الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة اين خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة

تمارين في الجبر الخطي

لمقياس الرياضيات 2

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2022 - 2021

1. مقدمة :

يشمل هذا العمل المتواضع المواضيع المقررة في برنامج السداسي الثاني لطلبة السنة الأولي جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير.وتعتبرهذه المواضيع المعروضة في هذه المطبوعة أساسا لمقررات متقدمة فهي حلقة وصل بين المقررات الأولية والمتقدمة.

كما تمت مراعاة احتياجات طالب العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير لما يتفق مع ما يستخدمه من الرياضيات في بقية مقاييس دراسته بعيدا عن الالتواءات والتعقيد والاختزال الذي يولد الصعوبات بحدود الممكن ومراعاة المقرر.

وقد تمت مراعاة الصعوبة التي يواجهها الطالب في استيعاب هذا المقرر وذلك بتقديم عدد كبير من التمارين المحلولة بأبسط الطرق و التمارين المقترحة للحل قصد تركيز المفاهيم و المعلومات ؛ مع مراعاة الدقة في المصطلحات المستخدمة.

وسوف اسرد نبذة تاريخية لبعض المواضيع التي تم التطرق لها في هذا العمل.

يعتبر أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي مؤسس علم الجبر حيث عرض في كتابه حساب الجبر والمقابلة أول حل منهجي للمعادلات الخطية والتربيعية ، كما ظهرت البنى الجبرية مع ظهور الأعداد ، بداية مع الأعداد الطبيعية ثم الصحيحة و العمليات الحسابية عليها، مما أدى البحث عن طرق لحل المعادلات إلى ظهور الجبر المجرد، كما تم تعميم الفكرة الفيزيائية ؛ الشعاع إلى الفضاءات الشعاعية و تمت دراستها في الجبر الخطي، و تعتبر الزمرة إحدى البنى الجبرية الأساسية والهامة في الجبر المجرد لكونها ضرورية من أجل فهم واستيعاب البنى الجبرية المجردة الأخرى: كالحلقات والحقول والمودولات والجبور والتبولوجي الجبري والهومولوجي وغير ذلك. كما أن لنظرية الزمر تطبيقات متعددة في مجالات كثيرة، ففي المعادلات التفاضلية تساعد في تصنيف وتبسيط حلول المعادلات التفاضلية. وفي الفيزياء والكيمياء تستخدم نظرية الزمر في تصنيف جمل النقاط منتظمة المواقع في الفضاء، وتعتبر هذه المسألة من أبرز المسائل الهامة في علم البلورات، إضافة الى دورها الفعال في استكشاف القانون المتمثل في خاصة التناظر من خلال الربط بين جزيء المادة وزمرة معينة. وفي الوقت الحاضر يصعب علينا تصور أي تطور لبنية نظرية الجزئيات دون مساعدة نظرية الزمر.

كما ظهرت دراسة الفضاء مع الهندسة، وبدأت مع الهندسة الاقليدية و علم المثلثات، في الفضائين ثنائي و ثلاثي البعد، ثم تم تعميم ذلك لاحقا إلى علوم هندسية غير اقليدية، لتلعب دورا في النظرية النسبية العامة.

ويعود أول ظهور لتعريف الفضاء الشعاعي إلى القرن السابع عشر مع العالم الإيطالي جيوسيبي بيانو Giuseppe Peano،

واعتمادا على حل الجمل الخطية ، تطورت نظرية الفضاءات الشعاعية ، ففي عام 1750 تم نشر عملين مهمين لتاريخ الفضاءات الشعاعية ؛ الأول ،" مقدمة في تحليل المنحنيات الجبرية" بقلم غابرييل كرامر حيث وضعت الأسس لتطوير نظرية المحددات ، والثاني" حول تناقض واضح في الخطوط المنحنية "بقلم ليونارد أولر ، المتعلق بالمنحنيات الجبرية وعلى مفارقة كرامر.

كما نشر غراسمان هيرمان غونتر جزءًا من نتائجه في عام 1844 في أطروحة بعنوان" علم الكميات الضخمة أو نظرية الفضاء(اكتمل في عام1863 .) ومن خلالها نحن مدينون له بالمفاهيم الأولى التالية:

- الاستقلال الخطي
- مجموع فضائين جزئيين
- الجداء الخطي ، الموافق حاليا للجداء السلمي

لكن التطور الفعلي لنظرية الفضاءات الشعاعية بدأ فقط بعد عام1920.

و على الرغم من أن الحساب المصفوفي الفعلي لم يظهر إلا في بداية القرن التاسع عشر ، إلا أن المصفوفات بصفتها صفوف من الأرقام ، لها تاريخ طويل من التطبيقات في حل المعادلات الخطية .ففي النص الصيني" الفصول التسعة في فن الرياضيات "، الذي كتب في القرن الثاني قبل الميلاد ، وهو أول مثال معروف لاستخدام الجداول في حل جمل المعادلات ، كما تقديم مفهوم المحدد .

وفي عام 1545 ادخل Girolamo Cardano هذه الطريقة الى أوروبا .

في عام 1683 استخدم الرياضياتي الياباني Seki Kōwa نفس التقنيات بشكل مستقل لحل جمل المعادلات .بين 1700 و 1710 ، أوضح لايبنز كيفية استخدام الجداول لتسجيل البيانات أو الحلول ، وجرب أكثر من 50 نظامًا للجدول لهذا الغرض .في عام 1750 ، نشرغابرييل كرامر القاعدة التي تحمل اسمه .في عام1850 ، تم صياغة مصطلح" المصفوفة" (والذي تمت ترجمته عن اللغة اللاتينية:)

مما لا شك فيه أن المصفوفات واحدة من الأمور الهامة والأساسية في العمليات الرياضية فهي تشبه في شكلها المستطيل بداخله الأعداد في صفوف وأعمدة وهي نظرية هامة في الرياضيات بحيث تستخدم في العديد من التطبيقات الرياضية، وهذا بالإضافة إلى أهميتها في تطبيقات الحياة والحياة اليومية كما تساعدنا على التقليل من الأخطاء والوصول إلى النتائج الصحيحة، فالمصفوفات هو ذلك العلم الذي يرتبط الدارات الكهربائية التي تحسب التيار الكهربائي كما تستخدم في التطبيقات الميكانيكية بهدف حساب القوي كما تستخدم أيضا في عمليات التشفير وأرسل الرسائل التي تتضمن الشفرات .

في عام 1854 ، نشر آرثر كايلي أطروحة عن التحولات الهندسية باستخدام المصفوفات على نطاق أوسع بكثير من أي شيء قبله .حيث حدد العمليات المعتادة لحساب المصفوفة (الجمع والضرب) وبين خصائص ضرب المصفوفات.

إن منشأ الجبر الخطي يعود إلى النصف الثاني من القرن السابع عشر وذلك عند دراسة جمل المعادلات ؛ ومن أوائل الرياضيين الذين أسهموا في هذا المجال نذكر Leibintz ومن بعده العالم Maclaurin الذي أعطى العلاقات التي

تسمح بحل جمل المعادلات الخطية بمجهولين وبثلاثة مجاهيل.

في الجبر الخطي ، فكثير الحدود المميز لمصفوفة مربعة هو كثير الحدود لديه جذور تسمى القيم الذاتية ، أنه يحتوي على المحددات و أثر المصفوفة بين معاملات لها. .و المعادلة المميزة، والمعروفة أيضًا باسم المعادلة المحددة ، هي المعادلة التي تم الحصول عليها عن طريق معادلة صفرية كثيرة الحدود المميزة.

يهتم الجبر الخطي بدراسة التحويلات الخطية، والتي تمثلها مصفوفات مؤثرة على متجهات .تعد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية والفراغات الذاتية خواص المصفوفة. يتم حسابها بواسطة طريقة تعطي معلومات عن المصفوفة ويمكن استعمالها في تفكيك المصفوفة .لهذا النوع تطبيقاته الخاصة في مجالات الرياضيات التطبيقية وبشكل أوسع في التمويل وميكانيكا الكم.

عموماً، تؤثر مصفوفة على شعاع بتغيير كلاً من قيمته واتجاهه. لكن يمكن أن تؤثر المصفوفة على بعض الاشعة بتغيير قيمها مع الإبقاء على اتجاهاتها دون تغيير (أو ربما عكسها). تمثل هذه الاشعة اشعة ذاتية للمصفوفة. تؤثر مصفوفة على شعاعي ذاتي بضرب قيمته بعامل معين، والذي يكون موجباً عندما لا يتغير اتجاهه وسالباً إن انعكس الاتجاه. يمثل هذا العامل القيمة الذاتية المصاحبة لذلك الشعاعي الذاتي. يكون الفضاء الذاتي مجموعة كل الاشعة الذاتية التي لها نفس القيمة الذاتية، معاً ومع الشعاع المعدوم. لا يمكن تعريف المفهوم بشكل رسمي بدون متطلبات أساسية، بما فيها فهم المصفوفات والاشعة والتحويلات الخطية.

أما دراسة الحالة العامة لجمل المعادلات الخطية فيعود الفضل في ذلك إلى العالم Cramer في النصف الثاني من القرن الثامن عشر . و نتيجة لهذه الدراسات نشأ مفهوم المحدد من المرتبة nنذكر أن Laplace و Vandermonde الذين عملا في هذا المجال وجاء بعد ذلك مفهوم المصفوفة على يد العالم Gauss .إن تطور نظرية المصفوفات سمح في منتصف القرن التاسع عشر بظهور مفهوم الفضاء الشعاعي ذو n بعدًا . وأول من تحدث عن هذا المفهوم الشعاعي Cayley وأما التعريف النهائية للفضاءات الشعاعية فقد وضعت من قبل العالم Peano في عام 1888.

وأخيرا نأمل أن ينال عملنا المتواضع رضا طلبتنا الكرام و الزملاء ذوي الاختصاص.

الدكتور مختاري مختار

كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية و علوم التسيير

جامعة ابن خلدون تيارت

2. البنى الجبرية :

تمرين:

في المجموعة $\mathbb{R}$ نعرف العملية Δ كما يلي:

$$\forall (x,y)\in IR\times IR : x\Delta y = x+y-xy$$

1. بين أن العملية Δ تجميعية ، تبديلية وتقبل عنصرا حياديا .
2. أدرس العناصر القابلة للتنظير في IR بالنسبة للعملية Δ .
3. أحسب $\forall x\in IR : \underbrace{x\Delta x\Delta ...\Delta x}_{\text{n fois}}$.

الحل:

1. إن العملية Δ داخلية وضوحا ، من جهة أخرى من أجل كل $(x,y,z)\in IR^3$ لدينا:

$$x\Delta(y\Delta z) = x\Delta(y+z-yz) = x+y+z-yz-xz-xy+xyz$$
$$(x\Delta y)\Delta z = (x+y-xy)\Delta z = x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

وبالمقارنة نجد أن : $\forall (x,y,z)\in IR^3 : (x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$

أي أن العملية Δ تجميعية . العملية Δ تبديلية لأن :

$$\forall (x,y)\in IR^2 : x\Delta y = x+y-xy = y+x-yx = y\Delta x$$

يكون العنصر $e\in IR$ عنصرا حياديا بالنسبة للعملية Δ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall x\in IR : x\Delta e = e\Delta x = x$$

وبما أن Δ تبديلية فيكفي حل المعادلة : $x\Delta e = x \Leftrightarrow e(1-x)=0$

تقبل هذه المعادلة حلا وحيدا في IR هو $e=0$ وهو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية Δ .

2. ليكن $x\in IR$ نبحث عن العنصر $x'\in IR$ الذي يحقق:

$$x\Delta x' = 0 = x'\Delta x$$

لدينا : $x\Delta x' = 0 \Leftrightarrow x'(x-1) = x$

هذه المعادلة الأخيرة تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x\neq 1$ ، عندئذ يكون لدينا

$$x' = \frac{x}{x-1}, \forall x\neq 1$$

أي أن جميع الأعداد الحقيقية قابلة للقلب ما عدا العنصر $x=1$.

3. لدينا :

$$x\Delta x = 2x-x^2 = 1-(1-2x+x^2) = 1-(1-x)^2$$
$$x\Delta x\Delta x = x\Delta\left(1-(1-x)^2\right) = x+1-(1-x)^2-x+x(1-x)^2$$
$$= 1-(1-x)^2(1-x) = 1-(1-x)^3$$

نفرض أن $\underbrace{x\Delta x\Delta \ldots \Delta x}_{\text{n fois}} = 1-(1-x)^n$ ونبرهن أن :

$$\underbrace{x\Delta x\Delta \ldots \Delta x}_{\text{(n+1) fois}} = 1-(1-x)^{n+1}$$

لدينا حسب الخاصية التجميعية :

$$\begin{aligned}\underbrace{x\Delta x\Delta \ldots \Delta x}_{\text{(n+1) fois}} &= \underbrace{(x\Delta x\Delta \ldots \Delta x)}_{\text{n fois}}\Delta x = \left[1-(1-x)^n\right]\Delta x \\ &= 1-(1-x)^n + x - x + x(1-x)^n \\ &= 1-(1-x)^n(1-x) = 1-(1-x)^{n+1}\end{aligned}$$

تمرين:

لتكن المجموعة $G=\{(x,y)\in IR\times IR : x^2-y^2=1\}$ نزود G بالعملية $\perp$ المعرفة كما يلي :

$$\forall (x,y),(z,w)\in G\times G : (x,y)\perp(z,w) = (xz+yw, xw+yz)$$

1. ا.تأكد من أن العملية $\perp$ داخلية في G .
2. ب.برهن أن $(G,\perp)$ زمرة تبديلية .

الحل:

1. تكون العملية $\perp$ داخلية في G إذا وفقط إذا كان :

$$\forall (x,y),(z,w)\in G : (x,y)\perp(z,w)\in G$$

لكن : $(x,y)\perp(z,w) = (xz+yw, xw+yz)$

ومنه فإن : $(xz+yw)^2-(xw+yz)^2 = x^2(z^2-w^2)+y^2(w^2-z^2) = x^2-y^2 = 1$

وبالتالي فإن العملية $\perp$ داخلية في G .

2. إن العملية $\perp$ تبديلية لأن :

$$\begin{aligned}\forall (x,y),(z,w)\in G : (x,y)\perp(z,w) &= (xz+yw, xw+yz) \\ &= (zx+wy, wx+zy) \\ &= (zx+wy, zy+wx) \\ &= (z,w)\perp(x,y)\end{aligned}$$

(لأن الضرب والجمع تبديليان في $\mathbb{R}$) . لتكن الآن الأزواج $(x,y),(z,w),(u,v)$ من G

لدينا:

$$\begin{aligned}\left[(x,y)\perp(z,w)\right]\perp(u,v) &= (xz+yw, xw+yz)\perp(u,v) \\ &= (xzu+ywu+xwv+yzv, xzv+ywv+xwu+yzu)\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned}(x,y)\perp\left[(z,w)\perp(u,v)\right] &= (x,y)\perp(zu+wv, zv+wu) \\ &= (xzu+xwv+yzv+ywu, xzv+xwu+yzu+ywv)\end{aligned}$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$(x,y)\perp[(z,w)\perp(u,v)]=[(x,y)\perp(z,w)]\perp(u,v)$$

إذن $\perp$ تجميعية .

نبحث الآن عن الزوج $(e,e')\in G$ والمحقق للمعادلة :

$$\forall(x,y)\in G:(x,y)\perp(e,e')=(x,y)$$

لدينا :

$$(x,y)\perp(e,e')=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}xe+ye'=x\\xe'+ye=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yxe+y^2e'=xy\\x^2e'+xye=xy\end{cases}$$
$$\Rightarrow e'(x^2-y^2)=0\Rightarrow e'=0$$

ومنه فإن $xe=x\Rightarrow e=1$ وبالتالي فإن الزوج $(1,0)\in G$ عنصر حيادي بالنسبة للعملية $\perp$.

ليكن الآن الزوج $(x,y)\in G$ ، نبحث عن الزوج $(x',y')\in G$ المحقق للمعادلة $(x,y)\perp(x',y')=(1,0)$.

لدينا :

$$(x,y)\perp(x',y')=(1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}xx'+yy'=1\\xy'+yx'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}yxx'+y^2y'=y\\x^2y'+xyx'=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow y'(x^2-y^2)=-y\Rightarrow y'=-y$$

ومنه نجد أن $x'=x$ أي أن نظير العنصر $(x,y)\in G$ هو $(x,-y)$ وهو ينتمي إلى G . إذن $(G,\perp)$ زمرة تبديلية

تمرين:

من اجل $(x,y)\in E^2$ نضع $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ حيث $E=]-1,1[$.

1. بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في E .
2. أن $(E,*)$ زمرة تبديلية.

الحلّ:

1. لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في E .

نعتبر الدالة : $f_y(x)=\dfrac{x+y}{1+xy}$ المعرفة على $E=]-1,1[$ ونعتبر $y\in E$.

لدينا $f_y'(x)=\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2}$ ومنه $\forall x\in[-1;1[:f_y'(x)>0$

وبالتالي الدالة f_y متزايدة تماما على $E=]-1,1[$.

اذن $f_y(]-1,1[)=]-1,1[$

ومنه $\forall(x,y)\in E^2,\ f_y(x)\in E$

و هذا يعني $\forall (x,y) \in E^2,\ x*y \in E$

و بالتالي * قانون تركيب داخلي في E.

2. لنبين أن $(E,*)$ زمرة تبديلية.

أ) * تجمعية:

نعتبر $(x,y,z) \in E^3$.

$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z$$

$$= \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z}$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad .... (1)$$

و من جهة أخرى

$$x*(y*z) = x*\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$$

$$= \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}}$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad .... (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(x*y)*z = x*(y*z)$ ، أي أن * تجمعية ،

ب) * تبديلية:

نعتبر $(x,y) \in E^2$.

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy}$$

$$= \frac{y+x}{1+yx}$$

$$= y*x$$

ومنه نستنتج أن : $x*y = y*x$ ، أي أن * تبديلية ،

ت) E يقبل عنصر حيادي e بالنسبة للعملية *:

نعتبر $e \in E$ يحقق : $\forall x \in E:\ x*e = e*x = x$. (العملية * تبديلية)

$$\begin{aligned} x*e &= \frac{x+e}{1+xe} \\ &= \frac{e+x}{1+ex} \\ &= x \end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned} x*e = x &\Leftrightarrow x+e = x(1+xe) \\ &\Leftrightarrow x+e = x+x^2e \\ &\Leftrightarrow e = x^2e \\ &\Leftrightarrow e(1-x^2)=0 \\ &\Leftrightarrow e=0, \forall x\in E \\ &\Leftrightarrow e=0 \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن العنصر الحيادي هو $e=0$ في E النسبة للعملية * .

ث) نبين أن لكل عنصر x من E يقبل عنصرا نظيرا في E بالنسبة للعملية *:

نعتبر $x\in E$ يحقق : $\forall x\in E:\ x*x'=x'*x=0$.(العملية * تبديلية)

$$\begin{aligned} x*x'=0 &\Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe}=0 \\ &\Leftrightarrow x+x'=0 \\ &\Leftrightarrow x'=-x \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن لكل عنصر x من E نظير هو $-x$ النسبة للعملية * .

من أ)،ب)،ت)و ث)نستنتج أن الثنائية $(E,*)$ تشكل زمرة تبديلية .

تمرين:

من اجل $(x,y)\in E$ و $(x',y')\in E$

نضع $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-y^2=1\}$

حيث $(x,y)\oplus(x',y')=(xx'+yy',xy'+yx')$.

1. بين أن $\oplus$ قانون تركيب داخلي في E .
2. أن $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية.

الحلّ:

1. لنبين أن $\oplus$ قانون تركيب داخلي في E .

لدينا

$$\forall(x,y)\in E,\ \forall(x',y')\in E:(x,y)\oplus(x',y')=(xx'+yy',xy'+yx')$$

نعلم ان عملية الجمع وعملية الضرب عمليتين داخليتين في $\mathbb{R}$.

$$\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4:\begin{cases}xx'\in\mathbb{R}\\ yy'\in\mathbb{R}\\ xy'\in\mathbb{R}\\ yx'\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xx'+yy'\in\mathbb{R}\\ xy'+yx'\in\mathbb{R}\end{cases}$$

ومنه

$$\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4:(xx'+yy',xy'+yx')\in\mathbb{R}^2$$

وبالتالي

$$(x,y)\oplus(x',y')\in E$$

و منه $\oplus$ قانون تركيب داخلي في E.

1. أن $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية.

أ) $\oplus$ تجمعية:

نعتبر $(x,y),(x',y'),(z,z')\in E^3$.

$$\begin{aligned}((x,y)\oplus(x',y'))\oplus(z,z') &= ((xx'+yy'),(xy'+yx'))\oplus(x'',y'')\\ &= ((xx'+yy')x''+y''(xy'+yx'),(xx'+yy')y''+x''(xy'+yx'))\\ &= ((xx'x''+yy'x''+xy'y''+yx'y''),(xx'y''+yy'y''+xy'x''+yx'x''))\text{..........}\ (1)\end{aligned}$$

و من جهة أخرى

$$\begin{aligned}(x,y)\oplus((x',y')\oplus(x'',y'')) &= (x,y)\oplus((x'x''+y'y''),(x'y''+y'x''))\\ &= (x(x'x''+y'y'')+y(x'y''+y'x''),(x'y''+y'x'')x+y(x'x''+y'y''))\\ &= ((xx'x''+xy'y''+yx'y''+yy'x''),(xx'y''+xy'x''+yx'x''+yy'y''))\text{..........}\ (2)\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(x*y)*z=x*(y*z)$ ، أي أن $*$ تجمعية ،

ب) $*$ تبديلية:

نعتبر $(x,y),(x',y')\in E^2$.

$$\begin{aligned}(x,y)\oplus(x',y') &= (xx'+yy',xy'+yx')\\ &= (x'x+y'y,y'x+x'y)\\ &= (x',y')\oplus(x,y)\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن : $(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y)$ ، أي أن $*$ تبديلية ،

ت) E يقبل عنصر حيادي (e_x,e_y) بالنسبة للعملية $\oplus$:

نعتبر $(e,e')\in E$ يحقق : $\forall(x,y)\in E:(x,y)\oplus(e_x,e_y)=(e_x,e_y)\oplus(x,y)=(x,y)$. (العملية $\oplus$ تبديلية)

$$(x,y)\oplus(e_x,e_y)=\left(xe_x+ye_y,xe_y+ye_x\right)$$
$$=(x,y)$$

و منه

$$\left(xe_x+ye_y,xe_y+ye_x\right)=(x,y)\Rightarrow\begin{cases}xe_x+ye_y=x\\ xe_y+ye_x=y\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2e_x+xye_y=x^2\\ xye_y+y^2e_x=y^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}e_x(x^2-y^2)=x^2-y^2\\ xe_x+ye_y=x\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}e_x=1\\ x+ye_y=x\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}e_x=1\\ e_y=0\end{cases}$$

علما ان $x^2-y^2=1$

ومنه نستنتج أن العنصر الحيادي هو $(e_x,e_y)=(1,0)$ في E النسبة للعملية $\oplus$.

ث) نبين أن لكل عنصر (x,y) من E يقبل عنصرا نظيرا في E بالنسبة للعملية $\oplus$:

نعتبر $(x,y)\in E$ يحقق : $\forall(x,y)\in E:(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y)=(1,0)$. (العملية $\oplus$ تبديلية)

$$(x,y)\oplus(x',y')=(1,0)\Rightarrow\left(xx'+yy',xy'+yx'\right)=(1,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}xx'+yy'=1\\ xy'+yx'=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2x'+xyy'=x\\ xyy'+y^2x'=0\end{cases}$$

نميز حالتين

الأولى: $x\neq 0$.

$$(x,y)\oplus(x',y')=(1,0)\Rightarrow\left(xx'+yy',xy'+yx'\right)=(1,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}xx'+yy'=1\\ xy'+yx'=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^2x'+xyy'=x\\ xyy'+y^2x'=0\end{cases}$$

$$(x,y)\oplus(x',y')=(1,0)\Rightarrow\left(xx'+yy',xy'+yx'\right)=(1,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}xx'+yy'=1\\xy'+yx'=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2x'+xyy'=x\\xyy'+y^2x'=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'\left(x^2-y^2\right)=x\\xy'+yx'=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$$

ومنه نستنتج أن لكل عنصر (x,y) من E نظير هو $(x,-y)$ النسبة للعملية $\oplus$.

الثانية : $x=0$ ، اذن $y=1$ او $y=-1$.

$$(x,y)\oplus(x',y')=(1,0)\Rightarrow\left(xx'+yy',xy'+yx'\right)=(1,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}xx'+yy'=1\\xy'+yx'=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}yy'=1\\yx'=0,\ \ y\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'=\dfrac{1}{y}\\x'=0,\ \ y\neq 0\end{cases}$$

ومنه نظير العنصر $(0,1)$ هو $(0,1)$ و نظير العنصر $(0,-1)$ هو $(0,-1)$.

من أ)،ب)،ت)و ث)نستنتج أن الثنائية $(E,\oplus)$ تشكل زمرة تبديلية .

تمرين:

$(G,\times)$ زمرة غير تبديلية و عنصرها الحيادي هو e و العنصر النظير a لـ هو a^{-1} .

نعتبر $C=\{a\in G/\forall x\in G: xa=ax\}$.

بين أن $(C,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

الحلّ:

لنبين أن $\forall(a,b)\in C: ab^{-1}\in C$.

نعتبر $x\in G$

$$ab^{-1}x=a\left(x^{-1}b\right)^{-1}$$

$$b\in C\Rightarrow x^{-1}b=bx^{-1}$$

$$ab^{-1}x = a\left(bx^{-1}\right)^{-1} = axb^{-1}$$

$$a \in C \Rightarrow ax = xa$$

$$\forall (a;b) \in C, \forall x \in G : ab^{-1}x = xab^{-1}$$

اذن $\forall (a;b) \in C : ab^{-1} \in C$ ،

ومنه $(C,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

لدينا $1_G \in C$ لان $\forall x \in G : x1_G = 1_G x$

اذن $C \neq \Phi$

تمرين:

$(G,\times)$ زمرة $a \in G$.

نعتبر $H_a = \{ x \in G : xa = ax \}$.

بين أن $(H_a,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

الحلّ:

لنبين أن $\forall (x;y) \in H_a^2,\ xy^{-1} \in H_a$

$$x \in H_a \Leftrightarrow xa = ax \Leftrightarrow a^{-1}x = xa^{-1}$$

$$y \in H_a \Leftrightarrow ya = ay \Leftrightarrow a^{-1}y = ya^{-1}$$

$$xy^{-1}a = x\left(a^{-1}y\right)^{-1} = x\left(ya^{-1}\right)^{-1} = xay^{-1} = axy^{-1}$$

اذن $\forall (x;y) \in H_a^2,\ xy^{-1}a = axy^{-1}$

و منه $\forall (x;y) \in H_a^2,\ xy^{-1} \in H_a$

إذن $(H_a,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$.

تمرين:

لتكن $(G,*)$ زمرة e عنصرها الحيادي .

1. برهن أنه إذا كان $x * x = e, \forall x \in G$ فإن $(G,*)$ زمرة تبديلية .
2. برهن أنه إذا كان :

$$\forall (x,y) \in G \times G : (x*y)*(x*y) = (x*x)*(y*y)$$

فإن $(G,*)$ تكون أيضا زمرة تبديلية .

الحل:

1. دينا حسب الخاصية التجميعية للعملية * :

$$\forall (x,y)\in G\times G:(x*y)*(y*x)=x*(y*y)*x$$
$$=x*e*x=x*x=e$$

ولدينا فرضا $(x*y)*(x*y)=e$ إذن :

$$\forall (x,y)\in G\times G:(x*y)*(y*x)=(x*y)*(x*y)$$

ومنه فإن : $\forall (x,y)\in G\times G:y*x=x*y$

أي أن * عملية تبديلية .

2. لدينا فرضا :

$$\forall (x,y)\in G\times G:(x*y)*(x*y)=(x*x)*(y*y)$$

إذن يكون لدينا حسب الخاصية التجميعية :

$$x^{-1}*x*(y*x)*y*y^{-1}=x^{-1}*x*(x*y)*y*y^{-1}$$

مما يقتضي أن : $\forall (x,y)\in G\times G:y*x=x*y$

أي أن * عملية تبديلية .

تمرين:

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ، نزود G بالعملية . المعرفة كما يلي:

$$\forall (a,b)\in G\times G:a.b=0$$

1. برهن أن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية .

الحل:

1. العملية . هي عملية داخلية ، تبديلية لأن:

$$\forall a,b\in G:b.a=a.b=0\in G$$

(0 هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية +) ، من جهة أخرى العملية. تجميعية لأن :

$$\forall (a,b,c)\in G^3:\begin{cases}(a.b).c=0.c=0\\ a.(b.c)=a.0=0\end{cases}$$

أيضا العملية . توزيعية بالنسبة للجمع لأن :

$$\forall a,b,c\in G:\begin{cases}a.(b+c)=0,a.b+a.c=0+0=0\\ (b+c).a=0,a.b+c.a=0+0=0\end{cases}$$

إذن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية .

تمرين:

نقول عن حلقة $(G,+,.)$ أنها بولية إذا حققت الشرط $\forall x\in G:x^2=x$ برهن أن :

1. $\forall x \in G : x + x = 0$ ثم برهن أن الحلقة تبديلية .
2. $\forall (x,y) \in G \times G : x.y.(x+y) = 0$ ، ثم برهن أنه إذا كانت الحلقة تامة فإنها لا تحوي على أكثر من عنصرين .
3. نعرف في G العلاقة $\Re$ التالية :

$$\forall (x,y) \in G \times G : x \Re y \Leftrightarrow x.y = x$$

برهن أن $\Re$ هي علاقة ترتيب في G .

الحل:

1. لدينا :

$$\forall x \in G : (x+x)^2 = x + x = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x$$

وبالتالي فإن: $\forall x \in G : x + x = 0$ ،

لدينا :

$$\forall x, y \in G : x + y = (x+y)^2 = x^2 + x.y + y.x + y^2 = x + x.y + y.x + y$$

ومنه فإن $x.y + y.x = 0$.

من جهة أخرى لدينا:

$$\forall x, y \in G : x.(y+y) = 0 = x.y + x.y$$

وبالمطابقة نجد أن: $\forall x, y \in G : x.y = y.x$ ، أي أن الحلقة $(G,+,.)$ تبديلية.

2. بما أن الحلقة تبديلية فإن :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in G : x.y.(x+y) &= x.y.x + x.y^2 = x^2.y + x.y^2 \\ &= x.y + x.y = x.(y+y) = 0 \end{aligned}$$

إذا كانت الحلقة $(G,+,.)$ تامة فيستحيل إيجاد عنصرين $x, y \in G$ مختلفان عن الصفر، لأن الجداء $x.y.(x+y) = 0$ يقتضي $x + y = 0$ إذن $y = -x = x$ أي أن الحلقة تحوي إما على عنصر واحد وإما على عنصرين.

3. العلاقة $\Re$ انعكاسية:

$$\forall x \in G : x^2 = x \Leftrightarrow x \Re x$$

العلاقة $\Re$ متعدية :

ليكن $x, y, z \in G$ بحيث:

$$\begin{cases} x \Re y \\ y \Re z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.y = x \\ y.z = y \end{cases} \Rightarrow x.y.z = x \Rightarrow x.z = x \Leftrightarrow x \Re z$$

العلاقة $\Re$ ضد تناظرية :

ليكن $x, y \in G$ بحيث $(x \Re y) \wedge (y \Re x)$ إذن : $(x.y = x) \wedge (y.x = y) \Rightarrow (x = y)$

(لأن الحلقة تبديلية).

بما ان أن $\Re$ انعكاسية ، متعدية و ضد تناظرية فهي علاقة ترتيب في G .

3. التطبيقات الخطية ، الفضاءات الشعاعية :

تمرين:

ليكن E الفضاء الشعاعي للتوابع من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ المزود بالعمليتين:

$$(f,g\in E),(\lambda\in\mathbb{R}):$$

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad \text{و}\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

لتكن مجموعة العناصر $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ من E المعرفة بـ $f_k(x)=e^{\alpha_k x}$ (دوال أُسية) حيث $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. أثبت ما يلي:

$\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ مستقلة خطيا إذا وفقط إذا $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ مختلفة مثنى مثنى.

الحل:

لنثبت الاستلزام:

($\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ مستقلة خطيا) $\Rightarrow$ ($\alpha_1,\dots,\alpha_n$ مختلفة مثنى مثنى)

لنثبت الاستلزام المكافئ له التالي:

($\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ليست مختلفة مثنى مثنى) $\Rightarrow$ ($\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ مرتبطة خطيا)

من أجل هذا، ليكن i و j مع $i\neq j$ و $\alpha_i=\alpha_j$.

إذن:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ f_i(x)=e^{\alpha_i x}=e^{\alpha_j x}=f_j(x)$$

وهذا يعني أن:

$f_i=f_j$ أي أن $1f_i+(-1)f_j=0_E$ وبالتالي $\{f_i,f_j\}$ جملة مرتبطة، وبما أن هذه الجملة جزء من $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ نستنتج أن هذه الأخيرة مرتبطة.

لنثبت الاستلزام العكسي: لنفرض أن $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ مختلفة مثنى مثنى ونثبت أن $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ مستقلة خطيا بالتراجع على n.

لما $n=1$: لدينا $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f_1(x)=e^{\alpha_1 x}\neq 0$ (حتى وإن كان $\alpha_1=0$) وبالتالي $f_1\neq 0_E$ لذلك فإن $\{f_1\}$ جملة مستقلة.

ليكن n مع $n\geq 2$ ونفرض (خاصية التراجع) أن $\{f_k\}_{k=1,\dots,n-1}$ جملة مستقلة ونثبت أن $\{f_k\}_{k=1,\dots,n}$ جملة مستقلة.

ليكن $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ بحيث: $\lambda_1\ f_1+\ldots+\lambda_n\ f_n=0_E$ (أي أن هذا التابع معدوم).

إذن :

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ (\lambda_1\ f_1+\ldots+\lambda_n\ f_n)(x)=0_E(x)=0$$

أي
$$\forall x\in\mathbb{R}:\lambda_1\ f_1(x)+\ldots+\lambda_n\ f_n(x)=0=\lambda_1\, e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_n\, e^{\alpha_n x} \qquad (1)$$

باشتقاق الطرفين في (1) ينتج:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ \lambda_1\,\alpha_1\, e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_n\,\alpha_n e^{\alpha_n x}=0 \qquad (2)$$

بضرب طرفي المساواة (1) في α_n ثم طرح الناتج من (2) ينتج:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ \ f(x)=\lambda_1(\alpha_1-\alpha_n)e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)e^{\alpha_{n-1} x}=0$$

وهذا يعني أن التابع f معدوم $(f=0)$ أي:

$$\lambda_1(\alpha_1-\alpha_n)e^{\alpha_1 x}+\ldots+\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)e^{\alpha_{n-1}x}=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

من فرضية التراجع ينتج أن:

$$\lambda_1(\alpha_1-\alpha_n)=\ldots=\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)=0$$

بالفرض، كل من $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ مختلف عن α_n لذلك يصبح $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$

بالعودة إلى (1):

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ \lambda_n\ f_n(x)=0$$

بما أن $f_n\neq 0$ ينتج أن $\lambda_n=0$.

إذن الجملة $\{f_k\}_{k=1,\ldots,n}$ مستقلة خطيا.

تمرين:

أ) من بين المجموعات التالية، عين تلك التي تمثل فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي الحقيقي IR^4 مع التبرير:

1. $E_1=\{(x,y,z,t)\in IR^4:\ x=0\}$.
2. $E_2=\{(x,y,z,t)\in IR^4:\ x=z=0\}$.
3. $E_3=\{(x,y,z,t)\in IR^4: x=z\}$.

4. $E_4 = \{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x+z=0 \}$.

5. $E_5 = \{ (x,y,z,t) \in IR^4 : xz=0 \}$.

6. $E_6 = \{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x+z=1 \}$.

7. $E = \{(x,y,z) \in IR^3 : 2x+y-z=0\}$

8. $E_7 = \{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x+y+z+t=0 \}$.

ب) في حالة ما إذا كانت المجموعة E_i $(1 \le i \le 7)$ هي فضاء شعاعي جزئي من IR^4، فعين $\dim E_i$.

الحل:

أ)

1. $E_1 = \{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x=0 \}$ هو فضاء شعاعي جزئي من IR^4،

لدينا $(0,0,0,0) \in E_1$ ومنه $E_1 \neq \phi$ أي $E_1 \subset IR^4$

ولدينا: $\forall (x,y,z,t), (x',y',z',t') \in E_1, \forall \alpha, \beta \in IR;$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') &= \alpha \cdot (0,y,z,t) + \beta \cdot (0,y',z',t') \\ &= (0, \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t') \in E_1\end{aligned}$$

2. $E_2 = \{ (0,y,0,t) : y,t \in IR \}$ هو فضاء شعاعي جزئي من IR^4،

لدينا $(0,0,0,0) \in E_1$ ومنه $E_1 \neq \phi$ أي $E_1 \subset IR^4$

ولدينا:

$\forall (x,y,z,t), (x',y',z',t') \in E_2, \forall \alpha, \beta \in IR;$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') &= \alpha \cdot (0,y,0,t) + \beta \cdot (0,y',0,t') \\ &= (0, \alpha y + \beta y', 0, \alpha t + \beta t') \in E_2\end{aligned}$$

3. $E_3 = \{ (x,y,x,t) : x,y,t \in IR \}$ هو فضاء شعاعي جزئي من IR^4،

لدينا $(0,0,0,0) \in E_1$ ومنه $E_1 \neq \phi$ أي $E_1 \subset IR^4$ ولدينا:

$\forall (x,y,z,t), (x',y',z',t') \in E_3, \forall \alpha, \beta \in IR;$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') &= \alpha \cdot (x,y,x,t) + \beta \cdot (x',y',x',t') \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x', \alpha t + \beta t') \in E_3\end{aligned}$$

4. $E_4 = \{ (x,y,-x,t) : x,y,t \in IR \}$ هو فضاء شعاعي جزئي من IR^4،

لدينا $(0,0,0,0) \in E_1$ ومنه $E_1 \neq \phi$ أي $E_1 \subset IR^4$

ولدينا:

$$\forall (x,y,z,t),(x',y',z',t') \in E_4, \forall \alpha, \beta \in IR;$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') &= \alpha \cdot (x,y,-x,t) + \beta \cdot (x',y',-x',t') \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', -\alpha x - \beta x', \alpha t + \beta t') \in E_4\end{aligned}$$

.5 $E_5 = \{(x,y,z,t) \in IR^4 : xz = 0\}$ ليس فضاء شعاعي جزئي من IR^4 ،

إذ أنه مثلاً من أجل: $(x,y,z,t) = (0,-1,2,1) \in E_5$ و $(x',y',z',t') = (-1,2,0,3) \in E_5$ و

$\alpha = 1 \in IR$

و $\beta = -1 \in IR$

لكن

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') &= 1 \cdot (0,-1,2,1) - 1 \cdot (-1,2,0,3) \\ &= (0+1,-1-2,2-0,1-3) \\ &= (1,-3,2,-2) \notin E_5\end{aligned}$$

.6 $E_6 = \{(x,y,z,t) \in IR^4 : x + z = 1\}$ ليس فضاء شعاعي جزئي من IR^4 ،

إذ أنه مثلاً من أجل: $(x,y,z,t) = (0,5,1,-3) \in E_6$ و $(x',y',z',t') = (-1,7,2,3) \in E_6$ و $\alpha = 2 \in IR$

و $\beta = 1 \in IR$ لكن

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') &= 2 \cdot (0,5,1,-3) + 1 \cdot (-1,7,2,3) \\ &= (0-1,10+7,2+2,-6+3) \\ &= (-1,17,4,-3) \notin E_6\end{aligned}$$

.7 $E_7 = \{(x,y,z,t) \in IR^4 : x + y + z + t = 0\}$ هو فضاء شعاعي جزئي من IR^4 ،

لدينا $(0,0,0,0) \in E_1$ ومنه $E_1 \neq \phi$ أي $E_1 \subset IR^4$

ولدينا: $\forall (x,y,z,t),(x',y',z',t') \in E_7, \forall \alpha, \beta \in IR;$

$$\begin{aligned}&\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (x',y',z',t') = \\ &\qquad = \alpha \cdot (x,y,z,-x-y-z) + \beta \cdot (x',y',z',-x'-y'-z')\end{aligned}$$

$$= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', -(\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z')) \in E_7$$

ب) 1.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x = 0 \right\} \\ &= \left\{ (0,y,0,0) + (0,0,z,0) + (0,0,0,t) : \ y,z,t \in IR \right\} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ y.(0,1,0,0) + z.(0,0,1,0) + t.(0,0,0,1) : \ y,z,t \in IR \right\} \\ &= \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

إذن $\dim E_1 = 3$.

2. $$E_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x = z = 0 \right\} = \left\{ (0,y,0,0) + (0,0,0,t) : y,t \in IR \right\}$$

ومنه $$E_2 = \left\{ y.(0,1,0,0) + t.(0,0,0,1) : \ y,t \in IR \right\} = \langle (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$$

إذن $\dim E_2 = 2$.

3.

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ (x,y,z,t) \in IR^4 : \ x = z \right\} \\ &= \left\{ (x,0,x,0) + (0,y,0,0) + (0,0,0,t) : \ x,y,t \in IR \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ x.(1,0,1,0) + y.(0,1,0,0) + t.(0,0,0,1) : x,y,t \in IR \right\} \\ &= \langle (1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

إذن $\dim E_3 = 3$.

4.

$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{ (x,y,z,t) \in IR^4 : \ x + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x,0,-x,0) + (0,y,0,0) + (0,0,0,t) : x,y,t \in IR \right\} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{ x.(1,0,-1,0) + y.(0,1,0,0) + t.(0,0,0,1) : x,y,t \in IR \right\} \\ &= \langle (1,0,-1,0)(0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

إذن $\dim E_4 = 3$.

5. E_5 ليس فضاء شعاعي جزئي من IR^4، وبالتالي لا معنى لـ $\dim E_5$.

6. E_6 ليس فضاء شعاعي جزئي من IR^4، وبالتالي لا معنى لـ $\dim E_6$.

7. $$E_7 = \left\{ (x,y,z,t) \in IR^4 : x + y + z + t = 0 \right\}$$

إذن

$$E_7 = \{ (x,0,0,0) + (0,y,0,0) + (0,0,z,0) + (0,0,0,-x-y-z) :\ x,y,z \in IR \}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} E_7 &= \{ x.(1,0,0,-1) + y.(0,1,0,-1) + z.(0,0,1,-1) : x,y,z \in IR \} \\ &= \langle (1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1) \rangle \end{aligned}$$

إذن $\dim E_7 = 3$.

تمرين:

ليكن التّطبيق $f : IR^3 \longrightarrow IR^3$ المعرّف كما يلي:

$$\forall (x,y,z) \in IR^3 : f(x,y,z) = (x+3y-2z, x-y+2z, 3x+2y+z)$$

1) برهن أنّ f تطبيق خطّي.

2) عيّن $Kerf$ (نواة f) .ماذا تستنتج؟

3) عيّن $\operatorname{Im} f$ (صورة f) . أوجد أساسا لها.ما هو $\dim \operatorname{Im} f$ ؟

4) هل f غامر؟ ما هي رتبة التّطبيق f ؟

الحل:

ليكن التّطبيق $f : IR^3 \longrightarrow IR^3$ المعرّف بـ

$$\forall (x,y,z) \in IR^3,\ f(x,y,z) = (x+3y-2z, x-y+2z, 3x+2y+z)$$

1) f تطبيق خطّي؟

من أجل كلّ α و β من IR ، و من أجل كلّ u و v من IR^3 نبرهن أنّ

$$f(\alpha u + \beta v) \overset{?}{=} \alpha f(u) + \beta f(v)$$

ليكن $u = (x,y,z)$ و $v = (x',y',z')$ ، لدينا

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f((\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x', \beta y', \beta z')) \\ &= f\left(\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{X}, \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{Y}, \underbrace{\alpha z + \beta z'}_{Z} \right) \\ &= (X + 3Y - 2Z, X - Y + 2Z, 3X + 2Y + Z) \end{aligned}$$

و بالتّعويض نجد

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z') = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

و منه f تطبيق خطّي.

2) حساب $Kerf$

$$\begin{aligned} Kerf &= \{(x,y,z)\in IR^3 \,/\, f(x,y,z)=0_{IR^3}\} \\ &= \{(x,y,z)\in IR^3 \,/\,(x+3y-2z,\, x-y+2z, 3x+2y+z)=(0,0,0)\} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{cases} x+3y-2z=0........(1) \\ x-y+2z=0.........(2) \\ 3x+2y+z=0.......(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد $0=2x+2y \Leftarrow x=-y$

نعوّض في (3) لنجد $3x-2y+z=0 \Leftarrow x+z=0 \Leftarrow z=-x$ و منه

$$Kerf = \{(x,-x,-x)/\, x\in IR\} = \{x(1,-1,-1)/\, x\in IR\}$$

أي $Kerf$ هو الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بالشّعاع الغير منعدم $(1,-1,-1)$، و منه $\dim Kerf=1$. نستنتج إذن أنّ f غير متباين.

3) تعيين $\operatorname{Im} f$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x,y,z)/(x,y,z)\in IR^3\} \\ &= \{(x+3y-2z,\, x-y+2z, 3x+2y+z)/\, x,y,z\in IR\} \\ &= \{x(1,1,3)+y(3,-1,2)+z(-2,2,1)/\, x,y,z\in IR\} \end{aligned}$$

أي $\operatorname{Im} f$ هو الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة الأشعّة $(1,1,3),(3,-1,2),(-2,2,1)$، و لكن نلاحظ أنّ $(1,1,3)=(3,-1,2)+(-2,2,1)$

و منه

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{(x+y)(3,-1,2)+(x+y)(-2,2,1)/\, x,y,z\in IR\} \\ &= \{\alpha(3,-1,2)+\beta(-2,2,1)/\, \alpha,\beta\in IR\} \end{aligned}$$

إذن الشّعاعان $(3,-1,2)$ و $(-2,2,1)$ يولّدان $\operatorname{Im} f$ ، و مستقلّان خطّيا ، فهما يشكّلان أساس لـ $\operatorname{Im} f$. و بالتّالي $\dim \operatorname{Im} f=2$.

4) $\operatorname{Im} f\subset IR^3$ و $\dim \operatorname{Im} f=2 \neq \dim IR^3$، ومنه f غير غامر. $\dim \operatorname{Im} f = rgf = 2$.

تمرين:

لنعتبر التطبيق f المعرف بالشكل:

$$f : IR^3 \longrightarrow IR^2$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x+y-z, 2x-4z)$$

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني للفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR، وليكن $\{e'_1, e'_2\}$ الأساس القانوني للفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR.

1. أثبت أن التطبيق f خطي.

2. عين M مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساسين القانونيين لـ IR^3 و IR^2.

3. لنعرف جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ بالشكل: $v_1 = e_1 - e_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_3$.

أ) أثبت أن جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ تشكل أساسا جديدًا للفضاء الشعاعي IR^3.

ب) أكتب A مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ إلى الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

ج) أكتب B مصفوفة الانتقال من الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ إلى الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$.

د) تأكد حسابيًا من أن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A.

الحل:

1. لنثبت أن التطبيق f خطي:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha, \beta \in IR, \forall (x,y,z),(x',y',z') \in IR^3 :\\
&f\left(\alpha \cdot (x,y,z) + \beta \cdot (x',y',z')\right) = f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right)\\
&\qquad = \left((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z'), 2(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha z + \beta z')\right)\\
&\qquad = \alpha \cdot \left(x + y - z, 2x - 4z\right) + \beta \cdot \left(x' + y' - z', 2x' - 4z'\right)\\
&\qquad = \alpha f\left(x,y,z\right) + \beta f(x',y',z')
\end{aligned}$$

وهذا ما معناه أن التطبيق f خطي.

2. لدينا:

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (1+0-0, 2(1)-4(0)) = (1,2) = 1 \cdot e'_1 + 2 \cdot e'_2\\
f(e_2) &= (0+1-0, 2(0)-4(0)) = (1,0) = 1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2\\
f(e_3) &= (0+0-1, 2(0)-4(1)) = (-1,-4) = (-1) \cdot e'_1 + (-4) \cdot e'_2
\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$M=\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ \end{array}$$
$$M=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array}$$

3. لدينا: $v_1=e_1-e_2+e_3, v_2=e_1+e_2, v_3=e_3$.

أ) بما أن عدد عناصر جملة الأشعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ هو $3=\dim IR^3$ ، فلكي تشكل هذه الجملة أساسا جديدًا للفضاء الشعاعي IR^3 ، يكفي أن نثبت أنها مستقلة خطيا:

لتكن α ، β و γ أعدادًا حقيقية بحيث: $\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2+\gamma\cdot v_3=\mathrm{O}_{IR^3}$.

ومنه: $\alpha\cdot(e_1-e_2+e_3)+\beta\cdot(e_1+e_2)+\gamma\cdot e_3=\mathrm{O}_{IR^3}$

أي أن:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\alpha+\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}$$

إذن: $\alpha=\beta=\gamma=0$ ، ومنه جملة الأشعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ تشكل أساسا جديدًا لـ IR^3 .

ب) تعيين A مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ إلى الأساس $\{v_1,v_2,v_3\}$: لدينا

$$\begin{aligned} v_1&=1\cdot e_1+(-1)\cdot e_2+1\cdot e_3\\ v_2&=1\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3\\ v_3&=0\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & \end{array}$$
$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

ج) تعيين B مصفوفة الانتقال من الأساس $\{v_1,v_2,v_3\}$ إلى الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$:

بما أن: $v_1=e_1-e_2+e_3, v_2=e_1+e_2, v_3=e_3$ ، ينتج:

$$\begin{aligned} e_1&=\tfrac{1}{2}\cdot v_1+\tfrac{1}{2}\cdot v_2-\tfrac{1}{2}\cdot v_3\\ e_2&=-\tfrac{1}{2}\cdot v_1+\tfrac{1}{2}\cdot v_2+\tfrac{1}{2}\cdot v_3\\ e_3&=0\cdot v_1+0\cdot v_2+1\cdot v_3\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

د) نتأكد حسابيًا من أن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A: لدينا:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

وكذلك:

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

وهذا يعني بالضبط أن: المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A.

تمرين:

ليكن الفضاء الشعاعي الحقيقي $E = IR_2[x]$ ، لكثيرات الحدود ذات درجة أقل أو تساوي 2، وذات معاملات حقيقية.

باعتبار $E = IR_2[x]$ مزودًا بأساسه القانوني $\{1, x, x^2\}$، نعرف التطبيق f بالشكل:

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \mathrm{P}(x) &\mapsto f(\mathrm{P}) = 2(x+1)\mathrm{P}(x) - (x-1)^2\,\mathrm{P}'(x) \end{aligned}$$

P' هو مشتق P.

أ) أثبت أن التطبيق f خطي.

ب) عين A مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس القانوني للفضاء الشعاعي E.

ج) هل التطبيق f تقابلي؟ برر إجابتك.

د) عين $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$.

هـ) استنتج من جديد إذا ما كان التطبيق f تقابليا أم لا؟

الحل:

أ) لدينا:

$$\forall \alpha,\beta \in IR, \forall \mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2 \in E:$$
$$\begin{aligned} f(\alpha\cdot \mathrm{P}_1+\beta\cdot \mathrm{P}_2) &= 2(x+1)(\alpha\cdot \mathrm{P}_1+\beta\cdot \mathrm{P}_2)(x)-(x-1)^2(\alpha\cdot \mathrm{P}_1+\beta\cdot \mathrm{P}_2)'(x) \\ &= 2\alpha(x+1)\cdot \mathrm{P}_1(x)+2\beta(x+1)\cdot \mathrm{P}_2(x)-(x-1)^2\alpha\cdot \mathrm{P}_1'(x)-(x-1)^2\beta\cdot \mathrm{P}_2'(x) \\ &= \alpha\big(2(x+1)\cdot \mathrm{P}_1(x)-(x-1)^2\cdot \mathrm{P}_1'(x)\big)+\beta\big(2(x+1)\cdot \mathrm{P}_2(x)-(x-1)^2\cdot \mathrm{P}_2'(x)\big) \\ &= \alpha\cdot f(\mathrm{P}_1)+\beta\cdot f(\mathrm{P}_2) \end{aligned}$$

وهذا ما معناه أن التطبيق f خطي.

ب) تعيين المصفوفة A المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس القانوني للفضاء الشعاعي E:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1+x)\cdot 1-(x-1)^2\cdot 0 = 2\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2 \\ f(x) &= 2(1+x)\cdot x-(x-1)^2\cdot 1 = (-1)\cdot 1+4\cdot x+1\cdot x^2 \\ f(x^2) &= 2(1+x)\cdot x^2-(x-1)^2\cdot 2x = 0\cdot 1+(-2)\cdot x+6\cdot x^2 \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array}$$

ج) التطبيق f تقابلي، لأن المصفوفة A المرافقة له قابلة للقلب (لأن جميع أعمدتها مستقلة خطيا في الفضاء الشعاعي الحقيقي IR^3).

ح)

د) تعيين $Kerf$:

لدينا: $Kerf = \{\mathrm{P}\in E : f(\mathrm{P}) = \mathrm{O}_E\}$

ليكن كثير الحدود $\mathrm{P}\in Kerf$، إذن فهو يكتب على الشكل $\mathrm{P}(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$، حيث α، β و γ أعداد حقيقية مع $f(\mathrm{P})=\mathrm{O}_E$.

إذن $f(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=0, \quad \forall x$.

ولكون التطبيق f خطيا، ينتج أن: $\alpha\cdot f(x^2)+\beta\cdot f(x)+\gamma\cdot f(1)=0, \quad \forall x$

ومنه:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 6\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$ ،

أي أن:

$$\begin{cases}-\beta+2\gamma=0\\ -2\alpha+4\beta+2\gamma=0\\ 6\alpha+\beta=0\end{cases}$$

بحل الجملة ينتج أن $\alpha=\beta=\gamma=0$

وهو ما معناه أن: $\mathrm{P}(x)=0x^2+0x+0=0,\ \ \forall x$ وبالتالي $\mathrm{P}=\mathrm{O}_E$.

إذن $Kerf=\{\mathrm{O}_E\}$ وبالتالي f متباين.

تعيين $\operatorname{Im} f$:

لكون الفضاء الشعاعي E ذا بعد منته ($\dim E=3$) وبما أن التطبيق f خطي، فإنه ينتج لدينا من القاعدة التالية:

$$\dim E=3=\dim Kerf+\dim\operatorname{Im} f$$

أن $\dim E=3=0+\dim\operatorname{Im} f$ (لأن f متباين معناه أن $\dim Kerf=0$).

إذن: $\dim E=3=\dim\operatorname{Im} f$ ، وعلما بأن $\operatorname{Im} f\subset E$ فإننا نحصل على النتيجة $\operatorname{Im} f=E$ وبالتالي f غامر.

هـ) من السؤال ج)، وجدنا أن التطبيق الخطي f متباين وغامر، فهو إذن تقابلي.

تمرين:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto(x+y,x-y)\end{aligned}$$

- بين ان f تطبيق خطي .
- أوجد $Kerf$.
- استنتج $\operatorname{Im} f$.
- هل التطبيق f تقابلي و لماذا؟

الحلّ:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$$

- نبين ان f تطبيق خطي

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f\left(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\right) = \alpha f(x,y) + \beta f(x',y')$$

$$\begin{aligned} f\left(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\right) &= f\left(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y'\right) \\ &= \left(\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y', \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'\right) \\ &= (\alpha x+\alpha y, \alpha x-\alpha y) + \left(\beta x'+\beta y', \beta x'-\beta y'\right) \\ &= \alpha(x+y, x-y) + \beta\left(x'+y', x'-y'\right) \\ &= \alpha f(x,y) + \beta f(x',y') \end{aligned}$$

و منه f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة $Kerf$

لدينا

$$Kerf = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0)\right\}$$

ومنه

$$\begin{aligned} f(x,y) = (0,0) &\Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x=y=0 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$Kerf = \{(0,0)\}$$

- إستنتاج النواة $\mathrm{I}mf$:

لدينا

$$\begin{aligned} dim\mathbb{R}^2 = dim(kerf) + dim(\mathrm{I}mf) &\Leftrightarrow dim(\mathrm{I}mf) = dim\mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{I}mf = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- التطبيق f هو تطبيق تقابلي.

لدينا · f ايد ن $\Leftrightarrow Kerf = \{(0,0)\}$ و غامر $f \Leftrightarrow \mathrm{I}mf = \mathbb{R}^2$

نتيجة : التطبيق f تقابلي.

تمرين:

لدينا:

$$f_1(x,y,z)=x-y.$$
$$f_2(x,y,z)=y-z.$$
$$E=\{(x,y,z)\in IR^3 : f_1=0\wedge f_2=0\}$$

- بين ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$، ثم أوجد أساس وبعد E .
- ليكن:

$$f(x,y,z)=(f_1, f_2, z)$$

- بين ان f تطبيق خطي .
- أوجد $Kerf$ و بعدها.
- أوجد $\operatorname{Im} f$.
- هل التطبيق f تقابلي و لماذا؟

الحلّ:

- نبين ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

$$(0-0,0-0)\Leftrightarrow(0,0,0)\in E$$

ومنه $E\neq\Phi$

- اثبات أن $\forall(x,y,z),(x',y',z')\in E;\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\in E$

أي

$$\forall(x,y,z),(x',y',z')\in E\Leftrightarrow(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')\in E$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'=0\\ \alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'=0\end{cases}$$

لدينا

$$(x,y,z)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha x-\alpha y=0\ldots\ldots 1\\ \alpha y-\alpha z=0\ldots\ldots 2\end{cases}\forall\alpha\in IR$$

$$(x',y',z')\in E \Leftrightarrow \begin{cases} x'-y'=0 \\ y'-z'=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta x'-\beta y'=0 \ldots\ldots 3 \\ \beta y'-\beta z'=0 \ldots\ldots 4 \end{cases} \quad , \forall \beta \in IR$$

بجمع 1مع 3 و 2 مع 4 نجد المطلوب و منه نستنتج ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

- إيجاد أساس و بعد الفضاء الجزئي E.

$$(x,y,z)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

و منه $(x,y,z)\in E \Leftrightarrow (x,y,z)=(y,y,y)=y(1,1,1)$

و بالتالي $E=\{(1,1,1)\}$

بمعنى ان E مولد بالشعاع $\vec{V}(1,1,1)$ و بما انه وحيد فهو يشكل أساس لـ E و منه $dimE=1$.

- نبين ان f تطبيق خطي

$$\forall (x,y,z),(x',y',z')\in IR^3; \forall \alpha,\beta \in IR : f\left(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\right)=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')?$$

$$\begin{aligned} f\left(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\right) &= f\left(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z'\right) \\ &=\left(\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y',\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z',\alpha z+\beta z'\right) \\ &=(\alpha x-\alpha y,\alpha y-\alpha z,\alpha z)+\left(\beta x'-\beta y',\beta y'-\beta z',\beta z'\right) \\ &=\alpha(x-y,y-z,z)+\beta\left(x'-y',y'-z',z'\right) \\ &=\alpha f(x,y,z)+\beta f\left(x',y',z'\right) \end{aligned}$$

و منه f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة $Kerf$.

لدينا $Kerf=\left\{(x,y,z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(0,0,0)\right\}$

و منه
$$f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

وبالتالي $Kerf=\{(0,0,0)\}$

اذن $dimKerf=0$

ومنه f تطبيق متباين.

و بما أن مجموعة البدء هي نفسها مجموعة الوصول فإن التطبيق f هو غامر أي تقابلي و منه الصورة هي نفسها مجموعة الوصول أي : $\dim \mathrm{I}mf = \mathbb{R}^3$

تمرين:

$$\begin{aligned} &f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x,y,z) \mapsto (2x+3y, x-2y+z) \end{aligned}$$

- بين ان f تطبيق خطي .
- أوجد أساس و بعد $Kerf$.
- أوجد أساس و بعد $\operatorname{Im} f$.
- هل التطبيق f تقابلي و لماذا؟

الحلّ:

$$\begin{aligned} &f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x,y,z) \mapsto (2x+3y, x-2y+z) \end{aligned}$$

- نبين ان f تطبيق خطي.

$$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3; \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} : f\left(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\right) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) &= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') \\ &= \left(2\alpha x+2\beta x'+3\alpha y+3\beta y', \alpha x+\beta x'-2\alpha y-2\beta y'+\alpha z+\beta z'\right) \\ &= (2\alpha x+3\alpha y, \alpha x-2\alpha y+\alpha z)+\left(2\beta x'+3\beta y', \beta x'-2\beta y'+\beta z'\right) \\ &= \alpha(2x+3y, x-2y+z)+\beta\left(2x'+3y', x'-2y'+z'\right) \\ &= \alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z') \end{aligned}$$

و منه f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة $Kerf$

لدينا $Kerf = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\right\}$

و منه

$$f(x,y,z)=(0,0)\Leftrightarrow(2x+3y,x-2y+z)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=0\\ x-2y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}y\\ -\dfrac{3}{2}y-2y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}y\\ z=-\dfrac{7}{2}y\end{cases}$$

$$\forall(x,y,z)\in Kerf:(x,y,z)=\left(-\frac{3}{2}y,y,-\frac{7}{2}y\right)=y\left(-\frac{3}{2},1,-\frac{7}{2}\right)$$

$$\forall(x,y,z)\in Kerf;\exists\alpha\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\alpha\left(-\frac{3}{2},1,-\frac{7}{2}\right)$$

أي ان الشعاع $\left(-\frac{3}{2},1,-\frac{7}{2}\right)$ مولد للفضاء الشعاعي الجزئي $Kerf$ أي:

$$Kerf=\left\{\left(-\frac{3}{2},1,-\frac{7}{2}\right)\right\}\Rightarrow\dim(\ker f)=1$$

ومنه $dim(Kerf)=1$.

بما أن $Kerf\neq\{(0,0,0)\}$ فان التطبيق f ليس متباين

- إيجاد النواة $\operatorname{Im} f$:

$$dimE=dim(kerf)+dim(\operatorname{Im} f)\Rightarrow dim(\text{Imf})=dimE-dim(kerf)$$

$$\Rightarrow dim(\operatorname{Im} f)=dim\mathbb{R}^3-dim(\ker f)=3-1=2=dim\mathbb{R}^2$$

ومنه $dim(\operatorname{Im} f)=dim\mathbb{R}^2\Leftrightarrow\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$

أي أن التطبيق f غامر .

نتيجة :

التطبيق f غامر و ليس متباين فهو غير تقابلي.

تمرين:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$$

- بين ان f تطبيق خطي .
- أوجد $Kerf$.
- استنتج $\operatorname{Im} f$.
- هل التطبيق f تقابلي و لماذا؟

الحلّ:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$$

- نبين ان f تطبيق خطي

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2; \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: f\left(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\right) = \alpha f(x,y) + \beta f(x',y')$$

$$\begin{aligned} f\left(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\right) &= f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'\right) \\ &= \left(\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y'\right) \\ &= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) + \left(\beta x' + \beta y', \beta x' - \beta y'\right) \\ &= \alpha(x+y, x-y) + \beta\left(x'+y', x'-y'\right) \\ &= \alpha f(x,y) + \beta f\left(x',y'\right) \end{aligned}$$

و منه f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة $Kerf$

لدينا $Kerf = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0)\right\}$

$$\begin{aligned} f(x,y) = (0,0) &\Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x=y=0 \end{aligned}$$

ومنه

وبالتالي $Kerf = \{(0,0)\}$

- إستنتاج النواة $\operatorname{Im} f$:

لدينا

$$dim\mathbb{R}^2 = dim(kerf) + dim(\mathrm{Im}f) \Leftrightarrow dim(\mathrm{Im}f) = dim\mathbb{R}^2$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{I}mf = \mathbb{R}^2$$

- التطبيق f هو تطبيق تقابلي.

لدينا · f ايد ن $\Leftrightarrow Kerf = \{(0,0)\}$ و غامر $f \Leftrightarrow \mathrm{I}mf = \mathbb{R}^2$

نتيجة :

التطبيق f تقابلي.

تمرين:

لدينا:

$$f_1(x,y,z) = x - y.$$
$$f_2(x,y,z) = y - z.$$
$$E = \left\{(x,y,z) \in IR^3 : f_1 = 0 \wedge f_2 = 0\right\}$$

- بين ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$، ثم أوجد أساس وبعد E .
- ليكن:

$$f(x,y,z) = \left(f_1, f_2, z\right)$$

- ➢ بين ان f تطبيق خطي .
- ➢ أوجد $Kerf$ و بعدها.
- ➢ أوجد $\mathrm{Im}\, f$.
- ➢ هل التطبيق f تقابلي و لماذا؟

الحلّ:

- نبين ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

$$\left(0-0, 0-0\right) \Leftrightarrow (0,0,0) \in E$$

ومنه $E \neq \Phi$

- اثبات أن :

$$\forall (x,y,z), \left(x', y', z'\right) \in E; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha(x,y,z) + \beta\left(x', y', z'\right) \in E$$

أي

$$\forall (x,y,z),(x',y',z')\in E \Leftrightarrow (\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')\in E$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'=0\\ \alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'=0\end{cases}$$

لدينا

$$(x,y,z)\in E \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha x-\alpha y=0\ldots\ldots 1\\ \alpha y-\alpha z=0\ldots\ldots 2\end{cases}\forall \alpha\in IR$$

$$(x',y',z')\in E \Leftrightarrow \begin{cases}x'-y'=0\\ y'-z'=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta x'-\beta y'=0\ldots\ldots 3\\ \beta y'-\beta z'=0\ldots\ldots 4\end{cases},\ \forall \beta\in IR$$

بجمع 1مع 3 و 2 مع 4 نجد المطلوب و منه نستنتج ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

- إيجاد أساس و بعد الفضاء الجزئي E.

$$(x,y,z)\in E \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ y=z\end{cases}$$

و منه $(x,y,z)\in E \Leftrightarrow (x,y,z)=(y,y,y)=y(1,1,1)$

و بالتالي $E=\{(1,1,1)\}$

بمعنى ان E مولد بالشعاع $\vec{V}(1,1,1)$ و بما انه وحيد فهو يشكل أساس لـ E و منه $dimE=1$.

- نبين ان f تطبيق خطي

$$\forall (x,y,z),(x',y',z')\in IR^3;\forall \alpha,\beta\in IR: f\left(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\right)=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')?$$

$$\begin{aligned}f\left(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\right)&= f\left(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z'\right)\\ &=\left(\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y',\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z',\alpha z+\beta z'\right)\\ &=(\alpha x-\alpha y,\alpha y-\alpha z,\alpha z)+\left(\beta x'-\beta y',\beta y'-\beta z',\beta z'\right)\\ &=\alpha(x-y,y-z,z)+\beta\left(x'-y',y'-z',z'\right)\\ &=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')\end{aligned}$$

و منه f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة $Kerf$.

لدينا $Kerf=\{(x,y,z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

و منه
$$f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\\ z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

وبالتالي $Kerf=\{(0,0,0)\}$

اذن $dimKerf=0$

ومنه f تطبيق متباين.

و بما أن مجموعة البدء هي نفسها مجموعة الوصول فإن التطبيق f هو غامر أي تقابلي و منه الصورة هي نفسها مجموعة الوصول أي : $dim\,\mathrm{I}mf=\mathbb{R}^3$

تمرين:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\mapsto(-x+y,x+3y-z)$$

- بين ان f تطبيق خطي .
- أوجد أساس و بعد $Kerf$.
- أوجد أساس و بعد $\mathrm{Im}\,f$.
- هل التطبيق f تقابلي و لماذا؟

الحلّ:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z)\mapsto(2x+3y,x-2y+z)$$

- نبين ان f تطبيق خطي.

$$\forall(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3;\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}: f\left(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\right)=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$$

$$f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) = f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$$
$$=(-\alpha x-\beta x'+\alpha y+\beta y',\alpha x+\beta x'+3\alpha y+3\beta y'+\alpha z+\beta z')$$
$$=(-\alpha x+\alpha y,\alpha x+3\alpha y+\alpha z)+(-\beta x'+\beta y',\beta x'+3\beta y'+\beta z')$$
$$=\alpha(-x+y,x+3y+z)+\beta(-x'+y',x'+3y'+z')$$
$$=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$$

و منه f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة $Kerf$

لدينا $Kerf=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(0,0)\}$

و منه

$$f(x,y,z)=(0,0)\Leftrightarrow(2x+3y,x-2y+z)=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=0\\ x+3y-z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ y+3y-z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=\frac{1}{4}y\end{cases}$$
$$\forall(x,y,z)\in Kerf : (x,y,z)=\left(y,y,\frac{1}{4}y\right)=y\left(1,1,\frac{1}{4}\right) / y\in\mathbb{R}$$
$$\forall(x,y,z)\in Kerf;\exists\alpha\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\alpha\left(1,1,\frac{1}{4}\right)$$

أي ان الشعاع $\left(1,1,\frac{1}{4}\right)$ مولد للفضاء الشعاعي الجزئي $Kerf$ أي:

$$Kerf=\left\{\left(1,1,\frac{1}{4}\right)\right\}\Rightarrow\dim(\ker f)=1$$

ومنه $dim(Kerf)=1$.

بما أن $Kerf\neq\{(0,0,0)\}$ فان التطبيق f ليس متباين

- إيجاد النواة $\operatorname{Im} f$:

$$dimE=dim(kerf)+dim(\operatorname{Im} f)\Rightarrow dim(\text{Imf})=dimE-dim(kerf)$$
$$\Rightarrow dim(\operatorname{Im} f)=dim\mathbb{R}^3-dim(\ker f)=3-1=2=dim\mathbb{R}^2$$

ومنه $dim(\mathrm{Im}\ f) = dim\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^2$

أي أن التطبيق f غامر .

نتيجة :

التطبيق f غامر و ليس متباين فهو غير تقابلي.

4. المصفوفات :

تمرين:

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من $\mathcal{M}_3(\mathbb{k})$ المعرفتين كمايلي:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 7\end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix} .$$

احسب كلا من $A+B$ و $A-B$.

الحل:

حساب كلا من: $A+B$ و $A-B$.

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix} \text{ و } A-B=\begin{bmatrix}3 & -7\\ -1 & 8\end{bmatrix}$$

تمرين:

لتكن المصفوفات :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}, \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix} .$$

احسب كلا من المصفوفات التالية : $3A+5C$ ، $B-4I_2$ ، B^2 ، B^3 .

الحل:

حساب كلا من: $3A+5C$ ، $B-4I_2$ ، B^2 ، B^3 .

$$\begin{aligned}3\mathrm{A}+5\mathrm{C} &= 3\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}6 & 3 & -3\\ 9 & -6 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & 10 & 15\\ 10 & -15 & 5\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 13 & 12\\ 19 & -21 & 17\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}-4\mathrm{I}_2 &= \begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^2 &= B\cdot B\\ &= \begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1\times1+(-2)\times3 & 1\times(-2)+(-2)\times0\\ 3\times1+0\times3 & 3\times(-2)+0\times0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-5 & -2\\ 3 & -6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^3 &= B^2\cdot B\\ &= \begin{bmatrix}-5 & -2\\ 3 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(-5)\times1+(-2)\times3 & (-5)\times(-2)+(-2)\times0\\ 3\times1+(-6)\times3 & 3\times(-2)+(-6)\times0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-11 & 10\\ -15 & -6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

تمرين:

لتكن المصفوفات :

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}21 & -6\\ 0 & 3\\ -3 & 12\end{pmatrix},\ D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ -8 & 6\end{pmatrix}.$$ ،

1. احسب المجاميع الممكنة لمصفوفتين من المصفوفات المعطاة.
2. أحسب كلا من $4A+\frac{1}{3}C$ ، $2B-2D$.
3. عين العدد الحقيقي α بحيث $A+\alpha C=0$ (حيث 0 هي المصفوفة المعدومة).
4. بين أن $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ حيث β,α عددان حقيقيان.

الحل :

1. حساب المجاميع الممكنة :

$$A+E=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ -8 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -3 & -1\\ -7 & 2\end{bmatrix}$$ ،

$$A+C=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21 & -6\\ 0 & 3\\ -3 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -4\\ 0 & 2\\ -2 & 8\end{bmatrix}$$

$$B+D=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&2&\frac{7}{2}\\2&\frac{7}{2}&1\\\frac{7}{2}&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

،

$$C+E=\begin{bmatrix}21&-6\\0&3\\-3&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\-3&0\\-8&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&-4\\-3&3\\-11&18\end{bmatrix}$$

ملاحظة :

يمكن حساب كلا من $A-C$ ، $A-E$ ، $C-E$ ، $B-D$.

2. حساب كلا من $4A+\frac{1}{3}C$ ، $2B-2D$:

$$4A+\frac{1}{3}C=\begin{bmatrix}-28&8\\0&-4\\4&-16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&-2\\0&1\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-21&6\\0&-3\\3&-12\end{bmatrix}$$

$$2B-2D=2\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&5\\4&5&2\\5&3&1\end{bmatrix}$$

3. تعيين العدد الحقيقي α بحيث $A+\alpha C=0$:

$$A+\alpha C=\begin{bmatrix}-7&2\\0&-1\\1&-4\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}21&-6\\0&3\\-3&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-7+21\alpha)&(2-6\alpha)\\0&(-1+3\alpha)\\(1-3\alpha)&(-4+12\alpha)\end{bmatrix}$$

و منه

$$\begin{bmatrix}(-7+21\alpha)&(2-6\alpha)\\0&(-1+3\alpha)\\(1-3\alpha)&(-4+12\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

نحل الجملة التالية :

$$\begin{cases}-7+21\alpha=0\\ 2-6\alpha=0\\ 1-3\alpha=0\\ -4+12\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \alpha=\frac{1}{3}\\ \alpha=\frac{1}{3}\\ \alpha=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$$

4. نبين أن $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$:

لدينا

$$\alpha(\beta A)=\alpha\begin{bmatrix}-7\beta & 2\beta\\ 0 & -\beta\\ \beta & -4\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7\alpha\beta & 2\alpha\beta\\ 0 & -\alpha\beta\\ \alpha\beta & -4\alpha\beta\end{bmatrix}\ ....(1)$$

$$(\alpha\beta)A=(\alpha\beta)\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7\alpha\beta & 2\alpha\beta\\ 0 & -\alpha\beta\\ \alpha\beta & -4\alpha\beta\end{bmatrix}\ ....(2)$$

من (1) و (2) ينتج $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

تمرين:

لدينا : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 0 & 4\\ -5 & 0\end{bmatrix}$

احسب AB و BA ، ماذا تستنتج ؟

الحل:

حساب كلا من: AB و BA

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 0 & 4\\ -5 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\times(-4)+2\times 0+3(-5) & 1\times 5+2\times 4+3\times 0\\ -3\times(-4)+(-2)\times 0+1\times(-5) & -3\times 5+(-2)\times 4+1\times 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-19 & 13\\ -17 & -23\end{bmatrix}$$

المصفوفة AB مربعة رتبتها 2.

$$BA=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 0 & 4\\ -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(-4)\times 1+5\times(-3) & (-4)\times 2+5\times(-2) & (-4)\times 3+5\times 1\\ 0\times 1+4\times(-3) & 0\times 2+4\times(-2) & 0\times 3+4\times 1\\ (-5)\times 1+0\times(-3) & (-5)\times 2+0\times(-2) & (-5)\times 3+0\times 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-19 & -18 & -7\\ -12 & -8 & 4\\ -5 & -10 & -15\end{bmatrix}$$

المصفوفة BA مربعة و رتبتها 3.

الاستنتاج: $AB \neq BA$

تمرين:

لدينا :

$$B=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

احسب AB و BA اذ امكن ، ماذا تستنتج ؟

الحل:

حساب كلا من: AB و BA

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+3y+5z\\ 2x-y+4z\\ -3x+6y-3z\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\\3&-1&4\\-3&6&-3\end{bmatrix}$$

ملاحظة :

لا يمكن الحساب لان عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد اسطر المصفوفة A .

تمرين:

احسب AB و BA اذ امكن حيث :

1. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-4&5\\0&4\\-5&0\end{bmatrix}$.

2. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ،

الحل:

حساب كلا من: AB و BA

1. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-4&5\\0&4\\-5&0\end{bmatrix}$.

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&5\\0&4\\-5&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-19&13\\17&-25\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-4&5\\0&4\\-5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-19&-18&-17\\-12&-8&-4\\-5&-10&-15\end{bmatrix}$$

نلاحظ ان $AB\neq BA$

2. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$:

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب BA لان عدد الاعمدة في المصفوفة B لا يساوي عدد الاسطر في المصفوفة A .

تمرين:

لتكن المصفوفات :

$$C=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&-3&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&-2&4\end{bmatrix} .$$

احسب كلا من المصفوفات التالية : $3A+5C$ ، $B-4I_2$ ، B^2 ، B^3 .

الحل :

حساب كلا من المصفوفات التالية : $3A+5C$ ، $B-4I_2$ ، B^2 ، B^3 .

$$3A+5C=3\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&-2&4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&-3&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6&3&-3\\9&-6&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5&10&15\\10&-15&5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&13&12\\19&-21&17\end{bmatrix}$$

$$B-4I_2=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&0\\0&-4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-3&-2\\3&-4\end{bmatrix}$$

$$B^2=B\cdot B$$
$$=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\times1+(-2)\times3 & 1\times(-2)+(-2)\times0\\3\times1+0\times3 & 3\times(-2)+0\times0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-5&-2\\3&-6\end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B$$
$$= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-5)\times 1+(-2)\times 3 & (-5)\times(-2)+(-2)\times 0 \\ 3\times 1+(-6)\times 3 & 3\times(-2)+(-6)\times 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ -15 & -6 \end{bmatrix}$$

تمرين:

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من $\mathcal{M}_3(\mathbb{k})$ المعرفتين كمايلي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

و لتكن المجموعة

$$\mathcal{H} = \left\{ xA + yB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), (x,y) \in \mathbb{R} \right\}$$

1. أحسب $(A+B)^n$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.
2. ليكن الشعاع $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، أحسب كلا من : Av ، Bv.
3. لتكن المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، أحسب كلا من P^2 ، P^3 .
   - أكتب كلا من A و B بدلالة I_n, P^2, P .
   - بين $L = -\frac{1}{3}(A+B)$ و $M = \frac{\sqrt{3}}{3}(A-B)$.
   - أكتب كلا L و M بدلالة I_n, P^2, P.

الحل :

-1 نضع $K = A + B$

ومنه
$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} K^2 &= \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \\ &= 3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 3K \end{aligned}$$

و هذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^n : K^n = (-3)^{n-1} K$$

2- ليكن الشعاع $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

حساب كلا من Av ، Bv:

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و منه $Av = 0$.

$$\begin{aligned} Bv &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و منه $Bv = 0$.

3- كتابة كلا من A و B بدلالة I_n, P^2, P .

لتكن المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

- حساب كلا من P^2 ، P^3 .

$$P^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad P^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_n$$

فيكون $A=P-I_n$ و $B=P^2-I_n$.

- لدينا $A=P-I_n$ و $B=P^2-I_n$:

$$L=-\frac{1}{3}(A+B)$$

$$M=\frac{\sqrt{3}}{3}(A-B)$$

- كتابة كلا L و M بدلالة I_n,P^2,P .

لدينا

$$\begin{cases}A=P-I_n\\ B=P^2-I_n\\ L=-\frac{1}{3}(A+B)\\ M=\frac{\sqrt{3}}{3}(A-B)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L=\frac{1}{3}\left(2I-P-P^2\right)\\ M=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(P-P^2\right)\end{cases}$$

تمرين:

عيين قيمة العدد الحقيقي x بحيث تكون المصفوفتان A و B متساويتان حيث :

$$B=\begin{bmatrix}x^2-x&2\\x&8\\6&x-2\end{bmatrix}\ \text{و}\ A=\begin{bmatrix}20&2\\5&8\\6&3\end{bmatrix}$$

الحل:

تعيين قيمة العدد الحقيقي x بحيث تكون المصفوفتان A و B متساويتان حيث :

$$B=\begin{bmatrix}x^2-x&2\\x&8\\6&x-2\end{bmatrix}\ \text{و}\ A=\begin{bmatrix}20&2\\5&8\\6&3\end{bmatrix}$$

نلاحظ ان A و B من نفس الرتبة 3×2 يكفي ان تتساوى العناصر المتناظرة :

$A=B$ و منه $\begin{cases}x^2-x=20\\x=5\\x-2=3\end{cases}\Rightarrow x=5$ و بالتالي $\begin{cases}x^2-x=20\\x=5\\x-2=3\end{cases}\Rightarrow x=5$.

تمرين:

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

اثبت ان $A^2-A-5I=0$

الحل:

لدينا : $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ ،

اثبات ان $A^2-A-5I=0$

$$\begin{aligned}A^2=A\cdot A&=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^2-A-5I&=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

و منه $A^2-A-5I=0$.

تمرين:

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ -5 & -8 & 4\\ 3 & 4 & -15\end{bmatrix}$.

اثبت ان $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ -5 & -8 & 4\\ 3 & 4 & -15\end{bmatrix}$ مصفوفة متناظرة.

الحل :

إيجاد منقولة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ -5 & -8 & 4\\ 3 & 4 & -15\end{bmatrix}$ أي $A^t=\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ -5 & -8 & 4\\ 3 & 4 & -15\end{bmatrix}$.

نلاحظ ان $A=A^t$ ومنه المصفوفة A متناظرة.

تمرين:

هل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 9\\ -2 & 4 & 6\\ 9 & 6 & 1\end{bmatrix}$ متناظرة ؟

الحل :

إيجاد منقولة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 9\\ -2 & 4 & 6\\ 9 & 6 & 1\end{bmatrix}$ أي $A^t=\begin{bmatrix}1 & -2 & 9\\ -2 & 4 & 6\\ 9 & 6 & 1\end{bmatrix}$

نلاحظ ان $A=A^t$ ومنه المصفوفة A متناظرة.

تمرين:

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\ -5 & -8 & 4\\ 3 & 4 & -15\end{bmatrix}$.

اثبت ان $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ مصفوفة متخالفة.

الحل :

إيجاد منقولة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ أي $A^t=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -4\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

نلاحظ ان $A^t=-A$ ومنه المصفوفة A متخالفة.

تمرين :

هل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}0 & -5 & 3\\ -5 & 0 & 4\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$ متخالفة ؟

الحل :

إيجاد منقولة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}0 & -5 & 3\\ -5 & 0 & 4\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$ أي $A^t=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 5 & 0 & -4\\ -3 & -4 & 0\end{bmatrix}$.

نلاحظ ان $A^t=-A$ ومنه المصفوفة A متخالفة.

تمرين:

لتكن المصفوفتان $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

أثبت أن $4I_3 - B^t = A^t$ ، حيث I_3 مصفوفة الواحدة من الرتبة الثالثة.

الحل:

لدينا $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

اثبات أن $4I_3 - B^t = A^t$ ،

$$4I_3 = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} ،$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} ، \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4I_3 - B^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

و منه $4I_3 - B^t = A^t$.

تمرين:

احسب المحدد $\det(A)$ حيث $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ بعدة طرق .

الحل :

حساب المحدد $\det(A)$ حيث $A=\begin{bmatrix}-2&3&6\\1&2&-1\\5&1&3\end{bmatrix}$ ،

الطريقة الاولى:

$$\det(A)=\left|\begin{matrix}-2&3&6\\1&2&-1\\5&1&3\end{matrix}\right|\begin{matrix}-2&3\\1&2\\5&1\end{matrix}$$

$$=\left[(-2)\times2\times3+3\times(-1)\times5+6\times1\times1\right]-\left[5\times2\times6+1\times(-1)(-2)+3\times1\times3\right]$$

$$=-92$$

الطريقة الثانية:

$$\det(A)=\left|\begin{matrix}-2&3&6\\1&2&-1\\5&1&3\end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix}-2&3&6\\1&2&-1\end{matrix}$$

$$=\left[(-2)\times2\times3+1\times1\times6+5\times3\times(-1)\right]-\left[5\times2\times6+(-2)\times1\times(-1)+1\times3\times3\right]$$

$$=-92$$

الطريقة الثالثة:

$$\det(A)=\left|\begin{matrix}-2&3&6\\1&2&-1\\5&1&3\end{matrix}\right|$$

$$=(-2)\left|\begin{matrix}2&-1\\1&3\end{matrix}\right|-3\left|\begin{matrix}1&-1\\5&3\end{matrix}\right|+6\left|\begin{matrix}1&2\\5&1\end{matrix}\right|$$

$$=(-2)(6+1)-3(3+5)+6(1-10)$$

$$=-92$$

تمرين:

أحسب المحددات التالية :

$$\left|\begin{matrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{matrix}\right| ،\ \left|\begin{matrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{matrix}\right| ،\ \left|\begin{matrix}(b+c)^2&b^2&c^2\\a^2&(c+a)^2&c^2\\a^2&b^2&(a+b)^2\end{matrix}\right|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

الحل:

1. نعتبر التحويلات التالية : $L_2 \leftarrow L_2-(b+c)L_1$ و $L_3 \leftarrow L_3-bcL_1$

فنحصل على :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & a-c \\ c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)$$

2. لنعتبر التحويل التالي : $L_3 \leftarrow L_3+L_2$

فنحصل على :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

3. لنعتبر التحويلات التالية : $L_1 \leftarrow L_1-L_2$ و $L_2 \leftarrow L_2-L_3$

فنحصل على :

$$\Delta=\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & b^2-(c+a)^2 & 0 \\ 0 & (c+a)^2-b^2 & c^2-(a+b)^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & b-c-a & 0 \\ 0 & c+a-b & c-a-b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

ننشر الآن حسب السطر الأول فنجد أن : $\Delta=4abc(a+b+c)^3$

4. ليكن التحويل التالي : $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3$

فنحصل على :

$$\Delta=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

ثم نعتبر التحويلات : $C_1 \leftarrow C_1-C_2$ و $C_2 \leftarrow C_2-C_3$

فنحصل على :

$$\Delta=(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b+a+c & -(b+a+c) & 2b \\ 0 & (b+a+c) & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$$

5. لتكن التحويلات التالية :

$$L_2 \leftarrow L_2-aL_1 \text{ و } L_3 \leftarrow L_3-a^3L_1$$

فنحصل على :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

6. لتكن التحويلات التالية : $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ و $L_3 \leftarrow L_3 - a^4 L_1$

فنحصل على :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^4-a^4 & c^4-a^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$$

تمرين:

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{bmatrix}$.

أحسب كلا من : $\det(A)$ ، $\det(A^t)$ ، ماذا تستنتج؟

الحل :

حساب كلا من : $\det(A)$ ، $\det(A^t)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 14 & -3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-98) + 3((-12-56) + 5(56-0)$$

$$= -98 - 204 + 280 = -22$$

لدينا $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 14 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & 14 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

ومنه

$$= 1(0-98) - 4(9-70) + 8(-21-0)$$

$$= -98 + 244 - 168 = -22$$

و بالتالي $\det(A)=\det(A^t)$.

تمرين:

أحسب محددات المصفوفات $A\in M_n(IR)$ التالية :

1. A مصفوفة قطرية .
2. A مصفوفة مثلثية .
3. A عديمة القوى (أي يوجد $p\in IN^*$ بحيث $A^p=0$)
4. A متساوية القوى $(A^2=A)$.
5. A تضامنية $(A^2=I_n)$.

الحل:

1. إذا كانت $A\in M_n(IR)$ قطرية: $A=diag(a_1,...,a_n)$ ، فإن: $\det(A)=\prod_{k=1}^{n}a_k$
2. إذا كانت $A\in M_n(IR)$ مثلثية علوية: $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}:a_{ij}=0,i>j$

فإن : $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$

3. ج.إذا كانت $A\in M_n(IR)$ عديمة القوى ، أي يوجد $p\in IN^*$ بحيث $A^p=0$ فإن :

$$0=\det(A^p)=(\det(A))^p\Rightarrow\det(A)=0$$

4. د.إذا كان $A\in M_n(IR)$ متساوية القوى أي أن $A^2=A$ ، فإن :

$$\det(A^2)=(\det(A))^2=\det(A)\Rightarrow\det(A)\in\{0,1\}$$

5. ه.إذا كان $A\in M_n(IR)$ مصفوفة تضامنية أي أن $A^2=I_n$ ، فإن :

$$\det(A^2)=(\det(A))^2=\det(I_n)=1\Rightarrow\det(A)=\pm1$$

تمرين:

1. أوجد مصفوفتين $A,B\in M_2(IR)$ بحيث: $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$
2. ليكن :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

أوجد جميع المصفوفات B من $M_2(IR)$ التي تحقق :

$$\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$$

الحل:

1. ا.لنعتبر المصفوفتين A,B من $M_2(IR)$ التاليتين :

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

لدينا وضوحا :

$$0 = \det(A) + \det(B) \neq \det(A+B) = 1$$

2. نضع : $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ، إن العلاقة :

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

تقتضي أن:

$$4x - 3y - 2z + t = 0$$

وبالتالي فإن مجموعة المصفوفات B المحققة للعلاقة السابقة هي فضاء شعاعي جزئي من $M_2(IR)$ بعده 3 قاعدته :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

تمرين:

لتكن $A \in M_{2n+1}(IR)$ مصفوفة لا متناظرة $\left({}^tA = -A \right)$ ،

برهن أن: $\det(A) = 0$

الحل:

بما أن ${}^tA = -A$ فإن :

$$\det(A) = \det {}^tA = (-1)^{2n+1} \det(A) \Rightarrow 2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

تمرين:

1. أوجد مصفوفتين $A, B \in M_2(IR)$ بحيث: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
2. ليكن :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

أوجد جميع المصفوفات B من $M_2(IR)$ التي تحقق :

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

الحل:

1. لنعتبر المصفوفتين A, B من $M_2(IR)$ التاليتين :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لدينا وضوحا : $0 = \det(A) + \det(B) \neq \det(A+B) = 1$

نضع : $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ، إن العلاقة : $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

تقتضي أن: $4x - 3y - 2z + t = 0$

وبالتالي فإن مجموعة المصفوفات B المحققة للعلاقة السابقة هي فضاء شعاعي جزئي من $M_2(IR)$ بعده 3 قاعدته :

$$\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

تمرين:

لتكن $A\in M_n(IR)$ مصفوفة تحقق : $A^2-A+I_n=0$ ، أحسب $\det A$.

الحل:

لدينا :

$$A^3+I_n=(A+I_n)(A^2-A+I_n)=0\Rightarrow A^3=-I_n\Rightarrow(\det(A))^3=(-1)^n$$

إذن :

$$\det(A)=\begin{cases}-1,n=2p+1\\ 1,n=2p\end{cases}$$

تمرين:

برهن أنه لا توجد مصفوفة A من $M_{2n+1}(IR)$ تحقق :

$$A^2-A\sqrt{2}+I_n=0$$

الحل:

لدينا :

$$A^2+I_n=\left(A^2+\sqrt{2}A+I_n\right)\left(A^2-\sqrt{2}A+I_n\right)=0$$
$$\Rightarrow A^n=-I_n\Rightarrow\left(\det(A)\right)^4=(-1)^n$$

وهذا مستحيل لأن n فردي .

تمرين:

ليكن f التطبيق الخطي من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ الذي تعطى مصفوفته بالنسبة الى الأساس القانوني $\zeta=\left(c_1,c_2,c_3\right)$ كمايلي :

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

اكتب المصفوفة $M'=mat\left(u,\zeta',\zeta_3'\right)$ في حالة $\zeta'=\left(c_1',c_2',c_3'\right)$ هو أساس المعرف كمايلي:

$$\begin{cases}c_1'=c_1+c_2+c_3\\ c_2'=c_2+c_3\\ c_3'=c_3\end{cases}$$

الحل :

لدينا :

$$\begin{cases} u(c_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ u(c_2) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ u(c_3) = 3e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

نجد بعد الحساب

$$\begin{cases} u(e'_1) = 6e'_1 \\ u(e'_2) = 5e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ u(e'_3) = 3e'_1 - 2e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

اذن

$$M' = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين:

احسب مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :

حساب المميز $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب ،

لدينا $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\text{com}(A))^t$ و $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$

$$C_{11}=+M_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-7 \text{ ، } C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-2 \text{ ، } C_{13}=+M_{13}=+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -4\end{vmatrix}=1$$

$$C_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-10 \text{ ، } C_{22}=+M_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}=2 \text{ ، } C_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}=2$$

$$C_{31}=+M_{31}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \text{ ، } C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2 \text{ ، } C_{33}=+M_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

ومنه $\mathrm{com}(A)=\begin{bmatrix}-7 & -2 & 1\\ -10 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

اذن $(\mathrm{com}(A))^t=\begin{bmatrix}7 & -10 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

و بالتالي

$$A^{-1}=\frac{1}{6}(\mathrm{com}(A))^t=\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & \frac{-5}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

<u>تمرين:</u>

أوجد مقلوب المصفوفة A حيث $A=\begin{bmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}$ •

<u>الحل :</u>

حساب المحدد $\det(A)$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}$$
$$=[2\times 9\times 3+7\times 4\times 1+3\times 3\times 5]-[1\times 9\times 3+5\times 4\times 2+3\times 3\times 7]$$
$$=-3$$

و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب ،

لدينا $A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\text{com}(A))^t$ و $\text{com}(A)=\begin{pmatrix}+M_{11} & -M_{12} & +M_{13}\\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23}\\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33}\end{pmatrix}$

$C_{11}=+M_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & -1\end{vmatrix}=7$ ، $C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5$ ، $C_{13}=+M_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{vmatrix}=6$

$C_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}7 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-6$ ، $C_{22}=+M_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3$ ، $C_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3$

$C_{31}=+M_{31}=+\begin{vmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{vmatrix}=1$ ، $C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1$ ، $C_{33}=+M_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix}=3$

ومنه $\text{com}(A)=\begin{bmatrix}7 & -5 & 6\\ -6 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

اذن $(\text{com}(A))^t=\begin{bmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & 3\end{bmatrix}$

و بالتالي

$$A^{-1}=\frac{-1}{3}(\text{com}(A))^t=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تمرين:

أوجد مقلوب المصفوفة A حيث $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

الحل :

حساب المحدد $\det(A)$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=[1\times2\times1+1\times1\times1+1\times0\times0]-[1\times2\times1+0\times1\times1+0\times1\times1]$$
$$=1$$

و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب ،

لدينا $A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\mathrm{com}(A))^t$ و $\mathrm{com}(A)=\begin{pmatrix}+M_{11} & -M_{12} & +M_{13}\\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23}\\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33}\end{pmatrix}$

$$C_{11}=+M_{11}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2 \text{ ، } C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \text{ ، } C_{13}=+M_{13}=+\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

$$C_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \text{ ، } C_{22}=+M_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \text{ ، } C_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$C_{31}=+M_{31}=+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1 \text{ ، } C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \text{ ، } C_{33}=+M_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

ومنه $\mathrm{com}(A)=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

اذن $(\mathrm{com}(A))^t=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

و بالتالي

$$A^{-1}=(\mathrm{com}(A))^t=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix} .$$

تمرين:

أوجد مقلوب المصفوفة A حيث $A=\begin{bmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}$.

الحل :

حساب المحدد $\det(A)$

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}\\ &=[2\times9\times3+7\times4\times1+3\times3\times5]-[1\times9\times3+5\times4\times2+3\times3\times7]\\ &=-3\end{aligned}$$

و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب ،

لدينا $A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\text{com}(A))^t$ و $\text{com}(A)=\begin{pmatrix}+M_{11} & -M_{12} & +M_{13}\\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23}\\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33}\end{pmatrix}$

$$C_{11}=+M_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & -1\end{vmatrix}=7 \text{ ، } C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5 \text{ ، } C_{13}=+M_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{vmatrix}=6$$

$$C_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}7 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-6 \text{ ، } C_{22}=+M_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3 \text{ ، } C_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3$$

$$C_{31}=+M_{31}=+\begin{vmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{vmatrix}=1 \text{ ، } C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1 \text{ ، } C_{33}=+M_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix}=3$$

ومنه $\text{com}(A)=\begin{bmatrix}7 & -5 & 6\\ -6 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ،

اذن $(\text{com}(A))^t=\begin{bmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & 3\end{bmatrix}$

و بالتالي

$$A^{-1}=\frac{-1}{3}(\text{com}(A))^t=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3} & 2 & \frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & \frac{-1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تمرين:

لتكن المصفوفات :

$$\text{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},\text{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\text{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ .}$$

1. احسب P^3-3P^2+2P ، استنتج أن P تقبل مقلوبا P^{-1} يطلب تعيينه.
2. أ- تحقق أن $PDP^{-1}=A$.

ب- أحسب بدلالة العدد الطبيعي n : A^n .

الحل :

1. حساب P^3-3P^2+2P :

بالحساب نجد

$$P^3-3P^2+2P=I_n$$

الاستنتاج:

بما أن $P\left(P^2-3P+2\right)=I_n$ اذن P قابلة للقلب و منه $P^{-1}=P^2-3P+2$ أي $P^{-1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

2. أ- تحقق أن $PDP^{-1}=A$.

بالحساب نجد

$$PDP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}=\text{A}$$

ب- حساب A^n بدلالة العدد الطبيعي n :

$$\begin{aligned} A=PDP^{-1} &\Leftrightarrow A^2=APDP^{-1}\\ &\Leftrightarrow A^2=PDP^{-1}PDP^{-1}\\ &\Leftrightarrow A^2=PD^2P^{-1}\end{aligned}$$

و هكذا بنفس الطريقة نجد $A^n=PD^nP^{-1}$ و لدينا $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ومنه $D^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{bmatrix}$

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1+(-1)^n & 1-(-1)^n\\ 1-(-1)^n & -1+2(-1)^n & 1-(-1)^n\\ 1-(-1)^n & (-1)^n-1 & 1\end{bmatrix}$$ ،

تمرين:

لنعتبر المصفوفات التالية :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

1. برهن أن A قابلة للقلب وأحسب مقلوبها .

2. بين ان : $B = AB_1$ ، حيث $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. استنتج أن المصفوفات A, B, C, D قابلة للقلب واحسب مقلوباتها .

الحل:

1. باستعمال طريقة مقلوب مصفوفة نجد أن : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. لدينا : $B = AB_1, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

وحيث أن B_1 مصفوفة قابلة للقلب ، إذن B تكون كذلك ولدينا :

$$B^{-1} = B_1^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$D^{-1} = A^{-1}. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

تمارين للحل

تمرين:

لتكن $A;B\in M_n(IR)$ بحيث $A+B=AB$ برهن أن $A-I_n$ قابلة للقلب واحسب $(A-I_n)^{-1}$.

تمرين:

فكك المصفوفة
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 4\\ -3 & 5 & 2\end{pmatrix}$$
على شكل $B+C$ حيث B مصفوفة متناظرة و C مصفوفة لا متناظرة بعني أن ${}^tC=-C$.

تمرين:

لتكن المصفوفة
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$
تحقق من أن $A^2-4A+4I=0$.

أوجد باقي قسمة X^n على X^2-4X+4 مستنتجا A^n.

تمرين:

أوجد $X,Y\in M_2(IR)$ يحققان
$$\begin{cases}2X-5Y=A\\ -X+3Y=B\end{cases}$$
حيث
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

تمرين:

لتكن المصفوفة
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

1. أحسب من أجل كل $n\in IN^*$ المصفوفة A^n.
2. هل أن A قابلة للقلب.

تمرين:

هل المصفوفات التالية قابلة للقلب، أحسب المقلوب في حالة الأيجاب.
$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -5 & 7\\ 7 & 1 & -5\\ -5 & 7 & 1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & 1\\ 0 & 1 & -9\end{pmatrix}$$

تمرين:

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. أحسب A^2 ، تحقق من أن $A^2+3A+2I=0$.
2. أستنتج أن A قابلة للقلب واحسب مقلوبها.
3. نضع من أجل كل $n \in IN$: $B_n = A^n + A - 2I$. برهن أن :

$$\begin{cases} A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n \\ A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I \\ B_{n+2} = 2B_{n+1} \end{cases}$$

4. أحسب B_n مستنتجا A^n .

5. القيم الذاتية و الاشعة الذاتية:

تمرين:

اوجد القيم والاشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

الحل:

حساب كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ حيث $P_\lambda(A)=\det(A-\lambda I_2)$.

$$\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(2-\lambda)$$
$$=\lambda^2-3\lambda+2$$

جذور كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

$$\det(A-\lambda I_2)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

ومنه

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ ،}$$

وبالتالي

$$\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=1\end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda\in\{1,2\}$.

<u>تعيين الاشعة الذاتية :</u>

من أجل $\lambda=1$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A-\lambda I_2)V=0$:

لدينا

$$(A-\lambda I_2)V=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\text{ ....(1)}$$

بتعويض بـ $\lambda=1$ في (1) نجد

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ،

و بالتالي

$$\begin{cases} y=0 \\ x\in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

اذن :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};x\in \mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=1$ هو $V_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

من أجل $\lambda=2$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A-\lambda I_2)V=0$ ،

و بتعويض بـ $\lambda=2$ في (1) نجد

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ،

و بالتالي

$$-x+2y=0\Rightarrow x=2y$$

اذن :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};y\in \mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=2$ هو $V_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

تمرين:

اوجد القيم والاشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix}$ ،

الحل:

حساب كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ حيث $P_\lambda(A)=\det(A-\lambda I_2)$.

$$\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}6-\lambda & 0\\ 16 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(6-\lambda)(-2-\lambda)$$

جذور كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

$$\det(A-\lambda I_2)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}6-\lambda & 0\\ 16 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

ومنه

$$(6-\lambda)(-2-\lambda)=0$$

وبالتالي

$$\begin{cases}6-\lambda=0\\ -2-\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=6\\ \lambda=-2\end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda\in\{-2,6\}$.

<u>تعيين الاشعة الذاتية :</u>

من أجل $\lambda=-2$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A-\lambda I_2)V=0$

لدينا

$$(A-\lambda I_2)V=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}6-\lambda & 0\\ 16 & -2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\ ....(1)$$

بتعويض بـ $\lambda=-2$ في (1) نجد

$$\begin{bmatrix}8 & 0\\ 16 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

و بالتالي

$$\begin{cases}x=0\\ y\in\mathbb{R}^*\end{cases}$$

اذن :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix};y\in\mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=-2$ هو $V_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

من أجل $\lambda=6$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A-\lambda I_2)V=0$

و بتعويض بـ $\lambda=6$ في (1) نجد

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\16 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

و بالتالي

$$16x-8y=0\Rightarrow y=2x$$

اذن :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};x\in\mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=6$ هو $V_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

تمرين:

اوجد القيم والاشعة الذاتية للتطبيق الخطي f المعرف كمايلي :

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^2 &\to\mathbb{R}^2\\(x,y)&\mapsto(x+2y,3x+2y)\end{aligned}$$

الحل:

المصفوفة المرفقة التطبيق الخطي f هي $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}$

حساب كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ حيث $P_\lambda(A)=\det(A-\lambda I_2)$.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2)&=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)(2-\lambda)-6\\&=\lambda^2-3\lambda-4\end{aligned}$$

جذور كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

$$\det(A-\lambda I_n)=0$$

ومنه

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ وبالتالي $\begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda \in \{-1, 4\}$.

تعيين الاشعة الذاتية :

من أجل $\lambda = -1$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A - \lambda I_2)V = 0$

لدينا

$$(A - \lambda I_2)V = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ....(1)}$$

بتعويض بـ $\lambda = -1$ في (1) نجد

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y = 0$$

وبالتالي $x = \frac{3}{2}y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda = -1$ هو $V_1\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

من أجل $\lambda = 4$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A - \lambda I_2)V = 0$

و بتعويض بـ $\lambda = 4$ في (1) نجد

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{cases}-3x+3y=0\\2x-2y=0\end{cases}\Rightarrow x-y=0$$

وبالتالي $x=y$

اذن :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};x\in\mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=6$ هو $V_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

تمرين:

اثبت ان الشعاع $V\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=2$ للمصفوفة A المعرفة كمايلي : $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}$.

الحل:

لكي يكون الشعاع $V\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=2$ للمصفوفة A يجب ان يتحقق $AV=\lambda V$.

$$\begin{aligned}AV&=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\\&=2V\end{aligned}$$

تمرين :

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-17&8\end{bmatrix}$ علما ان $\lambda=4$ هو احد القيم الذاتية ،

الحل :

حساب كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ حيث $P_\lambda(A)=\det(A-\lambda I_3)$.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3)&=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\4&-17&8-\lambda\end{vmatrix}\\&=-\lambda^3+8\lambda^2-17\lambda+4\\&=(4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+1)\end{aligned}$$

جذور كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

$$\det(A-\lambda I_n)=0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-\lambda=0 \\ \lambda^2-4\lambda+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=4 \\ \lambda^2-4\lambda+1=0 \text{ ..... (1)} \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) لدينا

$$\begin{cases} \lambda^2-4\lambda+1=0 \\ \Delta=12 \\ \lambda_1=2-\sqrt{3},\ \lambda_1=2+\sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda\in\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3},4\}$.

تمرين:

اوجد القيم والاشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ،

الحل:

حساب كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ حيث $P_\lambda(A)=\det(A-\lambda I_3)$.

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-(-2)(2-\lambda)$$
$$=(2-\lambda)\left[(-\lambda)(3-\lambda)-(-2)\right]$$
$$=(2-\lambda)\left[\lambda^2-3\lambda+2\right]$$

جذور كثير الحدود المميز $P_\lambda(A)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

$$\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ومنه

$$(2-\lambda)\left[\lambda^2-3\lambda+2\right]=0$$

ومنه

$$\begin{cases} 2-\lambda=0 \\ \lambda^2-3\lambda+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

ملاحظة: $\lambda=2$ هو حل مضاعف

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda\in\{1,2\}$.

تعيين الاشعة الذاتية :

من أجل $\lambda=1$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A-\lambda I_3)V=0$،

لدينا :

$$(A-\lambda I_3)V=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ....(1)$$

بتعويض بـ $\lambda=1$ في (1) نجد:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالتالي

$$\begin{cases} -x+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-3z \end{cases}$$

اذن :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; z\in\mathbb{R}^*$$

ومنه الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=1$ هو $V_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

من أجل $\lambda = 2$ نفرض الشعاع الذاتي $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ الذي يحقق $(A-\lambda I_3)V = 0$،

و بتعويض بـ $\lambda = 2$ في (1)

نجد

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالتالي

$$\begin{cases} -2x-2z=0 \\ x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

اذن :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; y, z \in \mathbb{R}^*$$

ومنه يوجد شعاعان ذاتيان $V_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $V_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ مرفقان بالقيمة الذاتية $\lambda = 2$.

تمرين:

لتكن المصفوفة A هي حيث:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

عين القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A.

الحل:

لتكن المصفوفة A هي حيث:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

نعين القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A.

1- نعين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda-1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda-1\end{vmatrix}\\
&=(-\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 1\\ 1 & -\lambda-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -\lambda-1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\
&=(-\lambda-1)\left[(-\lambda-1)^2-1\right]-\left[-\lambda-1-1\right]+\left[1-(-\lambda-1)\right]\\
&=(-\lambda-1)\left[(\lambda+2)\lambda\right]+(\lambda+2)+(\lambda+2)\\
&=(\lambda+2)\left[(-\lambda-1)\lambda+2\right]\\
&=(\lambda+2)^2(\lambda-1)
\end{aligned}$$

نعين القيم الذاتية للمصفوفة A:

نضع $P_A(\lambda)=0$.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda)=0 &\Leftrightarrow (\lambda+2)^2(-\lambda+1)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda+2)=0\\ (-\lambda+1)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-2\\ \lambda=+1\end{cases}
\end{aligned}$$

و منه القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $S=\{-2\ ,1\}$.

2- نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A:

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=1$:

نبحث عن الأشعة $V_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_1 V$.

وبالتالي $(A-\lambda_1 I_3)V=0$

أي $(A-I_3)V=0$.

نبحث عن حلول الجملة:

$$\begin{cases}-2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y+z=0\\ -3y+3z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y+z=0\\ y=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ y=z\end{cases}$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ مع $x=y=z$ و x كيفي، أي أن هناك شعاع ذاتي مرفق بـ $\lambda_1=1$ هو $V_1(1,1,1)$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1 / \alpha\in\mathbb{R}^*$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=-2$:

نبحث عن الأشعة $V_2(x,y,y)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_2 V$

وبالتالي $(A-\lambda_2 I_3)V=0$

أي $(A+2I_3)V=0$

نبحث عن حلول الجملة:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-y-z\\ x+y+z=0\end{cases}$$

لدينا

$$V\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-y\\ y\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\ 0\\ z\end{pmatrix}$$

$$=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} / y,z\in\mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_2(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ مع y و z كيفيان، أي أن هناك شعاعان ذاتيان مرفقان بـ$\lambda_1=-2$ هما $V_2(-1,0,1)$ و $V_3(-1,1,0)$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1+\beta V_2 \,/\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

تمرين:

لتكن المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

1. عين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A .
2. عين القيم الذاتية للمصفوفة A .
3. من أجل كل قيمة ذاتية عين الفضاء الجزئي المرفقة بها محددا أساس كل فضاء جزئي.

الحل:

لتكن المصفوفة A هي حيث:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

1- نعين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & 2\\ 2 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} \quad \underline{L}_3-L_2\to L_3$$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & 2\\ 0 & -1+x & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 2\\ 2 & -1-\lambda & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} \quad C_2+C_3\to C_2$$

$$P_A(\lambda)=(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

نعين القيم الذاتية للمصفوفة A:

نضع $P_A(\lambda)=0$.

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(3-\lambda)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-\lambda=0\\ 3-\lambda=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=3\end{cases}$$

و منه القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $S=\{1\ ,\ 3\}$.

2- نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A:

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=1$:

نبحث عن الأشعة $V_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_1 V$.

وبالتالي $(A-\lambda_1 I_3)V=0$

أي $(A-I_3)V=0$.

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A-I_3)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y+2z=0\\ 2x-2y+2z=0\\ 2x-2y+2z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2x-2y+2z=0$$
$$\Leftrightarrow x=y-z$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad / \quad y, z \in \mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أي أن هناك شعاعان ذاتيان مرفقان بـالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ هما $V_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $V_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$، وكل شعاع ذاتي

آخر فهو من الشكل $\alpha V_1 + \beta V_2 \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ$\lambda_1 = 1$ هو $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

الشعاعان $V_1(1,1,0)^t$ و $V_2(-1,0,1)^t$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي فهما يشكلان أساس للفضاء الجزئي E_1 .

و منه $\dim E_1 = 2$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1 = -2$:

نبحث عن الأشعة $V_3(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$ بحيث $AV = \lambda_2 V$

وبالتالي $(A - \lambda_2 I_3)V = 0$

أي $(A + 3I_3)V = 0$

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A+3I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A+3I_3\right)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y+2z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=y \end{cases}$$

لدينا

$$V_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

$$=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_3\left(x,x,x\right)\in\mathbb{R}^3$ مع x كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ $\lambda_2=3$ هم $V_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_3 / \alpha\in\mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ $\lambda_2=3$ هو $E_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_3\left(1,1,1\right)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_3 .

و منه $\dim E_3=1$.

تمرين:

لتكن المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1. عين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A .
2. عين القيم الذاتية للمصفوفة A .
3. من أجل كل قيمة ذاتية عين الفضاء الجزئي المرفقة بها محددا أساس كل فضاء جزئي.

الحل:

لتكن المصفوفة A هي حيث:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

-3 نعين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$:

$$P_B(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2+L_3\to L_3$$

$$=\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 6 \\ 2 & 1-x & 4 \\ 0 & 1-x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_2-C_3\to C_2$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 6 \\ 2 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 9 + 8\right) \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)
\end{aligned}
$$

نعين القيم الذاتية للمصفوفة A :

نضع $P_A(\lambda)=0$.

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

و منه القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $S=\{-1\,,\,1\}$.

4- نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A :

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1 = 1$:

نبحث عن الأشعة $V_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_1 V$.

وبالتالي $(A-\lambda_1 I_3)V=0$

أي $(A-I_3)V=0$.

نبحث عن حلول الجملة:

$$
\begin{aligned}
(A-I_3)V = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -2z \end{cases}
\end{aligned}
$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$
$$= z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \ z \in \mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_1(-2z,-z,z) \in \mathbb{R}^3$ مع z كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ $\lambda_1 = 1$ هو $V_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1 / \alpha \in \mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ $\lambda_1 = 1$ هو $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

لدينا الشعاع $V_1(-2,-1,1)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_1 .

و منه $\dim E_1 = 1$

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1 = -1$:

نبحث عن الأشعة $V_2(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$ بحيث $AV = \lambda_2 V$

وبالتالي $(A - \lambda_2 I_3)V = 0$

أي $(A + I_3)V = 0$

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A - I_3)V = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(A-I_3)V=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=-z$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

$$= z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \quad z \in \mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_2(-z,-z,z) \in \mathbb{R}^3$ مع z كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ $\lambda_2 = -1$ هو $V_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_2 / \alpha \in \mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ $\lambda_1 = 1$ هو $E_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_2(-1,-1,1)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_{-1} .

و منه $\dim E_{-1} = 1$.

تمرين:

لتكن A مصفوفة مربعة ذات الرتبة 3 حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. عين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$ للمصفوفة A .
2. عين القيم الذاتية للمصفوفة A .

3. هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

4. من أجل كل قيمة ذاتية عين الفضاء الجزئي المرفقة بها محددا أساس كل فضاء جزئي.

5. لدينا $D = P^{-1}AP$ حيث P هي مصفوفة العبور :

- من اجل $k \in \mathbb{N}$ عبر عن A^k بدلالة D^k، ثم احسب A^k.

الحل:

لتكن المصفوفة A هي حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1- نعين كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -1\begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)\left(6+2\left(-2-\lambda\right)\right)+(1-\lambda)\left(-\lambda(-2-\lambda)-6\right) \\
&= (-1)\left(6-4-2\lambda\right)+(1-\lambda)\left(2\lambda+\lambda^2-6\right) \\
&= (-1)\left(2-2\lambda\right)+(1-\lambda)\left(2\lambda+\lambda^2-6\right) \\
&= (1-\lambda)\left[(-2)+\left(2\lambda+\lambda^2-6\right)\right] \\
&= (1-\lambda)\left(\lambda^2+2\lambda-8\right)
\end{aligned}$$

نعين القيم الذاتية للمصفوفة A :

نضع $P_A(\lambda) = 0$.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2+2\lambda-8\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda) = 0 \\ \left(\lambda^2+2\lambda-8\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \left(\lambda^2+2\lambda-8\right) = 0 \text{ ....(1)} \end{cases}
\end{aligned}$$

نحل المعادلة (1) :

لدينا : $\Delta = 36$ و حلولها $\lambda = -4$ او $\lambda = 2$

و منه القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $S = \{-4, 1, 2\}$.

2. هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

بما ان المصفوفة A مربعة من الرتبة 3 و تقبل ثلاث قيم ذاتية مختلفة مثنى مثنى فهي قابلة للتقطير.

3. نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A:

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1 = 1$:

نبحث عن الأشعة $V_1(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$ بحيث $AV = \lambda_1 V$.

وبالتالي $(A - \lambda_1 I_3)V = 0$

أي $(A - I_3)V = 0$.

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A - I_3)V = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$
$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad / \ x \in \mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_1(x, x, x) \in \mathbb{R}^3$ مع x كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ$\lambda_1 = 1$ هم $V_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1 / \alpha \in \mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ$\lambda_1 = 1$ هو $E_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_1(1,1,1)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_1 .

و منه $\dim E_1 = 1$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_2 = 2$:

نبحث عن الأشعة $V_2(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$ بحيث $AV = \lambda_2 V$

وبالتالي $(A - \lambda_2 I_3)V = 0$

أي $(A - 2I_3)V = 0$

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A - 2I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\3 & -4 & 0\\-2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x + 2y - z = 0\\3x - 4y = 0\\-2x + 2y - z = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}z = \dfrac{1}{-2}x\\ y = \dfrac{3}{4}x\end{cases}$$

لدينا

$$V_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ \dfrac{3}{4}x\\ -\dfrac{1}{2}x\end{pmatrix}$$

$$V_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{4}x\\ -\frac{1}{2}x\end{pmatrix}$$
$$=x\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}/\ x\in\mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_2(4,3,-2)\in\mathbb{R}^3$ مع x كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ $\lambda_2=2$ هو $V_2\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_2\ /\ \alpha\in\mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ $\lambda_2=2$ هو $E_2=\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_3(4,3,-2)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_2 .

و منه $\dim E_2=1$.

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_3=-4$:

نبحث عن الأشعة $V_3(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_3 V$

وبالتالي $(A-\lambda_3 I_3)V=0$

أي $(A+4I_3)V=0$

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A+4I_3)V=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&2&-1\\3&2&0\\-2&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y-z=0\\3x+2y=0\\-2x+2y+5z=0\end{cases}$$

$$(A+4I_3)V=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ 3x+2y=0 \\ -2x+2y+5z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=\dfrac{-3}{2}x \end{cases}$$

لدينا

$$V_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{-3}{2}x \\ x \end{pmatrix}$$

$$=x\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_3(2,-3,2)\in\mathbb{R}^3$ مع x كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ $\lambda_2=-4$ هو $V_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_3 / \alpha\in\mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ $\lambda_3=-4$ هو $E_{-4}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_{-4}(2,-3,2)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_2 .

و منه $\dim E_{-4}=1$.

-3 لدينا $D=P^{-1}AP$ حيث P هي مصفوفة العبور :

- التعبير عن A^k بدلالة D^k من اجل $k\in\mathbb{N}$.

اثبات ان الاشعة تشكل أساس للفضاء E حيث : $E=\{V_1,V_2,V_3\}$:

الاشعة (V_1,V_2,V_3) مرتبطة خطية $\Leftrightarrow$ $(\forall V_1,V_2,V_3\in E,\forall\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}:\alpha V_1+\beta V_2+\delta V_3\Rightarrow\alpha=\beta=\delta=0)$

$\forall V_1, V_2, V_3 \in E, \forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}:$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+4\beta+2\delta=0\\\alpha+3\beta-3\delta=0\\\alpha-2\beta+2\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+4\beta+2\delta=0\\\alpha+3\beta-3\delta=0\\\alpha-2\beta+2\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=-5\delta\\\alpha=-2\delta\\\beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\delta=0\\\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$$

و منه الاشعة (V_1, V_2, V_3) مرتبطة خطية فهي تشكل أساس للفضاء E.

و بالتالي: $\dim E = 3 = \dim \mathbb{R}$

لدينا $D = P^{-1}AP$ حيث P هي مصفوفة العبور أي $P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$

التعبير عن A^k بدلالة D^k من اجل $k \in \mathbb{N}$.

حساب P^{-1} :

حساب $\det(P)$.

$$\det(P)=\begin{vmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&6&2\\1&0&-3\\1&0&2\end{vmatrix}$$
$$=-6\begin{vmatrix}1&-3\\1&2\end{vmatrix}$$
$$=-30$$

بما ان $\det(P) \neq 0$ فان المصفوفة P قابلة للقلب.

لدينا :

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix} \text{ و } P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}C^{\mathrm{t}}$$

حساب C:

$$C=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} 4 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix} 4 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

ومنه

$$C=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5\\ -12 & 0 & 6\\ -18 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

ومنه

$$\begin{aligned} P^{-1}&=\frac{1}{\det(P)}C^{\mathrm{t}}\\ &=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18\\ -5 & 0 & 5\\ -5 & 6 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

حساب A^k:

لدينا

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

لدينا من اجل $k\in\mathbb{N}$.

$$D^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0\\ 0 & 0 & (-4)^k\end{pmatrix}$$

و

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

و منه

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$$

وبالتالي

$$A^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -52^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 52^{k+2} - 2(-4)^k \\ -152^k - 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 52^{k+1} + 3(-4)^k \\ 52^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 - 52^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

تمرين:

لتكن المصفوفة $A \in M_3(\mathbb{R})$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟
2. احسب $(A - 2I_3)^2$، ثم $(A - 2I_3)^k$ و ذلك من كل $n \in \mathbb{N}$، استنتج A^k.

الحل:

لتكن المصفوفة $A \in M_3(\mathbb{R})$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

حساب كثير الحدود المميز $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(2-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)$$
$$=(2-\lambda)^3.$$

إيجاد القيم الذاتية للمصفوفة A :

نضع $P_A(\lambda)=0$ ومنه $(2-\lambda)^3=0\Leftrightarrow\lambda=2$.

ومنه المصفوفة A غير قابلة للتقطير لانها تقبل قيمة ذاتية وحيدة $\lambda=2$.

2. حساب $\left(A-2I_3\right)^2$:

$$\left(A-2I_3\right)^2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

و كذلك

$$\left(A-2I_3\right)^0=I$$
$$\left(A-2I_3\right)^1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

و من اجل $n\geqslant 2$ لدينا $\left(A-2I_3\right)^n=0$.

استنتاج A^n :

نضع $B=A-2I_3$.

لدينا

$$A=A-2I_3+2I_3$$
$$=B+2I_3$$

و منه

$$\begin{aligned} A^n &= \left(B+2I_3\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \left(2I_3\right)^{n-k} \end{aligned}$$

حيث C_n^k معاملات ثنائي نوتن $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

من اجل $n \geqslant 2$ ، $B^n = 0$.

و من اجل $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 \left(2I_3\right)^n + C_n^1 B^1 \left(2I_3\right)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} nB \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n\left(A-2I_3\right) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} nA \end{aligned}$$

تمرين:

لتكن المصفوفة $A \in M_3\left(\mathbb{R}\right)$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1. عين كثير الحدود المميز $P_A\left(\lambda\right)$ للمصفوفة A .
2. عين القيم الذاتية للمصفوفة A .
3. من أجل كل قيمة ذاتية عين الفضاء الجزئي المرفقة بها محددا أساس كل فضاء جزئي.

الحل:

لتكن المصفوفة A هي حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4- نعين كثير الحدود المميز $P_A\left(\lambda\right)$:

$$P_B(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2+L_3\to L_3$$

$$=\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 6 \\ 2 & 1-x & 4 \\ 0 & 1-x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_2-C_3\to C_2$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 6 \\ 2 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-9+8\right)$$

$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

نعين القيم الذاتية للمصفوفة A:

نضع $P_A(\lambda)=0$.

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-1=0 \\ \lambda+1=0 \end{cases}$$

و منه القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $S=\{-1\,,\,1\}$.

5- نعين الأشعة الذاتية للمصفوفة A:

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=1$:

نبحث عن الأشعة $V_1(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_1 V$.

وبالتالي $(A-\lambda_1 I_3)V=0$

أي $(A-I_3)V=0$.

نبحث عن حلول الجملة:

$$(A-I_3)V=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2z=0 \\ -x-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-2z \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

$$=z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \ z\in\mathbb{R}^*$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_3(-2z,-z,z)\in\mathbb{R}^3$ مع z كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ$\lambda_1=1$ هو $V_1\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_1 / \alpha\in\mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ$\lambda_1=1$ هو $E_1=\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_1(-2,-1,1)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_1 .

و منه $\dim E_1=1$

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1=-1$:

نبحث عن الأشعة $V_3(x,y,y)\in\mathbb{R}^3/\{0\}$ بحيث $AV=\lambda_2 V$

وبالتالي $(A-\lambda_2 I_3)V=0$

أي $(A+I_3)V=0$

نبحث عن حلول الجملة:

$$
\begin{aligned}
(A-I_3)V=0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3z=0, \\ x+y+2z=0, \\ x+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x=y=-z
\end{aligned}
$$

ومنه

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \\
&= z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \ \ z\in\mathbb{R}^*
\end{aligned}
$$

ومنها نستنتج أن كل حل لهذه الجملة هو شعاع من الشكل: $V_2(-z,-z,z)\in\mathbb{R}^3$ مع z كيفي،

أي أن هناك شعاع ذاتي وحيد مرفق بـ $\lambda_2=-1$ هو $V_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وكل شعاع ذاتي آخر فهو من الشكل $\alpha V_2 \ / \ \alpha\in\mathbb{R}^*$.

و بالتالي الفضاء الجزئي المرفق بـ $\lambda_1=1$ هو $E_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

لدينا الشعاع $V_2(-1,-1,1)^t$ وحيد فهو يشكل أساس للفضاء الجزئي E_{-1} .

و منه $\dim E_{-1}=1$.

تمارين للحل

تمرين:

1. اثبت ان الشعاع $V\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda = 3$ للمصفوفة A المعرفة كمايلي :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}.$$

2. هل توجد قيمة ذاتية أخرى؟

تمرين:

اوجد القيم والاشعة الذاتية للمصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 10 & -9\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

تمرين:

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 2 & -6\\ -2 & 2 & -6\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & -5\end{bmatrix}.$$

1. عين كثير الحدود المميز لكل مصفوفة.
2. من أجل كل قيمة ذاتية عين الفضاء الجزئي المرفقة بها محددا أساس كل فضاء جزئي.

6. جمل معادلات خطية ذات ثلاث مجاهيل :

تمرين :

حل في $\mathbb{R}^3$ الجملة التالية بطريقة مقلوب مصفوفة ثم تحقق من الحل بطريقة كرامر حيث:

$$(S)\begin{cases}5x+3y+4z=-18\\3x+z=-7\\6x+3y+6z=-27\end{cases}$$

نضع $A=\begin{bmatrix}5&3&4\\3&0&1\\6&3&6\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}-18\\-7\\-27\end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ حيث $AX=C$ هي معادلة مصفوفية مرفقة بالجملة (S).

حساب المحدد $\det(A)$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}5&3&4\\3&0&1\\6&3&6\end{vmatrix}=-15$$

المصفوفة A قابلة للقلب و بالتالي الجملة (S)تقبل حلا وحيدا (x,y,z).لدينا:

$$\begin{aligned}AX=C &\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}C\\&\Leftrightarrow I_nX=A^{-1}C\\&\Leftrightarrow X=A^{-1}C\end{aligned}$$

لدينا $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\mathrm{com}(A))^t$

و $\mathrm{com}(A)=\begin{pmatrix}+M_{11}&-M_{12}&+M_{13}\\-M_{21}&+M_{22}&-M_{23}\\+M_{31}&-M_{32}&+M_{33}\end{pmatrix}$

$$C_{11}=+M_{11}=+\begin{vmatrix}0&1\\3&6\end{vmatrix}=-3 \text{ ، } C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\6&6\end{vmatrix}=-12 \text{ ، } C_{13}=+M_{13}=+\begin{vmatrix}3&0\\6&3\end{vmatrix}=9$$

$$C_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}3&4\\3&6\end{vmatrix}=-6 \text{ ، } C_{22}=+M_{22}=+\begin{vmatrix}5&4\\6&6\end{vmatrix}=6 \text{ ، } C_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}5&3\\6&3\end{vmatrix}=3$$

$$C_{31}=+M_{31}=+\begin{vmatrix}3&4\\0&1\end{vmatrix}=3 \text{ ، } C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}5&4\\3&1\end{vmatrix}=7 \text{ ، } C_{33}=+M_{33}=+\begin{vmatrix}5&3\\3&0\end{vmatrix}=-9$$

ومنه $\mathrm{com}(A)=\begin{bmatrix}-3&-12&9\\-6&6&3\\3&7&-9\end{bmatrix}$

اذن:

$$(\mathrm{com}(A))^t=\begin{bmatrix}-3 & -6 & 3\\ -12 & 6 & 7\\ 9 & 3 & -9\end{bmatrix}$$

و بالتالي

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}(A))^t$$
$$=\frac{-1}{15}(\mathrm{com}(A))^t$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{15}\begin{bmatrix}-3 & -6 & 3\\ -12 & 6 & 7\\ 9 & 3 & -9\end{bmatrix}$$

ومنه

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{15} & \frac{6}{15} & \frac{9}{15}\\ \frac{12}{15} & \frac{-6}{15} & \frac{-7}{15}\\ \frac{-9}{15} & \frac{-3}{15} & \frac{9}{15}\end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15}\\ \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

ومنه

$$,X=A^{-1}C\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15}\\ \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-18\\ -7\\ -27\end{bmatrix}$$

اذن

$$X=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -4\end{bmatrix}$$

التحقيق باستخدام طريقة كرامر

المصفوفة A قابلة للقلب و يالتالي الجملة (S)تقبل حلا وحيدا (x,y,z) حيث:

$$. z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)} \text{ ، } y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ ، } x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}5 & 3 & -18\\ 3 & 0 & -7\\ 6 & 3 & -27\end{vmatrix}=60 \text{ ، } \det(A_2)=\begin{vmatrix}5 & -18 & 4\\ 3 & -7 & 1\\ 6 & -27 & 6\end{vmatrix}=-15 \text{ ، } \det(A_1)=\begin{vmatrix}-18 & 3 & 4\\ -7 & 0 & 1\\ -27 & 3 & 6\end{vmatrix}=15$$

ومنه $. z=\frac{60}{-15}=-4$ ، $y=\frac{-15}{-15}=1$ ، $x=\frac{15}{-15}=-1$

و منه مجموعة حلول الجملة (S) هي $S=\{(-1,1,-4)\}$

تمرين:

حل في $\mathbb{R}^3$ الجملة التالية بطريقة مقلوب مصفوفة ثم تحقق من الحل بطريقة كرامر حيث:

$$(S)\begin{cases}2x+7y+3z=5\\ 3x+9y+4z=7\\ x+5y+3z=8\end{cases}$$

نضع $A=\begin{bmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 8\end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ حيث $AX=C$ هي معادلة مصفوفية مرفقة بالجملة (S).

حساب المحدد $\det(A)$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=-3$$

المصفوفة A قابلة للقلب و بالتالي الجملة (S) تقبل حلا وحيدا (x,y,z).

لدينا:

$$\begin{aligned} AX=C &\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}C\\ &\Leftrightarrow I_nX=A^{-1}C\\ &\Leftrightarrow X=A^{-1}C\end{aligned}$$

لدينا $A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\mathrm{com}(A))^t$ و $\mathrm{com}(A)=\begin{pmatrix}+M_{11} & -M_{12} & +M_{13}\\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23}\\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33}\end{pmatrix}$

$$C_{11}=+M_{11}=+\begin{vmatrix}9 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=7 \text{ ، } C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5 \text{ ، } C_{13}=+M_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{vmatrix}=6$$

$$C_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}7&3\\5&3\end{vmatrix}=-6 \text{ ، } C_{22}=+M_{22}=+\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}=3 \text{ ، } C_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}2&7\\1&5\end{vmatrix}=-3$$

$$C_{31}=+M_{31}=+\begin{vmatrix}7&3\\9&4\end{vmatrix}=1 \text{ ، } C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=1 \text{ ، } C_{33}=+M_{33}=+\begin{vmatrix}2&7\\3&9\end{vmatrix}=-3$$

ومنه

$$\text{com}(A)=\begin{bmatrix}7&-5&6\\-6&3&-3\\1&1&-3\end{bmatrix}$$

اذن

$$(\text{com}(A))^t=\begin{bmatrix}7&-6&1\\-5&3&1\\6&-3&-3\end{bmatrix}$$

و بالتالي

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^t$$
$$=\frac{-1}{3}(\text{com}(A))^t$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{3}\begin{bmatrix}7&-6&1\\-5&3&1\\6&-3&-3\end{bmatrix}$$

ومنه

$$=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&\frac{-6}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{-5}{3}&\frac{3}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{6}{3}&\frac{-3}{3}&\frac{-3}{3}\end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\\frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}C \Leftrightarrow X=A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\\frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\\8\end{bmatrix}$$

اذن $X=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3}\\ \frac{-4}{3}\\ 5\end{bmatrix}$

التحقيق باستخدام طريقة كرامر

المصفوفة A قابلة للقلب و يالتالي الجملة (S)تقبل حلا وحيدا (x,y,z) حيث:

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)} \text{ ، } y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ ، } z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}.$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}5&7&3\\7&9&4\\8&5&3\end{vmatrix}=1 \text{ ، } \det(A_2)=\begin{vmatrix}2&5&3\\3&7&4\\1&8&3\end{vmatrix}=4 \text{ ، } \det(A_3)=\begin{vmatrix}2&7&5\\3&9&7\\1&5&8\end{vmatrix}=-15$$

ومنه $x=\frac{-1}{3}$ ، $y=\frac{-4}{3}$ ، $z=\frac{-15}{-3}=5$.

و منه مجموعة حلول الجملة(S) هي $S=\left\{\left(\frac{-1}{3},\frac{-4}{3},5\right)\right\}$

تمرين:

حل في $\mathbb{R}^3$ الجملة التالية بطريقة مقلوب مصفوفة ثم تحقق من الحل بطريقة كرامر حيث:

$$(S)\begin{cases}2x-5y-6z=5\\-3x+2y+5z=1\\2x+4y-3z=-16\end{cases}$$

نضع $A=\begin{bmatrix}2&-5&-6\\-3&2&5\\2&4&-3\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}5\\1\\-16\end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ حيث $AX=C$ هي معادلة مصفوفية مرفقة بالجملة (S).

حساب المحدد $\det(A)$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&-5&-6\\-3&2&5\\2&4&-3\end{vmatrix}=39$$

المصفوفة A قابلة للقلب و بالتالي الجملة (S)تقبل حلا وحيدا (x,y,z).

لدينا:

$$AX = C \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C$$
$$\Leftrightarrow I_n X = A^{-1}C$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}C$$

لدينا $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\text{com}(A))^t$ و $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$

$C_{11} = +M_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -26$ ، $C_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1$ ، $C_{13} = +M_{13} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16$

$C_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -39$ ، $C_{22} = +M_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6$ ، $C_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -18$

$C_{31} = +M_{31} = +\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -13$ ، $C_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -8$ ، $C_{33} = +M_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -11$

ومنه $\text{com}(A) = \begin{bmatrix} -26 & 1 & -16 \\ -39 & 6 & -18 \\ -13 & -8 & -11 \end{bmatrix}$

اذن $(\text{com}(A))^t = \begin{bmatrix} -26 & -39 & -13 \\ 1 & 6 & -8 \\ -16 & -18 & -11 \end{bmatrix}$

و بالتالي

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^t$$
$$= \frac{1}{39}(\text{com}(A))^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -26 & -39 & -13 \\ 1 & 6 & -8 \\ -16 & -18 & -11 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$= \begin{bmatrix} \frac{-26}{39} & \frac{-39}{39} & \frac{-13}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{6}{39} & \frac{-8}{39} \\ \frac{-16}{39} & \frac{-18}{39} & \frac{-11}{39} \end{bmatrix}$$

وبالتالي
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-26}{39} & \frac{-39}{39} & \frac{-13}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{6}{39} & \frac{-8}{39} \\ \frac{-16}{39} & \frac{-18}{39} & \frac{-11}{39} \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}C \Leftrightarrow X=\begin{bmatrix} \frac{-26}{39} & \frac{-39}{39} & \frac{-13}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{6}{39} & \frac{-8}{39} \\ \frac{-16}{39} & \frac{-18}{39} & \frac{-11}{39} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -16 \end{bmatrix}$$

اذن
$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

التحقيق باستخدام طريقة كرامر

المصفوفة A قابلة للقلب و يالتالي الجملة (S)تقبل حلا وحيدا (x,y,z) حيث:

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)} \text{ ،} y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ ،} z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)} .$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -16 & 4 & -3 \end{vmatrix}=39 \text{ ،} \det(A_2)=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -16 & -3 \end{vmatrix}=-117 \text{ ،} \det(A_3)=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -16 \end{vmatrix}=78$$

ومنه $x=1$ ، $y=-3$ ، $z=2$.

و منه مجموعة حلول الجملة(S) هي $S=\{(1,-3,2)\}$.

تمرين:

ناقش حسب قيم الوسيط α حل الجملة الخطية التالية :

$$(S):\begin{cases} 2x+y+3z=\alpha x \\ 5x+3y+3z=\alpha y \\ x+4y+2z=\alpha z \end{cases}$$

الحل:

لدينا
$$(S):\begin{cases} 2x+y+3z=\alpha x \\ 5x+3y+3z=\alpha y \\ x+4y+2z=\alpha z \end{cases}$$

إن الجملة الخطية (S) تكافئ الجملة الخطية المتجانسة التالية :

$$(S):\begin{cases}(2-\alpha)x+y+3z=0\\5x+(3-\alpha)y+3z=0\\x+4y+(2-\alpha)z=0\end{cases}$$

لتكن المعادلة المصفوفية $AX=C$ حيث:

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ ، } A=\begin{bmatrix}(2-\alpha) & 1 & 3\\5 & (3-\alpha) & 3\\1 & 4 & (2-\alpha)\end{bmatrix}$$

حساب المميز $\det(A)$:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}(2-\alpha) & 1 & 3\\5 & (3-\alpha) & 3\\1 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\alpha^2+10\alpha+31$$

نضع $\det(A)=0$ و منه $\alpha^2+10\alpha+31=0$

حسب المميز Δ لدينا $\Delta=-31$ و منه $\det(A)\neq 0$ و بالتالي الجملة تقبل حلا وحيدا (x,y,z) حيث :

$$z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)} \text{ و } y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ ، } x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}(2-\alpha) & 1 & 0\\5 & (3-\alpha) & 0\\1 & 4 & 0\end{vmatrix} \text{ و } \det(A_2)=\begin{vmatrix}(2-\alpha) & 0 & 3\\5 & 0 & 3\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} \text{ ، } \det(A_1)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\0 & (3-\alpha) & 3\\0 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=0 \qquad\qquad =0 \qquad\qquad =0$$

و منه $x=y=z=0$

وبالتالي تكون مجموعة الحلول هي : $\{(0,0,0)\}$

تمرين:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m حل الجملة الخطية التالية :

$$(S')\begin{cases}y+z=1\\x+2y+3z=4\\3x+4y+5z=m\end{cases} \text{ ، } (S)\begin{cases}x+my+(m-1)z=1\\3x+2y+2z=3\\(m-1)x+my+(m+1)z=m-1\end{cases}$$

الحلّ:

1- مناقشة حلول الجملة الخطية (S) حسب قيم الوسيط الحقيقي m :

لدينا الجملة التالية ذات الوسيط الحقيقي m :

$$(S)\begin{cases}x+my+(m-1)z=1\\3x+2y+2z=3\\(m-1)x+my+(m+1)z=m-1\end{cases}$$

لتكن المعادلة المصفوفية $AX=C$ حيث:

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ (m-1) \end{bmatrix} \text{ ، } A=\begin{bmatrix} 1 & m & (m-1) \\ 3 & 2 & 2 \\ (m-1) & m & (m+1) \end{bmatrix}$$

حساب المميز $\det(A)$:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & m & (m-1) \\ 3 & 2 & 2 \\ (m-1) & m & (m+1) \end{vmatrix}$$
$$=-4m$$

ونميز حالتين :

الحالة الأولى :

إذا كان $m=0$ فإن $\det(A)=0$ الجملة اما لا تقبل حلول او تقبل ما لانهاية من الحلول في هذه الحالة نحسب كل من $\det(A_1)$ ، $\det(A_2)$ و $\det(A_3)$ (باستخدام طريقة كرامر) من أجل $m=0$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{ و } \det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ ، } \det(A_1)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول الجملة (S) تقبل ما لانهاية من الحلول.

الحالة الثانية :

إذا كان $m\neq 0$ فإن $\det(A)\neq 0$ و بالتالي الجملة تقيل حلا وحيدا (x,y,z) حيث

$$z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)} \text{ و } y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ ، } x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ (m-1) & m & (m-1) \end{vmatrix}=0 \text{ و } \det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & (m-1) \\ 3 & 3 & 2 \\ (m-1) & (m-1) & (m+1) \end{vmatrix}=0 \text{ ، } \det(A_1)=\begin{vmatrix} 1 & m & (m-1) \\ 3 & 2 & 2 \\ (m-1) & m & (m+1) \end{vmatrix}=-4m$$

و بالتالي : $x=1$ ، $y=0$ و $z=0$ ومنه تكون مجموعة الحلول هي : $\{(1,0,0)\}$

2- مناقشة حلول الجملة الخطية (S') حسب قيم الوسيط الحقيقي m :

لدينا :

$$(S')\begin{cases} y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ 3x+4y+5z=m \end{cases}$$

لتكن المعادلة المصفوفية $AX=C$ حيث:

$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&3\\3&4&5\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}1\\4\\m\end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

حساب المميز $\det(A)$:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&3\\3&4&5\end{vmatrix}$$
$$=2$$

$\det(A)\neq 0$ و بالتالي الجملة تقبل حلا وحيدا (x,y,z) حيث

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)} \text{ ، } y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ و } z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&2&3\\m&4&5\end{vmatrix} \text{ ، } \det(A_2)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&4&3\\3&m&5\end{vmatrix} \text{ و } \det(A_3)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&4\\3&4&m\end{vmatrix}$$
$$=m-6 \qquad =m-8 \qquad =-m+10$$

و منه $x=\dfrac{m-6}{2}$ ، $y=\dfrac{m-8}{2}$ و $z=\dfrac{-m+10}{2}$

وبالتالي تكون مجموعة الحلول هي : $\left\{\left(\dfrac{m-6}{2},\dfrac{m-8}{2},\dfrac{-m+10}{2}\right);m\in\mathbb{R}\right\}$

تمارين للحلّ:

تمرين:

حل في $\mathbb{R}^3$ الجمل المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{cases}3x+y=0\\6x+2y+z=2\\9x+3y+7z=14\end{cases} \quad ، \quad \begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=0\\2x_1+5x_2+3x_3=0\\3x_1-x_2-4x_3=0\end{cases} \quad ، \quad \begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=0\\x_1-8x_2+8x_3=0\\3x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

تمرين:

حل في $\mathbb{R}^3$ الجمل التالية بطريقة مقلوب مصفوفة ثم تحقق من الحل بطريقة كرامر حيث:

$$(1)\begin{cases}2x-y+z=0\\x-4y-3z=1\\3x+y-2z=3\end{cases} ،\quad (2)\begin{cases}x+y-2z=0\\2x-y-2z=3\\3x-5y+6z=-8\end{cases} ،\quad (3)\begin{cases}3x+y+z=7\\2x-y+2z=9\\5x+y+2z=-12\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}3x-y+2z=7\\2x+y-z=1\\4x+2y-3z=-1\end{cases} ،\quad (5)\begin{cases}x+3y+3z=4\\x+4y+3z=5\\x-3y+4z=3\end{cases} ،\quad (6)\begin{cases}2x-5y-6z=5\\-3x+2y+5z=1\\2x+4y-3z=-16\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}3x+y=0\\6x+2y+z=2\\9x+3y+7z=14\end{cases} ،\quad (8)\begin{cases}x+3y-2z=0\\x-8y+8z=0\\3x-2y+4z=0\end{cases} ،\quad (8)\begin{cases}x+2y-3z=0\\2x+5y+3z=0\\3x-y-4z=0\end{cases} .$$

تمرين:

حل وناقش حسب قيم الوسيط m من IR الجمل التالية :

$$1.\begin{cases}x+y+mz=m\\x+my-z=1\\x+y-z=1\end{cases} \quad , \quad 2.\begin{cases}x-my+m^2z=2m\\mx-m^2y+mz=2m\\mx+y-m^2z=1-m\end{cases}$$

$$3.\begin{cases}x+y+z=m+1\\mx+y+(m-1)z=m\\x+my+z=1\end{cases} \quad , \quad 4.\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=1-m^2\end{cases}$$

الفهرس