Exercices

Exercice n°1

1) Vous effectuez un voyage en avion à bord d'un biréacteur qui peut poursuivre son vol avec un seul réacteur qui fonctionne. Les réacteurs fonctionnent de façon indépendante et ont chacun une probabilité p de tomber en panne au cours du vol. Calculer en fonction de p la probabilité π_B que votre vol ait pu se poursuivre jusqu'à sa destination.

2) Dans le cas d'un quadriréacteur, qui peut poursuivre son vol avec au moins deux réacteurs qui fonctionnent, calculer en fonction de p la probabilité π_Q que votre vol ait pu se poursuivre jusqu'à sa destination.

3) Pour quelles valeurs de p le biréacteur est-il plus sûr que le quadriréacteur ? Calculer π_B et π_Q pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice n°2

Au casino, un joueur décide de miser sur un même numéro (ou série de numéros), jusqu'à ce qu'il gagne. Sa mise initiale est $a > 0$, le numéro qu'il joue a la probabilité p de sortir à chaque partie et il rapporte k fois la mise, $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance mathématique du gain G de ce joueur qui double sa mise à chaque partie.

Exercice n°3

Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

1) On effectue des tirages avec remise jusqu'à obtention d'une boule blanche. Déterminer la loi de probabilité du nombre N de tirages, puis calculer $E(N)$ et $V(N)$.

2) Mêmes questions si on remet une boule noire en plus après chaque tirage d'une boule noire. Calculer alors $P(N > n), \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n°4

Vous avez besoin d'une personne pour vous aider à déménager. Quand vous téléphonez à un ami, il y a une chance sur quatre qu'il accepte. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'amis que vous devrez contacter pour obtenir cette aide. Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer $P(X \leqslant 3)$ et $E(X)$.

Exercice n°5

Lors d'un examen oral, on vous demande de tirer les trois sujets que vous aurez à traiter dans une urne qui en contient dix. Parmi ces dix sujets, il y en a 3 que vous ne connaissez pas. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de sujets qui vous seront inconnus à l'issue de ce tirage. Calculer les probabilités des différentes valeurs possibles de X et en déduire $E(X)$.

Exercice n°6

Pour être sélectionné aux Jeux olympiques, un athlète doit réussir deux fois à dépasser les minima fixés par sa fédération. Il a une chance sur trois de réussir à chaque épreuve à laquelle il participe. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'épreuves auxquelles il devra participer pour être sélectionné.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Si cet athlète ne peut participer qu'à quatre épreuves maximum, quelle est la probabilité qu'il soit sélectionné ?

Exercice n°7

Soit X une v.a. de loi binômiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$.

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(X = 5), P(X \leqslant 2), P(X < 4), P(X = 1{,}5)$, $P(3 \leqslant X \leqslant 4)$ et $P(2 < X \leqslant 8)$.

2) Déterminer les valeurs de x telles que $P(X \geqslant x) \leqslant 0{,}75$.

3) Calculer $P(X = 16)$ dans le cas où $p = 0{,}9$.

Exercice n°8

Si X est une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$, calculer les probabilités $P(X = 6), P(X < 4), P(X \geqslant 5)$ et $P(\pi/2 < X < 2\pi)$ puis déterminer les valeurs de x telles que $P(X < x) \geqslant 0{,}95$.

Exercice n°9

Un commentateur sportif affirmait que le gain du match de double en coupe Davis (événement noté D), était généralement synonyme de victoire. Le pays gagnant est celui qui remporte le plus de matchs, la rencontre comportant 4 matchs en simple et un match en double. On fait l'hypothèse que pour ces 5 matchs chaque pays a la même probabilité de l'emporter. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X qui représente le nombre de matchs gagnés par une équipe. En déduire la probabilité que le pays gagnant ait effectivement remporté le match de double. Calculer alors la probabilité qu'un pays ait remporté le match de double, sachant qu'il a gagné. Que penser de l'affirmation de ce commentateur ?

Exercice n°10

Si U est une v.a. de loi normale standard, calculer $P(U < -2), P(-1 < U < 0{,}5)$ et $P(4U \geqslant -3)$ puis déterminer u_0 et v_0 tels que $P(|U| < u_0) = 0{,}82$ et $P(U < -v_0) = 0{,}61$.

Exercice n°11

Soit X une v.a. de loi normale telle que $P(X < 3) = 0{,}1587$ et $P(X > 12) = 0{,}0228$. Calculer $P(1 < X < 10)$.

Exercice n°12

Si X est une v.a. de loi normale telle que $P(X < 2) = 0{,}0668$ et $P(X \geqslant 12) = 0{,}1587$ calculer la valeur de a telle que $P\left\{[X - E(X)]^2 < a\right\} = 0{,}95$.

Exercice n°13

Une v.a. X suit une loi uniforme dans l'intervalle $[0,1]$.

Exprimer la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[x_1, x_2]$ en fonction des réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.

Exercice n°14

Soit X une variable aléatoire dont la densité a pour expression, pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\theta}} \exp - \frac{(\ln x)^2}{2\theta} \text{ avec } \theta > 0$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = \ln X$.

Exercice n°15

Soit X une variable aléatoire dont la densité a pour expression, pour $x > \lambda$:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-\lambda}{\theta}\right)$$

et nulle sinon, où θ et λ sont deux réels strictement positifs.

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ puis déterminer la fonction de répartition F de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $m_n = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$, où $X_1,\ldots,X_n$ sont des v.a. indépendantes et de même loi que X.

Exercice n°16

Si T est une v.a. positive représentant une durée de vie, on dit qu'elle vérifie la propriété de *non-vieillissement* si pour tout $t > 0$ et $h > 0$:

$$P(T > t + h | T > t) = P(T > h)$$

Montrer que la loi de Pascal et la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ vérifient cette propriété, c'est-à-dire sont des lois *sans mémoire*.

Exercice n°17

Si F et f sont respectivement la f.r. et la densité d'une v.a. positive, on désigne par *taux de panne* la fonction h définie pour $x > 0$ par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Déterminer cette fonction h pour la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ et pour la *loi de Weibull* de densité $f(x) = \alpha\theta x^{\alpha-1}\exp(-\theta x^{\alpha})$ pour $x > 0$, où α et θ sont deux paramètres positifs.

Exercice n°18

Calculer l'espérance et la variance d'une loi log-normale de paramètres m et $\sigma > 0$.

Exercice n°19

Soit $X_1,\ldots,X_n$ des v.a. indépendantes de densité f et de f.r. F. Déterminer les f.r. puis les densités des v.a. $m_n = \min\{X_i / 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $M_n = \max\{X_i / 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Appliquer ce résultat au cas particulier de la loi uniforme sur $[0,1]$, puis calculer dans ce cas $E(m_n)$ et $E(M_n)$.

Exercice n°20

Déterminer les moments non centrés d'ordre k, $k \in \mathbb{N}^*$, de la loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $x_0 > 0$.

Corrigés

Exercice n°1

1) On note P_i l'événement « le réacteur i est tombé en panne au cours du vol », avec $i = 1{,}2$. On obtient :

$$\pi = P\left(\overline{P_1 \cap P_2}\right) = 1 - P(P_1 \cap P_2) = 1 - p^2$$

2) Le nombre de réacteurs qui tombent en panne au cours du vol est une variable aléatoire X qui suit une loi binômiale de paramètres 4 et p. Ainsi :

$$\begin{aligned}\pi_Q &= P(X \leqslant 2) = 1 - P(X = 3) - P(X = 4) = 1 - 4p^3(1-p) - p^4 \\ &= 1 - 4p^3 + 3p^4\end{aligned}$$

3) On obtient :

$$\pi_Q - \pi_B = p^2(1-p)(1-3p)$$

donc le biréacteur est plus sûr que le quadriréacteur pour $p > 1/3$.

On vérifie que $\pi_B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{16} > \pi_Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16}$.

Exercice n°2

Si N est le nombre de parties jouées, l'événement $\{N = n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, signifie que le joueur a perdu les $n - 1$ premières parties et que son numéro est sorti à la dernière ; cette v.a. suit donc une loi de Pascal de paramètre p :

$$P(N = n) = (1-p)^{n-1}p$$

À l'issue de ces n parties, le joueur reçoit k fois sa mise, soit $k2^{n-1}a$, après avoir misé au cours de ces parties : $a + 2a + 2^2a + \ldots + 2^{n-1}a = a(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = a\,(2^n - 1)$. Son gain est alors : $g_n = k2^{n-1}a - (2^n - 1)\,a = a + (k-2)2^{n-1}a$.

L'espérance de gain est donc :

$$\begin{aligned}E(G) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n P(N = n) = a + (k-2)ap\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}(1-p)^{n-1} \\ &= a + (k-2)ap\sum_{n=1}^{\infty}(2q)^{n-1}\end{aligned}$$

où on a posé $q = 1 - p$. Si $q \geqslant 1/2$, la série est divergente et cette espérance est infinie. Si $q < 1/2$, c'est-à-dire $p > 1/2$, on obtient :

$$E(G) = a + (k-2)a\frac{p}{1-2q} = \frac{kp-1}{2p-1}a$$

Pour $k = 2$ par exemple, $E(G) = a$, c'est-à-dire que l'espérance de gain du joueur est égale à sa mise initiale.

Exercice n°3

1) Les tirages sont effectués jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche, donc la variable N suit une loi de Pascal de paramètre $p = 1/2$ puisque c'est la probabilité de tirer une boule blanche :

$$P(N = n) = \frac{1}{2^n}$$

D'après les résultats du cours : $E(N) = V(N) = 2$.

2) Si on note respectivement B_i et N_i les événements tirer une boule blanche et tirer une boule noire au i-ème tirage, $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable entière N est définie par :

$$P\,(N = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P\,(N = 2) = P(N_1 B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\ldots$$

$$P\,(N = n) = P(N_1 \ldots N_{n-1} B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi :

$$E(N) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

série harmonique divergente, donc l'espérance est infinie. *A fortiori* la variance n'existe pas non plus.

On obtient :

$$P\,(N > n) = 1 - P(N \leqslant n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(N = k)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice n°4

La v. a. X suit une loi géométrique (de Pascal) ; pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$P(X = k) = \frac{3^{k-1}}{4^k}$$

On obtient ensuite :

$$P(X \leqslant 3) = \sum_{k=1}^{3} P(X = k) = \frac{37}{64}$$

Le paramètre de cette loi est 1/4 donc $E(X) = 4$.

Exercice n°5

La v. a. X suit une loi hypergéométrique ; pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant 3$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}$$

On obtient ensuite :

$$P(X=0)=\frac{1}{6} \quad P(X=1)=\frac{1}{2} \quad P(X=2)=\frac{3}{10} \quad P(X=3)=\frac{1}{30}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=1{,}2$$

En utilisant la formule du cours on retrouve $E(X)=3\frac{4}{10}=1{,}2$.

Exercice n°6

1) Il s'agit de la loi binômiale négative ; pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$P(X=k)=(k-1)\frac{2^{k-2}}{3^k}$$

2) La probabilité d'être sélectionné est :

$$P(X \leqslant 4)=\sum_{k=2}^{4} P(X=k)=\frac{11}{27}$$

Exercice n°7

1) Par lecture de la table 3 on obtient : $P(X=5)=0{,}0319, P(X \leqslant 2)=0{,}6769$, $P(X<4)=0{,}8670, P(X=1{,}5)=0$, $P(3 \leqslant X \leqslant 4)=0{,}2799$ et $P(2<X \leqslant 8)$ $=0{,}9999-0{,}6769=0{,}3230$.

2) La condition $P(X<x) \geqslant 0{,}25$ équivalente à $P(X \leqslant x-1) \geqslant 0{,}25$ conduit à $x-1 \geqslant 1$ ou $x \geqslant 2$.

3) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ on a $P_p(X=x)=\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ et $P_p(X=n-x)$ $=\binom{n}{n-x} p^{n-x} (1-p)^x=\binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x}$ où on a posé $q=1-p$. Par conséquent $P_p(X=x)=P_{1-p}(X=n-x)$, soit en appliquant ce résultat : $P_{0,9}(X=16)$ $=P_{0,1}(X=4)=0{,}0898$.

Exercice n°8

Par lecture de la table 4 on obtient : $P(X=6)=0{,}1462, P(X<4)=0{,}2650$, $P(X \geqslant 5)=0{,}5595$ et $P(\pi/2<X<2\pi)=P(X \leqslant 6)-P(X \leqslant 1)=0{,}7218$. On lit $P(X<10)=0{,}9682$ donc $x \geqslant 10$.

Exercice n°9

La v.a. X suit une loi binômiale de paramètres 5 et 1/2. Un pays est gagnant si $X \geqslant 3$; la probabilité demandée est donc :

$$P\{D \cap (X \geqslant 3)\}=\sum_{k=3}^{5} P\{D \cap (X=k)\}=\sum_{k=3}^{5} P(X=k)\, P\{D \mid X=k\}$$

Si un pays a gagné k matchs, tous les choix parmi les cinq rencontres sont équiprobables, donc :

$$P\{D \mid X=k\}=\frac{\binom{4}{k-1}}{\binom{5}{k}}$$

Ainsi :

$$P\{D \cap (X \geqslant 3)\} = \sum_{k=3}^{5} \frac{\binom{5}{k}}{2^5} \frac{\binom{4}{k-1}}{\binom{5}{k}} = \frac{11}{2^5}$$

On en déduit :

$$P\{D|G\} = \frac{P\{D \cap (X \geqslant 3)\}}{P(X \geqslant 3)} = \frac{11/2^5}{1/2} = \frac{11}{16}$$

L'affirmation de ce commentateur paraît fondée puisque cette probabilité est supérieure à 1/2. Cependant, s'il affirmait que le gain du premier match en coupe Davis est généralement synonyme de victoire on obtiendrait la même probabilité. C'est le fait d'avoir emporté un match (quel qu'il soit) qui renforce évidemment la probabilité de gagner !

Exercice n°10

Par lecture des tables 1 et 2 on obtient : $P(U < -2) = 1 - \Phi(2) = 0{,}0228$,
$P(-1 < U < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - [1 - \Phi(1)] = 0{,}6915 - 0{,}1587 = 0{,}5328$,
$P(4U \geqslant -3) = 1 - \Phi(-0{,}75) = \Phi(0{,}75) = 0{,}7734$;
$P(|U| < u_0) = \Phi(u_0) - \Phi(-u_0) = 2\Phi(u_0) - 1 = 0{,}82$ d'où $\Phi(u_0) = 0{,}91$ et $u_0 = 1{,}3408$; $P(U < -v_0) = \Phi(-v_0) = 0{,}61$ et $v_0 = -0{,}2793$.

Exercice n°11

Nous allons d'abord déterminer les valeurs de $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$. La première valeur étant inférieure à 0,5 on considère son complément à 1, soit ici $1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$, valeur dans la table 1 de $\Phi(1)$. De même $1 - 0{,}0228 = 0{,}9772 = \Phi(2)$. En centrant et réduisant on a donc :

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{3-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1) = \Phi(-1)$$
$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{12-m}{\sigma}\right) = \Phi(2)$$

soit :

$$\frac{3-m}{\sigma} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{12-m}{\sigma} = 2$$

ce qui conduit à $m = 6$ et $\sigma = 3$, puis :

$$P(1 < X < 10) = P\left(-\frac{5}{3} < \frac{X-6}{3} < \frac{4}{3}\right)$$
$$= \Phi(1{,}33) - [1 - \Phi(1{,}67)] = 0{,}8607.$$

Exercice n°12

Dans la table 1 on constate que $1 - 0{,}0668 = 0{,}9332 = \Phi(1{,}5)$ donc $P(X < 2) = \Phi(-1{,}5)$; de même $1 - 0{,}1587 = 0{,}8413 = \Phi(1)$. Donc en centrant sur $E(X) = m$ et réduisant par $\sqrt{V(X)} = \sigma$:

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma}<\frac{2-m}{\sigma}\right)=\Phi(-1{,}5)$$
$$P\left(\frac{X-m}{\sigma}<\frac{12-m}{\sigma}\right)=\Phi(1)$$

soit $\frac{2-m}{\sigma}=-1{,}5$ et $\frac{12-m}{\sigma}=1$ d'où $m=8$ et $\sigma=4$. On sait que la v.a. $\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$ suit une loi χ_1^2 donc a/σ^2 est le fractile d'ordre 0,95 de cette loi χ_1^2, lu dans la table 5, soit $a/\sigma^2=3{,}841$ et $a=61{,}44$.

Exercice n°13

Si f est la densité de cette loi uniforme, cette probabilité se calcule par :

$$p=P\{X\in[x_1,x_2]\}=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

La densité a pour valeur 1 dans l'intervalle $[0,1]$ et 0 en dehors. La valeur de p est donc égale à la longueur de la partie commune des intervalles $[0,1]$ et $[x_1,x_2]$. Elle est indiquée dans le tableau suivant, en fonction de la position de x_1 et x_2 :

$x_2<0$	$x_1<0<x_2<1$	$x_1<0<1<x_2$	$0<x_1<x_2<1$	$0<x_1<1<x_2$	$1<x_1$
0	x_2	1	x_2-x_1	$1-x_1$	0

Exercice n°14

La v.a. Y a pour fonction de répartition :

$$G(y)=P(\ln X<y)=P(X<e^y)=F(e^y)$$

où F est la f.r. de X. La densité obtenue par dérivation est :

$$g(y)=e^y f(e^y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp-\frac{y^2}{2\theta}$$

qui est la densité de la loi normale centrée de variance θ.

Exercice n°15

1) On détermine la f.r. de la v.a. $U=\frac{X-\lambda}{\theta}$:

$$G(u)=P(U<u)=P(X<\theta u+\lambda)=F(\theta u+\lambda)$$

où F est la f.r. de X. Par dérivation on obtient la densité de U :

$$g(u)=\theta f(\theta u+\lambda)=e^{-u}$$

pour $u>0$. C'est donc la loi exponentielle avec $G(u)=1-e^{-u}$ pour $u>0$, et $E(U)=V(U)=1$. On en déduit $E(X)=\theta+\lambda$, $V(X)=\theta^2$ et pour $x>\lambda$:

$$F(x) = G\left(\frac{x-\lambda}{\theta}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\lambda}{\theta}\right)$$

2) La v.a. m_n a pour fonction de répartition :

$$H(y) = P(m_n < y) = 1 - P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > y)\right\} = 1 - [1 - F(y)]^n$$

Sa densité est donc :

$$h(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) = \frac{n}{\theta}\exp\left(-n\,\frac{y-\lambda}{\theta}\right)$$

pour $y > \lambda$.

Exercice n°16

Pour la loi de Pascal on a pour $t \in \mathbb{N}$:

$$P(T > t) = \sum_{k=t+1}^{\infty} P(T = k) = p\sum_{k=t+1}^{\infty} q^{k-1} = pq^t \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{pq^t}{1-q} = q^t$$

Par conséquent, pour $h \in \mathbb{N}$:

$$P(T > t + h | T > t) = \frac{P\{(T > t + h) \cap (T > t)\}}{P(T > t)} = \frac{P(T > t + h)}{P(T > t)}$$
$$= q^h = P(T > h)$$

ce qui établit que c'est une loi sans mémoire.

Pour la loi exponentielle de paramètre θ, on a pour $t > 0$:

$$P(T > t) = \int_t^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx = \left[-e^{-\theta x}\right]_t^{+\infty} = e^{-\theta t}$$

d'où pour $h > 0$:

$$P(T > t + h | T > t) = \frac{P(T > t + h)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\theta(t+h)}}{e^{-\theta t}} = e^{-\theta h} = P(T > h)$$

ce qui prouve la propriété de non-vieillissement.

Exercice n°17

La f.r. de la loi exponentielle vérifie $1 - F(x) = e^{-\theta x}$ pour $x > 0$, donc :

$$h(x) = \frac{\theta e^{-\theta x}}{e^{-\theta x}} = \theta$$

la loi exponentielle est à taux de panne constant, en plus d'être sans mémoire comme nous l'avons vu dans l'exercice précédent.

Pour la loi de Weibull, si $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x \alpha\theta t^{\alpha-1} e^{-\theta t^\alpha} dt = \left[-\exp\left(-\theta t^\alpha\right)\right]_0^x = 1 - \exp\left(-\theta x^\alpha\right)$$

et :

$$h(x) = \alpha\theta x^{\alpha-1}$$

on retrouve bien le résultat obtenu pour la loi exponentielle en faisant $\alpha = 1$.

Exercice n°18

On calcule l'espérance de X de loi log-normale de paramètres m et σ en faisant le changement de variable $y = \ln x$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp -\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - m)^2 dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \exp -\frac{1}{2\sigma^2}(y - m)^2 dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - 2(m+\sigma^2)y + m^2\right] dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[(m+\sigma^2)^2 - m^2\right]\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left[y - (m+\sigma^2)\right]^2 dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}(2m\sigma^2 + \sigma^4)\right\} \sigma\sqrt{2\pi} = \exp(m + \sigma^2/2)
\end{aligned}$$

On obtient de la même façon :

$$E(X^2) = \exp\left(2m + 2\sigma^2\right) \quad \text{et} \quad V(X) = (e^{\sigma^2} - 1)\exp\left(2m + \sigma^2\right)$$

Exercice n°19

Pour déterminer la f.r. de m_n, on considère l'événement :

$$\{m_n \geqslant y\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \geqslant y\}$$

De même, pour que M_n soit inférieur à z il faut et il suffit que tous les X_i soient inférieurs à z, ce qui s'écrit :

$$\{M_n < z\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i < z\}$$

On en déduit, du fait de l'indépendance des X_i et de l'identité de leur loi :

$$\begin{aligned}
G(y) &= P(m_n < y) = 1 - P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \geqslant y\}\right\} = 1 - [1 - F(y)]^n \\
H(z) &= P(M_n < z) = \prod_{i=1}^{n} P\,(X_i < z) = F^n(z)
\end{aligned}$$

Les densités correspondantes s'obtiennent par dérivation :

$$\begin{aligned}
g(y) &= nf(y)\,[1 - F(y)]^{n-1} \\
h(z) &= nf(z)F^{n-1}(z)
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier de la loi uniforme sur $[0,1]$, on obtient :

$$G(y) = 1 - (1-y)^n \quad \text{et} \quad g(y) = n(1-y)^{n-1}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$
$$H(z) = z^n \quad \text{et} \quad h(z) = nz^{n-1}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

On calcule alors l'espérance :

$$\begin{aligned} E(m_n) &= n \int_0^1 y\,(1-y)^{n-1}\,dy = n \int_0^1 (1-u)\,u^{n-1} du \\ &= n \int_0^1 u^{n-1} du - n \int_0^1 u^n du = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

obtenue en faisant le changement de variable $u = 1 - y$. De même :

$$E(M_n) = n \int_0^1 z^n dz = \frac{n}{n+1}$$

Remarquons ici que :

$$G(y) = P(m_n < y) = 1 - H(1-y) = P(M_n > 1-y) = P(1 - M_n < y)$$

ce qui montre que les v.a. m_n et $1 - M_n$ ont la même loi de probabilité et donc que $E(m_n) = 1 - E(M_n)$.

Exercice n°20

Le moment non centré d'ordre k de la loi de Pareto de paramètres α et x_0 est :

$$E(X^k) = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} x^{k-\alpha-1} dx = \alpha x_0^\alpha \left[\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha} \right]_{x_0}^{+\infty} = \frac{\alpha}{\alpha - k} x_0^k$$

à condition que $k < \alpha$. Seuls existent les moments d'ordre inférieur à α. Par exemple, pour $\alpha = 2$, la loi admet une espérance mais pas de variance. Pour $\alpha > 2$, on obtient :

$$V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} x_0^2$$