Exercices

Exercice n°1

Une machine fabrique des objets qui sont classés en défectueux, codés 0, et non défectueux, codés 1. On prélève toutes les heures les trois derniers objets produits par cette machine. On demande de préciser l'ensemble fondamental associé à cette expérience et d'écrire les événements suivants : $A =$ « le premier objet est défectueux » ; $B =$ « le dernier objet est non défectueux » ; $C =$ « les premier et dernier objets sont défectueux » ; $D =$ « aucun objet n'est défectueux » ; $E =$ « deux objets sont défectueux » ; $F =$ « au plus un objet est défectueux ».

Exercice n°2

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ et considérons les ensembles $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$. Montrer que ce sont des tribus sur Ω. Les ensembles $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ sont-ils des tribus sur Ω ?

Exercice n°3

On effectue deux tirages successifs dans une urne qui contient une boule blanche et deux boules noires identiques. La première boule tirée n'est pas remise dans l'urne, mais est remplacée par une boule de l'autre couleur (blanche si on a tiré une noire et vice-versa).

1) Construire l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire, en tenant compte de l'ordre des tirages.

2) Montrer que l'ensemble des parties de Ω défini par :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{(NN)\}, \{(BN), (NB)\}, \Omega\}$$

est une tribu. La notation (BN) représente par exemple l'événement élémentaire « tirer une boule blanche, puis une noire » .

3) Déterminer la probabilité de chacun des événements élémentaires constituant Ω.

Exercice n°5

On lance un dé quatre fois de suite et le joueur A marque 1 point si le chiffre obtenu est 1 ou 2 ; sinon c'est le joueur B qui marque un point. Le joueur qui gagne la partie est celui qui a le plus de points à l'issue de ces quatre lancers. Calculer la probabilité de gain de chaque joueur, en précisant l'ensemble fondamental Ω retenu pour modéliser ce problème.

Exercice n°6

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à obtenir une boule blanche, ajoutant une boule noire après chaque tirage d'une boule noire. Calculer la probabilité d'effectuer n tirages, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n°7

Un laboratoire a mis au point un test rapide de dépistage du VIH (responsable du SIDA) mais qui n'est pas totalement fiable. Il est positif avec une probabilité de 0,99 si le patient est effectivement atteint et avec une probabilité de 0,01 si le patient n'est pas atteint. On tire au hasard un individu dans une population où 4% sont porteurs du VIH. Calculer la probabilité qu'il ne soit pas atteint sachant que le test a été positif.

Exercice n°8

Le professeur Tournesol cherche ses gants qu'il pense avoir rangés avec une probabilité p dans sa commode. Si c'est le cas, il les a mis au hasard dans l'un des 4 tiroirs. Sachant qu'il ne les a pas trouvés dans les 3 premiers, calculer la probabilité qu'ils soient dans le quatrième.

Exercice n°9

On effectue deux tirages successifs avec remise dans une première urne qui contient autant de boules noires que de boules blanches. On place ensuite dans une seconde urne vide deux boules de la même couleur que celles qui ont été tirées.

1) Indiquer les différentes compositions possibles de cette urne et la probabilité associée.

2) On effectue ensuite des tirages successifs avec remise dans cette seconde urne. On note p_n la probabilité que cette urne contienne deux boules blanches, sachant que l'on n'a obtenu que des boules blanches au cours des n premiers tirages. Calculer p_1, p_2, puis p_n pour $n \geqslant 2$ et ensuite la limite de p_n quand n devient infini. Cette limite était-elle prévisible ?

Exercice n°10

On jette ensemble cinq dés identiques et à chaque coup on enlève les as (chiffre 1) qui sont sortis avant de relancer les autres dés. Quelle est la probabilité d'obtenir un poker d'as, c'est-à-dire cinq as, en trois coups au plus ?

Exercice n°11

Un document contient quatre erreurs et à chaque relecture la probabilité de détection d'une erreur ayant subsisté est de 1/3. Quelle est la probabilité p_n qu'il ne subsiste aucune faute après n relectures, $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice n°12

Un étudiant doit répondre à un questionnaire à choix multiple où cinq réponses sont proposées à une question, une seule étant correcte. Quand l'événement $A =$ « l'étudiant a bien travaillé dans l'année » est réalisé, la réponse est fournie avec exactitude. Dans le cas contraire, l'étudiant répond au hasard. Si l'événement $B =$« il a fourni la réponse correcte » est réalisé, calculer la probabilité $P(A|B)$ en fonction de $p = P(A)$.

Exercice n°14

Deux joueurs de tennis s'entraînent au service, le joueur A servant une fois sur trois et le joueur B deux fois sur trois. Leurs pourcentages de réussite au service sont respectivement de 90 % et de 60 %.

1) Si vous assistez à un service réussi au cours de cet entraînement, quelle est la probabilité p_B qu'il s'agisse du joueur B ?

2) Calculer cette probabilité p_B en fonction du pourcentage p de réussite du joueur B. Pour quelle valeur de p_B cette probabilité est-elle égale à 1/2 ?

3) Que vaut p_B dans le cas où les joueurs A et B ont le même pourcentage de réussite au service ? Le résultat était-il prévisible ?

Exercice n°15

Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ avec équiprobabilité des événements élémentaires sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Les événements $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}$ et $C = \{a, d\}$ sont-ils indépendants ?

Exercice n°16

Les événements A et B étant indépendants, montrer que les événements A et $\overline{B}$ ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. Si l'événement C est indépendant de A et de B, est-il aussi indépendant de $A \cup B$? L'événement $\overline{C}$ est-il indépendant de $A \cap B$?

Exercice n°17

On effectue trois lancers successifs d'une pièce de monnaie. Les événements $A = \{FFF, PFF, FPP, PPP\}$, $B = \{FFP, FPP, PPF, PPP\}$ et $C = \{FFP, FPF, PFP, PPP\}$ sont-ils indépendants ?

corrigés

Exercice n°1

On choisit comme ensemble fondamental $\Omega = \{0, 1\}^3$, c'est-à-dire l'ensemble des triplets ordonnés, bien que l'ordre soit sans importance, car cela permet d'obtenir des événements élémentaires équiprobables et facilite donc le calcul ultérieur des probabilités. Les événements indiqués s'écrivent alors : $A = \{0\} \times \{0, 1\}^2$, $B = \{0, 1\}^2 \times \{1\}$, $C = \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0\} = \{(000), (010)\}$, $D = \{(111)\}$, $E = \{(001), (010), (100)\}$, $F = \{(111), (110), (101), (011)\}$.

Exercice n°2

Si on note $A_1 = \{a\}$ et $A_2 = \{b\}$, les deux ensembles considérés s'écrivent $\mathcal{A}_i = \left\{\emptyset,\ A_i,\ \overline{A}_i,\ \Omega\right\}$, avec $i = 1, 2$, et sont donc des tribus sur Ω. L'ensemble $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\emptyset,\ \Omega\}$ est la tribu grossière et $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \Omega\}$ n'est pas une tribu car $\{a,\ c\} \cap \{b,\ c\} = \{c\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Exercice n°3

1) L'ensemble fondamental est constitué de tous les événements élémentaires possibles, écrits sous la forme de couples dont la première lettre désigne la couleur de la première boule tirée et la seconde la couleur de la boule extraite ensuite. Si la première boule tirée est blanche, l'urne ne contient plus que des boules noires et le seul événement possible est donc représenté par le couple ordonné (BN). Si la première boule tirée est noire, la composition de l'urne est $\{B, B, N\}$ et il y a alors deux événements possibles, (NB) et (NN). On a donc :

$$\Omega = \{(BN), (NB), (NN)\}$$

2) L'ensemble $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide de parties de Ω qui peut s'écrire $\mathcal{A} = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ en ayant posé $A = (NN)$. Il est facile de voir qu'il est fermé pour l'union et le passage au complémentaire, donc est une algèbre. Comme $\mathcal{A}$ comporte un nombre fini d'éléments cette algèbre est aussi une σ-algèbre, ou tribu.

3) D'après la question 1 :

$$P(BN) = \frac{1}{3} \times 1 \quad P(NB) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad P(NN) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

Exercice n°5

Si on note A l'événement « le joueur A a marqué un point », l'ensemble fondamental est :

$$\Omega = \left\{A, \overline{A}\right\}^4$$

Il n'y a pas équiprobabilité ici car $P(A) = \frac{2}{6}$ et $P\left(\overline{A}\right) = \frac{4}{6}$. Pour que le joueur A gagne, il faut qu'il marque 3 ou 4 points et il en est de même pour le joueur B. Les probabilités de gain de chaque joueur sont donc :

$$\begin{aligned} P(AG) &= 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{9} \\ P(BG) &= 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

La somme de ces probabilités n'est pas égale à 1 car les joueurs peuvent marquer 2 points chacun et être ex-aequo :

$$P\,(EX) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

Exercice n°6

Effectuer n tirages correspond à l'événement, noté B_n, « obtenir une boule blanche au n-ème tirage et des boules noires à tous les tirages précédents ». Nous obtenons ainsi :

$$P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\dots$$

$$P(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Exercice n°7

En notant T^+ « le test est positif » et A « le patient est atteint », les hypothèses se traduisent par $P(T^+|A) = 0{,}99$ et $P(T^+|\overline{A}) = 0{,}01$. La probabilité demandée est :

$$P(\overline{A}|T^+) = \frac{P(\overline{A} \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{0{,}96 \times 0{,}01}{0{,}04 \times 0{,}99 + 0{,}96 \times 0{,}01} = \frac{8}{41}$$

Exercice n°8

On note C l'événement « les gants sont rangés dans la commode », 4 « ils sont dans le tiroir 4 » et $\overline{3}$ « ils ne sont pas dans les 3 premiers tiroirs ». La probabilité cherchée s'écrit $P(4|\overline{3})$ et se calcule par la formule de Bayes. Comme $P(\overline{3}|C) = 1/4$ et $P(\overline{3}|\overline{C}) = 1$ on obtient :

$$P(4|\overline{3}) = \frac{P(4 \cap \overline{3})}{P(\overline{3})} = \frac{P(4)}{P(\overline{3})} = \frac{p/4}{p/4 + 1 - p} = \frac{p}{4 - 3p}$$

Exercice n°9

1) L'ensemble fondamental associé à ces deux tirages indépendants est $\Omega = \{B,N\}^2$. Il y a 3 compositions possibles de cette urne avec $P(BB) = P(NN) = 1/4$ et $P(BN) = 2/4$.

2) On utilise la formule de Bayes pour calculer $p_1 = P(BB|B_1)$, avec $P(B_1|BB) = 1$, $P(B_1|NN) = 0$ et $P(B_1|NB) = 1/2$; ainsi $p_1 = 1/2$. On obtient de la même façon $p_2 = 2/3$ puis pour $n \geqslant 2$:

$$p_n = \frac{P(BB)}{P(BB) + P(B_1 \ldots B_n|BN)/2} = \frac{1}{1 + 1/2^{n-1}}$$

Quand n devient infini $p_n \to 1$, résultat prévisible car si on ne tire que des boules blanches, c'est sans doute qu'il n'y a pas de boule d'une autre couleur dans l'urne.

Exercice n°10

Soit N_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, le nombre de jets nécessaires pour obtenir un as avec le dé i. Le poker d'as est obtenu en moins de trois coups si $\max\{N_i/1 \leqslant i \leqslant 5\} \leqslant 3$, événement qui est équivalent à :

$$\bigcap_{i=1}^{5}\{N_i \leqslant 3\}$$

Tous ces événements sont indépendants et ont la même probabilité :

$$P(N_i \leqslant 3) = \sum_{k=1}^{3} P(N_i = k) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

La probabilité demandée est donc :

$$\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3\right]^5 = 0{,}013$$

Exercice n°11

Pour qu'une faute ne soit pas corrigée il faut qu'elle ait subsisté à chaque relecture, ce qui se produit avec une probabilité $(2/3)^n$; pour chaque faute la probabilité d'être corrigée est donc $1 - (2/3)^n$ et la probabilité de correction des quatre erreurs est par conséquent :

$$p_n = \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]^4$$

Bien sûr p_n tend vers un quand n devient infini, avec $p_4 = 0{,}41$; $p_6 = 0{,}69$; $p_8 = 0{,}85$ et $p_{10} = 0{,}93$.

Exercice n°12

Il suffit d'appliquer la formule de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = \frac{p}{p + (1-p)/5} = \frac{5p}{4p+1}$$

On peut noter que $P(A|B) \geqslant P(A) = p$, avec bien sûr $P(A|B) = 0$ si $p = 0$ et $P(A|B) = 1$ si $p = 1$. Dans tous les autres cas $P(A|B) > P(A)$.

Exercice n°13

L'ensemble fondamental est constitué des couples ordonnés dont les éléments symbolisent la couleur des premier et second feux :

$$\Omega = \{V_1V_2, V_1R_2, R_1V_2, R_1R_2\}$$

Nous noterons :

$$p_1 = P(V_1V_2) \quad p_2 = P(V_1R_2) \quad p_3 = P(R_1V_2) \quad p_4 = P(R_1R_2)$$

Les hypothèses se traduisent par :

$$P(V_1) = p_1 + p_2 = P(V_2) = p_1 + p_3 = 2/3$$

$$P(V_2|V_1) = 3/4$$

On en déduit :

$$p_1 = P(V_1V_2) = P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{1}{2}$$

puis $p_2 = p_3 = 1/6$ et donc $p_4 = 1/6$.

On peut alors calculer :

$$P(R_2|R_1) = \frac{P(R_1R_2)}{P(R_1)} = \frac{1}{2}$$

Exercice n°14

1) Si on note R l'événement « réussir son service », on obtient :

$$p_B = P(B|R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{2 \times 0{,}6}{0{,}9 + 2 \times 0{,}6} = \frac{4}{7}$$

2) On obtient cette fois :

$$p_B = \frac{2p}{0{,}9 + 2p}$$

avec $p_B = 1/2$ pour $p = 0{,}45$.

3) Si les joueurs ont le même taux de réussite :

$$p_B = \frac{2p}{p + 2p} = \frac{2}{3} = P(B)$$

Exercice n°15

En raison de l'équiprobabilité :

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ et $P(A \cap B) = P(\{a\}) = 1/4 = P(A)P(B)$,

$P(A \cap C) = P(\{a\}) = 1/4 = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = P(\{a\}) = 1/4 = P(B)P(C)$

donc les événements A, B et C sont indépendants deux à deux. Par contre :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{a\}) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

et ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice n°16

On obtient :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

donc les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants. De même :

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A)P(\overline{B}) \\ &= P(\overline{B})\,[1 - P(A)] = P(\overline{A})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} P\{(A \cup B) \cap C\} &= P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= [P(A) + P(B)]\, P(C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A \cup B)P(C) + P(A \cap B)P(C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

donc pour qu'il y ait indépendance de C avec $A \cup B$ il faudrait que $P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B \cap C)$, c'est-à-dire que A, B et C soient mutuellement indépendants, ce qui n'est pas le cas en général. Dans l'exercice précédent on a d'ailleurs $P(A \cup B) = P(\{a, b, c\}) = 3/4$ avec $P\{(A \cup B) \cap C\} = P(\{a\}) = 1/4 \neq P(A \cup B)$ $P(C) = 3/8$ ce qui montre que $A \cup B$ n'est pas indépendant de C. De même, d'après ce qui précède, pour que $\overline{C}$ soit indépendant de $A \cap B$, il faut que C soit aussi indépendant de $A \cap B$, ce qui n'est pas le cas en général comme le montre également l'exercice précédent puisque $P(A \cap B) = 1/4$ et $P(C) = 1/2$ avec $P(A \cap B \cap C) = 1/4$ $\neq P(A \cap B)P(C)$.

Exercice n°17

On obtient $P(A \cap B) = P(\{FPP, PPP\}) = 1/4 = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(\{FFP, PPP\}) = 1/4 = P(B)P(C)$ et $P(A \cap C) = P(\{PPP\}) = 1/8 \neq P(A)P(C)$ donc ces événements ne sont pas indépendants deux à deux et *a fortiori* ne sont pas mutuellement indépendants, bien qu'ici $P(A \cap B \cap C) = P(\{PPP\}) = 1/8 = P(A)P(B)P(C)$.

Exercice n°18

Notons par A_i l'événement « le danseur i se retrouve avec sa femme ». L'événement « il y a au moins une rencontre » est donc $\cup_{i=1}^{n} A_i$. Sa probabilité s'obtient à partir de la formule de Poincaré (*cf.* I, C) pour n événements :

$$p_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Si chaque danseur est représenté par une case numérotée de 1 à n, l'événement $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ correspond à une permutation où les femmes de ces danseurs sont placées dans les cases $i_1, \ldots, i_k$. Comme toutes les permutations sont équiprobables :

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Par ailleurs, le nombre de sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_k\}$ extraits de $\{1, \ldots, n\}$ est égal à $\binom{n}{k}$, donc :

$$\sum_{\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

et :

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

La probabilité qu'il y n'ait aucune une rencontre est donc :

$$q_n = 1 - p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \to \frac{1}{e} = 0{,}36788\ .$$

On obtient bien des valeurs plus petites que 1/2, sauf $q_2 = 0{,}5$. Les autres valeurs sont :

$$q_3 = \frac{1}{3} = 0{,}3333\,; \quad q_4 = \frac{3}{8} = 0{,}375\,;$$

$$q_5 = \frac{11}{30} = 0{,}3667\,; \quad q_6 = \frac{265}{720} = 0{,}3681$$

$$\ldots$$

Exercice n°19

Il y a équiprobabilité de tous les quarts de finale qui sont au nombre de :

$$\frac{8!}{(2!)^4\, 4!} = 105$$

car il s'agit du nombre de partitions de 8 équipes distincts en 4 matchs de même effectif 2 (*cf.* Compléments F).

Pour chaque équipe anglaise, le nombre d'associations possibles avec une équipe non anglaise est successivement 4, puis 3, puis 2, puis 1. Il y a donc $4! = 24$ quarts de finale qui ne comportent pas de match entre équipes anglaises. On obtient donc :

$$p = 1 - p_0 = 1 - \frac{24}{105} = \frac{81}{105}$$

On peut calculer la probabilité des autres événements élémentaires. Deux quarts de finale entre équipes anglaises correspondent à 2 partitions de 2 sous-groupes de 4 (équipes anglaises et non anglaises) en matchs de même effectif 2, soit un nombre de possibilités :

$$\frac{4!}{(2!)^2\, 2!} \times \frac{4!}{(2!)^2\, 2!} = 9$$

La probabilité de deux quarts de finale entre équipes anglaises est donc :

$$p_2 = \frac{9}{105}$$

Enfin, il y a $\binom{4}{2}$ choix de matchs entre 2 équipes anglaises et $\binom{4}{2}$ choix de matchs entre 2 équipes non anglaises. Il ne reste ensuite que 2 façons de choisir les 2 autres quarts de finale en associant une des 2 équipes anglaises restantes à une des 2 équipes non anglaises restantes. Cela correspond au nombre de quarts de finale :

$$2\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 72$$

La probabilité d'un seul match entre équipes anglaises est donc :

$$p_1 = \frac{72}{105}$$

On retouve bien $p = p_1 + p_2$.