الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة اين خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة

دروس في الجبر الخطي

لمقياس الرياضيات 2

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2022 - 2021

1 مقدمة :

إن منشأ الجبر الخطي يعود إلى النصف الثاني من القرن السابع عشر وذلك عند دراسة جمل المعادلات الخطية ومن أوائل الرياضيين الذين أسهموا في هذا المجال نذكر *Leibintz* ومن بعده العالم *Maclaurin* الذي أعطى العلاقات التي تسمح بحل جمل المعادلات الخطية بمجهولين وبثلاثة مجاهيل .وأما دراسة الحالة العامة لجمل المعادلات الخطية فيعود الفضل في ذلك إلى العالم *Cramer* في النصف الثاني من القرن الثامن عشر .نتيجة لهذه الدراسات نشأ مفهوم المحدد من المرتبة n ونذكر *Vandermonde* و*Laplace*الذين عملوا في هذا المجال وجاء بعد ذلك مفهوم المصفوفة على يد العالم *Gauss.* إن تطور نظرية المصفوفات سمح في منتصف القرن التاسع عشر بظهور مفهوم الفضاء الشعاعي ذو n بعداً وأول من تحدث عن هذا المفهوم. *Cayley* وأما التعارف النهائية للفضاءات الشعاعية فقد وضعت من قبل العالم *Peano* في عام 1888.

2 بنية الزمرة

نتناول في هذا الجزء البنية الجبرية والتي تشمل الزمرة

2.1 الزمرة

تعريف:

لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية $(*)$، نقول إن$(G,*)$ لها **بنية زمرة**، أو **زمرة**، إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. العملية تجميعية: $\forall x, y, z \in G:\ x*(y*z)=(x*y)*z$.

2. يوجد في G عنصر **حيادي**:

يوجد e من G بحيث $\forall x \in G:\ x*e=e*x=x$.

3. لكل عنصر من G **نظير**:

مهما كان x من G يوجد a من G بحيث $a*x=x*a=e$.

نقول عن زمرة$(G,*)$ إنها **تبديلية** إذا كان: $\forall x, y \in G:\ x*y=y*x$.

ترميز:

إن لم ترد أي إشارة إلى عملية الزمرة نعتبرها ضربية، عمليتها $(\cdot)$، ونعبر عن الزمرة $(G,\cdot)$ بـ G وبدل كتابة $x \cdot y$ نكتب xy فقط.

في زمرة ضربية نعبر عن نظير x بـ x^{-1} أما إذا كانت الزمرة جمعية (عمليتها +) نعبر عن نظير x بـ x−.

إذا كان n عددا صحيحا والعملية في الزمرة هي (*).

نضع: لما $n>0$: $x^n = x*x*\cdots*x$ ، x مركب مع نفسه n مرة.

لما $n<0$: $x^n = x^{-1}*x^{-1}*\cdots*x^{-1}$.

ولما $n=0$: $x^n = e$ حيث e هو العنصر الحيادي في G.

ملاحظة:

في زمرة $(G,*)$ لدينا نظير جداء عنصرين هو $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$.

و $(x*y)^2 = x*y*x*y$ لذلك، لما تكون الزمرة ليست تبديلية فإن $(x*y)^2 \neq x^2*y^2$ بصفة عامة.

مثال:

1. $(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{Z},+)$، $(\mathbb{Q},+)$، $(\mathbb{R},+)$ زمر تبديلية.
2. $(\mathbb{N},-)$ مجموعة الأعداد الطبيعية مزودة بعملية الطرح ليست بنية زمرة لان الطرح ليس عملية داخلية.
3. $(\mathbb{N},+)$ مجموعة الأعداد الطبيعية مزودة بعملية الجمع ليست بنية زمرة لان العنصر 1 مثلا ليس له نظير بالنسبة للجمع.

تمرين

لتكن $E = IR \setminus \{0,1\}$ ولنعتبر التطبيقات:

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : E \longrightarrow E$$

المعرفة بالشكل :

$$\forall x \in E : f_1(x) = x \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x} \; , \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad , f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

برهن أن $(G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, o)$ زمرة.

الحل

ليكن الجدول التالي :

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

نعلم أن عملية تركيب التطبيقات (o) هي عملية تجميعية. من خلال الجدول نرى أن العملية o هي عملية داخلية وأن التطبيق f_1 هو العنصر الحيادي وكل عنصر من G له نظير في G إذن (G,o) زمرة .

قواعد الحساب في زمرة.

لتكن $(G,*)$ زمرة ، نشير بـ 1 للعنصر الحيادي في G إذا كانت العملية * هي الضرب (.)، و بـ 0 إذا كانت العملية * هي الجمع (+). الجدول التالي يضم بعض قواعد الحساب في الزمرة $(G,*)$ وكذا بعض الخواص

عندما تكون الزمرة ضربية	عندما تكون الزمرة جمعية
$1.\forall a \in G : au = a \Rightarrow u = 1$	$1'.\forall a \in G : a + u = a \Rightarrow u = 0$
$2.\forall a \in G : ua = a \Rightarrow u = 1$	$2'.\forall a \in G : u + a = a \Rightarrow u = 0$
$3.ab = ac \Rightarrow b = c$	$3'.a + b = a + c \Rightarrow b = c$
$4.ba = ca \Rightarrow b = c$	$4'.b + a = c + a \Rightarrow b = c$
$5.ab = 1 \Rightarrow b = a^{-1}$	$5'.a + b = 0 \Rightarrow b = -a$
$6.ba = 1 \Rightarrow b = a^{-1}$	$6'.b + a = 0 \Rightarrow b = -a$
$7.1^{-1} = 1$	$7'.-0 = 0$
$8.\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$	$8'.-(-a) = a$
$9.(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$	$9'.(-(a+b)) = (-b) + (-a)$
$10.ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$	$10'.a + x = b \Leftrightarrow x = (-a) + b$
$11.xa = b \Leftrightarrow x = ba^{-1}$	$11'.x + a = b \Leftrightarrow x = b + (-a)$

2.2 الزمر الجزئية لزمرة

تعريف:

لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e. جزء غير خال H من G هو زمرة جزئية من G إذا تحقق:

1. شرط الاستقرار: $\forall x, y \in H:\ xy \in H$.
2. شرط وجود النظير: $\forall x \in H:\ \ x^{-1} \in H$.

ونكتب $H \le G$ للتعبير على أن H زمرة جزئية من G.

ملاحظة:

$H \le G$ تعني أن مقصور عملية G على H يزود H ببنية زمرة.

تعطي المبرهنة التالية صيغة أخرى للتعريف السابق.

مبرهنة3:

إذا كان H جزءا غير خال من زمرة G فإن الشرطين التاليين متكافئان:

1. $H \le G$.
2. $\forall x, y \in H:\ xy^{-1} \in H$.

مثال:

في الزمرة الجمعية Z المجموعة $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ (n عدد طبيعي كيفي).

أمثلة:

1. من الأمثلة الشائعة، لدينا: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset IR \subset \mathbb{C}$

$(\mathbb{Z},+)$ هي زمرة جزئية من $(\mathbb{Q},+)$ ومن $(IR,+)$ ومن $(\mathbb{C},+)$.

$(\mathbb{Q},+)$ زمرة جزئية من $(IR,+)$ ومن $(\mathbb{C},+)$.

$(IR,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C},+)$.

2. ولدينا أيضا: $\mathbb{Q}^* \subset IR^* \subset \mathbb{C}^*$

$(\mathbb{Q}^*,.)$ زمرة جزئية من $(IR^*,.)$ ومن $(\mathbb{C}^*,.)$.

$(IR^*,.)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*,.)$.

3. أخيرا لدينا : $\mathbb{Q}_+^* \subset IR_+^*$

$(\mathbb{Q}_+^*,.)$ زمرة جزئية من $(IR_+^*,.)$.

4. إذا كانت $(G,*)$ زمرة فإن $G,\{e\}$ هما زمرتان جزئيتان من $(G,*)$.

2.3 الزمر الجزئية لـ $(\mathbb{Z},+)$.

قضية:

لكل زمرة جزئية H من $(\mathbb{Z},+)$.

يوجد عدد طبيعي وحيد n بحيث $H = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ أي

$$n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-2n,-n,0,n,2n,\ldots\}$$

2.4 الزمرة الجزئية المولدة بمجموعة

تعريف:

الزمرة الجزئية من زمرة G **المولدة بمجموعة** غير خالية S من G هي أصغر زمرة جزئية من G تحوي S (أصغر بمفهوم الاحتواء)، ونرمز لها بالرمز $\langle S \rangle$.

فهي تقاطع كل الزمر الجزئية من G التي تحوي S.

قضية:

إذا كان S جزءا غير خال من زمرة G لدينا:

$$\langle S \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n \in G : n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i : 1 \le i \le n\ \ x_i \in S \vee x_i^{-1} \in S\}$$

$\langle S \rangle$ هي مجموعة كل الجداءات المنتهية للعناصر التي تنتمي إلى S أو التي نظائرها تنتمي إلى S.

حالة خاصة:

إذا كانت S متكونة من عنصر وحيد x، فإن: $\langle S\rangle=\langle x\rangle=\{x^n : n\in\mathbb{Z}\}$.

ملاحظة:

إذا كانت الزمرة G جمعية (عمليتها هي الجمع) فإن:

$\langle S\rangle=\{x_1+x_2+\ldots+x_n\in G : n\in\mathbb{N}^*, x_i\in S\vee -x_i\in S\ \ \forall i:1\leq i\leq n\}$.

لما $S=\{x\}$ فإن $\langle x\rangle=\langle S\rangle=\{nx\in G : n\in\mathbb{Z}\}$.

حيث nx هو مجموع x، n مرة لما n موجب، ومجموع $-x$ و $-n$ مرة لما n سالب ويساوي 0 لما $n=0$.

مثال:

1. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $H=n\mathbb{Z}=\langle n\rangle$ (حيث $n\mathbb{Z}=\{nk : k\in\mathbb{Z}\}$) هي زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ مولدة بالعدد n.
2. لدينا $G=\{i^k : k\in\mathbb{Z}\}$ (حيث i هو العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$) هي زمرة ضربية مولدة بـ i، أي $G=\{i^0=1, i^1=i, i^2=-1, i^3=-i\}$.

ترميز:

إذا كان $X\subseteq G, Y\subseteq G$ نضع $XY=\{xy\in G:\ \ x\in X, y\in Y\}$.

مبرهنة:

إذا كانت H, K زمرتين جزئيتين من زمرة G فإن:

HK زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا $HK=KH$.

ملاحظة:

1. إذا كانت HK زمرة جزئية من زمرة G فإن $\langle H\cup K\rangle=HK$.
2. إذا كانت H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G فإن:

- بصفة عامة $HK\neq KH$ وبالتالي HK ليست زمرة جزئية من G كما سنرى بمثال فيما يأتي، لكن لدينا دوما $HH=H$ وهذا يُعمم إلى ضرب H في نفسها n مرة.
- إذا كانت الزمرة G تبديلية فإن HK زمرة جزئية من G من كون $HK=KH$.

قضية:

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية. مجموع الزمرتين الجزئيتين H, K هو مباشر إذا وفقط إذا كان كل عنصر من $H+K$ يكتب بشكل وحيد: $h+k$ حيث $h\in H, k\in K$.

2.5 تمارين

تمرين1:

لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية (ضربية) داخلية، تجميعية، لها عنصر حيادي من اليسار e ولكل عنصر نظير من اليسار. أثبت أن G زمرة.

الحل:

ليكن e العنصر الحيادي من اليسار في G أي: $\forall a \in G:\ ae = a \quad (1)$.

ولكل عنصر نظير من اليسار أي: $\forall a \in G\ \exists a' \in G:\ aa' = e \quad (2)$.

ليكن $x \in G$. من (2) لدينا: $\exists x' \in G:\ xx' = e \quad (3)$.

من كون $x' \in G$ ، مرة أخرى من (2) لدينا: $\exists x'' \in G:\ x'x'' = e \quad (4)$.

من كون $xx' \in G$ واستعمال (3) و (4) والتجميع:

$$x'x = (x'x)e = (x'x)(x'x'') = x'(xx')x'' = (x'e)x'' = x'x'' = e$$

إذن $x'x = e = xx' \quad (5)$.

من جهة أخرى لدينا $ex' = (x'x)x' = x'(xx') = x'e = x'$

ومنه $ex = (xx')x = x(x'x) = xe = x$

بما أن x كيفي لذا: $\forall a \in G:\ ea = a = ae$.

أي أن e حيادي من اليمين أيضا وبالتالي e حيادي في G. ومن هذا نستنتج أن

$x'' = ex'' = (xx')x'' = x(x'x'') = xe = x$.

ومنه $xx' = e = x'x'' = x'x$

وبالتالي x' هو نظير x. لذا، فإن G زمرة.

تمرين2:

لتكن $(G,*)$ زمرة e عنصرها الحيادي .

ا.برهن أنه إذا كان $x * x = e, \forall x \in G$ فإن $(G,*)$ زمرة تبديلية .

ب.برهن أنه إذا كان :

$$\forall (x,y) \in G \times G : (x*y)*(x*y) = (x*x)*(y*y)$$

فإن $(G,*)$ تكون أيضا زمرة تبديلية .

الحل:

1 ا.لدينا حسب الخاصية التجميعية للعملية * :

$$\forall (x,y)\in G\times G : (x*y)*(y*x) = x*(y*y)*x$$
$$= x*e*x = x*x = e$$

ولدينا فرضا $(x*y)*(x*y)=e$ إذن :

$$\forall (x,y)\in G\times G : (x*y)*(y*x) = (x*y)*(x*y)$$

ومنه فإن : $\forall (x,y)\in G\times G : y*x = x*y$

أي أن * عملية تبديلية .

ب.لدينا فرضا :

$$\forall (x,y)\in G\times G : (x*y)*(x*y) = (x*x)*(y*y)$$

إذن يكون لدينا حسب الخاصية التجميعية :

$$x^{-1}*x*(y*x)*y*y^{-1} = x^{-1}*x*(x*y)*y*y^{-1}$$

مما يقتضي أن : $\forall (x,y)\in G\times G : y*x = x*y$

أي أن * عملية تبديلية .

تمرين3:

لتكن المجموعة $G=\{(x,y)\in IR\times IR : x^2-y^2=1\}$ نزود G بالعملية $\perp$ المعرفة كما يلي :

$$\forall (x,y),(z,w)\in G\times G : (x,y)\perp(z,w) = (xz+yw, xw+yz)$$

ا.تأكد من أن العملية $\perp$ داخلية في G .

ب.برهن أن $(G,\perp)$ زمرة تبديلية .

الحل:

ا.تكون العملية $\perp$ داخلية في G إذا وفقط إذا كان :

$$\forall (x,y),(z,w)\in G : (x,y)\perp(z,w)\in G$$

لكن $(x,y)\perp(z,w)=(xz+yw, xw+yz)$ ومنه فإن :

$$(xz+yw)^2-(xw+yz)^2 = x^2(z^2-w^2)+y^2(w^2-z^2) = x^2-y^2 = 1$$

وبالتالي فإن العملية $\perp$ داخلية في G .

ب.إن العملية $\perp$ تبديلية لأن :

$$\forall (x,y),(z,w)\in G : (x,y)\perp(z,w) = (xz+yw, xw+yz)$$
$$= (zx+wy, wx+zy)$$
$$= (zx+wy, zy+wx)$$
$$= (z,w)\perp(x,y)$$

(لأن الضرب والجمع تبديليان في IR) . لتكن الآن الأزواج $(x,y),(z,w),(u,v)$ من G لدينا:

$$[(x,y)\perp(z,w)]\perp(u,v) = (xz+yw, xw+yz)\perp(u,v)$$
$$= (xzu+ywu+xwv+yzv, xzv+ywv+xwu+yzu)$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$(x,y)\perp[(z,w)\perp(u,v)]=(x,y)\perp(zu+wv,zv+wu)$$
$$=(xzu+xwv+yzv+ywu,xzv+xwu+yzu+ywv)$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$(x,y)\perp[(z,w)\perp(u,v)]=[(x,y)\perp(z,w)]\perp(u,v)$$

إذن $\perp$ تجميعية .

نبحث الآن عن الزوج $(e,e')\in G$ والمحقق للمعادلة :

$$\forall(x,y)\in G:(x,y)\perp(e,e')=(x,y)$$

لدينا :

$$(x,y)\perp(e,e')=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}xe+ye'=x\\xe'+ye=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yxe+y^2e'=xy\\x^2e'+xye=xy\end{cases}$$
$$\Rightarrow e'(x^2-y^2)=0\Rightarrow e'=0$$

ومنه فإن $xe=x\Rightarrow e=1$ وبالتالي فإن الزوج $(1,0)\in G$ عنصر حيادي بالنسبة للعملية $\perp$. ليكن الآن الزوج $(x,y)\in G$ ، نبحث عن الزوج $(x',y')\in G$ المحقق للمعادلة $(x,y)\perp(x',y')=(1,0)$. لدينا :

$$(x,y)\perp(x',y')=(1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}xx'+yy'=1\\xy'+yx'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}yxx'+y^2y'=y\\x^2y'+xyx'=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow y'(x^2-y^2)=-y\Rightarrow y'=-y$$

ومنه نجد أن $x'=x$ أي أن نظير العنصر $(x,y)\in G$ هو $(x,-y)$ وهو ينتمي إلى G . إذن $(G,\perp)$ زمرة تبديلية .

تمرين4:

لتكن E مجموعة غير خالية و $\Im$ مجموعة التقابلات من E في E .

ا.تحقق من أن $(\Im,o)$ زمرة .

ب.برهن أنه إذا كان $E=\{a\}$ أو$E=\{a,b\}$ فإن $(\Im,o)$ زمرة تبديلية. عين في هذه الحالة$\Im$.

ج.برهن أنه إذا احتوت E على الأقل على ثلاثة عناصر مختلفة فإن $(\Im,o)$ لا تكون زمرة تبديلية .

د.نفرض أن $E=\{a,b,c\}$ ، هل المجموعات الجزئية الآتية زمرا جزئية من $(\Im,o)$ ؟

$$1.A=\{f\in\Im:f(a)=a\}$$
$$2.B=\{f\in\Im:\exists x\in E:f(x)=x\}$$
$$3.C=\{f\in\Im:f(a)=b\}$$

الحل:

ا.إن العملية $\circ$ هي عملية داخلية في $\Im$ (لأن تركيب تقابلين من E في E هو تقابل من E في E) ، نعلم أن عملية تركيب التطبيقات هي عملية تجميعية وأن التطبيق المطابق 1_E المعرف من E في E ينتمي إلى $\Im$ وهو العنصر الحيادي في $\Im$ بالنسبة للعملية $\circ$ و أن كل تقابل f من E في E يقبل تطبيقا عكسيا f^{-1} الذي هو بدوره تقابلا من E في E، f^{-1} هو نظير f بالنسبة للعملية $\circ$، إذن $(\Im,o)$ زمرة .

ب.إذا كان $E=\{a\}$ فإن $\Im=\{1_E\}$ وتكون عندئذ $(\Im,o)$ زمرة تبديلية. وإذا كان $E=\{a,b\}$ فإن $\Im=\{1_E,f\}$ حيث f هو التطبيق التقابلي المعرف بالشكل $f(a)=b\ ,\ f(b)=a$. لدينا : $fof=f\ ,\ fo1_E=1_E of=f$ ، إذن $(\Im,o)$ زمرة تبديلية .

ج.لتكن $E=\{a,b,c\}\cup E'$ حيث a,b,c عناصر مختلفة ، لنبحث عن تقابلين f,g من E في E بحيث $fog\neq gof$. ليكن f,g التطبيقين المعرفين بالشكل :

$$\begin{cases} f(a)=a, f(b)=c, f(c)=b, \forall x\in E': f(x)=x \\ g(a)=b, g(b)=c, g(c)=a, \forall x\in E': g(x)=x \end{cases}$$

إن f,g تقابلين إنشاء من E في E ، و أن :

$$(gof)(a)=g(a)=b\neq (fog)(a)=f(b)=c$$

إذن الزمرة $(\Im,o)$ ليست تبديلية .

د.1.لدينا تعريفا $A\subset\Im$ وأن A ليست خالية (لأن $1_E\in A$) . ليكن $f\in A$ إذن $f(a)=a$ و $f^{-1}(a)=a$ وبالتالي فإن $f^{-1}\in A$.

من جهة أخرى إذا كان $f,g\in A$ فإن $(fog)(a)=a$ إذن $fog\in A$ وبالتالي فإن A زمرة جزئية من $(\Im,o)$.

2.إن المجموعة B ليست مستقرة بالنسبة للعملية $\circ$، بالفعل ليكن التطبيقين f,g المعرفين كما يلي :

$$f(a)=a\ ,\ f(b)=c\ ,\ f(c)=b\ \ ,\ g(a)=c\ ,\ g(b)=b\ ,\ g(c)=a$$

لدينا وضوحا $f,g\in B$ لكن : $gof(a)=c, gof(b)=a, gof(c)=b$

أي أن $gof\notin B$ وبالتالي فإن B ليست زمرة جزئية من $(\Im,o)$.

3.إن المجموعة C ليست زمرة جزئية من $(\Im,o)$ لأنه إذا كان:

$$f(a)=b, f(b)=c, f(c)=a$$

فإن : $f^{-1}(a)=c, f^{-1}(b)=a, f^{-1}(c)=b$ ، إذن $f^{-1}\notin C$.

3 الفضاءات الشعاعية

في كل ما يلي يرمز بـ $\mathbb{K}$ إلى أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

3.1 الفضاء الشعاعي

كل حقل نصادفه فيما يلي هو تبديلي .

تعريف:

ليكن $\mathbb{K}$ حقلا، نقول عن مجموعة غير خالية E مزودة بعمليتين $(+)$ و $(\cdot)$

إنها **فضاء شعاعي** على الحقل K (باختصار **ف.ش** على K) إذا كان:

1. $(E,+)$ زمرة تبديلية

2. العملية الخارجية $(\cdot)$: $K\times E\to E$ معرفة بـ $(\lambda,x)\mapsto\lambda\cdot x$ وتحقق:

(1) $\forall\alpha\in K, \forall x,y\in E:\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(2) $\forall\alpha,\beta\in K, \forall x\in E:\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(3) $\forall\alpha,\beta\in K, \forall x\in E:\quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(4) $\forall x\in E:\quad 1\cdot x=x$ (1 هو عنصر الوحدة في K)

مصطلاحات:

ليكن E فضاء شعاعيا على $\mathbb{K}$.

- عناصر ف.ش نسميها **أشعة** أما عناصر الحقل فنسميها **سلميات**.
- العنصر الحيادي لعملية جمع الأشعة يسمى الشعاع المعدوم ونرمزله بالرمز 0_E ،
- نرمز لنظير x بالنسبة لعملية جمع الاشعة بالرمز $-x$.

مثال:

1. إن الحقل $(K,+,\times)$ هو فضاء شعاعي على نفسه وذلك عندما نعرف القانون الخارجي $(\cdot)$ بالشكل التالي:
نضع $\lambda x=\lambda\times x, x\in K,\lambda\in K$

2. إذا كان $E=\mathbb{R}^2, K=\mathbb{R}$ نعرف جمع شعاعين بالشكل التالي:

$$x+y=(x_1+x_2,y_1+y_2):\forall\quad x,y\in\mathbb{R}^2;\quad x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$$

3. ونعرف ضرب شعاع بسلمي λ كما يلي:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}, x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

$(\mathbb{R}^2,+,.)$ هو فضاء شعاعي فوق الحقل .

4. $E=\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ هو ف.ش على الحقل $K=\mathbb{R}$ حيث العمليتان:

من أجل $\lambda\in\mathbb{R}$ و $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E$:

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$ و $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$.

5. إذا كان E و F فضاءان شعاعيان على نفس الحقل K فإن $E\times F$ ف.ش بالنسبة للعمليتين الجمع و الضرب :

$x,x'\in E,\quad y,y'\in F,\quad \lambda\in K$ ،

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y');\qquad \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$$

3.2 قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

مبرهنة

ليكن $(E,+,.)$ فضاءً شعاعيا معرفا على الحقل K وليكن $(x,y)\in E^2,(\lambda,\mu)\in K^2$ عندئذ الخواص التالية محققة:

- $\lambda\cdot(x-y)=\lambda\cdot x-\lambda\cdot y$
- $(\lambda-\mu)\cdot x=\lambda\cdot x-\mu\cdot x$
- $\lambda.0_E=0_E,0_k.x=0_E$
- $(-\lambda)\cdot x=-(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot(-x)$
- $\lambda x=0_E\Leftrightarrow(\lambda=0_K)\vee(x=0_E)$

3.3 الفضاء الشعاعي الجزئي

تعريف:

ليكن E ف.ش على الحقل K، جزء غير خال V من E هو **فضاء شعاعي جزئي** من E (باختصار **ف.ش.ج**) إذا كان V له بنية ف.ش بمقصور عمليتي E عليه.

تعريف:

لتكن F مجموعة جزئية من ف.ش E ، نقول عن F انه فضاء شعاعي جزئي من E اذا وفقط اذا تحقق مايلي:

1. $F\neq\varnothing,(0_E\in F)$

2. $\forall x,y\in F:x+y\in F$

3. $\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall x\in F:\alpha x\in F$

امثلة:

1. المجموعة الجزئية F من $\mathbb{R}^3$ المعرفة بـ : $F=\{(x,y,1);x,y\in\mathbb{R}\}$.

ليس ف.ش.ج لان $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin F$.

2. كل فضاء شعاعي جزئي هو فضاء شعاعي.

3. المجموعة الجزئية F من $\mathbb{R}^2$ المعرفة بـ : $F=\{(x,y)\mathbb{R}^2;\ 2x+5y=0\}$.

لنثبت ان F ف.ش.ج لـ $\mathbb{R}^2$.

- نثبت F غير خالية : لدينا $2.0+5.0=0\Rightarrow(0,0)\in F$ و منه $F\neq\varnothing$.
- نفرض ان $\forall u(x,y)\in F$ و $\forall v(x',y')\in F$

$$\begin{cases}u(x,y)\in F\\ v(x',y')\in F\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y=0\\ 2x'+5y'=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x+5y+2x'+5y'=0$$
$$\Rightarrow 2(x+x')+5(y+y')=0$$
$$\Rightarrow v+u\in F$$

- نفرض ان $\forall u(x,y)\in F$ و $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}u(x,y)\in F\\ \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y=0\\ \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha(2x+5y)=0$$
$$\Rightarrow 2(\alpha x)+5(\alpha y)=0$$
$$\Rightarrow \alpha u\in F$$

و منه F ف.ش.ج لـ $\mathbb{R}^2$.

قضية :

لكي يكون F فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall x,y\in F,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}:(\alpha\cdot x+\beta.y)\in F.$$

مثال:

المجموعة الجزئية F من $\mathbb{R}^2$ المعرفة بـ : $F=\{(x,y)\mathbb{R}^2;\ 2x+5y=0\}$.

لنثبت ان F ف.ش.ج لـ $\mathbb{R}^2$.

- نثبت ان F غير خالية : لدينا $2.0+5.0=0\Rightarrow(0,0)\in F$ و منه $F\neq\varnothing$.
- نفرض ان $\forall u(x,y),v(x',y')\in F$ و $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}u(x,y),v(x',y')\in F\\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{cases}$$

لدينا $\alpha u+\beta v\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\ \alpha y+\beta y'\end{pmatrix}$ ومنه

$$\begin{aligned}2(\alpha x+\beta x')+5(\alpha y+\beta y') &= 2\alpha x+2\beta x'+5\alpha y+5\beta y'\\ &=\alpha(2x+5y)+\beta(2x'+5y')\\ &=\alpha.0+\beta.0\\ &=0\end{aligned}$$

و منه $(\alpha u+\beta v)\in F$ و منه F ف.ش.ج لـ $\mathbb{R}^2$.

ملاحظة:

الشعاع المعدوم ينتمي إلى كل فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي.

ملاحظة:

إذا كان F فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي E فإن $(F,+)$ زمرة جزئية من $(E,+)$.

أمثلة:

1. إذا كان E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ فإن كل من E و $\{0_E\}$ فضاءان شعاعيان جزئيان من E.
2. المجموعة $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by=0\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$.
3. المجموعة $F_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=-2x, z=-x\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.
4. المجموعة $;F_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

3.4 عمليات على الفضاءات الشعاعية

3.4.1 التقاطع :

إذا كان F وG فضاءان شعاعيان جزئيان من فضاء شعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$. فإن : $F\cap G$ فضاء شعاعي جزئي منE.

$$F\cap G=\{x\in E : x\in F\wedge x\in G\}.$$

مبرهنة:

تقاطع الفضاءات الشعاعية الجزئية هو فضاء الشعاعي الجزئي.

3.4.2 الاتحاد :

إذا كان F وG فضاءان شعاعيان جزئيان من فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$. E فإن : $F\cup G$ فضاء شعاعي جزئي منE.

$$F\cup G=\{x\in E : x\in F\vee x\in G\}.$$

مبرهنة: اتحاد فضائين شعاعيين جزئيين ليس بالضرورة هو فضاء الشعاعي الجزئي.

3.4.3 الجمع :

إذا كان F وG فضاءان شعاعيان جزئيان من فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$. E فإن : $F+G$ فضاء شعاعي جزئي من E.

$$F+G=\{x\in E: x=x_1+x_2; x_1\in F\wedge x_2\in G\}.$$

مبرهنة: جمع فضائين شعاعيين جزئيين هو فضاء الشعاعي الجزئي.

3.4.4 الجمع المباشر:

إذا كان F وG فضاءان شعاعيان جزئيان من فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$. نقول أن E هو جمع مباشر F لـ و G اذا و فقط اذا تحقق مايلي :

$$1)\ E=F+G$$
$$2)\ F\cap G=0_E$$

و نكتب : $E=F\oplus G$

مبرهنة:

اتحاد فضائين شعاعيين جزئيين ليس بالضرورة هو فضاء الشعاعي الجزئي.

3.5 الجزء المولد لفضاء شعاعي

تعريف:

ليكن E ف.ش على الحقل K والعائلة $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ من E. الفضاء الشعاعي الجزئي **المولد** عن هذه العائلة هو أصغر ف.ش.ج V من E يحوي $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. ونرمز له بالرمز. $V=\langle\{x_i\}\rangle_{i=1}^{n}$

$$V=\{x\in E:\exists \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}: x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n\}$$

تسمية :

نسمي العبارة $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ **مزجا خطيا** للعناصر $\{x_i\}_{i=1}^{n}$.

أمثلة :

1. الشعاع $(-2,3)=-2(1,0)+3(0,1)$ هو مزج خطي للشعاعين $(1,0)$ و $(0,1)$.

2. في فضاء كثيرات الحدود ذات المتغير الحقيقي. الشعاع $4x^4-2x^3+x^2+3x$ هو مزج خطي للأشعة x^4, x^3, x^2, x.

3.6 الاستقلال الخطي والأساس

تعريف:

عائلة $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ من عناصر ف.ش E على الحقل K هي **مستقلة** أو جملة **حرة** إذا كان من أجل كل عائلة من السلميات $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset K$ لدينا:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}; \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

$0_E, 0_K$ يمثلان صفر الحقل والفضاء على الترتيب. اصطلاحا المجموعة الخالية مستقلة.

امثلة:

1. الشعاع $v(1,1,2)$ مرتبط خطيا مع الأشعة $v_1(1,0,1)$ ، $v_2(0,1,1)$ لان : $v = v_1 + v_2$
2. هل الأشعة $v_1(1,0,0), v_2(0,2,-3), v_3(-2,0,1)$ مستقلة خطيا ؟

نبرهن صحة مايلي :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,2,-3) + \gamma(-2,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \\ -3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

اذن الأشعة $v_1(1,0,0), v_2(0,2,-3), v_3(-2,0,1)$ مستقلة خطيا

ملاحظات:

- ✓ عائلة من عناصر الفضاء إن لم تكن مستقلة نقول عنها إنها **مرتبطة** خطيا (او مزج خطي) .
- ✓ كل عائلة من عناصر ف.ش هي **أساسا** له إذا كانت مستقلة ومولدة للفضاء.
- ✓ المجموعة الخالية تشكل أساس للفضاء $\{0\}$.

اصطلاحا:

- ✓ نأخذ إصطلاحا المجموعة الخالية مستقلة خطيا في أي فضاء شعاعي.

تعريف:

نقول إن جملة A أساس لـ $\mathbb{K}$- ف ش E إذا تحقق ما يلي :

- ✓ A مولدة لـ E أي كل عنصر من E يكتب على شكل مزج خطي لعناصر من A .
- ✓ A مستقلة خطيا.

أمثلة :

1- كل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ يكتب على الشكل : $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$ ومنه الجملة $\{(1,0),(0,1)\}$ مولدة لـ $\mathbb{R}^2$ واضح أن هذه الجملة مستقلة فهي إذن أساس لـ $\mathbb{R}^2$. بالمثل نجد أن $\{(1,0,0,....,0),(0,1,0,....,0),(0,0,1,....,0),....,(0,0,....,1)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^n$ يدعى الأساس القانوني له.

2- كل كثيرحدود درجته أقل من n يكتب على الشكل $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n$ ومن الواضح أن $\{1,x,x^2,....,x^n\}$ مستقلة فهي أساس لفضاء كثيرات الحدود التي درجتها لا تتعدى n ويدعى الأساس القانوني لهذا الفضاء.

خواص :

1. إذا كان $\{x_1,x_2,....,x_n\}$ أساسا لـ ف ش فإن كل عنصر x من هذا الفضاء يكتب بصورة وحيدة على الشكل $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n$ وتسمى الاعداد $\alpha_n,\ldots,\alpha_2,\alpha_1$ بالمركبات السلمية لـ x في الأساس $\{x_1,x_2,....,x_n\}$
2. إذا كانت $\{x_1,x_2,....,x_n\}$ أساسا لـ ف ش وكانت الجملة $\{y_1,y_2,....,y_n\}$ مستقلة خطيا فهي أيضا أساس لهذا الفضاء الشعاعي .

مبرهنة:

ليكن E ف.ش على الحقل K ومجموعة غير خالية B.

القضايا التالية متكافئة:

1. B أساس لـ E.
2. B جزء مولد لـ E وأصغري B.
3. B جزء مستقل من E وأعظمي.

مبرهنة:

كل فضاء شعاعي يقبل أساسا.

3.7 بُعد فضاء شعاعي

تعريف:

نقول عن ف.ش إنه **ذو بُعد منته** إذا وجد فيه جزء منته ويولده. ونسمي **بُعد** فضاء شعاعي E على حقل ما K عدد عناصر أي أساس له. نرمز لبُعد E بـ $dim_K(E)$ أو $dim(E)$.

ملاحظة:

إذا كانت S أساسا لــ E نسمي $n=card(S)$ (اصلي المجموعة S) بُعد الفضاء الشعاعي E على حقل ما K و نرمز له بالرمز $n=dim(E)$.

ملاحظات:

1- كل أسس E لها نفس عدد الأشعة. يسمى هذا العدد بعد الفضاء E ونرمز له $dim(E)$.

2- إصطلاحا $dim(\{0\}) = 0$.

3- كل ف ش ج من E ذو بعد منته .

4- إذا كان E ف ش ج من F فان: $dim(E)\leq dim(F)$.

5- إذا كان E ف ش ج من F و $dim(E)=dim(F)$ فان: $E=F$.

أمثلة:

1- رأينا أن الجملة $\{(1,0,0,....,0),(0,1,0,....,0),(0,0,1,....,0),....,(0,0,....,1)\}$ أساس $\mathbb{R}^n$ ومنه $dim(\mathbb{R}^n)=n$.

2- إذا كان F ف ش ج من $\mathbb{R}^3$ فإنF ذو بعد منته و$dim(F)\leq 3$ ومنه $dim(F)\in\{0;1;2;3\}$

3- إذا كان $dim(F)=3$ فإن $F=\mathbb{R}^3$.

4- إذا كان $dim(F) = 1$ فإن F مولد بشعاع وحيد ويمثل هندسيا بمستقيم يشمل المبدأ.

5- الفضاء الجزئي المعدوم $\{0\}$ مولد بالمجموعة الخالية وبعده الصفر.

مبرهنة:

ليكن E ف.ش على الحقل$\mathbb{K}$ ذا بعد منته.

1- اذا كان : $E=F\oplus G$ فان : $dim(E)=dim(F)+dim(G)$.

2- اذا كان F وG فضاءين شعاعيين جزئيين من E فان : $dim(F+G)=dim(F)+dim(G)-dim(F\cap G)$.

ملاحظة:

إذا لم يكن الفضاء منتهي البعد أي $dim(E)=\infty$ فإننا نقول أن الفضاء لا نهائي البعد.

3.8 التطبيقات الخطية

تعريف:

ليكن E وF فضاءان شعاعيان على نفس الحقل K، نقول عن تطبيق $f:E\to F$ إنه **خطي** (باختصار: **ت،خ**) إذا و فقط اذا تحقق مايلي:

$$1-\forall x,y\in E: f(x+y)=f(x)+f(y).$$
$$2-\forall x\in E,\forall \lambda\in K: f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

تعريف:

ليكن E وF فضاءان شعاعيان على نفس الحقل K، نقول عن تطبيق $f:E\to F$ إنه **خطي** إذا كان:

$$\forall x,y\in E,\forall \lambda,\mu\in K: f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

أمثلة:

التطبيقات التالية خطية :

-1
$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto ax+b \quad / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

-2
$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\mapsto ax+by \quad / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

-3
$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ &(x,y)\mapsto(3x+y,x-y)\end{aligned}$$

التطبيقات التالية ليست خطية :

-1
$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto x^2\end{aligned}$$

-2
$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\mapsto x.y\end{aligned}$$

-3
$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ &(x,y)\mapsto(e^x+y,x-y)\end{aligned}$$

تمرين محلول

بين فيما إذا كانت التطبيقات التالية IR-خطية أم لا :

$$1. f:IR^4\to IR^2$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\to f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2)$$
$$2. f:IR^3\to IR^3$$
$$(x,y,z)\to f(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$$

$$3.f:IR \to IR$$
$$x \to f(x)=x^2$$
$$4.f:IR^2 \to IR^2$$
$$(x,y) \to f(x,y)=(x+y,xy)$$
$$5.f:IR[X] \to IR[X]$$
$$P \to f(P)=P(X+1)-P(X-1)$$

الحل

1.ليكن $\alpha \in \mathrm{IR}$ لدينا :

$$\forall(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathrm{IR}^4 :$$
$$f\left(\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)=f(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4)$$
$$=\left(\alpha x_1,\alpha x_2\right)=\alpha(x_1,x_2)$$
$$=\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\forall(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4) \in IR^4:$$
$$f\left((x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)\right)=f\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4\right)$$
$$=\left(x_1+y_1,x_2+y_2\right)=\left(x_1,x_2\right)+\left(y_1,y_2\right)=f(x_1,x_2,x_3,x_4)+f(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

إذن f تطبيق خطي.

2.لدينا :

$$\forall \alpha \in IR, \forall(x,y,z) \in IR^3:$$
$$f\left(\alpha(x,y,z)\right)=f\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)=\left(\alpha x+\alpha z,\alpha y,\alpha x+\alpha z\right)$$
$$=\alpha(x+z,y,x+z)=\alpha f(x,y,z)$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$f\left((x,y,z)+(x',y',z')\right)=f\left(x+x',y+y',z+z'\right)$$
$$=\left(x+x'+z+z',y+y',x+x'+z+z'\right)$$
$$=(x+z,y,x+z)+(x'+z',y',x'+z')=f(x,y,z)+f(x',y',z')$$

وبالتالي فإن f تطبيق خطي .

3.إن f ليس خطيا لأن $f(2x) \neq 2f(x)$.

4.إن f ليس خطيا لأن : $\forall \alpha \in IR: f\left(\alpha(x,y)\right) \neq \alpha f(x,y)$

5.ليكن $\lambda,\mu \in IR$ و $P,Q \in IR[X]$ ، لدينا :

$$f(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X-1)$$
$$=\lambda\left(P(X+1)-P(X-1)\right)+\mu\left(Q(X+1)-Q(X-1)\right)$$
$$=\lambda f(P)+\mu f(Q)$$

إذن f خطي .

ملاحظات:

1- تطبيق خطي إن كان متقابلا نقول عنه إنه **تشاكل** فضاءات.

2- مجموعة كل التطبيقات الخطية من E نحو F نرمز لها بـ $\mathcal{L}(E,F)$.

3- كحالة خاصة، إذا كان $E=F$ نضع $\mathcal{L}(E,E)=\mathcal{L}(E)$ ونسمي عناصره **تطبيقات خطية داخلية**، باختصار.

نتائج:

ليكن E وF فضاءان شعاعيان على نفس الحقل K. و ليكن f تطبيق $f:E\to F$

1- f خطي $\Leftarrow f(0_E)=0_F$.

2- f خطي $\Leftarrow$ من أجل كل $x\in E$ لدينا : $f(-x)=(-1)f(x)=-f(x)$.

3- $f\left(f(0_E)\neq 0_F\right)\Leftarrow$ ليس خطي.

مبرهنة:

ليكن f تطبيق خطي: $f:E\to F$.

❖ E_1 فضاء شعاعي جزئي $E \Leftarrow f(E_1)$ فضاء شعاعي جزئي F.

❖ F_1 فضاء شعاعي جزئي $F \Leftarrow f^{-1}(F_1)$ فضاء شعاعي جزئي E.

بعض خواص التطبيقات الخطية :

ليكن E وF فضاءان شعاعيان على نفس الحقل K.

1. تركيب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي.

2. إذا كان f تطبيق خطي تقابلا فإن f^{-1} تطبيق خطي تقابلي كذلك.

3. $f:E\to F$ تطبيق خطي لدينا:

- ✓ إذا كان V ف.ش.ج من E فإن $f(V)$ ف.ش.ج من F وبصفة خاصة $\operatorname{Im} f = f(E)$.
- ✓ إذا كان V' ف.ش.ج من F فإن $f^{-1}(V')$ ف.ش.ج من E، وبصفة خاصة $\ker f = f^{-1}(\{0\})$.
- ✓ إذا كان E مولدا بـ S فإن الفضاء ش.ج $\operatorname{Im} f$ مولدة بـ $f(S)$، بصفة خاصة إذا كان E بُعده n على الحقل K و $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ أساسا له فإن: التطبيق $f:K^n\to E$ المعرف بـ $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n$ خطي تقابلي، أي أن f تشاكل. وبالتالي كل ف.ش. بعده n على حقل K يُشاكل K^n.

3.8.1 صورة ونواة تطبيق خطي :

ليكن f تطبيقا خطيا $f:E\to F$ عندئذ نسمي :

1- نواة التطبيق f هي المجموعة :

$$\operatorname{Ker} f=\{x\in E: f(x)=0_F\}\subseteq E$$

2- صورة التطبيق f هي المجموعة :

$$\operatorname{Im} f=\{y\in F:\exists x\in E/y=f(x)\}\subseteq F$$

مبرهنة:

اذا كان $f\in\mathcal{L}(E,F)$ فإن $\operatorname{Ker} f$ و $\operatorname{Im} f$ هما فضاءان شعاعان من E و F على الترتيب.

مبرهنة:

ليكن $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

- f متباين $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f=\{0_E\}$.
- f غامر $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f=F$.
- إذا كان E ذا بعد منته فإن : f متباين $\Leftrightarrow dim E=dim(ImE)$.

وبصورة خاصة : إذا كان E إذا بعد منته و $dim E=dim F$ فإن القضايا التالية متكافئة :

- ✓ f متباين .
- ✓ f غامر .
- ✓ f تقابلي .

3.8.2 رتبة تطبيق خطي

ليكن $f\in\mathcal{L}(E,F)$ رأينا أنه إذا كانت عائلة مولدة ل E فإن صورتها بـ f مولدة لـ $\operatorname{Im} f$ فإذا كان E ذا بعد منته فإن $\operatorname{Im} f$ كذلك .

تعريف:

ليكن $f\in\mathcal{L}(E,F)$ بحيث E ذا بعد منته . نسمي بعد $\operatorname{Im} f$ برتبة f نرمز لها بالرمز $\operatorname{rg}(f)$.

مثال:

ليكن :

$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\mapsto f(x,y)=x-y \end{aligned}$$

- ✓ بين أن $f\in\mathcal{L}(E,F)$ تطبيق خطي.
- ✓ عين كلا من $\operatorname{Im} f$ و $\operatorname{Ker} f$.
- ✓ ماذا تستنتج ؟

لدينا :

$$\operatorname{Im} f=\{z\in\mathbb{R};\exists X=(x,y)\in\mathbb{R}^2: f(x,y)=z\}$$

$$f(x,y)=z \Leftrightarrow x-y=z$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}$$

و منه f غامر.

لدينا

$$\ker f=\left\{X\in\mathbb{R}^2; f(X)=0\right\}$$

$$\ker f=\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2, x\in\mathbb{R}\right\}=\{x(1,1)/x\in\mathbb{R}\}\Rightarrow f(X)=0\Leftrightarrow f(x,y)=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$$

و منه $\ker f=\{(1,1)\}$

و منه f ليس متباين.

ملاحظات:

- نفرض أن F ذا بعد منته . بما أن $\operatorname{Im} f$ فضاء شعاعي جزئي من F فان $rg(f)\le \dim F$ و اذا كان f غامرا فان : $rg(f)=\dim F$.
- اذا كان $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ أساسا لـ E فان $rg(f)= Dim\ (vect(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

مبرهنة :(مبرهنة الرتبة)

اذا كان $f\in\mathcal{L}(E,F)$ بحيث E ذو بعد منته فإن : $dim\,E=dim(ker\ f)+rg(f)$.

مثال :

نعتبر التطبيق :

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\mapsto(2x+y, x-z)$$

اذا كان

$(x,y,z)\in\ker f$ فان $2x+y=0$ و $x-z=0$

ومنه

$$\ker f=\{(x,-2x,x)=(1,-2,1)x\in\mathbb{R}\}$$
$$=vect(1,-2,1)$$

ومنه

$$\dim(\ker f)=1$$

ولدينا $dim\,E=dim(ker\ f)+rg(f)$ حيث $dim\,E=3$

ومنه الرتبة : $rg(f)=2$.

3.9 المصفوفات

تعريف:

نسمي السلمية a_{ij}، من الحقل K، صورة الثنائية (i,j) بتطبيق $\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,p\}\to K$ ، $(i,j)\mapsto a_{ij}$ الحد العام **للمصفوفة** A الواقع في السطر i والعمود j.

تعريف:

نسمّي مصفوفة من عناصر الحلقة $\mathbb{k}$ ذات n سطرا و p عمودا ، كل تطبيق من المجموعة $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p$ نحو و يأخذ قيمه في الحلقة $\mathbb{k}$.

الترميز :

نرمز بالرمز $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ الى مجموعة المصفوفات ذات n سطرا و p عمودا بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p} .$$

و نكتبها اختصارا على الشكل: $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ أو $\left(a_{ij}\right)$.

نصطلح على أن نكتب المصفوفة A على شكل جدول مستطيل ذو n سطر و m عمود على النحو التالي

$$\begin{array}{cc} \text{عمود } m & \\ \downarrow & \\ A=\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}} & \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \leftarrow \text{سطر } n \end{array}$$

تسميات :

- الحدود a_{ij} نسميها أيضا معاملات A. ونقول إن A ذات n سطر و p عمود ونعبر عنها باختصار بـ: $n\times p$ مصفوفة أو مصفوفة $n\times p$.
- $n\times p$ هو رتبة المصفوفة A
- السطر الذي دليله i هو $\left(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ip}\right)$ والعمود الذي دليله j هو المتتالية $a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj}$ كما هو مبين في المصفوفة A.
- مجموعة $n\times p$ مصفوفات على الحقل $\mathbb{k}$ نرمز لها بـ $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$.
- الدليل الأيمن مخصص لترقيم الأعمدة والدليل الأيسر مخصص لترقيم الأسطر.

- إذا كان $n = p$ نضع $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{k}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ وعناصرها نسميها مصفوفات **مربعة** من الرتبة n .
- نسمي مصفوفة سطر كل مصفوفة من $\mathcal{M}_{1p}(\mathbb{k})$ و مصفوفة عمود كل مصفوفة من $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{k})$.
- المصفوفة الصّفر هي المصفوفة التي جميع عناصرها تساوي صفر الحقل K ، ويرمز لها $(0_{ij})_{(n,m)}$.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- نسمي مصفوفة **مثلثية سفلى** كل مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ، تحقق :

$$\forall i, j \in \{1,\dots,n\}, i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- نسمي مصفوفة **مثلثية عليا** كل مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ، تحقق :

$$\forall i, j \in \{1,\dots,n\}, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- نسمي مصفوفة **قطرية** كل مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ، تحقق :

$$\forall i, j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نقول أن A هي المصفوفة الواحديّة إذا كان:

$\forall i, j \in \{1,...,n\}, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ و $a_{ii} = 1$. ونرمز لها بـ I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

نقول أن A سلّمية إذا كان:

$\forall i, j \in \{1,...,n\}, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ و $a_{ii} = \lambda \in K$.

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

تكون المصفوفتان $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ و $B = (b_{ij})_{(p,q)}$ ، على الحقل K ، متساويتان إذا وفقط إذا:

1. كانتا من مرتبة واحدة إي $m = p$ و $n = q$.
2. العناصر المتقابلة متساويّة، أي $a_{ij} = b_{ij}$ ، $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$ و $\forall j \in \{1,\cdots,n\}$.

ونكتب: $A = B \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij}$ ، $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$ ، $\forall j \in \{1,\cdots,n\}$ حيث $m = p$ و $n = q)$.

منقول مصفوفة :

لتكن المصفوفة $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ نسمي منقول المصفوفة A ونرمز لها بـ A^{-1} من $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{k})$ المعرفة كمايلي:

$\forall i, \forall j: b_{ij} = a_{ji}$, ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$.

لاحظ أن السطر i من ${}^tA$ هو العمود i من A. لدينا إذن ${}^t({}^tA) = A$.

مثال :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ و منه $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة :

الشعاع X من K^n هو مصفوفة ذات n سطرا وعمود وحيد، نكتبه $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

تعريف :

نقول إن المصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ انها **متناظرة** إذا و فقط إذا كان $A = A^t$.

تعريف :

نقول إن المصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ انها **تخالفية** إذا و فقط إذا كان $A = -A^t$.

خاصية :

مهما تكن المصفوفتان A من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ و B من $\mathcal{M}_{pm}(\mathbb{k})$ فان: $(A\times B)^t = B^t \times A^t$ و 1) $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

3.10 العمليات على المصفوفات

3.10.1 الجمع:

من أجل $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ و $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ نعرف الجمع $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

خاصّية :

1. جمع المصفوفات تبديلي، أي: $\forall A, B \in M_{np}\ ,\ A + B = B + A$
2. جمع المصفوفات تجميعي، أي:

$$\forall A, B, C \in M_{np}\ ,\ A + (B + C) = (A + B) + C$$

3. يوجد عنصر حيادي وهي المصفوفة الصّفر من M_{np}:

$$\forall A \in M_{np}\ , A + 0 = A$$

4. كلّ مصفوفة A تقبل نظرتها ، نرمز لها بـ $(-A)$:

$$A + (-A) = 0 \quad \text{حيث} \quad -A = (-a_{ij})$$

5. إذن المجموعة M_{np} المزوّدة بعملية الجمع هي زمرة تبديليّة

ملاحظة :

من التعريف يمكن التأكد أن $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ مزودة بهاتين العمليتين هي فضاء شعاعي على الحقل K ومولد بالعائلة $\{M_{ij}\}_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ من عناصر $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ حيث المصفوفة M_{ij} كل حدودها معدومة ما عدا الحد الواقع في السطر i والعمود j فهو مساوي لـ 1.

وبالتالي فالعائلة مولدة لـ $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ ويمكن بسهولة التأكد من أنها مستقلة. إذن فهي أساس ومنه $\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{k}) = np$.

3.11 الضّرب بعدد سلّمي

تعريف :

إذا كانت $A=(a_{ij})$ مصفوفة من الشكل (n,m)، من أجل كل $\lambda\in\mathbb{k}$، نرمز بالرمز λA للمصفوفة (λa_{ij}) والتي من الشكل (n,m) والمحصل عليها بضرب جميع عناصر المصفوفة A بالكمية السلمية λ .

مثال

في مجموعة المصفوفات $M_{2,3}(\mathbb{R})$ لدينا

$$5\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -20 & 0\\ 15 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

خاصّية :

1. التّوزيع بالنّسبة لجمع المصفوفات

$$\forall\lambda\in\mathbb{k},\forall A,B\in M_{nm}(\mathbb{k}),\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

2. التّوزيع بالنّسبة لجمع السّلميات

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{k},\forall A\in M_{nm}(\mathbb{k}),\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

3. التّجميع: $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{k},\forall A\in M_{nm}(\mathbb{k}),\ \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

4. لدينا $\forall A\in M_{nm}(\mathbb{k})\ ,\ 1A=A$

مثال:

احسب $3A+2B-C$ حيث

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ، $C=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

الحلّ

لدينا $2B=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ ، $3A=\begin{pmatrix}9 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ ، $-C=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

ومنه $3A+2B-C=\begin{pmatrix}9+8-1 & 6+4-5\\ 0+2+3 & 3+2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

مثال :

أثبت أنّ المصفوفات التّاليّة هي عناصر لـ $M_{22}(IR)$ مستقلّة خطّيا:

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ ، $C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

3.11.1 الضرب:

ضرب المصفوفتين $B\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{k}), A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ ، $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}, B=\left(b_{st}\right)_{\substack{1\le s\le p\\1\le t\le q}}$ ، هو المصفوفة

$$\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}}=C\in\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{k})$$

حيث

$$\forall(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,q\}:\quad c_{ij}=\sum_{1\le s\le p}a_{is}b_{sj}$$

ونرمز لهذا الضرب بـ $A\cdot B=C$ أو $AB=C$.

$$X:\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{k})\times\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{k})\to\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{k})$$
$$(A,B)\mapsto C=A\times B$$

و من أجل $\lambda\in\mathbb{k}$ نعرف العملية الخارجية $\lambda.A=\left(\lambda.a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$

ملاحظة:

المعامل c_{ij} هو الجداء السلمي للسطر i من A والعمود j من B. لضرب A في B يشترط أن يكون عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر B. بصفة عامة، ضرب المصفوفات، غير تبديلي.

هذا وننصح، بترتيب المصفوفات كما في الشكل الآتي ليسهل إجراء عملية الضرب هذه:

$$\begin{array}{ccc} & & B\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p}\\ \vdots & & \boxed{} & & \vdots\\ \vdots & & \boxed{b_{2j}} & & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pq}\end{bmatrix}\\ & & \downarrow\\ A\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & & & \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{ip}}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np}\end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} & \cdots & & \cdots\\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \boxed{c_{ij}} & \vdots\\ & & & \vdots\\ & \cdots & & \cdots\end{bmatrix}\end{array}$$

خواص:

تحت شروط إمكانية إجراء عمليات ضرب وجمع المصفوفات تكون الخواص التالية محققة

1. $A(BC)=(AB)C$
2. $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$
3. $A(B+C)=AB+AC$
4. $(A+B)C=AC+BC$

مثال:

احسب الجداء AB حيث

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

الحلّ :

إنّ عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B ، إذن الجداء ممكن، لدينا في الحلة العامّة إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \text{ فإنّ } AB=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix} \text{ حيث}$$

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$$

$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}$$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}$$

$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$$

$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}$$

إذن

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad =AB=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -5\\ 10 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد المصفوفة $A\in M_2(IR)$ بحيث

$$\begin{pmatrix}6 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}A=A\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

الحلّ :

لتكن $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ ، إذن $\begin{pmatrix}6 & -1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x-z & 6y-t\\ -3z & -3t\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x+3y & -3x+6y\\ -4z+3t & -3z+6t\end{pmatrix}$$

ومنه نجد $A=t\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{7}{9}\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ، $t\in IR$.

مثال:

لدينا
$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+2v+3w\\4u+5v+6w\end{pmatrix}$$

مثال:

لتكن المصفوفات التالية : $\mathcal{A}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix};\mathcal{B}\begin{pmatrix}0&7\\-1&3\end{pmatrix};\mathcal{C}\begin{pmatrix}1&7\\-2&6\\5&1\end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&7\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&16\\-4&26\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}\times\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&7\\-1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}13\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&28\\5&9\end{pmatrix}$$

$\mathcal{AC}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7\\-2&6\\5&1\end{pmatrix}$ لايمكن حسابها لانها لا تحقق الشرط

ملاحظة :

- مهما كانت $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ لدينا:

$$\begin{aligned}A.I_n&=I_n.A\\&=A\end{aligned}$$

حيث هي I_n مصفوفة الوحدة، ذات n سطرا و n عمودا، كل معاملاتها معدومة ما عدا معاملات القطر الرئيسي كل منها يساوي 1.

- في الحالة العامة المجموعة M_{nm} لا تحوي عنصرا حياديا إذا كان $n\neq m$.

ملاحظات

1 هذه الحلقة ليست تبديليّة في الحلة العامّة لأنّ $AB\neq BA$.

2. هذه الحلقة ليست تامّة لأن: $AB=0 \not\Leftarrow (A=0$ أو $B=0)$.

3. $AB=AC \not\Leftarrow B=C$

مثال

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

تعريف:

من أجل $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ، إذا وُجدت مصفوفة $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ بحيث $AB=BA=I_n$ $AB=BA=I_n$ نقول عن B إنها **مقلوب** A ونكتب $B=A^{-1}$.

ملاحظة:

نقول أيضا عن A إنها **مقلوب** B ونكتب $A=B^{-1}$.

خواص :

1. إذا كانت $A\in M_n$ قابلة للقلب عندئذ تكون ${}^tA$ قابلة للقلب ولدينا $\left({}^tA\right)^{-1}={}^t(A)^{-1}$.
2. إذا كانت كلا من $A,B\in M_n$ قابلتين للقلب عندئذ تكون المصفوفة AB قابلة للقلب ولدينا $(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$.

المصفوفات المتشابهة

تعريف :

لتكن $A,B\in M_n(K)$. نقول أن A مشابهة لـ B إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة $P\in GL_n(K)$ بحيث $B=P^{-1}AP$.

أثر مصفوفة وأثر تطبيق خطّي :

تعريف:

لتكن المصفوفة المربعة $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ، نسمي العنصر $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ من $\mathbb{k}$ أثر المصفوفة A و نرمز له بالرمز $tr(A)$ ، و نكتب $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

مثال :

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\6&4&-1\\3&9&3\end{bmatrix}$ و المصفوفة $A^t=\begin{bmatrix}1&6&3\\0&4&9\\2&-1&3\end{bmatrix}$

لدينا $tr(A)=1+4+3=8$ و $tr(A^t)=1+4+3=8$.

مبرهنة:

1. إن التطبيق :

$$\begin{aligned} tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{k}) &\to \mathbb{k} \\ A &\mapsto tr(A) \end{aligned}$$

شكل خطي على $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

2. أيا كانت A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$، كان $tr(A) = tr(A^t)$.

3. إن أثر مصفوفة الوحدة يساوي n، أي $tr(I_n) = n$.

4. أيا كانت A من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{k})$ و أيا كانت B من $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{k})$ كان $tr(AB) = tr(BA)$.

مبرهنة:

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$، و لنفرض أنهما متشابهتان ، عندئذ يكون $tr(A) = tr(B)$.

برهان:

بما أن A و B مصفوفتان مربعتان من $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ و متشابهتان فإنه توجد مصفوفة P قابلة للقلب بحيث : $A = PBP^{-1}$

و بالتالي

$$\begin{aligned} tr(A) &= tr(PBP^{-1}) \\ &= tr(PP^{-1}B) \\ &= tr(I_nB) \\ &= tr(B) \end{aligned}$$

3.12 مصفوفة تطبيق خطي

تعريف:

ليكن E و F فضاءان شعاعيان على الحقل $\mathbb{k}$ بعداهما p و n لى الترتيب، $e = \{e_i\}_{1\le i\le p}$ أساس لـ E و $\{f_j\}_{1\le j\le n}$ أساسا F والتطبيق الخطي $\varphi : E \to F$.

مصفوفة φ المرفقة بهذين الأساسين هي $n\times p$ مصفوفة $A_\varphi = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ ذات معاملات في $\mathbb{k}$ ، حيث $\varphi(e_j) = \sum_{1\le i\le n} a_{ij} f_i$.

$\varphi(e_j) = \sum_{1\le i\le n} e_{ij} f_i$ و الشعاع $\varphi(e_j)$ يُعين العمود j من المصفوفة A_φ.

ملاحظة :

مصفوفة تطبيق خطي تُعين بواسطة أساسين، لفضائي البدء والوصول، فعند تغييرهما تتغير المصفوفة. إذا كان فضاءا البدء والوصول متساويين في هذه الحالة، إن لم ترد أي إشارة للأساسين فإن هناك أساس واحد مأخوذ لكلا الفضائين.

من أجل $x \in E$، $x = \sum_{1\le i\le p} x_i e_i$ نضع $[x]_e = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ونسميه بمركبات x في الأساس e. العمود j من A_φ هو

مركبات الشعاع $\varphi(e_j)$ في أساس F.

ملاحظة:

نضع: $X=[x]_e$ مركبات الشعاع $x\in E$ في الأساس $e=\{e_i\}_{1\le i\le p}$ و $Y=[y]_f$ مركبات الشعاع $y=\varphi(x)$ في الأساس $f=\{f_j\}_{1\le j\le n}$ للفضاء F:

$$y=\sum_{1\le i\le n} y_i f_i=\varphi(x)=\varphi\left(\sum_{1\le j\le p} x_j e_j\right)=\sum_{1\le j\le p} x_j \varphi(e_j)$$
$$=\sum_{1\le j\le p} x_j\left[\sum_{1\le i\le n} a_{ij} f_i\right]=\sum_{1\le i\le n}\left[\sum_{1\le j\le p} a_{ij} x_j\right] f_i$$

من كون $\{f_j\}_{1\le j\le n}$ مستقلة لدينا:

$$1\le i\le n:\quad y_i=\sum_{1\le j\le p} a_{ij}x_j=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ip})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$$

وبالتالي يصبح لدينا $Y=A_\varphi X$ أي أن $[\varphi(x)]_f=A_\varphi.[x]_e$.

مثال:

$E=\mathbb{R}^2$ مزود بالأساس $\{e_1={}^t(1,1), e_2={}^t(1,-1)\}$ و $F=\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس

$$\{f_1={}^t(1,1,0),\ f_2={}^t(1,0,1),\ f_3={}^t(0,1,1)\}$$

والتطبيق الخطي

$$\varphi:\quad E\to F$$
$$(x_1,x_2)\mapsto(x_1+x_2, x_1-x_2, x_1+x_2)$$

A_φ مصفوفة φ. هي إذن 2×3 مصفوفة.

ملاحظة:

بكل تطبيق خطي على فضائين منتهي البعد ترفق مصفوفة وحيدة. والعكس أيضا صحيح.

3.13 تغيير الأساس

تعريف:

ليكن E ف.ش. بعده n وأساسين $\{e_i'\}_{1\le i\le n}, \{e_i\}_{1\le i\le n}$ لـ E.

نسمي **مصفوفة الانتقال** P من الأساس (القديم) $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ إلى الأساس (الجديد) $\{e_i'\}_{1\le i\le n}$ المصفوفة المربعة، للتطبيق الحيادي

$$id_E:(E,\{e_i'\})\to(E,\{e_i\})$$

ينقل x من E مكتوبا في الأساس $\{e'_i\}_{1\le i\le n}$ إلى x مكتوبا في الأساس $\{e_i\}_{1\le i\le n}$

أي $x\in E:\quad [x]_e = P[x]_{e'}$.

الشعاع $[x]_e$ نسميه شعاع مركبات x في الأساس e.

ملاحظة:

1. إذا كانت P هي مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ إلى الأساس $\{e'_i\}_{1\le i\le n}$ فإن مصفوفة الانتقال من $\{e'_i\}_{1\le i\le n}$ إلى $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ هي P^{-1} (مقلوب P).

ملاحظة:

مصفوفة الانتقال قابلة للقلب لأننا نستطيع دوما التعبير عن أشعة أساس بأشعة أساس آخر.

2. ليكن E و G ف.ش كل منهما ذو بعد منته و $f:E\to G$ ت.خ.

نفرض $\{e_i\},\{e'_i\}$ أساسين لـ E و P مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_i\}$ إلى $\{e'_i\}$.

و $\{g_i\},\{g'_i\}$ أساسين لـ G، Q مصفوفة الانتقال من الأساس $\{g_i\}$ إلى $\{g'_i\}$.

A مصفوفة f بالنسبة للأساسين $\{e_i\}$ لـ E و $\{g_i\}$ لـ G،

B مصفوفة f بالنسبة للأساسين $\{e'_i\}$ لـ E و $\{g'_i\}$ لـ G،

لدينا: العلاقة $B=Q^{-1}AP$.

يمكن استنتاج هذا من تعريف مصفوفة الانتقال والمخطط التالي: كل فضاء مصحوب بأساس له:

$$E,\{e'_i\}\xrightarrow[P]{id_E}E,\{e_i\}\xrightarrow[A]{f}G,\{g_i\}\xrightarrow[Q^{-1}]{id_G}G,\{g'_i\}$$

وكون $f=id_G\circ f\circ id_E$

$$E,\{e'_i\}\xrightarrow[B]{f}G,\{g'_i\}$$

وبالتالي $B=M_f=M_{id_G\circ f\circ id_E}=Q^{-1}AP$.

حالة خاصة:

إذا كان $E=G$; $\forall i:\quad e_i=g_i,\quad e'_i=g'_i$ فإن $B=P^{-1}AP$. حينئذ نقول إن A و B **متشابهتان.**

مثال:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\mathscr{P}_n=\{r\in \mathrm{R}[X]: deg(r)\le n\}$ هو ف.ش على الحقل R بعده $n+1$. ليكن الأساسين لـ $\mathscr{P}_2$:

$\{e_0=1, e_1=X, e_2=X^2\}$ و $\{e'_0=1+X+X^2, e'_1=1+X, e'_2=X+X^2\}$

أساسين لـ $\mathscr{P}_1$: $\{g_0=1, g_1=X\}$ و $\{g'_0=1-X,\ g'_1=1+X\}$.

والتطبيق الخطي $f:\mathscr{P}_2\to\mathscr{P}_1$ المعرف بـ $a+bX+cX^2\mapsto(a-b)+(c-b)X$.

لدينا:
$$\begin{cases} e'_0 = e_0 + e_1 + e_2 \\ e'_1 = e_0 + e_1 \\ e'_2 = \qquad e_1 + e_2 \end{cases}$$

مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_i\}$ إلى $\{e'_i\}$ هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لدينا:
$$\begin{cases} g'_0 = g_0 - g_1 \\ g'_1 = g_0 + g_1 \end{cases}$$

مصفوفة الانتقال من الأساس $\{g_i\}$ إلى $\{g'_i\}$ هي $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

من المتطابقتين السابقتين لدينا:

$$\begin{cases} g_0 = \frac{1}{2} g'_0 + \frac{1}{2} g'_1 \\ g_1 = -\frac{1}{2} g'_0 + \frac{1}{2} g'_1 \end{cases}$$ ومنه $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

بإجراء الحسابات اللازمة نحصل على:

$$\begin{cases} f(e_0) = 1 = g_0 \\ f(e_1) = -1 - X = -g_0 - g_1 \\ f(e_2) = X = g_1 \end{cases}$$

مصفوفة f وفق الأساسين $\{e_i\}$ لـ $\mathscr{P}_2$ و $\{g_i\}$ لـ $\mathscr{P}_1$ هي إذن $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

وبالتالي مصفوفة f وفق الأساسين $\{e'_i\}$ لـ $\mathscr{P}_2$ و $\{g'_i\}$ لـ $\mathscr{P}_1$ هي: $B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4 الأشكال متعددة الخطية والمحددات

4.1 الأشكال متعددة الخطية

ما يهمنا في هذا الموضوع هو دراسة و حساب المحدد واستنتاج خواصه.

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعيا على الحقل التبديلي $\mathbb{k}$. نقول عن تطبيق $\varphi: E^p \to \mathbb{k}$ إنه p خطي إذا كان من أجل كل دليل i وكل جملة $x_i \in E$، التطبيق الفرعي من E نحو $\mathbb{k}$، $x_i \mapsto \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p\right)$ خطي. ونقول انه خطي بالنسبة لـ x_i.

الخاصية التالية ناتجة مباشرة من التعريف.

إذا وجد i بحيث $x_i = 0$ فإن $\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p\right) = 0$.

مجموعة الأشكال p خطية لـ E^p نرمز لها بـ $\mathcal{L}_p(E)$ وهي فضاء شعاعي.

4.2 العبارة العامة لشكل p خطي:

لما الفضاء E بعده n و$\{e_i\}$ أساسا له و $\forall i, \forall j; a_{ji} \in \mathbb{k}: x_i = \sum_{1 \le j \le n} a_{j,i} e_j$ فإن:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) &= \varphi\left(\sum_{1 \le j_1 \le n} a_{j_1,1} e_{j_1,1}, x_2, \ldots, x_p\right) \\
&= \sum_{1 \le j_1 \le n} \left[a_{j_1,1} \varphi\left(e_{j_1,1}, x_2, \ldots, x_p\right)\right] \\
&= \sum_{1 \le j_1 \le n} \left[a_{j_1,1} \varphi\left(e_{j_1,1}, \sum_{1 \le j_2 \le n} a_{j_2,2} e_{j_2,2}, \ldots, x_p\right)\right] \\
&= \sum_{\substack{1 \le j_1 \le n \\ 1 \le j_2 \le n}} \left[a_{j_1,1} a_{j_2,2} \varphi\left(e_{j_1,1}, e_{j_2,2}, \ldots, x_p\right)\right]
\end{aligned}$$

وهكذا حتى تعويض x_p بعبارته فنحصل على الشكل العام:

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \sum_{h \in F_{p,n}} \left[a_{h(1),1} a_{h(2),2} \cdots a_{h(p),p} \varphi\left(e_{h(1)}, e_{h(2)}, \ldots, e_{h(p)}\right)\right]$$

حيث $F_{p,n}$ هي مجموعة كل التطبيقات من $\{1, 2, \ldots, p\}$ نحو $\{1, 2, \ldots, n\}$.

لتوضيح ما سبق: لما $n = 2, p = 2$ لدينا:

$$x_1 = ae_1 + be_2, x_2 = ce_1 + de_2$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2)=\varphi(ae_1+be_2,x_2)\\&=a\varphi(e_1,x_2)+b\varphi(e_2,x_2)\\&=a\varphi(e_1,ce_1+de_2)+b\varphi(e_2,ce_1+de_2)\\&=a\varphi(e_1,ce_1+de_2)+b\varphi(e_2,ce_1+de_2)\\&=ac\varphi(e_1,e_1)+ad\varphi(e_1,e_2)+bc\varphi(e_2,e_1)+bd\varphi(e_2,e_2)\end{aligned}$$

فيما يلي نتناول دراسة $\mathcal{L}_p(E)$.

4.3 الأشكال p-خطية المتناظرة والمتناوبة

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعي نقول عن شكل p خطي φ، $\varphi\in\mathcal{L}_p(E)$ على E، أنه:

1. متناظر إذا كان:

من أجل كل عائلة $\{x_i\}_{1\le i\le p}$ من عناصر E وكل تبديلة $\sigma\in S_p$ لدينا:

$$\varphi\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(p)}\right)=\varphi\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right).$$

نذكر أن S_p هي زمرة تبديلات المجموعة $\{1,2,\dots,p\}$.

2. متناوب إذا كان:

$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_p)=0$ كلما كانت عناصر الجملة $\{x_i\}_{1\le i\le p}$ ليست كلها مختلفة.

ملاحظة:

مجموعة الأشكال p خطية المتناوبة على E هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{L}_p(E)$ ونرمز لها بالرمز $L_p(E)$.

مبرهنة:

ليكن $\varphi\in\mathcal{L}_p(E)$.

إذا كان φ متناوبا فإن: $\varphi\left(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\dots,x_{\tau(p)}\right)=-\varphi\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right)$ مهما كانت المناقلة $\forall\tau\in S_p$.

بصفة عامة إذا كان φ متناوبا فإن:

$$\varphi\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(p)}\right)=\varepsilon(\sigma)\varphi\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right)$$

مهما كانت التبديلة $\sigma\in S_p$ حيث $\varepsilon(\sigma)$ هي إشارة σ.

بُعد الفضاء: $L_p(E)$

مبرهنة:

ليكن E فضاء شعاعي بعده n على حقل $\mathbb{k}$ و $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ أساسا له. لدينا:

1. من أجل كل p، $p>n$ فإن $L_p(E)=\{0\}$ و $\left(\dim L_p(E)=0\right)$.

2. $\dim L_n(E)=1 ,(p=n)$.

ملاحظة:

إذا كان $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ أساسا لـ E يوجد شكل n خطي متناوب Δ على E وحيد بحيث $\Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n)=1$.
وإنه من أجل كل شكل n خطي متناوب φ على E توجد سلمية α بحيث $\varphi=\alpha\Delta$.

4.4 محدد تطبيق خطي داخلي

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعي بعده n و $\{x_i\}_{1\le i\le n}$، n شعاعا من E. محدد $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ بالنسبة للأساس $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ هو السلمية:

$$\det(x_1,\ldots,x_n)=\Delta(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

حيث $x_i=\sum_{1\le j\le n}a_{ji}e_j \cdot 1\le i\le n\big(\Delta(e_1,\ldots,e_n)=1\big)$.

ملاحظة:

من كون Δ شكلا n خطيا متناوبا فإنه إذا كانت الجملة $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ مرتبطة خطيا فإن محددها معدوم.

ملاحظة:

ان معين المصفوفة المربعة هو عبارة عن عدد يمكن حسابه من عناصر المصفوفة بطريقة معينة. ولا يجب أن يغيب عن ذهننا أن هناك فارقاً كبيراً بين المحدد والمصفوفة. فالمحدد هو عدد فقط كما ذكرنا، في حين أن المصفوفة مجموعة أعداد حقيقية موضعة في أسطر وأعمدة.

4.5 محدد مصفوفة مربعة

تعريف:

$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة ذات معاملات في الحقل $\mathbb{k}$. محدد A هو السلمية

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

($\det(x_1,\ldots,x_n)=\Delta(x_1,\ldots,x_n)$ حيث الأشعة هي أعمدة A).

ملاحظة:

محدد المصفوفة A هو محدد التطبيق الخطي الذي مصفوفته بالنسبة للأساس القانوني ل $\mathbb{k}^n$، $f\in\mathcal{L}(\mathbb{k}^n)$ أي المعرف بـ
$x\in\mathbb{k}^n : f(x)=Ax$.

إذا كانت $n=1$ و $A=(a)$ مصفوفة ذات سطر وحيد وعمود وحيد فإن $\det(A)=a$.

مثال:

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة 2×2 ، $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ ومنه $\det(A)=2\times 1-6\times 3$ أي $\det(A)=-16$.

مبرهنة:

ليكن $\mathbb{k}$ حقلا.

1. محدد المصفوفة الحيادية I_n هو 1 $(\det(I_n)=1)$.

2. إذا كان $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ فإن $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

3. إذا كان $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ فإن: A قابلة للقلب إذا وفقط إذا $\det(A)\neq 0$.

4.6 خواص محدد مصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة أي $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ذات معاملات في الحقل $\mathbb{k}$. $A=(C_1,C_2,...,C_n)$ معتبرين أعمدتها $\{C_i\}_{1\le i\le n}$ $\{C_i\}_{1\le i\le n}$ كأشعة من $\mathbb{k}^n$. لدينا:

1. إذا أجرينا تبديلا σ على أعمدة A فإن: (من تناوب المحدد)

$$\det\left(C_{\sigma(1)},C_{\sigma(2)},\ldots,C_{\sigma(n)}\right)=\varepsilon(\sigma)\det(C_1,C_2,\ldots,C_n)=\varepsilon(\sigma)\det(A)$$

حيث $\varepsilon(\sigma)$ هي إشارة σ.

2. إذا كانت $\{C_i\}_{1\le i\le n}$ مرتبطة خطيا فإن $\det(A)=0$ (من تعدد خطية وتناوب المحدد).

وإذا كانت $\{C_i\}_{1\le i\le n}$ مستقلة فإن $\det(A)\neq 0$ (لأن $\{C_i\}_{1\le i\le n}$ تصبح أساسا ل $\mathbb{k}^n$).

3. اذا كانت $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ و $\lambda\in\mathbb{k}$ فان $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.

4.7 حساب محدد مصفوفة

$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة ، من أجل كل i و j نرمز بـ Δ_{ij} لمحدد المصفوفة المربعة $(n-1)(n-1)$ الناتج عن حذف السطر i والعمود j من A .

قضية:

إذا كانت $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة بحيث $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & B & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix}$ ، حيث B مصفوفة مربعة $(n-1)(n-1)$

فإن $\det(A)=a_{11}\det(B)$.

مبرهنة:

لتكن $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة $n\times n$. مهما كانت الأدلة i و j لدينا:

$$\det A=\sum_{1\le k\le n}(-1)^{k+j}a_{kj}\Delta\left(a_{kj}\right)$$ (تفكيك المحدد وفق العمود j)

$$\det A=\sum_{1\le k\le n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta\left(a_{ik}\right)$$ (تفكيك المحدد وفق السطر i).

نتيجة:

إذا كانت المصفوفة A مثلثية علوية على الشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

فإن: $\det(A)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ (جداء عناصر القطر الرئيسي).

المحدد من المرتبة الثانية:

لتكن لدينا المصفوفة الآتية: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$ من المرتبة الثانية.

إن معين هذه المصفوفة : $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

أمثلة: إن قيمة المحددات التالية هي:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=1\times 4-2\times(-3)=4+6=10$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 7 & -4\end{vmatrix}=3\times(-4)-(-1)\times 7=-12+7=-5$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -2 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-2\times 4-3\times(-1)=-8+3=-5$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} -2 & 8\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-2\times 4-8\times(-1)=-8+8=0$$

خواص المحدد من المرتبة الثانية:

1ـ لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلنا سطريه بعموديه أو بدلنا عموديه بسطريه (معين مصفوفة يساوي معين منقولها). أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_2 & b_2\end{vmatrix}$$

2. تتبدل إشارة المحدد إذا بدلنا موقعي سطريه (عموديه). أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

3. لضرب (قسمة) المحدد بعدد ما وليكن $\alpha(\alpha \neq 0)$ يكفي أن نضرب عنصري سطر (عنصري عمود) في المحدد بالعدد α ، أي أنه إذا كان:

$$\alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha b_1 \\ a_2 & \alpha b_2 \end{vmatrix}$$

كذلك فإن عملية إخراج عامل مشترك من عنصر سطر ما (عمود ما) تجعل بالإمكان إخراج هذا العامل المشترك من قيمة المحدد بالذات.

4. إذا كان عنصرا أحد السطرين (أحد العمودين) مساويين عنصري السطر الآخر (العمود الآخر) بعد ضربهما بمقدار ثابت وليكن $\alpha(\alpha \neq 0)$ فإن قيمة المحدد تكون معدومة.

ويمكن التوصل إلى هذه الخاصة مباشرة من الخاصة الرابعة والخاصة الثالثة. فإذا كان:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix}$$

فسيكون:

$$\Delta = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \alpha\left(ab - ab\right) = \alpha.0 = 0$$

5. لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا عنصري أحد سطريه (أو عنصري أحد عموديه) بعد ضربهما بعدد ما إلى عنصري السطر الآخر (أو إلى عنصري العمود الآخر). أي أن:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & b_1 \\ a_2 + 2b_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(a_1 + 2b_1\right) b_2 - \left(a_2 + 2b_2\right) b_1 \\ &= a_1 b_2 + 2b_1 b_2 - a_2 b_1 - 2b_2 b_1 \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ &= \Delta \end{aligned}$$

المحدد من المرتبة الثالثة:

يأخذ المحدد من المرتبة الثالثة الشكل التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ويمكن التوصل إلى إيجاد قيمة المحدد باتباع إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى- طريقة النشر وفق سطر أو عمود (طريقة بيزوت ***Bezout***):

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة الأولى:

نختار أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) التي فيها أصفار أكثر من غيرها.

الخطوة الثانية:

نحسب ما نسميه مصغر كل عنصر في ذلك السطر (أو ذلك العمود) الذي اخترناه. ونعرف مصغر العنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز $\Delta(a_{ij})$ (حيث $i, j = 1,2,3$) بأنه المحدد المتعلق بهذا العنصر والذي نحصل عليه بحذف عناصر السطر وعناصر العمود الواقع فيهما العنصر a_{ij} .

فمثلاً إن $\Delta(a_{11})$ هو مصغر العنصر a_{11} ونحصل عليه بحذف السطر الأول والعمود الأول في المحدد الأصلي فيكون:

$$\Delta(a_{11}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

كما أن $\Delta(a_{13})$ هو مصغر العنصر a_{13} ونحصل عليه بحذف السطر الأول والعمود الثالث في المحدد الأصلي فيكون:

$$\Delta(a_{13}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

الخطوة الثالثة:

نحسب ما نسميه مرافق كل عنصر في ذلك السطر (أو ذلك العمود) الذي اخترناه. ونعرف مرافق العنصر a_{ij} بأنه مصغر العنصر a_{ij} مضروباً بـ $(-1)^{i+j}$ ، أي يساوي $(-1)^{i+j}\,\Delta(a_{ij})$.

فمرافق العنصر a_{11} :

$$(-1)^{1+1}\,\Delta(a_{11}) = \Delta(a_{11})$$

ومرافق العنصر a_{12} :

$$(-1)^{1+2}\,\Delta(a_{12}) = -\Delta(a_{12})$$

وهكذا. نلاحظ أنه إذا كان مجموع الدليلين i, j عددًا زوجيًا فإن $(-1)^{i+j} = 1$ ويكون مرافق العنصر a_{ij} مساويًا مصغره. أما إذا كان مجموع الدليلين i, j عددًا فرديًا فإن $(-1)^{i+j} = -1$ ويكون مرافق العنصر a_{ij} مساويًا مصغره مضروبًا بـ -1 .

الخطوة الرابعة:

نحسب قيمة المحدد بواسطة النشر وفق السطر (أو العمود) الذي اخترناه. وهذه القيمة تساوي مجموع عناصر السطر (أو

مجموع عناصر العمود) المختار بعد ضرب كل عنصر بمرافقه.

فمثلاً: إن قيمة المحدد بوساطة النشر وفق عناصر السطر الأول هي:

$$\Delta = a_{11}\Delta(a_{11}) - a_{12}\Delta(a_{12}) + a_{13}\Delta(a_{13})$$

وقيمة المحدد بوساطة النشر وفق عناصر السطر الثاني هي:

$$\Delta = -a_{21}\Delta(a_{21}) + a_{22}\Delta(a_{22}) - a_{23}\Delta(a_{23})$$

وقيمة المحدد بوساطة النشر وفق عناصر العمود الأول هي:

$$\Delta = a_{11}\Delta(a_{11}) - a_{12}\Delta(a_{12}) + a_{13}\Delta(a_{13})$$

ملاحظة :

- من طريقة حساب قيمة المحدد نستنتج مباشرة أنه إذا كان في المحدد سطر (أو عمود) كل عناصره أصفار فإن قيمة المحدد تكون صفراً.
- يمكن تطبيق الطريقة السابقة من أجل المحددات من مرتبة أعلى من الثالثة.

أمثلة:

لنوجد قيم المحددات التالية:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} ، \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} ، \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

إن نشر المحدد Δ_1 وفق عناصر السطر الأول هو:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= (-1)^{1+1} a_{11}\Delta(a_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}\Delta(a_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13}\Delta(a_{13}) \\
&= a_{11}\Delta(a_{11}) - a_{12}\Delta(a_{12}) + a_{13}\Delta(a_{13}) \\
&= 4\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4\times(2-0) - 2\times(2+3) + 0\times(0-3) \\
&= 8-10 \\
&= -2
\end{aligned}$$

أما نشر المحدد Δ_2 وفق عناصر السطر الثاني فهو:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= (-1)^{2+1} a_{21}\Delta(a_{21}) + (-1)^{2+2} a_{22}\Delta(a_{22}) + (-1)^{2+3} a_{23}\Delta(a_{23}) \\
&= -a_{21}\Delta(a_{21}) + a_{22}\Delta(a_{22}) - a_{23}\Delta(a_{23}) \\
&= -1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 1\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}2 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}\\ &= -(4-1)-0\times(4-5)-3(2-10)\\ &= -3+24\\ &= 21\end{aligned}$$

أما نشر المحدد Δ_3 وفق عناصر العمود الثاني فهو:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= (-1)^{1+2}a_{12}\Delta(a_{12})+(-1)^{2+2}a_{22}\Delta(a_{22})+(-1)^{3+2}a_{32}\Delta(a_{32})\\ &= -a_{12}\Delta(a_{12})+a_{22}\Delta(a_{22})-a_{32}\Delta(a_{32})\\ &= 0\times\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ &= 0\times(-4-0)-2\times(12-3)+1\times(0+1)\\ &= -18+1\\ &= -17\end{aligned}$$

<u>مثال</u>

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & -1\\ 9 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & -1\\ 9 & 0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 5\\ 9 & -2\end{vmatrix}$$

$$=2\left(5.0-(-1)(-2)\right)-1\left(2.0-(-1)9\right)+3\left(2(-2)-5.9\right)$$

$$=-4-9-147=-160$$

<u>الطريقة الثانية- طريقة الأقطار المتوازية (طريقة سيروس) :</u>

نكتب عناصر المحدد كما هي ثم نضيف على يمينها مباشرة العمود الأول ثم العمود الثاني، فينتج لدينا خمسة أعمدة وثلاثة أسطر كما يلي:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}$$

وتكون قيمة المحدد مساوية:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\left(a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}\right)$$

أمثلة:

أوجد قيمة المحددات التالية:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ ، } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ ، } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

لحساب قيمة المحدد الأول Δ_1 نكتب:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(4\times1\times2+2\times(-1)\times3+0\times1\times0\right)-\left(3\times1\times0+0\times(-1)\times4+2\times1\times2\right) \\
&= (8-6)-(4) \\
&= 2-4 \\
&= -2
\end{aligned}$$

لحساب قيمة المحدد الثاني Δ_2 نكتب:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2\times0\times2+2\times3\times5+1\times1\times1\right)-\left(5\times0\times1+1\times3\times2+2\times1\times2\right) \\
&= (0+30+1)-(0+6+4) \\
&= (31)-(10) \\
&= 21
\end{aligned}$$

لحساب قيمة المحدد الثالث Δ_3 نكتب:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(3\times2\times4+0\times0\times3+1\times(-1)\times1\right)-\left(3\times2\times1+1\times0\times3+4\times(-1)\times0\right) \\
&= (24+0-1)-(6+0+0) \\
&= (23)-(6) \\
&= 17
\end{aligned}$$

خواص المحدد من المرتبة الثالثة:

تتمتع معينات المرتبة الثالثة بالخواص نفسها التي تتمتع بها معينات المرتبة الثانية، ولهذا لن نعيد هنا ذكر هذه الخواص.

ملاحظة:

إن معين المصفوفة القطرية هو جداء عناصرها القطرية أي أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} \times a_{22} \times a_{33}$$

مثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times 3 \times 2$$
$$= 12$$

المحدد من المرتبة n:

تطبيق عددي:

أوجد قيمة المحدد من المرتبة الرابعة الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

لإيجاد قيمة هذا المحدد نلاحظ أن العمود الثالث يحوي أصفاراً أكثر من غيره، لذا نقوم بنشره وفق عناصر هذا العمود، فنجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\left[\left((-3)+24+0\right)-\left(2+0-8\right)\right]+0+0+\left[\left(0+2+6\right)-\left(16+0+9\right)\right]$$

$$= (-1)\left[(21)-(-6)\right]+\left[(8)-(25)\right]$$

$$= -27+17$$

$$= -10$$

نظريّة :

لتكن $A \in M_n$ لدينا: $|A| = |{}^tA|$.

ملاحظة

من هذه النّظريّة نستنتج أنّه كلّ خاصّية متعلّقة بمحدّد مصفوفة A الّتي تطبّق على أسطر A لها خاصّية مماثلة تطبّق على أعمدة A.

نظريّة :

لتكن $A \in M_n$ لدينا :

1. إذا كانت A مصفوفة لها سطر (عمود) أصفار، فإنّ $|A| = 0$.
2. إذا كانت A مصفوفة لها سطرين (عمودين) متساويين، فإنّ $|A| = 0$.
3. إذا كانت A مصفوفة مثلّثية علويّة أو سفليّة، فإنّ $|A|$ هو جداء العناصر القطريّة. وبالتّالي $|I_n| = 1$.

4.8 محدد منقول مصفوفة

قضية:

إذا كانت $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة فإن: $\det(A^t) = \det(A)$.

مثال :

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ومنه $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

ومنه

$$\det A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

4.9 المصفوفات المرافقة وبعض التطبيقات

تعريف

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من $M_n(K)$. نسمي مصفوفة مرافقة من الدرجة n للمصفوفة A والتي نشير لها بـ $ComA$ المصفوفة المعرفة بالشكل التالي $ComA=(A_{ij})_{i,j}$ ، حيث A_{ij} هو معامل التمام للوضعية (i,j). أي هي مصفوفة معاملي التّمام لعناصر a_{ij} لـ A.

مثال

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ، أحسب $ComA$.

الحلّ

حساب معاملي التّمام. لدينا

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-18$ ، $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2$ ،

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4$ ، $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-11$ ،

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=14$ ، $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=5$ ،

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-10$ ، $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4$ ،

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=-8$.

ومنه $ComA=\begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

4.10 مقلوب مصفوفة مربعة

بكل $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة ومن أجل i و j نضع $A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$ ونسميه المعامل المرفق بـ a_{ij} ،

حيث $\Delta_{ij}(A)$ محدد المصفوفة المربعة $(n-1)\times(n-1)$ الناتجة عن حذف السطر i والعمود j من A.

ونضع $B=(A_{ij})^t_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ (منقول مصفوفة معاملات A) ونسميها المصفوفة المرفقة بـ A.

مبرهنة:

من أجل كل $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفة مربعة لدينا:

$$A.B=B.A=\det\left(A\right).I_n$$

حيث I_n هي المصفوفة المربعة الحيادية $n\times n$.

حساب مقلوب مصفوفة

لقد رأينا فيما سبق أن $|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ من أجل كل $j\in\{1,...,n\}$. لنهتم الآن بدراسة الكمية $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}$ من أجل كل j,k من $\{1,...,n\}$ بحيث $j\neq k$. لنعتبر المصفوفة $B=(b_{ip})$ المحصل عليها من المصفوفة A وذلك بنزع العمود رقم j وتعويضه بالعمود رقم k:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1j} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nj} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

من جهة لاحظ أن $|B|=0$ لأنه يوجد عمودين متناسبين. من جهة أخرى بنشر محدد المصفوفة B حسب العمود رقم k نحصل على $|B|=\sum_{i=1}^{n}b_{ik}B_{ik}\ =\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}$

لأن معاملات التمام للعناصر الموجودة في العمود رقم k من المصفوفة B هي نفسها الموجودة في A وبالتالي فإن $|A|=0$. إذن برهنا على أن :

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}\ =\begin{cases}|A|, \ j=k\\ 0\ \ , \ j\neq k\end{cases}$$

غير أنه من أجل كل j,k $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}$ هو (j,k)-الحد من الجداء ${}^tA$ بـ $ComA$. ومن ثم

$${}^tA(ComA)=\begin{pmatrix}|A| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & |A|\end{pmatrix}=|A|I_n$$

هذه النتيجة تسمح لنا بالنظرية التالية

نظرية:

من أجل كل مصفوفة A مربعة لدينا: $A.{}^t(ComA)={}^t(ComA).A$

وإذا كان $|A|\neq 0$ فإن: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}{}^t(ComA)$.

مثال

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ ، أحسب $ComA$.

الحلّ

حساب معاملي التّمام. لدينا

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-18$ ، $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2$ ،

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4$ ، $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11$ ،

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=14$ ، $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5$ ،

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-10$ ، $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$ ،

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-8$.

ومنه $ComA=\begin{pmatrix}-18 & 2 & 4\\ -11 & 14 & 5\\ -10 & -4 & -8\end{pmatrix}$

لدينا $|A|=-46\neq 0$

$$A.{}^t(ComA)=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-46 & 0 & 0\\ 0 & -46 & 0\\ 0 & 0 & -46\end{pmatrix}=-46\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-46I_3=|A|I_3$$

إذن $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}{}^t(ComA)=\begin{pmatrix}\frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23}\\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23}\\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23}\end{pmatrix}$.

مثال:

لتكن المصفوفة $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{k})$: $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$.

لدينا بعد الحساب $\det(A)=-3$ و منه A قابلة للقلب.

نحسب مقلوب A عن طريق القاعدة: $A^{-1}=(\alpha_{ij})$

$$\alpha_{11}=\frac{1}{3}،\ \alpha_{12}=\frac{1}{3}،\alpha_{13}=\frac{1}{3}،\ \alpha_{21}=\frac{1}{3}،\ \alpha_{22}=\frac{1}{3}،\alpha_{23}=\frac{-2}{3}،\ \alpha_{31}=\frac{2}{3}،\ \alpha_{32}=\frac{-1}{3}،\ \alpha_{33}=\frac{-1}{3}$$

أي أن: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\end{bmatrix}$.

5 اختصار المصفوفات المربعة

فيما يلي نعتبر كل فضاء شعاعي E على حقل تبديلي $\mathbb{k}$ و $E\neq\{0\}$.

ليكن $f\in\mathcal{L}(E)$ (ت.خ.د.) مصفوفته بالنسبة لأساس $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ هي A .

نقصد باختصار A إيجاد أساس لـ E بحيث A' مصفوفة f بالنسبة إليه لها شكل ما، مثلا مثلثي أو قطري حينئذ توجد مصفوفة مربعة قابلة للقلب P بحيث $A'=P^{-1}AP$.

أي أن A مشابهة لـ A' . هدفنا في هذا الجزء هو تعيين الشروط الكافية لإيجاد الأساس المناسب لذلك.

5.1 القيم والأشعة الذاتية

تعريف:

ليكن $f\in\mathcal{L}(E)$. نقول عن شعاع $x\in E$ إنه ذاتي إذا:

1. $x\neq 0$.

2. اذا وُجد $\lambda\in\mathbb{k}$ بحيث $f(x)=\lambda x$.

السلمية λ وحيدة ونسميها قيمة ذاتية لـ f مرفقة بالشعاع الذاتي x ونسمي x شعاعا ذاتيا مرفقا بالقيمة الذاتي مجموعة القيم الذاتية لـ $f\in\mathcal{L}(E)$ هي كل السلميات $\lambda\in\mathbb{k}$ بحيث التطبيق الخطي الداخلي $f-\lambda I_n$ ليس متباينا، I_n التطبيق الحيادي على E . مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بـ λ هي الأشعة x من E بحيث $(f-\lambda I_n)(x)=0$ أي هي:

$Ker(f-\lambda I_n)=\{0\}$.

ملاحظة :

- لاحظ أن $x=0$ يحقق كذلك $f(x)=\lambda x$ مهما كانت $\lambda\in\mathbb{k}$ ، هذا الشعاع خاص لذلك نهتم بالأشعة غير المعدومة.
- لما $\dim E=n$ منته فإن $f-\lambda I_n$ ليس متباينا يكافئ $Ker\left(f-\lambda I_n\right)\neq\{0\}$ أي $f-\lambda I_n$ ليس متقابلا وبالتالي $\det\left(f-\lambda I_n\right)=0$.

من كون التطبيق الذي يرفق ت.خ.د. بمصفوفة هو تشاكل فإنه يمكننا توسيع مفهوم القيم والأشعة الذاتية إلى المصفوفات.

لتكن A_f مصفوفة f بالنسبة لأساس كيفي $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ لـ E. لدينا إذن $A_f-\lambda I_n$ مصفوفة $f-\lambda I_n$ وبالتالي من تعريف محدد مصفوفة فإن: $f-\lambda I_n=0$.

$$(1).........\det\left(f-\lambda I_n\right)=\det\left(A_f-\lambda I_n\right)=0$$

العلاقة (1) تصبح:

$$\det\left(f-\lambda I_n\right)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

تفكيك الطرف الأيسر يعطي كثير حدود من $K[\lambda]$ يتعلق بـ f كما هو موضح ولا يتعلق بالأساس لأن:

من أجل أساس آخر $e'=\{e'_i\}_{1\le i\le n}$ لـ E ، لتكن P مصفوفة الانتقال من e إلى e' و A'_f مصفوفة f بالنسبة للأساس e'

لدينا $A'_f=P^{-1}A_fP$ و $A'_f-\lambda I_n=P^{-1}A_fP-\lambda P^{-1}P=P^{-1}\left(A_f-\lambda I_n\right)P$

$$\begin{aligned}\det\left(A'_f-\lambda I_n\right)&=\det\left[P^{-1}\left(A_f-\lambda I_n\right)P\right]\\&=\det\left(P^{-1}\right)\det\left(A_f-\lambda I_n\right)\det\left(P\right)\\&=\det\left(P^{-1}\right)\det\left(P\right)\det\left(A_f-\lambda I_n\right)\\&=\det\left(A_f-\lambda I_n\right)\end{aligned}$$

5.2 كثير الحدود المميز

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعي ذا بعد منته n على الحقل $\mathbb{k}$، $f\in\mathcal{L}(E)$.

نسمي كثير الحدود المميز لـ f كثير الحدود $P_A(\lambda)=\det\left(A-\lambda I_n\right)$ حيث A هي مصفوفة f بالنسبة لأي أساس.

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n\times n$، كثير الحدود $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ نسميه أيضا كثير الحدود المميز لـA، وجذوره هي إذن القيم الذاتية لـA.

ملاحظة:

1. في الحقل $\mathbb{k}$ ، جذور المعادلة $P_A(\lambda)=0$ هي مجموعة القيم الذاتية لـA.
2. كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ له الشكل التالي: $P_A(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\alpha_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$ ، $\alpha_n=(-1)^n$, $\alpha_0=\det(A),\ \alpha_{n-1}=(-1)^{n-1}\sum\limits_{1\le i\le n}a_{ii}$ حيث $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.
3. بما أن $\deg\left(P_A(\lambda)\right)=n$ فإن كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ له على الأكثر n جذرا في $\mathbb{k}$.

مثال:

لتكن المصفوفة A هي حيث: $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

نعين القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A:

1- نعين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}-\lambda-1&1&1\\1&-\lambda-1&1\\1&1&-\lambda-1\end{vmatrix}\\&=(-\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda-1&1\\1&-\lambda-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&-\lambda-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-\lambda-1\\1&1\end{vmatrix}\\&=(-\lambda-1)\left[(-\lambda-1)^2-1\right]-\left[-\lambda-1-1\right]+\left[1-(-\lambda-1)\right]\\&=(-\lambda-1)\left[(\lambda+2)\lambda\right]+(\lambda+2)+(\lambda+2)\\&=(\lambda+2)\left[(-\lambda-1)\lambda+2\right]\\&=(\lambda+2)^2(\lambda-1)\end{aligned}$$

نعين القيم الذاتية للمصفوفة A: نضع $P_A(\lambda)=0$.

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)=0&\Leftrightarrow(\lambda+2)^2(-\lambda+1)=0\\&\Leftrightarrow\begin{cases}(\lambda+2)=0\\(-\lambda+1)=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-2\\\lambda=+1\end{cases}\end{aligned}$$

و منه القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $S=\{-2\,,1\}$.

2- نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A:

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=1$:

نبحث عن الأشعة $V_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $Ax=\lambda_1 x$ وبالتالي $(A-\lambda_1 I_3)x=0$ أي $(A-I_3)x=0$ نبحث عن حلول الجملة:

$$\begin{cases}-2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+z=0\\ -3y+3z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+z=0\\ y=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=z\end{cases}$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ مع $x=y=z$ و x كيفي، أي أن هناك شعاع ذاتي مرفق بـ $\lambda_1=1$ هو $V_1(1,1,1)$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1 / \alpha\in\mathbb{R}^*$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=-2$:

نبحث عن الأشعة $V_2(x,y,y)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $Ax=\lambda_2 x$ وبالتالي $(A-\lambda_2 I_3)x=0$ أي $(A+2I_3)x=0$ نبحث عن حلول الجملة:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-y-z$$

لدينا

$$V\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-y\\ y\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\ 0\\ z\end{pmatrix}$$

$$=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}/ y,z\in\mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ مع y و z كيفيان، أي أن هناك شعاعان ذاتيان مرفقان بـ $\lambda_1=-2$ هما $V_2(-1,0,1)$ و $V_3(-1,1,0)$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1+\beta V_2 / \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

5.3 الاختصار على الشكل المثلثي

ليكن $f \in \mathcal{L}(E)$ ، $\dim E = n$ ، $A = (a_{ii})_{1\le i\le n}$ مصفوفة f بالنسبة للأساس $\{e_i\}_{1\le i\le n}$. واضح أنه من تعريف مصفوفة تطبيق خطي لدينا:

A مثلثية علوية إذا وفقط إذا $\forall i, 1 \le i \le n : f(e_i) \in \langle\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}\rangle$.

مبرهنة (قابلية التثليث):

ليكن $f \in \mathcal{L}(E)$ ، $\dim E = n$ على الحقل $\mathbb{k}$.

القضيتان التاليتان متكافئتان:

1. يوجد أساس لـ E بالنسبة إليه مصفوفة f مثلثية علوية.
2. يفكك كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ إلى جداء كثيرات حدود، ذات متغير λ، درجة كل منها 1على الحقل $\mathbb{k}$.

ملاحظة:

مصفوفة $f \in \mathcal{L}(E)$ مثلثية علوية بالنسبة للأساس $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ إذا وفقط إذا كانت مصفوفة f بالنسبة للأساس $e' = \{e'_1 = e_n, e'_2 = e_{n-2}, \ldots, e'_n = e_1\}$ مثلثية سفلية. وبالتالي المبرهنة السابقة تبقى صالحة فيما يخص الشكل المثلثي السفلي لمصفوفة ت.خ.د.

مثال:

ليكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ مصفوفته A بالنسبة للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$:

$$e = \{e_1(1,0,0), e_2(0,1,0), e_3(0,0,1)\} ، A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

نبحث عن أساس لـ $\mathbb{R}^3$ من أجله تكون مصفوفة A مثلثية علوية:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 2\times 5(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\left[(-4-\lambda)(3-\lambda) + 2\times 5\right] \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2 + 7\lambda - 2\right) \\
&= (1-\lambda)^2(2+\lambda)
\end{aligned}$$

القيم الذاتية لـ A هي جذور كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ إذن $S = \{-2, 1\}$.

لنبحث عن الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda=1$:

نبحث عن الأشعة $e'_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $Ax=\lambda_1 x$ وبالتالي $(A-\lambda_1 I_3)x=0$ أي $(A-I_3)x=0$ نبحث عن حلول الجملة:

$$\begin{cases}-5x-2z=0\\5x+y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-2}{5}z\\y=0\end{cases}$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $e'_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ مع $x=\frac{-2}{5}z\ ,\ y=0$، أي أن هناك شعاع ذاتي مرفق بـ$\lambda_1=1$ هو $e'_1\left(\frac{-2}{5},0,1\right)$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha.e'_1\ /\ \alpha\in\mathbb{R}^*$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_2=-2$ هي x بحيث $(A-\lambda_2 I_3)x=0$ أي $(A-2I_3)x=0$ نبحث عن حلول الجملة:

$$\begin{cases}-2x-2z=0\\y=0\\5x+y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $e'_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ مع $x=-z\ ,\ y=0$، أي أن هناك شعاع ذاتي مرفق بـ $\lambda_1=-2$ هو $e'_2(-1,0,1)$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha.e'_2\ /\ \alpha\in\mathbb{R}^*$.

نلاحظ أن $e'_2\ ,\ e'_1$ مستقلان خطيا إذن يمكن تكملتهما بعنصر ثالث لتكوين أساس لـ $\mathbb{R}^3$ وليكن مثلا $e'_3(0,1,0)$.

B مصفوفة f بالنسبة للأساس $e'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$:

لدينا
$$\begin{cases}f(e'_1)=e_1\\f(e'_2)=-2e_2\\f(e'_3)=\dfrac{5}{3}e_1-\dfrac{2}{3}e_2+e_3\end{cases}$$

ومنه B مثلثية علوية $B=\begin{bmatrix}1&0&\frac{5}{3}\\0&-2&\frac{-2}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}$.

من جهة أخرى لدينا:
$$\begin{cases}e'_1=\dfrac{-2}{5}e_1+e_3\\e'_2=-e_1+e_3\\e'_3=e_2\end{cases}$$

إذن مصفوفة الانتقال P من الأساس القديم e إلى الأساس الجديد e' هي: $P=\begin{bmatrix}\frac{-2}{5}&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

بعد الحساب اللازم نجد $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}&0&\frac{5}{3}\\-\frac{5}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&1&0\end{bmatrix}$ ومنه $B=P^{-1}AP$.

وبالتالي فإن A مشابهة لمصفوفة مثلثية علوية B.

5.4 الاختصار على الشكل القطري

من أجل مصفوفة تطبيق خطي معطى على فضاء شعاعي E ذي بعد منته، نحاول فيما يلي إيجاد أساس للفضاء بحيث تكون مصفوفته قطرية.

الفضاء الذاتي

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$، $f: E \to E$ ت.خ.د. و$\lambda \in \mathbb{k}$ قيمة ذاتية لـ f.

نسمي **الفضاء الجزئي الذاتي** المرفق بالقيمة الذاتية λ (باختصار **ف.ج.ذ**):

$E(\lambda) = \{x \in E : f(x) = \lambda x\} = Ker\left(f - \lambda I_n\right)$.

$E(\lambda)$ هو فضاء شعاعي جزئي من E لأنه نواة تطبيق خطي، مكون من صفر الفضاء E والأشعة الذاتية المرفقة بـ λ. من التعريف، الأشعة الذاتية ليست معدومة إذن $\dim E(\lambda) \geq 1$.

مبرهنة:

ليكن E فضاء شعاعي ذي بعد n على الحقل $\mathbb{k}$، $f: E \to E$ ت.خ.د،

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$، $1 \leq m \leq n$ القيم الذاتية المختلفة لـ f و $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_m)$ الفضاءات الذاتية المرفقة بها

وليكن $1 \leq i \leq m,\ x_i \in E(\lambda_i)$، لدينا:

1. الجملة $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ مستقلة، ($1 \leq i \leq m,\ x_i \in E(\lambda_i)$، أشعة ذاتية)
2. مجموع الفضاءات $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \ldots + E(\lambda_m)$ مباشر.

(المجموع لا يعني بالضرورة يساوي E).

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$، $f: E \to E$ ت.خ.د.

نقول عن f إنه **قابل للتقطير** أو**مصفوفته مشابهة لمصفوفة قطرية** إذا كان E **مجموعا مباشرا** لفضاءاته الجزئية الذاتية.

(أي يوجد أساس لـ E مكون من الأشعة الذاتية).

مبرهنة:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$، $f: E \to E$ ت.خ.د. و λ' قيمة ذاتية لـ f.

إذا كانت λ' ذات رتبة تضاعف m فإن بعد الفضاء الذاتي المرفق بـ λ' هي على الأكثر m. (أي $\dim E(\lambda') \leq m$).

مبرهنة (قابلية التقطير):

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$، $f:E\to E$ ت.خ.د.

القضيتان التاليتان متكافئتان:

1. f قابل للتقطير

2. a) يفكك كثير الحدود المميز $P_f(\lambda)$ إلى جداء كثيرات حدود درجة كل منها1.

b) بعد كل فضاء جزئي ذاتي مساويا لرتبة تضاعف القيمة الذاتية المرفقة.

مثال:

1. من أجل $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ الذي مصفوفته بالنسبة للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ هي $A=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

لدينا $P_A(\lambda)=-(2+\lambda)^2(-1+\lambda)$ يحقق الشرط a)،

$\lambda=-2$ جذر مضاعف $d_2=2$ و$\lambda=1$ $d_1=1$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=1$: $e_1=(1,1,1)$ أي $\dim E(\lambda_1)=1=d_1$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda=-2$: شعاعان $e_2=(-1,0,1)$, $e_3=(-1,1,0)$ أي $\dim E(\lambda_2)=2=d_2$ ومنه b

محقق، إذن A قابل للتقطير ومصفوفة A بالنسبة للأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ هي: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

التطبيق المعطى في المثال غير قابل للتقطير لأن: $P_f(\lambda)=(-1+\lambda)^2(2+\lambda)$،

2. في المثال السابق ليكن $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ مصفوفته A بالنسبة للأساس القانوني لـ$\mathbb{R}^3$: $A=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&1&0\\5&1&3\end{bmatrix}$.

لدينا: $P_A(\lambda)=(1-\lambda)^2(2+\lambda)$

القيم الذاتية لـ A هي $S=\{-2,1\}$ ، ورُتب تضاعفها على الترتيب $\lambda_1=1$ جذر مضاعف $d_1=2$ أي أن هناك شعاع ذاتي مرفق بـ$\lambda_1=1$ هو $e_1\left(\frac{-2}{5},0,1\right)$ و$\lambda_2=-2$ $d_2=1$ أي أن هناك شعاع ذاتي مرفق بـ $\lambda_1=-2$ هو $e_2(-1,0,1)$.

و منه $\dim E(\lambda_1)=1<d_1$ ، الشرط b من المبرهنة غير محقق.

تعريف:

$f:E\to E$ ت.خ.د، نسمي **كثير الحدود الأصغري** لـ f كثير الحدود من $K[X]$، نرمز له بـ q_f ذا الأصغر درجة ومعامل حده ذي الأكبر درجة هو1 ويحقق $q_f(f)=0$ (التطبيق المعدوم).

مبرهنة (كايلي-هاملتون):

ليكن $f:E\to E$ ت.خ.د. $f:E\to E$ ،$K\Bbbk$ على n ف.ش بعده منته E $f:E\to E$ و K حقل تبديلي و $f:E\to E$

لدينا كثير الحدود الأصغري q_f يقسم كثير الحدود المميز P_f.

ملاحظة:

المبرهنة تعني أن كل تطبيق خطي داخلي يعدم كثير حدوده المميز أي: $P_f(f)=q_f(f)=0$ التطبيق المعدوم.

يمكن تعميم المبرهنة السابقة إلى المصفوفات المربعة على النحو التالي:

نتيجة:

من أجل كل مصفوفة مربعة A لدينا: $P_A(A)=0$ (المصفوفة المربعة المعدومة).

مثال:

من أجل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

لدينا ك.ح.م: $$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=-(2+\lambda)^2(-1+\lambda)\\ &=-\lambda^3-3\lambda+4\end{aligned}$$

حسب النتيجة: $P_A(A)=0$ أي $-A^3-3A+4I_3=0$

أحسن من هذا، لدينا: $A^2+A-2I_3=0$ و $(I_3-A)\neq 0$, $(2I_3+A)\neq 0$ وبالتالي $q_A(A)=\lambda^2+A-2$

$q_A(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$ هو كثير الحدود الأصغري لـ A.

الأشعة الذاتية لـ A: $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(-1,1,0)$, $e_3=(-1,0,1)$.

مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني إلى $\{e_1,e_2,e_3\}$ هي: $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

المصفوفة المشابهة لـ A: $B=P^{-1}AP$ حيث $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

لحساب $A^n, n\in\mathbb{N}^*$ نستعمل تشابه A مع المصفوفة القطرية B فنحصل على:

$$\begin{aligned}A^n&=\left(PBP^{-1}\right)^n\\ &=\underbrace{\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\ldots\left(PBP^{-1}\right)}_{n}\\ &=PB^nP^{-1}\end{aligned}$$

لدينا: $B^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & (-2)^n\end{bmatrix}$

نحسب مقلوب P ثم نستنتج $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

6 تمارين محلولة

تمرين1:

ليكن E الفضاء الشعاعي للتوابع من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ المزود بالعمليتين:

$(f, g \in E), (\lambda \in \mathbb{R})$:

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad$ و $\quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

لتكن مجموعة العناصر $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ من E المعرفة بـ $f_k(x) = e^{\alpha_k x}$ (دوال أُسية) حيث $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. أثبت ما يلي:

$\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ مستقلة خطيا إذا وفقط إذا $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مختلفة مثنى مثنى.

الحل:

لنثبت الاستلزام:

$\left(\{f_k\}_{k=1,\dots,n}\right.$ مستقلة خطيا$\left.\right) \Rightarrow \left(\alpha_1, \dots, \alpha_n\right.$ مختلفة مثنى مثنى$\left.\right)$

لنثبت الاستلزام المكافئ له التالي:

$\left(\alpha_1, \dots, \alpha_n\right.$ ليست مختلفة مثنى مثنى$\left.\right) \Rightarrow \left(\{f_k\}_{k=1,\dots,n}\right.$ مرتبطة خطيا$\left.\right)$

من أجل هذا، ليكن i و j مع $i \neq j$ و $\alpha_i = \alpha_j$.

إذن $\forall x \in \mathbb{R}: \; f_i(x) = e^{\alpha_i x} = e^{\alpha_j x} = f_j(x)$

وهذا يعني أن $f_i = f_j$ أي أن $1 f_i + (-1) f_j = 0_E$ وبالتالي $\{f_i, f_j\}$ جملة مرتبطة، وبما أن هذه الجملة جزء من $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ نستنتج أن هذه الأخيرة مرتبطة.

لنثبت الاستلزام العكسي: لنفرض أن $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مختلفة مثنى مثنى ونثبت أن $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ مستقلة خطيا بالتراجع على n.

لما $n=1$: لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f_1(x) = e^{\alpha_1 x} \neq 0$ (حتى وإن كان $\alpha_1 = 0$) وبالتالي $f_1 \neq 0_E$ لذلك فإن $\{f_1\}$ جملة مستقلة.

ليكن n مع $n \geq 2$ ونفرض (خاصية التراجع) أن $\{f_k\}_{k=1,\dots,n-1}$ جملة مستقلة ونثبت أن $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ جملة مستقلة.

ليكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ بحيث: $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0_E$ (أي أن هذا التابع معدوم).

إذن $\qquad \forall x \in \mathbb{R}: (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)(x) = 0_E(x) = 0$

أي $\qquad \forall x \in \mathbb{R}: \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n x} \qquad (1)$

باشتقاق الطرفين في (1) ينتج:

$$(2)\qquad \forall x\in\mathbb{R}:\ \lambda_1\alpha_1 e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_n\alpha_n e^{\alpha_n x}=0$$

بضرب طرفي المساواة (1) في α_n ثم طرح الناتج من (2) ينتج:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)=\lambda_1(\alpha_1-\alpha_n)e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)e^{\alpha_{n-1}x}=0$$

وهذا يعني أن التابع f معدوم $(f=0)$ أي:

$$\lambda_1(\alpha_1-\alpha_n)e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)e^{\alpha_{n-1}x}=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

من فرضية التراجع ينتج أن: $\lambda_1(\alpha_1-\alpha_n)=\ldots=\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)=0$

بالفرض، كل من $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ مختلف عن α_n لذلك يصبح $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$

بالعودة إلى (1): $\forall x\in\mathbb{R}:\ \lambda_n f_n(x)=0$. بما أن $f_n\neq 0$ ينتج أن $\lambda_n=0$.

إذن الجملة $\{f_k\}_{k=1,\ldots,n}$ مستقلة خطيا.

تمرين2:

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ (على الحقل $\mathbb{R}$) نعتبر:

$$H=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1=x_2=\ldots=x_n\}$$

و $H'=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1+x_2+\ldots+x_n=0\}$.

1. بين أن H و H' ف.ش.ج. من $\mathbb{R}^n$.
2. عين أساسا لكل من H و H' ثم استنتج $\dim H$ و $\dim H'$.
3. اثبت أن $\mathbb{R}^n$ مجموعا مباشرا لـ H و H'.
4. بين أنه يوجد g,f تطبيقان خطيان من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^n$ بحيث:

$H'=\ker g,\quad H=\ker f$.

الحل:

السؤال 1. متروك للدارس ونثبت البقية.

2. بالنسبة لـ H: ليكن $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in H$ ونبحث عن مجموعة أشعة H بحيث x هو مزج خطي لها.

بالفرض لدينا: $x_1=x_2=\ldots=x_n$ وبالتالي $x=(x_1,x_1,\ldots,x_1)=x_1(1,1,\ldots,1)$ أي أن x مزج خطي للشعاع $v_1=(1,1,\ldots,1)$. لاحظ أن $v_1\in H$ وكل شعاع من H هو مزج خطي لـ v_1. إذن $\{v_1\}$ مجموعة مولدة لـ H. وبما أن $v_1\neq 0$ (0 هو صفر الفضاء $\mathbb{R}^n$) فهو مستقل خطيا وبالتالي $\{v_1\}$ أساس لـ H ومنه نستنتج أن $\dim H=1$.

ملاحظة:

بدل الشعاع v_1 يمكن أخذ $w=(a,a,\ldots,a)\in\mathbb{R}^n$، مع $a\neq 0$، بذلك يصبح $\{w\}$ هو أيضا أساس لـ H.

بالنسبة لـ H': ليكن $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in H'$.

لدينا $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$، إذن $x_n=-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}$ وبالتالي:

$$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}\right)$$

أي: $$x=x_1\underbrace{(1,0,\ldots,0,-1)}_{v_2}+x_2\underbrace{(0,1,0,\ldots,0,-1)}_{v_3}+\cdots+x_{n-1}\underbrace{(0,0,\ldots,0,1,-1)}_{v_n}$$

إذن $\{v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ مجموعة مولدة لـ H'، نلاحظ أن هذه الأشعة هي أشعة من H'، من السهل جدا إثبات أنها مستقلة (أثبت ذلك). إذن $\{v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ أساس لـ H'. ومنه نستنتج أن $\dim H'=n-1$ (عدد الأشعة المولدة والمستقلة في H').

3. لكي يكون $\mathbb{R}^n$ مجموع مباشر لـ H و H' يكفي أن يشكل اتحاد أساس H وأساس H' أساسا لـ $\mathbb{R}^n$. بما أن المجموعة $\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ بها n شعاع من $\mathbb{R}^n$ و $\dim\mathbb{R}^n=n$ يكفي أن تكون مستقلة فقط.

من أجل هذا، ليكن $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_n v_n=(0,0,\ldots,0)$$

إذن لدينا جملة معادلات خطية:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_1+\alpha_n=0\\ \alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n=0\end{cases}$$

من الـ $n-1$ معادلة الأولى ينتج أن $\alpha_i=-\alpha_1$ من أجل $2\le i\le n$، بالتعويض في المعادلة الأخيرة ينتج $n\alpha_1=0$ ومنه $\alpha_1=0$ وبالتالي $\alpha_i=0$ من أجل $1\le i\le n$. إذن الجملة مستقلة ومنه المطلوب.

4. لنعرف التطبيقات ونترك إثبات الخطية للدارس.

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ، $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(x_1-x_2,x_2-x_3,\ldots,x_{n-1}-x_n,0\right)$

من التكافؤ:

$$\begin{aligned}x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in\ker f &\Leftrightarrow f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=(0,\ldots,0)\\ &\Leftrightarrow x_1-x_2=0,\ x_2-x_3=0,\ \ldots,\ x_{n-1}-x_n=0\\ &\Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n\\ &\Leftrightarrow x\in H\end{aligned}$$

ينتج أن $H=\ker f$.

نعرف التطبيق: $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ،

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1+x_2+\dots+x_n,\dots,x_1+x_2+\dots+x_n)$$

أي أن كل مركبة للشعاع $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تساوي $x_1+x_2+\dots+x_n$.

واضح أن $H'=\ker g$ (تأكد منه).

لنعمم نتيجة التمرين السابق.

تمرين3:

ا.لتكن : $e'_1=(4,-3,-2), e'_2=(4,0,-1), e'_3=(2,1,0)$.

برهن أن الجملة $IB'=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ قاعدة لـ IR^3 .

أعط مصفوفة العبور من القاعدة الطبيعية $IB=\{e_1,e_2,e_3\}$ لـ IR^3 إلى القاعدة IB' ، وكذا مصفوفة العبور من القاعدة IB' إلى القاعدة IB .

ب.لتكن :

$$IB=\{e_1=(1,0,0), e_2=(1,-1,0), e_3=(1,1,1)\}$$
$$IB'=\{f_1=(0,1,1), f_2=(1,0,1), f_3=(1,1,0)\}$$

برهن أن IB, IB' هما قاعدتين لـ IR^3 ، عين مصفوفتي العبور من قاعدة إلى أخرى.

الحلّ

ا.إن الجملة B' هي قاعدة لـ IR^3 وضوحا ، من أجل الحصول على مصفوفة العبور من القاعدة B إلى القاعدة B' ، نعبر عن $(e'_j)_{1\le j\le 3}$ بدلالة $(e_j)_{1\le j\le 3}$:

$$\left.\begin{aligned} e'_1&=4e_1-3e_2-2e_3\\ e'_2&=4e_1+0.e_2-e_3\\ e'_1&=2e_1+e_2+0.e_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}4&4&2\\-3&0&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$$

وكذا مصفوفة العبور P^{-1} من القاعدة B' إلى القاعدة الطبيعية B نحصل عليها بالشكل:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&2\\-1&2&-5\\\frac{3}{2}&-2&6\end{pmatrix}$$

ب.مصفوفة العبور P من القاعدة $(e_j)_{1\le j\le 3}$ إلى القاعدة $(f_j)_{1\le j\le 3}$ ، نعبر عن $(f_j)_{1\le j\le 3}$ بدلالة $(e_j)_{1\le j\le 3}$ ويمكن إتباع الطريقة التالية :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e_1 & e_2 & e_3 & f_1 & f_2 & f_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1-L_3]{L_2-L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1+L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

إذن:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = -e_1 + e_3 \\ f_2 = -e_1 + +e_2 + e_3 \\ f_1 = 2e_1 - e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد أن مصفوفة العبور من القاعدة $\left(f_j\right)_{1\le j\le 3}$ إلى القاعدة $\left(e_j\right)_{1\le j\le 3}$ هي :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ +1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين4:

لتكن $f \in \ell\left(IR^3\right)$ ، مصفوفته وفق القاعدة الطبيعية لـ IR^3 هي

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أ.أوجد العناصر $e_1, e_2, e_2 \in IR^3$ المحققة للعلاقات التالية

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_3 \\ f(e_2) = e_3 - e_2 \\ f(e_3) = e_2 - e_1 \end{cases}$$

ب.برهن أن A مشابهة للمصفوفة: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ج. أحسب $A^n, n \in IN^*$

الحلّ

ا.ليكن $e_3 = (x,y,z) \in IR^3$ لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} -x + y + z = -x \\ -x - y = -y \\ x - z = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

إذن يمكن أن نختار $e_3 = (0,1,-1)$ وبنفس الطريقة نجد أن :

$e_2=(-1,-1,1)\quad,\quad e_1=(1,0,-1)$

(الأشعة e_1,e_2,e_3 ليست معرفة بشكل وحيد) .

ب.نتحقق بسهولة أن الجملة $IB=\{e_1,e_2,e_3\}$ قاعدة لـ IR^3 وأن مصفوفة f وفق القاعدة IB هي B ، إذن A و B متشابهان. لنحسب $B^n, n\in IN^*$ ، لدينا:

$$\begin{cases} B=C-I_3 \\ C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

لدينا :

$$C^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن $C^n=0, \forall n\geq 3$ وبواسطة مفكوك نيوتن نحصل على :

$$B^n=(C-I_3)^n=(-1)^nI_3+(-1)^{n-1}nC+\frac{(-1)^{n-2}n(n-1)C^2}{2}$$

$$=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & -n & 0 \end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن : $A^n=P.B^n.P^{-1}$

حيث P هي مصفوفة العبور من القاعدة الطبيعية إلى القاعدة IB أي أن :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$A^n=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & -n & -n \\ n & 1-\frac{n(n-1)}{2} & -\frac{n(n-1)}{2} \\ -n & \frac{n(n-1)}{2} & 1+\frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

7 جمل المعادلات الخطية

7.1 مقدمة

نخصِص هذا الجزء لموضوع الجمل الخطية ذات عدد كيفي من المعادلات أو من المجاهيل.

في كل ما سيأتي من هذا الفصل، نعتبر الحقل التبديلي $\mathbb{k}$ $(\mathbb{k}=\mathbb{R} \vee \mathbb{k}=\mathbb{C})$.

تعريف:

ليكن $n,m \in \mathbb{N}^*$، نسمي **جملة خطية** ذات n معادلةً و m مجهولاً (أو جملة خطية $n \times m$) وذات معاملات من الحقل $\mathbb{k}$، كل جملة معادلات من الشكل:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$$

حيث المعاملات a_{ij} و y_i من $\mathbb{k}$، وذلك من أجل كل i و j يحققان: $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le m$، يسمى كل شعاع $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ من $\mathbb{k}^n$ يحقق جميع المعادلات المُكونة للجملة (S)، حلاً للجملة (S).

كما تسمى المجموعة $H_{(S)}=\{x \in K^m : (S)$ لـ حل $x\}$ مجموعة حلول الجملة (S)، أما $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ من $\mathbb{k}^n$، فندعوها الطرف الثاني للجملة الخطية (S).

حالات خاصة

1) إذا كان: $n=m$، فإن الجملة (S) تسمى جملة مُربعة.

2) إذا كان: $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$، فإننا ندعو الجملة (S) جملة متجانسة، وعندئذ تسمى الجملة (S') التالية (ذات n معادلةً و m مجهولاًو ذات معاملات من الحقل $\mathbb{k}$):

$$(S')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

الجملة المتجانسة المُرافقة للجملة الخطية (S).

3) نذكر هنا بأن مجموعة حلول أي جملة خطية متجانسة $n \times m$، تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{k}^m$.

4) إذا كان $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ من $\mathbb{k}^m$ حلا خاصا للجملة الخطية (S)، وكانت $H_{(S')}$ هي مجموعة حلول المعادلة المتجانسة (S')، فإن مجموعة حلول المعادلة (S) هي:

$H_{(S)} = x' + H_{(S')} = \left\{ x' + x :\ x \in H_{(S')} \right\}$.

تعريف:

نقول إن الجملتين (S_1) و (S_2) متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول، أي بعبارة أخرى، إذا تحققت المساواة:

$H_{(S_1)} = H_{(S_2)}$.

مثال:

الجملتان الخطيتان:

$$(S_1)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (S_2)\begin{cases} x_1 + 1 = 0 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

متكافئتان، لأن لهما نفس مجموعة الحلول في $\mathbb{R}^3$ ، إلا وهي:

$H_{(S_1)} = H_{(S_2)} = \{ (-1,1,-1) \}$.

7.2 الكتابة المصفوفية لجملة معادلات خطية

تعريف:

ليكن $n, m \in \mathbb{N}^*$. وفقا للتعريف، فإننا نسمي المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_{ij} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nj} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

أو اختصاراً $A = (a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ ، **مصفوفة الجملة الخطية** (S).

تلخيصا لما جاء في السابق، وبوضع: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ في $\Bbbk^m$ ، $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ في $\Bbbk^n$.

و $A = (\alpha_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ مصفوفة الجملة الخطية (S)، فإنه ينتج لدينا $AX = C$ أي أن:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_{ij} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nj} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} \qquad (*)$$

وتدعى المعادلة (*) " **الكتابة المصفوفية** للجملة الخطية (S).

مثال:

باعتبار $X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ فإن الكتابة المصفوفية للجملة الخطية:

$$(S)\begin{cases}-8x_1+x_2-x_3=1\\ x_1+7x_2+1=-2\\ -x_1+x+x_3=5\end{cases}$$

هي: $AX=C$ حيث $A=\begin{pmatrix}-8&1&-1\\1&7&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$.

تعريف:

نقول عن جملة خطية مربعة إنها **جملة خطية مثلثية**، إذا كانت مصفوفتها مثلثية ونقول عن جملة خطية إنها مثلثية **علوية (سفلية)**، إذا كانت مصفوفتها مثلثية علوية (سفلية).

تعريف:

نقول عن جملة خطية مثلثية إنها **ذات قطر غير معدوم** إذا كانت مصفوفته قطرية.

مثال:

الجملة الخطية التالية هي جملة خطية مثلثية علوية:

$$(S)\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 2x_2+7x_4=0\\ -3x_3+5x_4=4\\ 21x_4=6\end{cases}$$

و الكتابة المصفوفية للجملة الخطية هي: $AX=C$ حيث $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&7\\0&0&-3&5\\0&0&0&21\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\\6\end{pmatrix}$.

7.3 طرق حل الجمل الخطية

لحل الجمل الخطية من الشكل (*) المذكور سابقا، يمكن الاعتماد على طريقتين رئيسيتين:

1. طريقة مقلوب مصفوفة.
2. طريقة كرامر *Méthode de Cramer*.
3. الطرق المباشرة (طريقة غوص-جوردان وطريقة غوص).

هناك حالات يجب مراعاتها:

- إذا كان $n=m$، (حيث $r=rg(A)$)، عندئذ إذا تحققت المساواة $r=rg(A)=m=n$، فإن هذا الحل موجود وهو بالتالي وحيد لكون A قابلة للقلب في هذه الحالة.
- إذا كان $n>m$. في هذه الحالة أعمدة مصفوفة الجملة مرتبطة خطيا.
- إذا كان $n<m$، فإنه بإمكاننا كتابة $m-n$ مجهولاً للجملة الخطية بدلالة الـ n مجهولاً الباقية، وهذا ما يعني أن الجملة تقبل عددا غير منته من الحلول.

والآن لنتناول الحالة: $n=m$.

7.3.1 طريقة مقلوب مصفوفة

تعتبر طريقة كرامر من الطرق الشائعة في حساب حلول الجمل الخطية ذات المصفوفات المربعة والقابلة للقلب من السعة (n,n) فهي

7.3.2 طريقة كرامر

تعتبر طريقة كرامر من الطرق الشائعة في حساب حلول الجمل الخطية ذات المصفوفات المربعة والقابلة للقلب من السعة (n,n) فهي تعطي مباشرة قيمة كل مجهول، ولكنها تستوجب وقتا طويلا من أجل إعطاء القيم النهائية للمجاهيل، فمن أجل n كبير، نحتاج إلى إجراء عدد كبير جدا من العمليات (الجمع، الطرح، الضرب والقسمة)، لذلك فإننا عادةً لا نلجأ إلى استعمال هذه الطريقة إلا من أجل قيم صغيرة لـ n.

تعريف

نسمي **جملة خطية لكرامر** كل جملة خطية معاملاتها من $\mathbb{k}$ وذات n معادلةً و n مجهولاً، $n=m$، بحيث تكون مصفوفتها A قابلة للقلب، وبالتالي $rg(A)=n=m$.و في الجملة الخطية لكرامر، يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات أي أنها جملة مربعة.

ملاحظة

إن تعريف الجملة الخطية لكرامر(S) غير مرتبط بالطرف الثاني لمعادلات الجملة (S).

خاصية

الجملة الخطية لكرامر لها حل وحيد.

لأن الجملة الخطية (S) لكرامر مكتوبة على الشكل المصفوفي: $Ax=y$ ، حيث y شعاع ثابت و A مصفوفة قابلة للقلب، وليكن A^{-1} مقلوبها، عندئذ لدينا التكافؤ:

$$AX=C \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}C \Leftrightarrow X=A^{-1}C$$ ،

ومنه الجملة الخطية (S) تقبل الحل الوحيد $X = A^{-1}C$ ، الوحدانية هنا ترجع لكون A^{-1} و C وحيدين. ولذلك فإن الحل الوحيد للجملة الخطية المتجانسة لكرامر هو الحل المعدوم.

علاقات كرامر

لتكن (S) جملة خطية $n \times n$ مصفوفتها A قابلة للقلب (أي أنها جملة لكرامر) ذات المجاهيل $(x_j)_{1\le j\le n}$ من الحقل $\mathbb{k}$ ومعاملاتها من الحقل $\mathbb{k}$:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

أي

$$(S)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & a_{ij} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nj} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}}_{C}$$

لنضع: $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ . \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ من $\mathbb{k}^n$ (العمود i من مصفوفة الجملة الخطية (S) حيث $1 \le i \le n$).

كما نضع: $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$ من $\mathbb{k}^n$ (الطرف الثاني للجملة الخطية (S)).

ومنه، نستطيع إعادة كتابة (S) على الشكل:

$$\sum_{j=1}^{j=n} x_j a_j = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n = C \quad \text{أو} \quad AX = C$$

وهو ما يعني أن الطرف الثاني C عبارة عن مزج خطي لأعمدة المصفوفة A .

ليكن $\det(A) \neq 0$ محدد المصفوفة A (القابلة للقلب).

من أجل كل i حيث $1 \le i \le n$، نضع:

$$\begin{array}{c} \text{العمود } i \\ \downarrow \end{array}$$

$$\det(A_i)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & c_1 & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & c_2 & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & c_n & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det(A_i)$ ($1\leq i\leq n$) هو المحدد الناتج من حذف العمود i من المحدد $\det(A)$ وتعويضه بالعمود C.

ومنه:

$$\begin{aligned}\det(A_i)&=\det(a_1,a_2,......a_{i-1},C,a_{i+1},,,,,,,a_n)\\ &=\det\left(a_1,a_2,......a_{i-1},\sum_{j=1}^{j=n}x_ja_j,a_{i+1},,,,,,,a_n\right)\\ &=\sum_{j=1}^{j=n}x_j\det(a_1,a_2,......a_{i-1},a_j,a_{i+1},,,,,,,a_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(A_i)&=\det(a_1,a_2,......a_{i-1},C,a_{i+1},,,,,,,a_n)\\ &=x_i\det(a_1,a_2,......a_{i-1},a_i,a_{i+1},,,,,,,a_n)\\ &+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{j=n}x_j\underbrace{\det(a_1,a_2,......a_{i-1},a_j,a_{i+1},,,,,,,a_n)}_{=0}\end{aligned}$$

من أجل كل j حيث $1\leq j\leq n,(j\neq i)$ فإن:

$$\det(a_1,a_2,.....a_{i-1},a_j,a_{i+1},,,,,,,a_n)=0$$

لكون العمودين i و j من هذا المحدد متطابقين.

وبالتالي نجد أن: $\det(A_i)=x_i\underbrace{\det(a_1,a_2,......a_{i-1},a_i,a_{i+1},,,,,,,a_n)}_{\det(A)}$

وبالتالي، نحصل على علاقات كرامر الشهيرة: $x_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}\ ;\ \forall\, i:1\leq i\leq n$.

نظرية:

لتكن $A\in M_n(K)$ مصفوفة مربعة قابلة للقلب، $b\in M_{n1}(K)$ الجملة

$$(S):\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

ذات المجاهيل $(x_1,...,x_n)$ من K^n تقبل حلا وحلا واحدا فقط معطى بالصيغة التالية

$$\forall k \in \{1,..,n\}: x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{k-1,1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة كرامر.

مثال:

باعتبار المجهول هو $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ، والطرف الثاني هو $C = (1,1,3)$ ، حل الجملة: $AX = C$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + 2x + x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow AX = C$$

نحسب محدد هذه الجملة باستعمال طريقة كرامر.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2+8) - (-2+4) \\ &= 10 - 2 \\ &= 8 \neq 0 \end{aligned}$$

ومنه، الجملة الخطية (S) تقبل حلا وحيدا (x_1, x_2, x_3)

$x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$ ، $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$ ، $x_3 = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)}$.

باستعمال علاقات كرامر وخواص المحددات نجد:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= (1+2) - (3+1) \\ &= 3 - 4 \\ &= -1 \end{aligned}$$

و $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{-1}{8}$

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= (2+12) - (-2+4) \\ &= 14 - 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

و $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= (6-2+8)-(-2+12+4)\\ &= 12-14\\ &= -2\end{aligned}$$

و $x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

إذن حل الجملة الخطية (S) هو: $X = (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

ملاحظة:

لتكن الجملة التالية ذات المجاهيل (x_1, x_2, x_3) من $\mathbb{R}^3$:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

الجملة (S) ترفق بالمعادلة المصفوفية $AX = C$ حيث $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

نميز حالتين :

1. اذا كان $\det(A) \neq 0$ فإن المعادلة المصفوفة $AX = C$ تقبل حلا واحيدا (x_1, x_2, x_3) حيث

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \text{ ، } x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ و } x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

مع $\det(A_1) = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ، $\det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ و $\det(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$.

2. اذا كان $\det(A) = 0$ فإن المعادلة المصفوفة $AX = C$ اما لا تقبل حلول او تقبل حلول لانهائية أي

- ✓ لا تقبل حلول اذا تحقق مايلي : $\det(A_1) \neq 0$ او $\det(A_2) \neq 0$ او $\det(A_3) \neq 0$.
- ✓ تقبل حلول لانهائية اذا تحقق مايلي: $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = 0$.

مثال :

حلّ جملة المعادلات التّاليّة

$$(S)\ :\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

الحلّ

لدينا المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$ و منه

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 2 & -2\end{vmatrix}$$
$$=\lambda-1$$

إذا كانت $\lambda\neq 1$، الجملة هي جملة كرامر

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & \lambda & 1\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}$$
$$=1$$

و منه $x=\dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}=\dfrac{1}{\lambda-1}$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}$$
$$=\lambda+3$$

و منه $y=\dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}=\dfrac{\lambda+3}{\lambda-1}$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 2\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix}$$
$$=-5$$

و منه $z=\dfrac{\det(A_3)}{\det(A)}=\dfrac{-5}{\lambda-1}$

$$X=(x,y,z)=\left(\frac{1}{\lambda-1},\frac{\lambda+3}{\lambda-1},\frac{-5}{\lambda-1}\right)$$

إذا كانت $\lambda=1$ أي $\det(A)=0$ الجملة هي جملة مستحيلة لأنّ المعادلتين الأوّليتين تعطي قيمتين مختلفتين لـ $x+y+z$.

7.3.3 طريقة غوص-جوردان

تهدف الطرق المباشرة أساسًا إلى تحويل الجمل الخطية المُراد حلها إلى جمل خطية متدرجة مكافئة، يسهل التعامل معها وحلها بسرعة.

و المبدأ الأساسي لهذه الطريقة، هو الحصول على جملة خطية مكافئة للجملة الخطية الأولى المراد حلها، مصفوفتها هي المصفوفة الحيادية.

ومن أجل توضيح مبدأ هذه الطريقة، سوف نقوم بدراستها في الحالة $n=m=3$.

لنعتبر الأعداد الحقيقية c_1, c_2, c_3 و a_{ij}: ($1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 3$) وجملة المعادلات الخطية (S) التالية ذات ثلاث معادلات وثلاثة مجاهيل x_1, x_2, x_3 من الحقل $\mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

أي أن:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

سوف نصِف هنا طريقة الوتد لغوص-جوردان للوصول إلى حل الجملة الخطية المعطاة أعلاه:

المرحلة الأولى:

هدفها هو جعل جميع عناصر العمود الأول معدومة، ماعدا الوتد الأول الذي سنجعله يساوي 1 في البداية نعيد ترتيب أعمدة الجملة (S)- إن دعت الحاجة إلى ذلك - بحيث يكون أول معامل (الوتد a_{11}) في السطر الأول غير معدوم، حينئذ نسمي السطر الأول للجملة الناتجة " السطر الوتد " *Ligne Pivot*، ثم نقوم بقسمة السطر الأول للجملة (S)، على المعامل a_{11} و بالتالي نحصل على جملة (S') مكافئة لـ (S):

$$(S')\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = c'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

أي أن: $\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ ، حيث: $a'_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ ، $a'_{13} = \dfrac{a_{13}}{a_{11}}$ و $c'_1 = \dfrac{c_1}{a_{11}}$.

والآن:

نطرح من السطر الثاني للجملة (S') السطر الأول للجملة (S') مضروباً بالمعامل a_{21}.

نطرح من السطر الثالث للجملة (S') السطر الأول للجملة (S') مضروباً بالمعامل a_{31}.

$$(S)\quad \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2} \\ x_2+2x_2=1 \\ -2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases} \qquad (S)\quad \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2} \\ x_2+2x_2=1 \\ 3x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على الجملة الجديدة (S'') المكافئة للجملتين (S) و (S'):

$$(S'')\begin{cases} x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3=c'_1 \\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=c'_2 \\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3=c'_3 \end{cases}$$

أي أن: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}}_{A_1}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}}_{C'}$ ،

حيث: $a'_{ij}=a_{ij}-\left(a_{i1}\cdot a'_{1j}\right)$ ، $c'_i=c_i-\left(a_{i1}\cdot c'_1\right)$ مع $2\le i\le 3$ و $2\le j\le 3$.

المرحلة الثانية:

هدفها هو جعل جميع عناصر العمود الثاني معدومة، ما عدا الوتد الثاني الذي سنجعله يساوي 1

ومنه، بالاحتفاظ بنفس المعادلة الأولى للجملة (S'')، فإن المجاهيل الثلاثة x_2,x_3 تصبح من جديد حلاً للجملة الخطية التالية

- ذات معادلتين، حيث نعيد ترتيب أعمدة الجملة إن دعت الحاجة إلى ذلك بحيث يكون أول معامل a'_{22} غير معدوم و

بالتالي نسمي السطر الأول للجملة الناتجة " السطر الوتد ":

$$(I)\begin{cases} a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=c'_2 \\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3=c'_3 \end{cases} \quad \text{أي أن:} \quad \begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$$

وهنا نقوم بقسمة السطر الأول للجملة (I)، على المعامل a'_{22} و بالتالي نحصل على جملة (S') مكافئة للجملة(S) ، فنحصل على:

$\begin{pmatrix} 1 & a''_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c''_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$ حيث: $a''_{23}=\dfrac{a'_{12}}{a'_{22}}$ و $c''_2=\dfrac{c'_2}{a'_{22}}$.

وبالتالي فإن المجاهيل الثالثة x_1,x_2,x_3 تصبح حلاً للجملة الخطية (S'''): المكافئة للجمل الخطية (S'')،(S') و(S) :

$$(S''')\begin{cases} x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3=c'_1 \\ x_2+a''_{23}x_3=c''_2 \\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3=c'_3 \end{cases}$$

أي أن $\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a''_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c''_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$

والآن:

نطرح من السطر الأول للجملة (S''') السطر الثاني للجملة (S''') مضروباً بالمعامل a'_{12}.

نطرح من السطر الثالث للجملة (S''') السطر الثاني للجملة (S''') مضروباً بالمعامل a'_{32}.

وبالتالي نحصل على الجملة الجديدة $(S^{(4)})$ المكافئة للجمل الخطية (S)،(S')، (S'') و (S'''):

$$\left(S^{(4)}\right)\begin{cases} x_1 + a''_{13}x_3 = c''_1 \\ x_2 + a''_{23}x_3 = c''_2 \\ a''_{33}x_3 = c''_3 \end{cases}$$

أي أن $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c''_1 \\ c''_2 \\ c''_3 \end{pmatrix}}_{C''}$

حيث: $a''_{ij} = a'_{ij} - \left(a'_{i2} \cdot a'_{2j}\right)$ ، $c''_i = c'_i - \left(a'_{i2} \cdot c''_2\right)$ مع $i = 1,3$ و $j = 3$.

وهكذا تستمر العملية حتى يصبح الوتد الأخير واقعا في الخانة $(3,3)$ أي تصبح الجملة الأولى مكافئة للجملة:

$$\left(S^{(5)}\right)\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = c_1^{(3)} \\ \qquad x_2 \qquad = c_2^{(3)} \\ \qquad\qquad x_3 = c_3^{(3)} \end{cases}$$

أي أن $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1^{(3)} \\ c_2^{(3)} \\ c_3^{(3)} \end{pmatrix}}_{C^{(3)}}$

ومنه، حل جملة المعادلات الخطية (S) هو:

$$x_1 = c_1^{(3)}, \quad x_2 = c_2^{(3)}, \quad x_3 = c_3^{(3)}.$$

مثال:

نحل الجملة التالية باعتبار المجهول هو $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1 \\ 4x_1+x_2=1 \\ -2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2} \\ x_2+2x_3=1 \\ 3x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-\frac{1}{2}x_3=0 \\ x_2+2x_3=1 \\ -4x_3=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_3 \\ 2x_2=3 \\ -4x_3=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1}{8} \\ x_2=\frac{3}{2} \\ x_3=\frac{-1}{4} \end{cases}$$

إذن حل الجملة الخطية (S) هو: $X=(x_1,x_2,x_3)=\left(-\frac{1}{8},\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

7.4 طريقة غوص

بفضل استعمال العمليات الأساسية على أسطر المصفوفة A، تعتبر طريقة غوص طريقة منهجية تسمح بتحويل الجملة الخطية (S) إلى جملة خطية أخرى (S') مكافئة لها بحيث تكون مصفوفة الجملة الخطية (S') مثلثية علوية (فقط، وليس بالضرورة قطرية كما في طريقة غوص-جوردان)، وكل عناصرها القطرية غير معدومة (ليس ضروريا أن تكون مساوية لـ 1). طريقة غوص تسعى إلى جعل جميع عناصر المصفوفة التي تقع أسفل القطر الرئيسي معدومة أي أن (S') جملة خطية متدرجة، وإذا صادفنا أثناء الحل وتدًا معدوما، فإننا نقوم مباشرة بإجراء تبديل للوتد السطر بسطر آخر (وتده غير معدوم)، أو تبديل للوتد العمود بعمود آخر (وتده غير معدوم).

مثال:

حل الجملة الخطية التالية باستعمال طريقة غوص:

$$(S)\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=7 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=9 \\ x_1+2x_2+4x_3-x_4=6 \\ x_2-x_3+4x_4=4 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة، سوف نلجأ إلى الكتابة المصفوفية أثناء جميع مراحل الحل.

الجمل التالية متكافئة:

$$\begin{pmatrix}4&2&1&0\\2&4&2&1\\1&2&4&-1\\0&1&-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\9\\6\\4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&2&1&0\\0&6&3&2\\0&6&15&-4\\0&1&-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\\17\\4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}4&2&1&0\\0&6&3&2\\0&0&12&-6\\0&0&-9&22\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\\6\\13\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&2&1&0\\0&6&3&2\\0&0&12&-6\\0&0&0&\frac{35}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\\6\\\frac{35}{2}\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$x_2=\frac{11-3x_3-2x_4}{6}=1 \text{ ، } x_3=\frac{6+6x_4}{12}=1 \text{ ، } x_4=\frac{35}{35}=1$$

$$\text{.}\ x_1=\frac{7-x_3-2x_2}{4}=1$$

إذن حل الجملة الخطية هو: $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,1)$.

الحالة $n>m$: عدد المعادلات أكبر من عدد الجاهيل.

بما أن A مصفوفة المعاملات تصبح $n\times m$ وبالتالي $rang(A)\le \min\{n,m\}=m$ أي أن أسطر A مرتبطة خطيا.

بإتباع الخطوات السابقة لتدريج الجملة نحصل على مزج خطي معدوم لأسطر A (أي المعادلات)، في هذه الحالة إذا كان نفس المزج للطرف الثاني (للمعادلات) معدوما فنستمر في العملية وإذا كان غير معدوم نتوقف والجملة ليس لها حل.

مثال:

إيجاد حل للجملة الخطية التالية ($n=5$ و $m=4$):

$$(S)\begin{cases}x_1+3x_2=1\\x_1+x_2+x_3+x_4=2\\x_1+2x_2+4x_3-x_4=6\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1-x_2+x_4=9\end{cases}$$

لحل هذه الجملة، سوف نلجأ إلى الكتابة المصفوفية أثناء جميع مراحل الحل.

$$\begin{pmatrix}1&3&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&-1\\2&4&2&1\\2&-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\6\\0\\9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&-2&1&1\\0&-1&4&-1\\0&-2&2&1\\0&-7&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\5\\-2\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&-2&1&1\\0&0&-7&3\\0&0&1&0\\0&0&-7&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\9\\-3\\7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&-2&1&1\\0&0&-7&3\\0&0&0&3\\0&0&0&-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\9\\-12\\-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&-2&1&1\\0&0&-7&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\9\\-12\\-102\end{pmatrix}$$

الجملة الأخيرة تكافئ الأولى، لكن المعادلتين الأخيرتين للجملة المدرجة وهما $3x_4=-12$ و $0x_4=-102$ متناقضتان وبالتالي الجملة الأولى ليس لها حل.

الحالة $n<m$ عدد المعادلات أصغر من عدد الجاهيل.

بما أن A مصفوفة المعاملات تصبح $n\times m$ وبالتالي $rang(A)\leq\min\{n,m\}=n$ أي أن أعمدة A مرتبطة خطيا. وهنا يمكن استعمال أي معادلة للتعبير عن أي مجهول بعبارة خطية للمجاهيل الأخرى وتعويضه في المعادلات المتبقية. الجملة المحصل عليها تكافئ الجملة الأولى.

مثال:

إيجاد حل الجملة الخطية التالية ($n=2$ و $m=3$):

$$(S)\begin{cases}x_1+3x_2=0\\x_1+x_2+x_3=7\end{cases}$$

لحل هذه الجملة، سوف نلجأ إلى طريقة التعويض:

من المعادلة الأولى للجملة (S) لدينا $x_1=-3x_2$، وبالتعويض في المعادلة الثانية للجملة (S)، نجد أن:

$-3x_2+x_2+x_3=7$ وبالتالي $x_3-2x_2=7$ ومنه: $x_3=2x_2+7$، وهو ما معناه أن مجموعة حلول (S) هي:

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}:x_2\in IR\right\}$ وهي مجموعة غير منتهية.

تمارين محلولة

تمرين 1 :

أحسب محددات المصفوفات $A \in M_n(IR)$ التالية :

1. A مصفوفة قطرية .
2. A مصفوفة مثلثية .
3. A عديمة القوى (أي يوجد $p \in IN^*$ بحيث $A^p = 0$)
4. A متساوية القوى $(A^2 = A)$.
5. A تضامنية $(A^2 = I_n)$.

تمرين 2:

ليكن $a,b,c,d \in IR$ بحيث $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ، لنعتبر المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

أحسب ${}^tA.A$ مستنتجا $\det A$ و A^{-1} .

تمرين 3:

برهن المساواة :

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (b-a)^2 (a+b-2x)(a+b+2x)$$

تمرين 4:

لتكن $A \in M_n(IR)$ مصفوفة تحقق : $A^2 - A + I_n = 0$. أحسب $\det A$.

تمرين 5:

أحسب المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

تمرين6:

لتكن $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$ بحيث كل سطر وكل عمود يحوي عنصرا واحدا وواحدا فقط غير معدوم ،
برهن أن $\det(A)\neq 0$.

تمرين7:

لتكن المصفوفة $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(IR)$ ، برهن أن :

$$\forall x\in IR: \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \det(A) + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

حيث A_{ij} هو معامل تمام a_{ij} في المصفوفة A .

تمرين8:

لتكن $A\in M_{2n+1}(IR)$ مصفوفة لا متناظرة $\left({}^tA=-A\right)$ برهن أن: $\det(A)=0$

تمرين9:

أحسب رتبة المصفوفة: $A=\begin{pmatrix} m-2 & 2 & 2m \\ 2 & m & 2(m+1) \\ -1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$ ثم حل الجملة $AX=0$.

تمرين10:

ا.بطريقة التثليث ، حل الجملة التالية :

$$(S): \begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x+y+2z-3t=4 \\ 5x-4y+3z-6t=6 \\ -x+5y-z+t=2 \end{cases}$$

ب.نفس السؤال من أجل الجملة :

$$(S):\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$$

تمرين11:

ناقش حسب قيم الوسيط α حل الجملة الخطية التالية :

$$(S):\begin{cases} 0.2x + 0.1y + 0.3z = \alpha x \\ 0.5x + 0.3y + 0.3z = \alpha y \\ 0.1x + 0.4y + 0.2z = \alpha z \end{cases}$$

تمرين12:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m حل الجملة الخطية التالية :

$$\begin{cases} mx + 2y + 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$$

تمرين13:

حل الجملة الخطية التالية :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + \ldots + x_n = \mu \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + \lambda x_n = \mu^{n-1} \end{cases}$$

حيث λ,μ أعداد حقيقية معطاة .

تمرين14:

حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 7z = 14 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

تمرين15:

ناقش حسب قيم الوسيط $a \in IR$ حل الجمل الخطية التالية :

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = a \end{cases}$$

تمرين16:

لتكن $a,b,c,d \in IR_+^*$ ، ناقش وحل المعادلة الخطية التالية :

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d \end{cases}$$

حلّ التّمارين

تمرين1:

ا.إذا كانت $A \in M_n(IR)$ قطرية: $A = diag(a_1,...,a_n)$ ، فإن: $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_k$

ب.إذا كانت $A \in M_n(IR)$ مثلثية علوية: $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : a_{ij} = 0, i > j$

فإن : $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

ج.إذا كانت $A \in M_n(IR)$ عديمة القوى ، أي يوجد $p \in IN^*$ بحيث $A^p = 0$ فإن :

$$0 = \det(A^p) = (\det(A))^p \Rightarrow \det(A) = 0$$

د.إذا كان $A \in M_n(IR)$ متساوية القوى أي أن $A^2 = A$ ، فإن :

$$\det(A^2) = (\det(A))^2 = \det(A) \Rightarrow \det(A) \in \{0,1\}$$

ه.إذا كان $A \in M_n(IR)$ مصفوفة تضامنية أي أن $A^2 = I_n$ ، فإن :

$$\det(A^2) = (\det(A))^2 = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

تمرين2:

نجد بسهولة أن ${}^tA.A = I_n$ ، إذن :

$$1 = \det({}^tA.A) = \det({}^tA).\det(A) = \det(A).\det(A)$$
$$= (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

بما أن ${}^tA.A = I_n$ فإن A قابلة للقلب ومقلوبها هو : $A^{-1} = {}^tA$

تمرين3:

لنعتبر التحويل التالي : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

فنحصل على المحدد التالي :

$$D = \begin{vmatrix} 2x+a+b & a & b & x \\ 2x+a+b & x & x & b \\ 2x+a+b & x & x & a \\ 2x+a+b & b & a & x \end{vmatrix} = (2x+a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & x \\ 1 & x & x & b \\ 1 & x & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix}$$

ثم نعتبر التحويلات التالية :

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ، $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ و $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

فنحصل على :

$$D=(2x+a+b)\begin{vmatrix}1 & a & b & x\\ 0 & x-a & x-b & b-x\\ 0 & x-a & x-b & a-x\\ 0 & b-a & a-b & 0\end{vmatrix}=(2x+a+b)(b-a)\begin{vmatrix}x-a & x-b & b-x\\ x-a & x-b & a-x\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

ثم نعتبر التحويل التالي : $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

فنحصل على :

$$D=(2x+a+b)(b-a)\begin{vmatrix}x-a & 2x-a-b & b-x\\ x-a & 2x-a-b & a-x\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(2x+a+b)(2x-a-b)(b-a)\begin{vmatrix}1 & b-x\\ 1 & a-x\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)^2(2x+a+b)(a+b-2x)$$

تمرين4:

لدينا :

$$A^3+I_n=(A+I_n)(A^2-A+I_n)=0 \Rightarrow A^3=-I_n \Rightarrow \left(\det(A)\right)^3=(-1)^n$$

إذن :

$$\det(A)=\begin{cases}-1\ ,n=2p+1\\ \ \ 1\ ,n=2p\end{cases}$$

تمرين5:

1.لنعتبر التحويلات التالية : $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ و $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$

مما يسمح بجعل $(a-b)^2$ كعامل مشترك ، ثم نعتبر التحويلات التالية :

$L_1 \leftarrow L_1 + 4L_4$ و $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

فنحصل على :

$$\Delta=(a-b)^2\begin{vmatrix}a+b & 2c & 0 & 0\\ 2c & a+b & 0 & 0\\ c & b & 1 & 0\\ b & c & 0 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^2\begin{vmatrix}a+b & 2c & 0\\ 2c & a+b & 0\\ c & b & 1\end{vmatrix}=(a-b)^2\begin{vmatrix}a+b & 2c\\ 2c & a+b\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$$

نجري التحويلات التالية : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ و $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

مما يسمح بجعل $(b-c)^2$ كعامل مشترك ، ثم نعتبر التحويلات التالية :

$$C_4 \leftarrow C_4 + C_2 \quad \text{و} \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1$$

فنحصل على :

$$\Delta = (b-c)^2 \begin{vmatrix} a & b & 2a & c+b \\ b & a & b+c & 2a \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(b-c)^2 (2a+b+c)(2a-b-c)$$

3.لتكن التحويلات التالية : $C_1 \leftrightarrow C_2$ و $C_3 \leftrightarrow C_4$

فنحصل على المحدد 1.

4.لتكن التحويلات التالية : $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ و $C_2 \leftarrow C_2 + C_4$

ثم نعتبر التحويلات التالية : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ و $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

فنحصل على المحدد :

$$\begin{vmatrix} a+c & b+c & c & d \\ b+d & a+c & d & c \\ 0 & 0 & a-c & b-d \\ 0 & 0 & b-d & a-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+c \\ b+d & a+c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(a+c-b-d)(a-c+b-d)(a-c-b+d)$$

5.لتكن التحويلات : $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ و $C_4 \leftarrow C_4 - C_2$

ثم التحويلات : $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ و $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$

فنحصل على المحدد :

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 2b & 0 & 0 \\ 2b & 1+2a & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2a & 2b \\ 2b & 1+2a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2a+2b+1)(2a-2b+1)$$

6.لنعتبر التحويل التالي $L_2 \leftrightarrow L_3$ ثم $C_2 \leftrightarrow C_3$ ، فنحصل على المحدد:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^2$$

7.لتكن التحويلات: $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ و $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

فنحصل على المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & 0 & d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c-a & c^2-a^2 \\ d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(c-a)(d-b)(d+b-c-a)$$

تمرين6:

من أجل $n=2$ يكون المحدد من الشكل (مثلا) :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \neq 0$$

نفرض أن محدد المصفوفات من النمط المشار إليه من المرتبة $n-1$ غير معدوم ، لتكن A_{ij} المصفوفة المستخرجة من A وذلك بحذف السطر i والعمود j من A . لتكن الآن $a_{i_0 1}$ الحد الغير معدوم من العمود الأول لدينا :

$$\det(A) = \mp a_{i_0 1}.\det(A_{i_0 1}) \neq 0$$

لأن المصفوفة $A_{i_0 1}$ من المرتبة $n-1$ ومن النمط المشار إليه .

تمرين7:

لدينا بالتّعريف : $\Delta = \det\left(V_1 + x.1 \middle| V_2 + x.1 \middle| \ldots \middle| V_n + x.1\right)$ حيث

$$V_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$\Delta = \det\left(V_1 \middle| V_2 \middle| \ldots \middle| V_n\right) + x\sum_{i=1}^{n} \det\left(V_1 \middle| \cdots \middle| V_{i-1} \middle| 1 \middle| V_{i+1} \middle| \ldots \middle| V_n \right)$$

$$= \det(A) + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

تمرين8:

بما أن $^tA = -A$ فإن :

$$\det(A) = \det{}^tA = (-1)^{2n+1}\det(A) \Rightarrow 2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

تمرين9:

لدينا $\det(A)=m(m-1)(m-2)$ ، إذا كان $m\notin\{0,1,2\}$ فإن $rg(A)=3$ وإذا كان $m\in\{0,1,2\}$ فإن $rg(A)=2$ لأنه يوجد في كل حالة محددا من المرتبة الثانية غير معدوم. حل الجملة $A.X=0$ إذا كان $m\notin\{0,1,2\}$ فإن A قابلة للقلب ولدينا:

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

وإذا كان $m=0$ فإن مجموعة حلول الجملة السابقة هي : $\{(\lambda,\lambda,\text{-}\lambda),\lambda\in \text{IR}\}$

وإذا كان $m=1$ فإن مجموعة حلول الجملة السابقة هي: $\{(6\lambda,8\lambda,\text{-}5\lambda),\lambda\in \text{IR}\}$

وإذا كان $m=2$ فإن مجموعة حلول الجملة السابقة هي: $\{(\lambda,2\lambda,\text{-}\lambda),\lambda\in \text{IR}\}$

تمرين10:

ا.لدينا :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&2\\2&1&2&-3&4\\5&-4&3&-6&6\\-1&5&-1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3-5L_1\\L_4+L_1}]{L_2-2L_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&2\\0&3&4&-5&0\\0&-9&8&-11&-4\\0&6&-2&2&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4+2L_2]{L_3-3L_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&2\\0&3&4&-5&0\\0&0&-4&4&-4\\0&0&6&-8&4\end{array}\right)\xrightarrow{2L_4+3L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&2\\0&3&4&-5&0\\0&0&-4&4&-4\\0&0&0&-4&-4\end{array}\right)$$

ومنه نجد أن: $t=1,z=-2,y=\dfrac{13}{3},x=-\dfrac{16}{3}$

ب.لدينا :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-1&1&1\\3&2&-1&0&5&1\\2&2&-2&3&1&3\\0&3&-6&2&1&-1\\-1&1&-3&1&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3-2L_1\\L_5+L_1}]{L_2-3L_1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-1&1&1\\0&5&-10&3&2&-2\\0&4&-8&5&-1&1\\0&3&-6&2&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[5L_4-3L_2]{5L_3-4L_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-1&1&1\\0&5&-10&3&2&-2\\0&0&0&13&-13&13\\0&0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[13L_4-L_3]{L_3\leftarrow\frac{1}{13}L_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&-1&1&1\\0&5&-10&3&2&-2\\0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

ومنه نجد مجموعة الحلول هي :

$$\{(-x_3-x_5+1,2x_3-x_5-1,x_3,1+x_5,x_5),x_3,x_5\in IK\}$$

تمرين11:

إن الجملة الخطية (S) تكافئ الجملة الخطية المتجانسة التالية :

$$\begin{cases}(0.2-\alpha)x+0.1y+0.3z=0\\0.5x+(0.3-\alpha)y+0.3z=0\\0.1x+0.4y+(0.2-\alpha)z=0\end{cases}$$

إذن المصفوفة المرافقة لهذه الجملة هي :

$$\begin{pmatrix}0.2-\alpha&0.1&0.3\\0.5&0.3-\alpha&0.3\\0.1&0.4&0.2-\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}\begin{pmatrix}0.8-\alpha&0.8\text{-}\alpha&0.8\text{-}\alpha\\0.5&0.3-\alpha&0.3\\0.1&0.4&0.2-\alpha\end{pmatrix}$$

ونميز حالتين : الحالة الأولى إذا كان $\alpha=0.8$ عندئذ :

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0.5&\text{-}0.5&0.3\\0.1&0.4&\text{-}0.6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\5&-5&3\\1&4&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow 5L_3-L_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\5&-5&2\\0&25&-33\end{pmatrix}$$

ومنه تكون مجموعة الحلول : $\left\{\left(\frac{18}{25}z,\frac{33}{25}z,z\right),z\in IK\right\}$

الحالة الثانية عندما يكون $\alpha\neq 0.8$ ، عندئذ الجملة (S) تكافئ :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0.5&0.3-\alpha&0.3\\0.1&0.4&0.2-\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-0.1L_1]{L_2\leftarrow L_2-0.5L_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&\text{-}(0.2+\alpha)&0.3\\0&0.3&(0.1-\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0.3&(0.1-\alpha)\\0&-(0.2+\alpha)&-0.2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow 0.L_3+(0.2+\alpha)L_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0.3&0.1-\alpha\\0&0&-(0.04+0.1\alpha+\alpha^2)\end{pmatrix}$$

كثير الحدود $\alpha^2+0.1\alpha+0.04$ مميزه هو $\Delta=-0.15$ ونميز حالتين ، إذا كان $IK=IR$ فإن

$\alpha^2+0.1\alpha+0.04\neq 0$ ومنه نجد أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو $(0,0,0)$. إذا كان $IK=\mathbb{C}$ فإن المعادلة

$\alpha^2+0.1\alpha+0.04=0$ تقبل جذرين مختلفين هما: $\alpha_1=\frac{-1-i\sqrt{15}}{20}$ و $\alpha_2=\frac{-1+i\sqrt{15}}{20}$، عندئذ تكون مجموعة

حلول الجملة (S) هي :

$$\left\{\left(\frac{-3+i\sqrt{15}}{6}z,\frac{-3-i\sqrt{15}}{6}z,z\right),z\in\mathbb{C}\right\},\alpha=\frac{-1-i\sqrt{15}}{20}$$

$$\left\{\left(\frac{-3-i\sqrt{15}}{6}z,\frac{3+i\sqrt{15}}{6}z,z\right),z\in\mathbb{C}\right\},\alpha=\frac{-1+i\sqrt{15}}{20}$$

تمرين12:

نلاحظ أن معاملات x مرتبطة بالوسيط m ، إذن من أجل تجنب مناقشات لا طائل منها يمكن مبادلة المجهولين x,z وعندئذ تكتب الجملة على النحو التالي :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & m-1 & 1\\ 3 & 2 & m & 3\\ m-1 & m & m+1 & m-1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3-(m-1)L_1]{L_2-3L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & m-1 & 1\\ 0 & 2-3m & 3-2m & 0\\ 0 & m(2-m) & m(3-m) & 0\end{array}\right)$$

ونميز عدة حالات :

الحالة الأولى إذا كان $m=0$ فإن الجملة تكافئ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول الجملة (S)تكون عندئذ : $\left\{\left(x,-\frac{3}{2}x,1+x\right),x\in IR\right\}$

إذا كان $m\neq 0$ فإن :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & m-1 & 1\\ 0 & 2-3m & 3-2m & 0\\ 0 & 2-m & 3-m & 0\end{array}\right)\xrightarrow{L_2-3L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & m-1 & 1\\ 0 & -4 & m-6 & 0\\ 0 & 2-m & 3-m & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4L_3+(2-m)L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & m-1 & 1\\ 0 & -4 & m-6 & 0\\ 0 & 0 & m(4-m) & 0\end{array}\right)$$

إذا كان $m=4$ فإن مجموعة الحلول هي $\left\{\left(x,-\frac{x}{2},1-x\right),x\in IR\right\}$.

إذا كان $m\notin\{0,4\}$ فإن الجملة (S) لها حل وحيد هو$(0,0,1)$.

تمرين13:

بجمع جميع أسطر الجملة نحصل على المعادلة : $(\lambda+(n-1))\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\mu^i$

إذا كان $\lambda=1\text{-}n$ فلا يوجد للجملة حل (إلا في حالة n زوجي و $\mu=-1$ وفي هذه الحالة $\left(x_p=(-1)^{p+1}x_1, p\in\{2,...,n\}\right.$. إذا كان $((\lambda\neq 1)\wedge(\lambda\neq 1-n))$ عندئذ من السطر j من الجملة نجد أن :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{\lambda+(n\text{-}1)}\left(\frac{\mu^n-1}{\mu-1}\right) \text{ و } x_j=\frac{1}{\lambda-1}\left(\mu^{j\text{-}1}-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

إذا كان $\lambda=1$ فليس هناك حل (إلا في حالة $\mu=1$) .

تمرين14:

1.لدينا :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&0&0\\6&2&1&2\\9&3&7&14\end{array}\right)\xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2-2L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&7&14\end{array}\right)$$

ومنه تكون مجموعة حلول الجملة هي : $\{(x,-3x,2),x\in IR\}$

2.لدينا :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&3&2&4\\3&3&3&2&6\\3&-1&-1&2&6\\3&-1&3&-1&6\end{array}\right)\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\left(\begin{array}{cccc|c}\text{-}1&2&3&2&4\\3&3&3&2&6\\\text{-}1&3&-1&2&6\\\text{-}1&3&3&-1&6\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3-L_1\\L_4-L_1}]{L_2+3L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\text{-}1&2&3&2&4\\0&9&12&8&18\\0&1&-4&0&2\\0&1&0&-3&2\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_4}\left(\begin{array}{cccc|c}\text{-}1&2&3&2&4\\0&1&0&\text{-}3&2\\0&1&-4&0&2\\0&9&12&8&18\end{array}\right)\xrightarrow[L_4-9L_2]{L_3-L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\text{-}1&2&3&2&4\\0&1&0&\text{-}3&2\\0&0&-4&3&0\\0&0&12&\text{-}35&0\end{array}\right)\xrightarrow{L_4+3L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}\text{-}1&2&3&2&4\\0&1&0&\text{-}3&2\\0&0&-4&3&0\\0&0&0&44&0\end{array}\right)$$

ومنه فالجملة تقبل حلا وحيدا هو (2,0,0,0) .

تمرين15:

لدينا :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}a&1&1&1&1\\1&a&1&1&1\\1&1&a&1&1\\1&1&1&a&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&a&1\\1&a&1&1&1\\1&1&a&1&1\\a&1&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3-L_1\\L_4-aL_1}]{L_2-L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1\\ 0 & a\text{-}1 & 0 & 1\text{-}a & 0\\ 0 & 0 & a\text{-}1 & 1\text{-}a & 0\\ 0 & 1\text{-}a & 1\text{-}a & 1\text{-}a^2 & 1\text{-}a \end{array}\right) \xrightarrow{L_4-L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1\\ 0 & a\text{-}1 & 0 & 1\text{-}a & 0\\ 0 & 0 & a\text{-}1 & 1\text{-}a & 0\\ 0 & 0 & 1\text{-}a & 2\text{-}a\text{-}a^2 & 1\text{-}a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4-L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1\\ 0 & a\text{-}1 & 0 & 1\text{-}a & 0\\ 0 & 0 & a\text{-}1 & 1\text{-}a & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1\text{-}a)(a+3) & 1\text{-}a \end{array}\right)$$

إذا كان $a=1$ فإن الجملة تكافئ : $x_1+x_2+x_3+x_4=1$

ومن ثم فمجموعة الحلول هي : $\{(1-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4):x_2,x_3,x_4\in IR\}$

إذا كان $a\neq 1$ فإن الجملة تكافئ :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 1 \end{array}\right)$$

إذا كان $a=3$ فالجملة مستحيلة . إذا كان $a\neq -3$ عندئذ الجملة تقبل الحل :

$$x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{a+3}$$

2.لدينا :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5 & a \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & a\text{-}3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & a\text{-}6 \end{array}\right)$$

إذا كان $a\neq 6$ فالجملة مستحيلة ، وإذا كان $a=6$ فإن :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \text{-}1 & \text{-}2\\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

ومنه تكون مجموعة الحلول هي : $\{(-2+z,3-2z,z):z\in IR\}$

تمرين16:

لدينا :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 1 & -1 & -1 & 1 & b\\ -1 & -1 & 1 & 1 & c\\ -3 & 1 & -3 & -7 & d \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3+L_1\\ L_4+3L_1}]{L_2-L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & -2 & 0 & b\text{-}a\\ 0 & 0 & 2 & 2 & c+a\\ 0 & 4 & 0 & -4 & d+3a \end{array}\right) \xrightarrow{L_4+2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b\text{-}a \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c+a \\ 0 & 0 & -4 & -4 & a+2b+d \end{array}\right) \xrightarrow{L_4+2L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b\text{-}a \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a+2b+d+c \end{array}\right)$$

وحيث أن $3a+2b+d+c>0$ فإن الجملة مستحيلة .

7.5 تمارين للحلّ

تمرين1:

أحسب المحددات التالية:

$$1.\begin{vmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{vmatrix}, 2.\begin{vmatrix} a & x_1 & x_2 & x_3 \\ b & x_1 & x_2 & x_3 \\ c & x_1 & x_2 & x_3 \\ d & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}, 3.\begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix}$$

تمرين2:

أحسب المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} ، .\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

تمرين3:

لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{IR}$ ، أحسب المحدد التالي :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ (1+\alpha)^2 & (1+\beta)^2 & (1+\gamma)^2 \\ (2+\alpha)^2 & (2+\beta)^2 & (2+\gamma)^2 \end{vmatrix}$$

تمرين4:

لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{IR}$ ، أحسب المحدد التالي :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \gamma \\ \beta & \gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

تمرين5:

ليكن $\alpha \in \mathrm{IR}$ ، أحسب المحدد التالي :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ 4\alpha^3 & 3\alpha^2 & 2\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين 6:

أحسب المحددات التالية :

$$1.\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \cos 2\alpha_1 \\ 1 & \cos\alpha_2 & \cos 2\alpha_2 \\ 1 & \cos\alpha_3 & \cos 2\alpha_3 \end{vmatrix} \quad , \quad 2.\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin 2\alpha_1 & \sin 3\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \sin 2\alpha_2 & \sin 3\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 & \sin 2\alpha_3 & \sin 3\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$3.\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin 2\beta \\ 1 & \cos\gamma & \sin 2\gamma \end{vmatrix} \quad , \quad 4.\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين 7:

لنعتبر المحددات التالية :

$$1.A(P)=\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{vmatrix}$$

$$2.\Delta\Delta\begin{vmatrix} 0 & 1^2 & \cdots & n^2 \\ 1^2 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ n^2 & \cdots & \cdots & (2n)^2 \end{vmatrix}$$

حيث $P(x)$ هو كثير حدود من IP_{n-1} ، برهن أن $\Delta(P)=\Delta=0$.

تمرين 8:

لتكن $\alpha,\beta \in IR$ ، لنعتبر المصفوفة $M_n \in M_{2n}(IR)$ التالية :

$$\mathrm{M_n} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & \ddots & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

أحسب $D_n = \det(M_n)$.

تمرين 9:

ليكن n عددا طبيعيا أكبر من 2 و $\alpha_0,\dots,\alpha_n,\beta$ أعدادا حقيقية . برهن أن :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_0 & \cos(\alpha_0+\beta) & \cdots & \cos(\alpha_0+n\beta) \\ \cos\alpha_1 & \cos(\alpha_1+\beta) & \cdots & \cos(\alpha_1+n\beta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \cos(\alpha_n+\beta) & \cdots & \cos(\alpha_n+n\beta) \end{vmatrix} = 0$$

تمرين10:

أحسب بطريقة تراجعية المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, (a_1,\ldots,a_n) \in IR^n \text{ ، }$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}, (a,b) \in IR^2 \text{ ، } \begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cos\theta \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}, \theta \in IR.$$

تمرين11:

حل وناقش حسب قيم الوسيط m من IR الجمل التالية :

$$1.\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \quad , \quad 2.\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^2z=1-m \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases} \quad , \quad 4.\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1-m^2 \end{cases}$$

تمرين12:

حل وناقش حسب قيم الوسيط m من $\mathbb{C}$ الجمل الخطية التالية :

$$1.\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+z=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases} \quad , \quad 2.\begin{cases} x-y+2z+t=m \\ -2x+3y+3z-4t=m+1 \\ -3x+5y+5z-2t=m+2 \\ -x+2y-4z-38t=1 \end{cases}$$

تمرين13:

أعط قاعدة للفضاء الشعاعي الجزئي من IR^5 المعرف بالعلاقات الخطية التالية :

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+5x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5=0 \end{cases}$$

تمرين14:

حل الجمل الخطية التالية حسب قيم الأعداد المركبة $\lambda, a, b, a_1, \dots, a_n$:

$$1.\begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{cases} \qquad , \qquad 2.\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda \end{cases}$$

7.6 تمارين معمقة للحل

تمرين1:

حول الجمل الخطية التالية إلى جمل خطية متدرجة باستعمال طريقة غوص، ثم حل كل واحدة منها:

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+5x_4=0\\ x_1+2x_2+5x_3+15x_4=-2\\ 2x_1+5x_2+15x_3+52x_4=-1\\ 5x_1+15x_2+52x_3+203x_4=6\end{cases}\text{،}\qquad (S')\begin{cases} x_1-x_3=1\\ 2x_1+3x_2+2x_3=9\\ 2x_1+4x_2+2x_3=-1\end{cases}$$

$$(S'')\begin{cases} x_1+6x_3=-5\\ 2x_1-x_2+x_3=4\\ x_1+8x_2+2x_3=0\end{cases}\text{،}\qquad (S''')\begin{cases} x_1-x_3+2x_4=-1\\ 2x_1+3x_2+2x_3-2x_4=0\\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=1\\ 3x_1+x_2+5x_3-3x_4=0\end{cases}.$$

تمرين2:

حل في $\mathbb{R}^3$ الجمل التالية بطريقة مقلوب مصفوفة ثم تحقق من الحل بطريقة كرامر حيث:

$$(1)\begin{cases} 2x-y+z=0\\ x-4y-3z=1\\ 3x+y-2z=3\end{cases}\text{،}\quad (2)\begin{cases} x+y-2z=0\\ 2x-y-2z=3\\ 3x-5y+6z=-8\end{cases}\text{،}\quad (3)\begin{cases} 3x+y+z=7\\ 2x-y+2z=9\\ 5x+y+2z=-12\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} 3x-y+2z=7\\ 2x+y-z=1\\ 4x+2y-3z=-1\end{cases}\text{،}\quad (5)\begin{cases} x+3y+3z=4\\ x+4y+3z=5\\ x-3y+4z=3\end{cases}\text{،}\quad (S)\begin{cases} 2x-5y-6z=5\\ -3x+2y+5z=1\\ 2x+4y-3z=-16\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y=0\\ 6x+2y+z=2\\ 9x+3y+7z=14\end{cases}\text{،}\quad \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=0\\ x_1-8x_2+8x_3=0\\ 3x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}\text{،}\quad \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_1+5x_2+3x_3=0\\ 3x_1-x_2-4x_3=0\end{cases}.$$

تمرين3:

لتكن المصفوفات التالية ذات المعاملات في $\mathbb{R}$ والمعطاة في الأساس القانوني:

ادرس قابلية تقطير المصفوفات بتعيين الأساس المناسب ومصفوفة الانتقال لما يكون ذلك ممكنا وإذا كان غير ممكنا ادرس تثليثها.

$$A2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad A1=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3\\ 2 & 2 & -6\\ -2 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

$$B2=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B1=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & -5\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{pmatrix}$$

تمرين4:

لتكن المصفوفة التالية ذات معاملات في $\mathbb{R}$:

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ بحيث $ad-bc=1$.

1. أثبت أن A قابلة للقلب.

2. إذا كان $|a+d|>2$ فإنه توجد مصفوفة مربعة ذات سطرين وعمودين Q بحيث:

$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}t&0\\0&1/t\end{pmatrix}$ مع $t\in\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$.

تمرين5:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m حل الجملة الخطية التالية :

1- لدينا الجملة التالية ذات الوسيط الحقيقي m :

$$(S)\begin{cases}x+my+(m-1)z=1\\3x+2y+2z=3\\(m-1)x+my+(m+1)z=m-1\end{cases}$$

تمرين5:

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=1\\x_1+kx_2+x_3=1\\x_1+x_2+kx_3=1\end{cases}$$

عين قيمة العدد الحقيقي k حتى يكون للجملة (S):

أ) حل وحيد، ب) لا يكون لها أي حل، ج) تقبل عدداً لا نهائي من الحلول.

تمرين6:

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

نحسب A^n بطريقتين. ($A^0=I_3$ المصفوفة الحيادية 3×3).

أ) نضع: $A = M - I_3$ ، حيث M هي المصفوفة 3×3 كل معاملاتها يساوي 1.
باستعمال ثنائي الحد لنيوتن، عين A^n حيث $n \in IN^*$.
ب)
ب.1) عين كثير الحدود المميز وكثير لـ A. احسب $A^2 - A - 2I_3$.
ب.2) من أجل كل عدد طبيعي n، بين أنه توجد متتاليتان u_n, v_n من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$A^n = u_n A + v_n I_3$$

بوضع: $n \in IN$ ، $w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ ، عين مصفوفة مربعة B (2×2) بحيث: $w_n = Bw_{n-1}$.
عين مصفوفة مربعة قطرية D (2×2) مشابهة لـ B، استنتج u_n, v_n و A^n بدلالة n فقط.
قارن عبارة A^n المتحصل عليها بالطريقتين.

تمرين6:

أثبت أن كل مصفوفة غير معدومة ذات معاملات في $\mathbb{R}$ من الشكل التالي قابلة للقلب:

$$M = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$$

المراجع

1- دروس في الجبر العام والخطي (مطبوعة)

يوسف صاولـه، السنة 98، قسم الرياضيات المدرسة العليا للأساتذة القبة.

2- تمارين في الجبر العام (مطبوعة)

يوسف صاولـه، السنة 2000، قسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة القبة.

3- الجبر (3)،

عبد الواحد أبو حمزة، ديوان المطبوعات الجامعية- الجزائر.

4- التحليل-الجبر،

صلاح أحمد، ديوان المطبوعات الجامعية- الجزائر. 1979.

5- عادل سودان وموفق دعبول: الرياضيات المعاصرة: نظرية المجموعات، مؤسسة الرسالة للطباعة والنشر 1972

6- عادل سودان وموفق دعبول والأحمد وبرني : الرياضيات المعاصرة: البنى الجبرية، 1972

6- **سلمان عبد الرحمن السلمان:** المدخل إلى البنى الجبرية، جون ويلي واولاده 1984.

المراجع باللغة الاجنبية

1- *L. Chambadal et J.L. Ovaert, Cours de mathématiques, algebre II, Gauthier-Villars 1972.*

2- *R. Godement, cours d'algebre, Hermann, Paris 1970.*

3- *S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Reading.*

4- *Exercices d'algèbre 2eme année.* ***Boschet, B. calvo, J. doyen, A. calvo.***

5- *Eléments de théorie de groupes .* ***Calais.J***

6- *Algébre, M. Queysanne, Collection U.*

7- *Cours de mathématiques tome 1,* ***J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès****.*

8- *. Exercices résolus d'algèbre du cours de mathématiques 1*
M. Arnaudies, P. Delozoide, H. Frayss

الفهرس