0 \notin E$$

إذن E فضاء ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

التمرين الثالث

1) تعيين $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$

$$V_1 \cap V_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 5x + 3\mathrm{y} = 0\right\}$$

2) بين أن $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

1) **الشرط الأول** محقق لأن : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$

الشرط الثاني $\forall X=(x,y,z),\ Y=(x',y',z')\in V_1\bigcap V_2 \Rightarrow X+\ Y\in V_1\bigcap V_2$

$$X+Y=(x,y,z)+(x',y',z')$$
$$=(x+x',y+y',z+z')$$

و منه $5(x+x')+3(y+y')=5x+3y+5x'+3y'=0$

إذن $X+\ Y\in V_1\bigcap V_2$

الشرط الثلث

$$\forall X=(x,y,z)\in V_1\bigcap V_2,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\ \alpha X\in V_1\bigcap V_2$$

$$\alpha X=\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$$
$$5\alpha x+3\alpha y=\alpha(5x+3y)=\alpha\times 0=0$$

$$\alpha X\in V_1\bigcap V_2$$

ومنه $V_1\bigcap V_2$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

النموذج الرابع

التمرين الأول :

لتكن المصفوفة A من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ بحيث: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1- بين أن A قابلة للقلب ثم أحسب A^{-1} مقلوب المصفوفة A

2- حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX=B$ حيث $B=\begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ و $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3- أحسب $p(A)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

4-احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A

5- أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

6- أكتب الفضاء الشعاعي المرفق بالقيمة الذاتية المضاعفة وبين أنه فضاءا شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$.

7- بين أن المجموعة E المشكلة من الأشعة الذاتية مستقلة خطيا وماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني :

أوجد بطريقة كرامر الجملة التي تقبل الحل الوحيد $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ علما أن:

مصفوقة الأمثال هي $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ومصفوفة الثوابت هي $C=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

التمرين الثالث :

لتكن المصفوفة D من المجموعة $M_3\left(\mathbb{R}\right)$ بحيث: $D=\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

1- عين أكبرقيمة حقيقية وأصغر قيمة حقيقية لـ $\det D$

2 - عين قيم x التي من أجلها يكون: $\det D + 4\det D^{-1} = 4$

حيث D^{-1} مقلوب المصفوفة D

حـــــــل النموذج الرابع

التمرين الأول

-1 حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX = B$

$\det A = 16 \neq 0$ ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا

إذن A قابلة للقلب والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل: $X = A^{-1}.B$

لحساب A^{-1} نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ في الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

إذن A^{-1} تعطى بالعلاقة: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

والجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالشكل $X = A^{-1}.B$

$$X = \underbrace{\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ومنه حل الجملة يعطى بالعلاقة $S=\left\{(7,5,3)^t\right\}$

1- كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A هو المعرف بالعلاقة التالية

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=(3-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

2) لحساب القيم الذاتية للمصفوفة A نحل المعادلة $P_A(\lambda)=0$

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=0$$

$$\begin{cases} 2-\lambda=0 \\ \lambda^2-6\lambda+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=2 \vee \lambda=4 \end{cases}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1=2$ قيمة ذاتية مضاعفة و $\lambda_2=4$

2- إيجاد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

E_{λ_1} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=2$:

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-\lambda_1 I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \left\{u_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-2I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3}\right\} \end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_1(x,y,z)$ من E_{λ_1} يحقق:

$$(A-2I_3)u_1=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y+z=0=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{x=y-z\right.$$

$$\Rightarrow u_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_1} مولد بالشعاعين u_1 و u_2

ونكتب: $$E_{\lambda_1}=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

E_{λ_2} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2=-3$

$$\begin{aligned}E_{\lambda_2}&=\left\{v_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-\lambda_2 I_3)v_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\\&=\left\{v_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-4I_3)v_2=0_{\mathbb{R}^3}\right\}\end{aligned}$$

إن أي شعاع $u_2(x,y,z)$ من E_{λ_2} يحقق:

$$(A-4I_3)u_2=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y+z=0\\-2y=0\\x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow y=0\Rightarrow x=z$$

$$\Rightarrow\ v_2=\begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

هذا يعني أن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{λ_2} مولد بالشعاع v_2 ونكتب:

$$E_{\lambda_2}=\left\{v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

E_{λ_1} هو الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1=2$

$$E_{\lambda_1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \ x-\text{y+z=0}\right\}$$

2) بين أن E_{λ_1} فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

1) **الشرط الأول** محقق لأن : $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in E_{\lambda_1}$

الشرط الثاني $\forall X=(x,y,z),\ Y=(x',y',z')\in E_{\lambda_1}\Rightarrow X+Y\in E_{\lambda_1}$

$$X+Y=(x,y,z)+(x',y',z') \\ =(x+x',y+y',z+z')$$

و منه $(x+x')-(y+y')+(z+z')=x-y+z+x'-y'+z'=0$

إذن $X+Y\in E_{\lambda_1}$

الشرط الثلث

$$\forall X=(x,y,z)\in E_{\lambda_1},\ \forall \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\ \alpha X\in E_{\lambda_1}$$

$$\alpha X=\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$$
$$\alpha x-\alpha y+\alpha z=\alpha(x-y+z)=\alpha\times 0=0$$

$$\alpha X\in E_{\lambda_1}$$

ومنه E_{λ_1} فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

$$E=\{u_1;u_2;v_2\}$$

بماأن $CardE=\dim\mathbb{R}^3=3$ يكفي أن نبين أن الأشعة $u_1;u_2;v_3$ مستقلة خطيا

بماأن $CardF=\dim\mathbb{R}^3=3$ يكفي أن نبين أن $\det E\neq 0$

حيث: $E=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

بإستعمال طريقة **ساريس** نجد أن $\det E=2\neq 0$ ومنه E تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$

ونستنتج أن $\dim E=3$

التمرين الثاني

$$BX=C\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-c=-4\\c+2a-b=5\\b+2c-a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-c=-4\\2a-b+c=5\\-a+b+2c=-1\end{cases}$$

مصفوفة الأمثال هي
$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\det M=-14\neq 0$$

$$\det M_1=-14 \qquad \Rightarrow\ a=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{-14}{-14}=1$$

$$\det M_2=28 \qquad \Rightarrow\ b=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{28}{-14}=-2$$

$$\det M_3=-14 \qquad \Rightarrow\ c=\frac{\det A_3}{\det A}=\frac{-14}{-14}=1$$

ومنه الجملة المطلوبة هي:

$$\begin{cases}x-4y-z=-4\\ 2x+2y+z=5\\ -x-2y+2z=-1\end{cases}$$

حل التمرين الثالث في الصفحة رقم 53

نمادج إمتحنات مقترحة للحل

النموذج الأول

التمرين الأول : f تطبيق معرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (3x - y + z,\ 2y,\ x - y + 3z)$$

-1 تحقق أن f خطي ثم عين $Kerf$ نواة التطبيق f

-2 عين المصفوفة A المرفقة بالتطبيق الخطي f

-3 بين **أن** A قابلة للقلب ثم أحسب A^{-1} مقلوب المصفوفة A

-4 حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

-5 أحسب $p(A)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

-6 احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A

-7 أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

-8 تحقق أن المجموعة E المشكلة من الأشعة الذاتية للمصفوفة A مستقلة خطيا

وماذا تستنتج ؟ **ثم** إستنتج $\dim E$

التمرين الثاني :

تنتج شركة **LG** للثلاجات ثلاثة أنواع من الثلاجات هما ثلاجات ذات حجم صغير و ثلاجات ذات حجم متوسط و ثلاجات ذات حجم كبير فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بثلاثة مراحل إنتاجية وهي مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب ومرحلة التغليف. فإذا فرض أن ثلاجة ذات حجم صغير تحتاج **3** ساعات عمل فى مرحلة التصنيع **وساعتين** فى مرحلة التشطيب و**ساعة** في مرحلة التغليف ، وأن الثلاجة ذات حجم متوسط تحتاج إلى **4** ساعات عمل فى مرحلة التصنيع و **3** ساعات فى مرحلة التشطيب و**ساعة** في مرحلة التغليف، وأن الثلاجة ذات حجم كبير تحتاج إلى **5** ساعات عمل فى مرحلة التصنيع و **4** ساعات فى مرحلة التشطيب و**ساعتين** في مرحلة التغليف مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هى **1550** ساعة لمرحلة التصنيع، **1200** ساعة لمرحلة التشطيب و **550** ساعة

لمرحلة التغليف فإذا كانت سياسة الإنتاج فى المصنع هى استخدام كافة الطاقات المتاحة

والمطلـــــــــــــوب:

1- لخص البيانات السابقة في جدول
2- تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.
3- إذا قررت الشركة رفع الإنتاج بنسبة **25%** فما هو عندئذا عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

النموذج الثاني

التمرين الأول :

لتكن المصفوفة A من المجموعة $M_3(\mathbb{R})$ بحيث: $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

1– عين f التطبيق المرفق بالمصفوفة A ثم عين $Kerf$

2- حل بطريقة كرامر المعادلة المصفوفية $AX=B$ حيث $B=\begin{pmatrix}19\\10\\11\end{pmatrix}$ و $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

3- أحسب $p(A)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A

4-احسب القيم الذاتية المرفقة بالمصفوفة A

5- أوجد الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة A

6- أكتب الفضاء الشعاعي المرفق بالقيمة الذاتية المضاعفة وبين أنه

فضاءا شعاعيا جزئيا لـ $\mathbb{R}^3$.

7- بين أن المجموعة E المشكلة من الأشعة الذاتية تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ وماذا تستنتج؟

التمرين الثاني :

لتكن المجموعة: $E=\{A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) / \det A=0\}$

1) هل E فضاء شعاعي جزئي من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ؟ برر إجابتك

التمرين الثالث :

جد قيمة α التي من أجلها يكون الشعاع $v(1,-2,\alpha)\in\mathbb{R}^3$ عبارة عن مزج

خطي للشعاعين $v_1(1,1,1)$ و $v_2(1,2,3)$.

النموذج الثالث

التمرين الأول 10 نقاط

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1-بين أن المصفوفة A قابلة للقلب ثم أحسب A^{-1} مقلوب المصفوفة A

2- حل بطريقة مقلوب مصفوفة المعادلة المصفوفية $AX=B$ حيث $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

3-تحقق من نتائج السؤال الثاني باستعمال طريقة كرامر

4-أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A

التمرين الثاني : 4 نقاط

ناقش حسب قيم m حيث $(m\in\Re)$ حلول الجملة : $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+z+my=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$

التمرين الثالث :6 نقاط

1- عرف محدد مصفوفة
2- عرف المصفوفة المتناظرة
3- بين أن إذا كانت المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة B فإن : $Tr(A)=Tr(B)$

النموذج ارابع

التمرين الأول:10 نقاط

نعتبر في $\mathbb{R}^3$ مايلي :

$$A=\begin{bmatrix}1&5&2\\0&2&0\\2&0&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x+y+z=2\\x-y+z=6\\2x+y+z=3\end{cases}$$

1- بين أن الجملة تقبل حلا وحيدا.

2- حل الجملة بطريقة كرامر.

3- عين $p(\lambda)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

4- اوجد القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A

التمرين الثاني:5 نقاط

لتكن المجموعتين: $V_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-3z=0\}$ $\quad V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$

1) أوجد $V_1\cap V_2$

2) بين أن $V_1\cap V_2$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

التمرين الثالث: 5 نقاط

لتكن المجموعة : $G=\{A(x)\in M_2(\mathbb{R}), x\in]-1,1[\}$ حيث

$$A(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1&x\\x&1\end{pmatrix}$$

برهن أن G زمرة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات

النموذج التاسع

المراجـــــع

1. **المبروك الأحمر**،أساسيات الجبر الخطي ، دار الكتاب الجديد لبنان.2000.

2. **بابا حامد بن حبيب،** الجبر I (تذكير بالدروس و التمارين المحلولة) ، ديوان المطبوعات 2008 الجامعية.
3. **زيزي خليفة** ،الجبر الخطي ،ديوان المطبوعات الجامعية. 1989

4. **عبد العزيز شرابي،** الرياضيات الاقتصادية المصفوفات ، ديوان المطبوعات الجامعية. 1999.

5.د **عيد الوهاب بيبي علي حميدة، فهيم لكحل،** الجبرالجزء الثاني دروس وتمارين محلولة جامعة منتوري قسنطينة

6. **صالح غوراري،** دروس في الجبر الخطي ، ديوان المطبوعات الجامعية.1988.

7. **صلاح أحمد،** التحليل-الجبر، ديوان المطبوعات الجامعية- الجزائر. 1979.

8. **سيمور ليبشتز،** الجبر الخطي ، ديوان المطبوعات الجامعية.1989.. 919 العليا للأساتذة القبة

9. **يوسف صاوله،** السنة ، دروس في الجبر العام والخطي (مطبوعة) المدرسة

10- سعود محمود، التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
11-بن عيسى لخضر ، التحليل الرياضي ، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
12 - حسن رجب محمد، أساسيات الرياضيات الجبر والهندسة التحليلية والإحصاء، دار الفجر للنشر و التوزيع، مصر، 2000.

1. **J. Lelong , J. M. Arnaudies,** cours de mathématiques tome*1,algèbre ,Paris,Dunod1977*.

2 **J. Cerallet et M. Morel**. Du cours aux applications algèbre linéaire(1), Librairie Armand colin.

3 **J. Grifone**. algèbre linéaire supérieure.epadues, edition1990.

4 **J.L. Chambadal**, Ovaret, Algébre linéaire et algébre tenorielle, Dunod, Paris1968.

5 ***R. Godement***, Cours, d'algébre , Hermann.1966.

6. **L. Mac, ,** Algébre, Gauthier-Villa