# Exercices

**Exercice n°1**

Soit l'ensemble fondamental $\Omega = \{a,b,c\}$ et la tribu associée $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, \Omega\}$, les événements $a$ et $b$ étant indiscernables. On définit l'application réelle $X$ sur $\Omega$ par $X(a) = 1$, $X(b) = 2$ et $X(c) = 3$.

**1)** S'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, peut-on définir la loi de probabilité de $X$ ?

**2)** Si la probabilité $P$ est définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par $P(\{c\}) = 1$ et si on définit l'application $Y$ sur $\Omega$ par $Y(\omega) = 3$ pour tout $\omega$ de $\Omega$, calculer $P(X = Y)$. Peut-on en conclure que $X$ et $Y$ ont même loi de probabilité ?

**Exercice n°2**

Soit l'ensemble fondamental $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$ et la partitition $\Pi = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$ sur laquelle on définit la probabilité $P$ par $P(\{a,b\}) = 2/5$, $P(\{c,d\}) = 1/5$ et $P(\{e\}) = 2/5$. Deux applications $f$ et $g$ sont définies sur $\Omega$ par $f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = g(e) = -2$, $f(c) = f(d) = g(a) = g(b) = 2$ et $f(e) = 0$. Peut-on définir la loi de probabilité de l'application $X = f/g$ ?

**Exercice n°3**

Vous participez à un jeu où vous avez la probabilité $p$ de remporter une partie. Si vous gagnez deux parties consécutives le jeu s'arrête et vous emportez un gain de $40 - 4N$ euros, $N$ étant le nombre total de parties jouées. Le nombre maximum de parties jouées est fixé à quatre et vous donnez à votre adversaire dans ce jeu la somme de 25 euros en cas de perte. Ce jeu vous paraît-il équitable ?

**Exercice n°4**

Une urne contient cinq boules, deux qui portent le numéro 1 et trois qui portent le numéro 2. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle coïncidence le fait de tirer une boule de numéro $i$ au $i$-ème tirage, avec $i = 1,2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ qui représente le nombre de coïncidences observées, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice n°5**

Une urne contient une boule qui porte le numéro 0, deux qui portent le numéro 1 et quatre qui portent le numéro 3. On extrait simultanément deux boules dans cette urne. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ qui représente la somme des numéros obtenus puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice n°6**

On considère $n$ urnes qui contiennent chacune $a$ boules noires et $b$ boules blanches. On tire au hasard une boule de l'urne $U_1$ que l'on place ensuite dans l'urne $U_2$. Puis, on tire au hasard une boule de l'urne $U_2$ que l'on place ensuite dans l'urne $U_3$. Et ainsi de suite, la boule tirée de l'urne $U_{n-1}$ étant placée dans l'urne $U_n$. On note $p_n$ la probabilité de tirer une boule noire de l'urne $U_n$. Calculer $p_1, p_2$ et en déduire par récurrence la valeur de $p_n$.

**Exercice n°7**

La fonction de répartition $F$ d'une v.a. $X$ est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - 1/(1 \times 2) & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 1 - 1/(2 \times 3) & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \\ \dots & \dots \\ 1 - 1/n(n+1) & \text{si} \quad n < x \leqslant n+1 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

**1)** Calculer les probabilités $p_n = P(X = n), n \in \mathbb{N}^*$.

**2)** Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice n°8**

Soit $X$ une v.a. de fonction de répartition $F$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} e^x/3 & \text{pour} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$$

La loi de $X$ est-elle continue ?

**Exercice n°9**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité nulle en dehors de $[-1,1]$ et dont l'expression pour $x \in [-1,1]$ est :

$$f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{1 - |x|}$$

Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**Exercice n°10**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f(x) = x$ pour $x \in [0,1]$, $f(x) = 2 - x$ pour $x \in [1,2]$ et nulle en dehors de ces intervalles.

**1)** Déterminer la fonction de répartition de $X$ et en déduire la médiane de cette loi.

**2)** Calculer $P\{|X - 1| < x\}$ pour $x$ réel quelconque.

**Exercice n°11**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f(x) = \dfrac{1}{2}$ pour $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$, et $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, et nulle en dehors de ces deux intervalles.

Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**Exercice n°12**

Soit $X$ une v.a. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a$ est un réel strictement positif.

**1)** Déterminer la fonction de répartition (f.r.) de $X$.

**2)** Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**3)** Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes, de même loi que $X$. Déterminer la f.r., puis la densité, de la v.a. $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

**Exercice n°13**

Soit $X$ une v.a. de densité $f$ continue et strictement positive, de fonction de répartition $F$. Exprimer à l'aide de $f$ et $F$ la densité et la fonction de répartition de chacune des v.a. suivantes.

**1)** $Y = aX + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

**2)** $Z = |X|$.

**3)** $T = \ln|X|$.

**4)** $U = F(X)$.

**5)** $V = [X]$, partie entière de $X$.

**Exercice n°14**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x^2$ pour $x \in [-1,1]$ et nulle en dehors de cet intervalle.

**1)** Déterminer la densité de la v.a. $Y = X^2$.

**2)** Calculer $E(Y)$.

# Corrigés

**Exercice n°1**

**1)** On a $X^{-1}(1) = \{a\} \notin \mathcal{A}$ donc l'application $X$ n'est pas une v.a. et on ne peut donc pas lui associer une loi de probabilité.

**2)** On a :

$$P(X = Y) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = Y(\omega)\}) = P(\{c\}) = 1$$

donc ces deux applications sont égales avec une probabilité égale à 1 (événement certain). L'application $Y$ est constante, avec $Y^{-1}(3) = \Omega$, donc c'est une variable aléatoire certaine : $P(Y = 3) = 1$. Cependant on ne peut pas en conclure que la loi de $X$ est la même, puisque $X$ n'est pas une variable aléatoire et que cette notion n'a donc pas de sens.

**Exercice n°2**

L'algèbre engendrée par la partition est :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, \{e\}, \{a,b,e\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \Omega\}$$

L'application $X$ ne peut prendre que les valeurs – 1, 0 et 1 avec :

$$\begin{aligned}
X^{-1}(-1) &= \{\omega \in \Omega / f(\omega) = -g(\omega)\} = \{a,b\} \cup (\{c,d\} \cap \{c,d,e\}) \\
&= \{a,b,c,d\} \in \mathcal{A} \\
X^{-1}(0) &= \{\omega \in \Omega / f(\omega) = 0\} = \{e\} \in \mathcal{A} \\
X^{-1}(1) &= \{\omega \in \Omega / f(\omega) = g(\omega)\} = (\{a,b\} \cap \{c,d,e\}) \cup (\{c,d\} \cap \{a,b\}) \\
&= \emptyset \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Donc $X$ est bien une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

$$P_X(X=0) = P(\{e\}) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P_X(X=-1) = P(\{a,b,c,d\}) = \frac{3}{5}$$

**Exercice n°3**

Si le nombre de parties jouées est deux ou trois, c'est que vous avez gagné les deux dernières parties et donc $P(N=2) = p^2$ et $P(N=3) = qp^2$ où $q = 1-p$. Vous avez gagné, événement noté $E^+$, à l'issue de quatre parties avec une probabilité qui est :

$$P(\{N=4\} \cap E^+) = pqp^2 + q^2p^2 = qp^2$$

La probabilité de perdre à l'issue des quatre parties jouées est :

$$P^- = 1 - P(N=2) - P(N=3) - P(\{N=4\} \cap E^+)$$

L'espérance de gain à ce jeu est alors :

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=2}^{4} (40-4k) P(\{N=k\} \cap E^+) - 25P^- \\
&= 32p^2 + 28qp^2 + 24qp^2 - 25(1 - p^2 - 2qp^2) \\
&= 57p^2 + 102qp^2 - 25 = -102p^3 + 159p^2 - 25
\end{aligned}$$

Le jeu est considéré comme équitable si cette espérance est nulle puisqu'il n'y a pas de mise initiale. L'espérance est bien sûr une fonction croissante de $p$, de valeur – 25 pour $p=0$ et 32 pour $p=1$. Pour $p = 1/2$ on obtient $E(G) = 2$, donc le jeu sera considéré comme équitable pour une valeur de $p$ un peu inférieure à 1/2.

**Exercice n°4**

Le nombre possible de coïncidences est 0,1 ou 2. Aucune coïncidence correspond au tirage d'une boule 2, puis d'une boule 1 :

$$P(X=0) = P(21) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Une coïncidence unique peut se produire au premier ou au second tirage :

$$P(X=1) = P(11) + P(22) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{10}$$

Pour deux coïncidences :

$$P(X=2) = P(12) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

On calcule ensuite aisément :

$$E\left(X\right)=\frac{4}{10}+\frac{6}{10}=1\quad E\left(X^{2}\right)=\frac{4}{10}+\frac{12}{10}=\frac{16}{10}\quad V\left(X\right)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

**Exercice n°5**

On note $(i,j)$ l'événement « avoir tiré les boules $i$ et $j$ » ; pour $i=j$ il y a une seule façon d'obtenir ce couple et deux pour $i\neq j$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
P\left(X=0\right) &= P\left(0{,}0\right)=0,\\
P\left(X=1\right) &= P\left(0{,}1\right)=2\times\frac{1}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{45},\\
P\left(X=2\right) &= P\left(0{,}2\right)+P\left(1{,}1\right)=\frac{4}{45},\\
P\left(X=3\right) &= P\left(0{,}3\right)+P\left(2{,}1\right)=\frac{10}{45},\\
P\left(X=4\right) &= P\left(2{,}2\right)+P\left(3{,}1\right)=\frac{11}{45},\\
P\left(X=5\right) &= P\left(3{,}2\right)=\frac{12}{45},\quad P\left(X=6\right)=\frac{6}{45}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$E\left(X\right)=4\qquad E\left(X^{2}\right)=\frac{160}{9}\qquad V\left(X\right)=\frac{16}{9}$$

**Exercice n°6**

On obtient :

$$p_1=\frac{a}{a+b}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= P(N_2N_1)+P(N_2B_1)=P(N_1)P(N_2|N_1)+P(B_1)P(N_2|B_1)\\
&= p_1\,\frac{a+1}{a+b+1}+(1-p_1)\,\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

De la même manière :

$$p_n=p_{n-1}\,\frac{a+1}{a+b+1}+(1-p_{n-1})\,\frac{a}{a+b+1}$$

Par récurrence, si on suppose que $p_{n-1}=p_1$ on en déduit alors $p_n=p_1$.

**Exercice n°7**

**1)** On obtient :

$$p_1=P(X=1)=P(X<2)=F(2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$p_2=P(X=2)=P(X<3)-P(X<2)=F(3)-F(2)=\frac{1}{3}$$

et plus généralement pour $n \geqslant 2$ :

$$p_n = P(X < n+1) - P(X < n) = \left[1 - \frac{1}{n(n+1)}\right] - \left[1 - \frac{1}{n(n-1)}\right]$$
$$= \frac{2}{n(n^2-1)}$$

**2)** On obtient comme espérance :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots$$
$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

Par définition :

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{(n-1)(n+1)}$$

Or le terme général de cette série est équivalent à $2/n$, terme de la série harmonique divergente, donc cette variable aléatoire n'admet pas de moment d'ordre deux.

**Exercice n°8**

Par définition $F(0) = 1/3$ et, comme toute fonction de répartition, on vérifie que $F$ est continue à gauche en ce point :

$$F(0-h) = \frac{1}{3}e^{-h} \to \frac{1}{3} = F(0) \quad \text{quand} \quad h \to 0^+$$

Par contre $F(0+0) = 1$, donc $F$ est discontinue à droite. La loi est mixte, avec un seul point de probabilité non nulle :

$$P(X = 0) = F(0+0) - F(0) = 2/3$$

**Exercice n°9**

On a $F(x) = 0$ pour $x \leqslant -1$ et $F(x) = 1$ pour $x \geqslant 1$. Pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$ :

$$F(x) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{x} (1+t)^{1/2} dt = \frac{1}{2}(1+x)^{3/2}$$

Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ :

$$F(x) = F(0) + \frac{3}{4} \int_{0}^{x} (1-t)^{1/2} dt = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^{3/2}$$

**Exercice n°10**

**1)** On a $F(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1$ pour $x \geqslant 2$. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ :

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

Pour $1 \leqslant x \leqslant 2$ :

$$F(x) = F(1) + \int_1^x (2-t)dt = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

La médiane est le centre de symétrie de la distribution soit $Md = 1$.

**2)** On a $h(x) = P(|X-1| < x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et pour $x > 0$ :

$$h(x) = P(1-x < X < 1+x) = F(1+x) - F(1-x)$$

Ainsi $h(x) = 1$ si $x \geqslant 1$ et pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ :

$$h(x) = 2x - x^2$$

**Exercice n°11**

On a $F(x) = 0$ pour $x \leqslant -3/2$ ; pour $-3/2 \leqslant x \leqslant -1/2$ :

$$F(x) = \int_{-3/2}^x \frac{1}{2}\, du = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

Pour $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$ :

$$F(x) = F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Pour $1/2 \leqslant x \leqslant 3/2$ :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_{1/2}^x \frac{1}{2}\, du = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

Et enfin, $F(x) = 1$ pour $x \geqslant 3/2$.

**Exercice n°12**

**1)** La f.r. $F$ de $X$ est nulle pour $x \leqslant 0$, a pour valeur 1 pour $x \geqslant a$ et a pour expression, quand $0 \leqslant x \leqslant a$ :

$$F(x) = \frac{2}{a}\int_0^x \left(1 - \frac{t}{a}\right) dt = \frac{2}{a}\left[t - \frac{t^2}{2a}\right]_0^x = \frac{2x}{a}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)$$

**2)** On obtient :

$$E(X) = \frac{2}{a}\int_0^a \left(x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a}\right) = \frac{a}{3}$$

On calcule de même :

$$E\left(X^2\right) = \frac{2}{a}\int_0^a \left(x^2 - \frac{x^3}{a}\right) dx = \frac{2}{a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right) = \frac{a^2}{6}$$

On en déduit la variance :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{a^2}{18}$$

**3)** On calcule la f.r. de $M_n$ :

$$G(x) = P(M_n < x) = P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < x)\right\} = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x) = F^n(x)$$

On obtient la densité par dérivation :

$$g(x) = G'(x) = nF^{n-1}(x)\, f(x)$$

Donc pour $0 \leqslant x \leqslant a$ :

$$g(x) = n\left(\frac{2}{a}\right)^n x^{n-1}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

**Exercice n°13**

La méthode la plus simple consiste à déterminer la fonction de répartition (f.r.) de la nouvelle variable, puis à la dériver pour obtenir la densité.

**1)** Par définition :

$$G(y) = P(Y < y) = P(aX + b < y) = P(aX < y - b)$$

Pour pouvoir exprimer cette probabilité à l'aide de la f.r. de $X$, il faut distinguer deux cas suivant le signe de $a$.

Si $a > 0$ :

$$G(y) = P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$
$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Pour $a < 0$ :

$$G(y) = P\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$
$$g(y) = G'(y) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Ainsi, pour $a \in \mathbb{R}^*$, la densité de $Y$ peut s'écrire :

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

**2)** La f.r. de $Z$ est définie par $H(z) = P(Z < z) = P(|X| < z)$, donc $H(z) = 0$ pour $z \leqslant 0$. Pour $z > 0$ :

$$H(z) = P(-z < X < z) = F(z) - F(-z)$$
$$h(z) = H'(z) = f(z) + f(-z)$$

Remarquons que le changement de variable s'est effectué à l'aide de la fonction : $x \mapsto |x|$ qui n'est pas injective et cependant nous avons pu déterminer la loi de $|X|$. La densité de $Z$ présente une discontinuité pour $z = 0$ puisque $h(z) \to 2f(0) > 0$ quand $z \to 0^+$, alors que bien sûr $H$ est continue, avec $H(z) \to F(0^+) - F(0^-) = 0 = H(0)$.

**3)** On obtient :

$$K(t) = P(T < t) = P(\ln|X| < t) = P(|X| < e^t) = H(e^t) = F(e^t) - F(-e^t)$$
$$k(t) = K'(t) = e^t \left[ f(e^t) + f(-e^t) \right]$$

**4)** La fonction $F$ étant dérivable est bien sûr continue ; comme de plus elle est strictement monotone, elle admet une fonction réciproque $F^{-1}$ définie sur $[0,1]$ et aussi strictement monotone, donc pour $0 \leqslant u \leqslant 1$ :

$$P(U < u) = P\left\{F(X) < u\right\} = P\{X < F^{-1}(u)\} = F\left[F^{-1}(u)\right] = u$$

La variable $U = F(X)$ suit donc une loi uniforme sur $[0,1]$.

**5)** La variable $V$ est bien sûr à valeurs entières, avec pour $v \in \mathbb{N}$ :

$$P(V = v) = P([X] = v) = P(v \leqslant X < v + 1) = F(v + 1) - F(v).$$

Pour $v$ entier négatif, on a $P([X] = v) = P(v < X \leqslant v + 1)$, ce qui ne change rien pour la valeur de cette probabilité puisque la loi de $X$ est continue. Ainsi, pour tout $v \in \mathbb{Z}$, $P(V = v) = F(v + 1) - F(v)$.

**Exercice n°14**

**1)** La fonction de répartition $G$ de $Y$ est nulle pour $y \leqslant 0$ et pour $y > 0$ :

$$G(y) = P\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right)$$

La densité s'obtient par dérivation, soit pour $y > 0$ :

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right] = \frac{1+3y}{4\sqrt{y}}$$

**2)** On obtient :

$$E(Y) = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\sqrt{y} + 3y\sqrt{y}\right) dy = \frac{7}{15}$$