CHAPITRE 3

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

3.1 Variable aléatoire continue

Définition 3.1.1 (*Variable aléatoire continue*)

Une v.a. continue est une fonction X, allant d'un univers Ω dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.2 (*Densité de probabilité*)

Soit X une v.a. continue. On appelle densité de probabilité de X, une application positive et intégrable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1.$$

3.2 Loi de probabilité d'une v.a. continue

La loi de probabilité d'une v.a. continue est déterminée par la fonction de répartition F, définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx.$$

La probabilité d'un intervalle s'obtient en intégrant la densité de X, ou bien en utilisant la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \in [x_1, x_2]\right) &= \mathbb{P}\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ dt \\ &= F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right).\end{aligned}$$

Propriétés 3.2.1 (*Propriétés de la fonction de répartition*)

1. *Elle est croissante au sens large et prend ses valeurs entre 0 et 1 :*

$$0 \leq F(x) \leq 1 \ \text{ avec } \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

2. *Elle est continue à gauche :*

$$\lim_{h \to 0^+} F(x-h) = F(x).$$

Remarque 3.2.1. Si X est une v.a. continue, alors, pour tout réel x, $\mathbb{P}(X = x) = 0$, et on dit que la loi est diffuse.

3.3 Moments d'une v.a. continue

3.3.1 Espérance mathématique

Elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

lorsque cette intégrale existe. Pour tout réel a :

$$E(X+a) = E(X) + a \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent une espérance, alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

3.3.2 Variance

Elle est définie par :

$$V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2,$$

lorsque la variance existe. Pour tout réel a :

$$V(X+a) = V(X) \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

3.3.3 Moments non centrés et centrés d'une v.a. continue

Définition 3.3.1 (*Moments non centrés*)

Le moment non centre d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. continue X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx.$$

Définition 3.3.2 (*Moments centrés*)

Le moment centre d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. continue X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E([X - E(X)]^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r f(x)\, dx.$$

3.4 Lois usuelles continues

3.4.1 Loi uniforme

Une v.a. X suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } \ a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sinon } \ . \end{cases}$$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$. Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } \ a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } \ x > b. \end{cases}$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \ \text{ et } \ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.4.2 Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est celle d'une variable positive de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } \ x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon } \ . \end{cases}$$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } \ x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon } \ . \end{cases}$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \ \text{ et } \ V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.4.3 Loi normale ou de Laplace-Gauss

C'est la loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

Remarque 3.4.1. Une v.a. suivant la loi normale est dite variable gaussienne.

Proposition 3.4.1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma')$. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- *La v.a.* $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, |a|\sigma)$.
- *La v.a.* $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$.
- *La v.a.* $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m - m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$.

Exemple 3.4.1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, \sqrt{3})$ *et* $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1)$, *alors :*
- *La v.a.* $-2X + 5 \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 2\sqrt{3})$.
- *La v.a.* $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$.
- *La v.a.* $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 2)$.

Définition 3.4.1 (*Loi normale centrée réduite*)

La loi normale centrée réduite est une loi normale de paramètre $m = 0$ *et* $\sigma = 1$. *On la note par* $\mathcal{N}(0, 1)$ *et sa densité de probabilité est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Proposition 3.4.2

Si une v.a. X *suit la loi normale* $\mathcal{N}(m, \sigma)$, *alors la v.a.* $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ *suit la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0, 1)$. *En particulier, on a :*

$$E(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(Z) = 1.$$

Ce résultat est très importante, puisqu'il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale.

Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite

Théoriquement, si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, sa fonction de répartition est donnée par la formule :

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

Or, le calcul de cette intégrale est trop long pour être une méthode efficace d' utilisation de la loi normale.
Pour éviter les calculs, on dispose de la table 3.1 de la loi normale centrée réduite pour calculer les probabilités.

Utilisation de la table de la loi normale centrée réduite

Cette table indique les valeurs de $\mathbb{P}(Z < t)$ pour $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $0 \le t \le 4$. La première colonne indique le premier chiffre après la virgule de t et la première ligne indique le second chiffre après la virgule.
Par exemple pour calculer $\mathbb{P}(Z < 1,64)$, on cherche dans la première colonne $1,6$ puis dans la première ligne $0,04$, à l'intersection de cette ligne et de cette colonne, on trouve :

$$\mathbb{P}(Z < 1,64) = 0,9495.$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

TABLE 3.1 – Table de la loi normale centrée réduite

Proposition 3.4.3

Soit Z une v.a. suivant une loi normale centrée réduite et F_Z sa fonction de répartition, on a :

1. $\mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - F_Z(t)$.
2. *Si t est positif :* $F_Z(-t) = 1 - F_Z(t)$.
3. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$:*

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = F_Z(b) - F_Z(a).$$

4. *Pour tout $t \geq 0$,* $\mathbb{P}(-t \leq Z \leq t) = 2F_Z(t) - 1$.

3.4.4 Loi gamma

Une v.a. X de loi gamma de paramètres $n > 0$ et $\lambda > 0$ est positive, de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon }. \end{cases}$$

La fonction gamma est définie pour tout $n > 0$ par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = (n-1)!.$$

On écrit $X \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$. Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Proposition 3.4.4

Si $X \hookrightarrow \Gamma(n_1, \lambda)$ et $Y \hookrightarrow \Gamma(n_2, \lambda)$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \Gamma(n_1 + n_2, \lambda).$$

Remarque 3.4.2. La loi gamma $\Gamma(1, \lambda)$ n'est autre que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

3.4.5 Loi du khi-deux

La loi du khi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$, est la loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ où n est un entier positif. Ses moments se déduisent de ceux de la loi gamma :

$$E(X) = \frac{n/2}{1/2} = n \text{ et } V(X) = \frac{n/2}{1/2} = 2n.$$

Proposition 3.4.5

Si $X \hookrightarrow \chi^2(n_1)$ et $Y \hookrightarrow \chi^2(n_2)$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \chi^2(n_1 + n_2).$$

Propriétés 3.4.1

Notons une propriété importante qui peut servir de définition de cette loi :
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite, alors la v.a. $X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté.

3.5 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi binomiale n'est pas toujours simples d'utilisation. Par exemple, le calcul des combinaisons dans la loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0,05$ est très long. En effet, si on cherche à calculer $\mathbb{P}(X < 58)$, on va devoir calculer $\mathbb{P}(X = 0)+\mathbb{P}(X = 1)+\mathbb{P}(X = 2)+\ldots+\mathbb{P}(X = 57)$, ce qui représente 58 calculs en tout. Calculer $\mathbb{P}(X < 58)$ est bien plus simple par lecture de la table de la loi normale centrée réduite. Il est donc légitime de chercher à faire des approximations de lois.
On considère que la loi binomiale de paramètres n et p peut être approximée par une loi normale de moyenne $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ lorsque

$$\begin{cases} n \geq 30, \\ np \geq 5, \\ n(1-p) \geq 5. \end{cases}$$

Autrement dit, n doit être assez grand, et p ne pas être trop proche de 0 ou 1.

Correction de continuité

La correction de continuité s'applique lorsqu'on approche une loi de probabilité discrète par une loi de probabilité continue, comme c'est le cas pour l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.
Ainsi,

- La probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ doit se réécrire $\mathbb{P}(k - 0,5 < X < k + 0,5)$.
- La probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ doit se réécrire $\mathbb{P}(a - 0,5 < X < b + 0,5)$.
- La probabilité $\mathbb{P}(a < X < b)$ doit se réécrire $\mathbb{P}(a + 0,5 < X < b - 0,5)$.

3.6 Transformation d'une v.a. continue

Pour déterminer la loi de probabilité d'une v.a. Y, lorsque celle-ci est liée à une v.a. X par la relation

$$Y = g(X),$$

où g est une fonction continue sur $X(\Omega)$ et la fonction de densité de probabilité de X étant connue, il suffit de :

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Calculer sa fonction de répartition :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y).$$

3. En déduire sa densité de probabilité $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = F'_Y(y).$$

3.7 Fonction génératrice des moments d'une v.a. continue

La fonction génératrice des moments d'une v.a. continue X de densité $f(x)$ est donné par :

$$G_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\ dx.$$

Exemple 3.7.1

La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ est :

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\
&= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\ dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\ dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{t} e^{tx}\right]_a^b \\
&= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}.
\end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une v.a. $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est :

$$\begin{aligned}
G_Y(t) &= E\left(e^{tY}\right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{ty} \lambda e^{\lambda y}\ dy \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)y}\ dy \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} \left[e^{(t-\lambda)y}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \textit{pour } t < \lambda.
\end{aligned}$$

3.8 Exercices corrigés

Exercice 3.1

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

1. $f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & si \;\; x \geq 0, \\ 0, & si \;\; x < 0. \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{4\ln(x)}{x^3}, & si \;\; x \geq 1, \\ 0, & si \;\; x < 1. \end{cases}$

Corrigé exercice 3.1.

1. Déterminer si la fonction f est une densité de probabilité :
   - $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R}$.
   - On a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\, dx}_{\text{est égale à } 0} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} 4xe^{-2x}\, dx}_{\text{intégration par parties}} \\
&= \underbrace{\left[-2xe^{-2x}\right]_0^{+\infty}}_{\text{est égale à } 0} + \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}\, dx \\
&= \left[-e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

   Donc, f est bien une densité de probabilité.

   Déterminer la fonction de répartition F associée à f :
   - Si $x < 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0.$$

   - Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\, dt}_{\text{est égale à } 0} + \int_0^x 4te^{-2t}\, dt \\
&= 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 \\
&= 1 - (2x+1)e^{-2x}.
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \; x < 0, \\ 1 - (2x+1)e^{-2x}, & \text{si } \; x \geq 0. \end{cases}$$

2. Déterminer si la fonction g est une densité de probabilité :
   - $g(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   - g est continue sur $\mathbb{R}$.

- On a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\ dx}_{\text{est égale à } 0} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3}\ dx}_{\text{intégration par parties}} \\
&= \underbrace{\left[\frac{-2\ln(x)}{x^2}\right]_1^{+\infty}}_{\text{est égale à } 0} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{+\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc, g est bien une densité de probabilité.

Déterminer la fonction de répartition G associée à g :

- Si $x < 1$,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0.$$

- Si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}
G(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\ dt}_{\text{est égale à } 0} + \int_1^x \frac{4\ln(t)}{t^3}\ dt \\
&= \left[\frac{-2\ln(t)}{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{2}{t^3}\ dt \\
&= 1 - \frac{1}{x^2}\left(2\ln(x) + 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^2}\left(2\ln(x)+1\right), & \text{si } \ x \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 3.2

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}, & \textit{si } \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que f est bien une densité de probabilité.*
2. *Déterminer sa fonction de répartition F.*
3. *Calculer $\mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2)$.*

Corrigé exercice 3.2.

1. Déterminer si la fonction f est une densité de probabilité :
   - $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

- On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{\text{est égale à }0} + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}dx + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} 0\,dx}_{\text{est égale à }0}\\ &= \left[-\frac{4}{3}\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer sa fonction de répartition F :
- si $x < 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

- si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{\text{est égale à }0} + \int_0^x (1-t)^{\frac{1}{3}}\,dt\\ &= \left[-(1-t)^{\frac{4}{3}}\right]_0^x\\ &= 1-(1-x)^{\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

- si $x > 1$,

$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{\text{est égale à }0} + \underbrace{\int_0^1 \frac{4}{3}(1-t)^{\frac{1}{3}}\,dt}_{\text{est égale à }1} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} 0\,dt}_{\text{est égale à }0} = 1.$$

Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x<0,\\ 1-(1-x)^{\frac{4}{3}}, & \text{si } \ 0\leq x\leq 1,\\ 1, & \text{si } \ x>1.\end{cases}$$

3. Calculer $\mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2) &= F(1,2) - F(0,488)\\ &= 1-\left(1-(1-0,488)^{\frac{4}{3}}\right)\\ &= 0,410.\end{aligned}$$

Exercice 3.3

Soit X une v.a. continue de densité de probabilité $f(x)$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2\alpha x}\left(1-e^{-\alpha x}\right), & \textit{si } \ x\geq 0,\\ 0, & \textit{sinon.}\end{cases}$$

où α est une constante connue strictement positive et c une constante réelle à déterminer.

1. *Montrer que la constante c est égale à 6α.*
2. *Calculer la fonction de répartition de la v.a. X .*

3. *Pour $\alpha = 1$, calculer les probabilités suivantes :*

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2,5),\ \mathbb{P}(1,5 < X \leq 3,75),\ \mathbb{P}(X > 6).$$

4. *Soit la v.a. $Y = e^{-\alpha X}$.*
   (a) *Trouver la densité de probabilité de la v.a. Y.*
   (b) *Déterminer la fonction de répartition de la v.a. Y.*
   (c) *Calculer les probabilités suivantes :*

$$\mathbb{P}(Y \leq 0,5),\ \mathbb{P}(0,25 < Y \leq 1),\ \mathbb{P}(|Y - 0,5| \geq 0,1).$$

Corrigé exercice 3.3.

1. Déterminons la valeur de la constante c :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} ce^{-2\alpha x}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)\, dx = 1 \\
&\Rightarrow c\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-2\alpha x} - e^{-3\alpha x}\right)\, dx = 1 \\
&\Rightarrow c\left[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha x} + \frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha x}\right]_0^{+\infty} = 1 \\
&\Rightarrow c\left(0 + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{3\alpha}\right) = 1 \\
&\Rightarrow c\left(\frac{3\alpha - 2\alpha}{6\alpha^2}\right) = 1 \\
&\Rightarrow \frac{c}{6\alpha} = 1 \\
&\Rightarrow c = 6\alpha.
\end{aligned}$$

2. Déterminons la fonction de répartition F_X de la v.a. X :
   - si $x < 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0.$$

   - si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\ dt}_{\text{est égale à } 0} + \int_{0}^{x}\left(6\alpha e^{-2\alpha t}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right)\, dt \\
&= 6\alpha\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-2\alpha t} - e^{-3\alpha t}\right)\, dt \\
&= 6\alpha\left[-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t} + \frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha t}\right]_0^{x} \\
&= 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x}.
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Pour $\alpha = 1$, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0, \\ 1 - 3e^{-2x} + 2e^{-3x}, & \text{si } \ x \geq 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2,5) &= F_X(2,5) - F_X(-1) \\
&= \left(1 - 3e^{-2(2,5)} + 2e^{-3(2,5)}\right) - 0 \\
&= 0,980. \\
\mathbb{P}(1,5 < X \leq 3,75) &= F_X(3,75) - F_X(1,5) \\
&= \left(1 - 3e^{-2(3,75)} + 2e^{-3(3,75)}\right) - \left(1 - 3e^{-2(1,5)} + 2e^{-3(1,5)}\right) \\
&= 0,125. \\
\mathbb{P}(X > 6) &= 1 - \mathbb{P}(x \leq 6) \\
&= 1 - F_X(6) \\
&= 1 - \left(1 - 3e^{-2(6)} + 2e^{-3(6)}\right) \\
&= 0,0000184.
\end{aligned}$$

4. Pour $Y = e^{-\alpha X}$:

   (a) Trouvons la densité de probabilité de la v.a. Y :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[\Rightarrow Y(\Omega) = [0, 1].$$

   Pour $y \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}\left(e^{-\alpha X} \leq y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\alpha X \leq \ln(y)\right) \\
&= \mathbb{P}(X \geq -\frac{\ln(y)}{\alpha}) \\
&= 1 - 8\mathbb{P}\left(X < -\frac{\ln(y)}{\alpha}\right) \\
&= 1 - F_X\left(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

   Donc, pour $y \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= F'_Y(y) \\
&= \frac{1}{\alpha y} f_X\left(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha y}\left(\ 6\alpha e^{2\alpha\frac{\ln(y)}{\alpha}}\left(1 - e^{\alpha\frac{\ln(y)}{\alpha}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{y}\left(\ 6e^{2\ln(y)}\left(1 - e^{\ln(y)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{y}\left(\ 6y^2\left(1 - y\right)\right) \\
&= 6y - 6y^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6y - 6y^2, & \text{si } 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Déterminons la fonction de répartition de la v.a. Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 3y^2 - 2y^3, & \text{si } 0 \le y \le 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le 0,5) &= F_Y(0,5) \\
&= 3(0,5)^2 - 2(0,5)^3 \\
&= 0,5. \\
\mathbb{P}(0,25 < Y \le 1) &= F_Y(1) - F_Y(0,25) \\
&= 1 - \big(3(0,25)^2 - 2(0,25)^3\big) \\
&= 0,843. \\
\mathbb{P}(|Y - 0,5| \ge 0,1) &= 1 - \mathbb{P}(|Y - 1| < 0,1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(-0,1 < Y - 0,5 < 0,1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(-0,1 + 0,5 < Y < 0,1 + 0,5) \\
&= 1 - \mathbb{P}(0,4 < Y < 0,6) \\
&= 1 - (F_Y(0,6) - F_Y(0,4)) \\
&= 1 - \Big(\big(3(0,6)^2 - 2(0,6)^3\big) - \big(3(0,4)^2 - 2(0,4)^3\big)\Big) \\
&= 0,704.
\end{aligned}$$

Exercice 3.4

1. *Soit une v.a. X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Rappeler la fonction de densité et la fonction de répartition de la variable étudiée.*
2. *On pose $Y = \ln(e^X - 1)$*
   (a) *Déterminer la fonction de répartition F de la v.a.Y.*
   (b) *Déterminer la fonction de densité f de la v.a. Y.*
   (c) *Monter que la fonction f est paire.*
   (d) *Déduire $E(Y)$.*

Corrigé exercice 3.4.

1. La fonction de densité de la v.a. X :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} &, \quad \text{si } x \ge 0, \\ 0 &, \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la v.a. X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On pose $Y = \ln(e^X - 1)$
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. Y :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[\Rightarrow Y(\Omega) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

   On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(\ln(e^X - 1) \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(e^X - 1 \leq e^y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(e^X \leq e^y + 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \ln(e^y + 1)\right) \\ &= F_X\left(\ln(e^y + 1)\right) \\ &= 1 - e^{-\ln(e^y+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{e^y + 1}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (b) Déterminer la fonction de densité f de la v.a. Y :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e^y + 1}\right)' \\ &= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (c) Monter que la fonction f est paire :
   On a

$$\begin{aligned} f_Y(-y) &= \frac{e^{-y}}{(e^{-y} + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2y} e^{-y}}{e^{2y}\left(e^{-y} + 1\right)^2} \\ &= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \\ &= f_Y(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Donc, la fonction f_Y est paire.

   (d) Déduire $E(Y)$:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}\, dy}_{\text{Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.8.1. L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

Exercice 3.5

La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. *Sachant que $\mathbb{P}(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ.*
2. *Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.*
3. *Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.*

Corrigé exercice 3.5. Rappelons que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Sachant que $\mathbb{P}(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 10) = 0,286 &\Rightarrow 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 0,286 \\ &\Rightarrow 1 - \left(1 - e^{-10\lambda}\right) = 0,286 \\ &\Rightarrow e^{-10\lambda} = 0,286 \\ &\Rightarrow -10\lambda = \ln(0,286) \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\ln(0,286)}{-10} \\ &\Rightarrow \lambda = 0,125. \end{aligned}$$

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois :
Sachant que 6 mois=0,5 année, alors on cherche :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 0,5) &= F_X(0,5) \\ &= 1 - e^{-0,5 \times 0,125} \\ &= 0,061. \end{aligned}$$

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, calculer la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 10/X > 8) &= \frac{\mathbb{P}\left(X > 10 \cap X > 8\right)}{\mathbb{P}\left(X > 8\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(X > 10\right)}{\mathbb{P}\left(X > 8\right)} \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}\left(X \leq 10\right)}{1 - \mathbb{P}\left(X \leq 8\right)} \\ &= \frac{1 - F_X(10)}{1 - F_X(8)} \\ &= \frac{e^{-0,125 \times 10}}{e^{-0,125 \times 8}} \\ &= 0,779. \end{aligned}$$

Exercice 3.6

Soit la v.a. continue X modélisée par la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0,1]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$.

1. *Rappeler la fonction de densité de la variable étudiée.*
2. *On pose $Y = -\alpha \ln(X)$, $(\alpha > 0)$*
   (a) *Déterminer la fonction de densité de la v.a. Y. Reconnaître sa loi.*
   (b) *En déduire son espérance et sa variance.*
3. *Déduire la fonction de répartition de la v.a. réelle Y.*
4. *Calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}(Y > 2\alpha)$.*

Corrigé exercice 3.6.

1. Rappeler la fonction de densité de la variable étudiée :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On pose $Y = -\alpha \ln(X)$, $(\alpha > 0)$
   (a) Déterminer la fonction de densité de la variable Y :

$$X(\Omega) = [0,1] \Rightarrow Y(\Omega) = [0,+\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(-\alpha \ln(X) \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\ln(X) > -\frac{y}{\alpha}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X > e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) \\ &= 1 - F_X\left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= 0 - \left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right)' f_X\left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}}, & \text{si } \ y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par identification, on déduit que la v.a. Y suit une loi exponentielle $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

(b) En déduire son espérance et sa variance :
Puisque $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, alors

$$E(Y) = \frac{1}{1/\alpha} = \alpha.$$

$$V(Y) = \frac{1}{(1/\alpha)^2} = \alpha^2.$$

3. Déduire la fonction de répartition de la v.a. Y :
Puisque $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, alors

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y}{\alpha}}, & \text{si } \; y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Calculer $\mathbb{P}(Y > 2\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > 2\alpha) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2\alpha) \\ &= 1 - F_Y(2\alpha) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{\alpha}}\right) \\ &= e^{-2} \\ &= 0,135. \end{aligned}$$

Exercice 3.7

La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- *La probabilité qu'un projectile dépasse 60 mètres est 0,0869.*
- *La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à 45 mètres est 0,6406.*

Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

Corrigé exercice 3.7.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma).$$

On cherche à calculer la moyenne m et l'écart-type σ :
On pose $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbb{P}(X > 60) = 0,0869 \\ \mathbb{P}(X < 45) = 0,6406 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}\left(Z > \dfrac{60 - m}{\sigma}\right) = 0,0869 \\ \mathbb{P}\left(Z < \dfrac{45 - m}{\sigma}\right) = 0,6406 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \dfrac{60 - m}{\sigma}\right) = 0,0869 \\ F_Z\left(\dfrac{45 - m}{\sigma}\right) = 0,6406 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} F_Z\left(\dfrac{60 - m}{\sigma}\right) = 0,9131. \\ F_Z\left(\dfrac{45 - m}{\sigma}\right) = 0,6406. \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant la table de la loi normale centrée réduite, on a

$$\begin{cases} \dfrac{60-m}{\sigma} = 1,36 \\ \dfrac{45-m}{\sigma} = 0,36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 15. \\ m = 39,6. \end{cases}$$

Exercice 3.8

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type "Normale" avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres. Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître :

1. *Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois)*
2. *Le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).*
3. *La consommation maximale de 50% des consommateurs.*
4. *Au dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs.*

Annexe : *Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on donne :*
$F_Z(2) = 0,9772.$
$F_Z(0.44) = 0,67.$

Corrigé exercice 3.8.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(20,5).$$

On pose $Z = \dfrac{X-20}{5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 10) &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{10-20}{5}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z < -2) \\ &= F_Z(-2) \\ &= 1 - F_Z(2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

2. Calculer le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 30) &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{30-20}{5}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z > 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) \\ &= 1 - F_Z(2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

3. Calculer la consommation maximale de 50% des consommateurs :
   On cherche c telle que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq c) = 0,5 &\Rightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{c-20}{5}\right) = 0,5 \\
&\Rightarrow F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,5 \\
&\Rightarrow \frac{c-20}{5} = 0 \\
&\Rightarrow c = 20.
\end{aligned}$$

   Ainsi, la consommation maximale de 50% des consommateurs est de 20 litres.
4. On cherche à calculer c telle que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > c) = 0,33 &\Rightarrow \mathbb{P}\left(Z > \frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\
&\Rightarrow 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\
&\Rightarrow F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,67 \\
&\Rightarrow \frac{c-20}{5} = 0,44 \\
&\Rightarrow c = 22,5.
\end{aligned}$$

   Ainsi, 33% des consommateurs se trouvent au dessus de $22,5$ litres.

Exercice 3.9

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. la proportion des pièces défectueuses est de 3%. On examine 1000 pièces choisies au hasard et on note X la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

1. *Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ? Justifiez votre réponse.*
2. *Calculer la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses.*
3. *Calculer la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses.*
4. *Calculer la probabilité pour que la différence absolue entre le nombre de pièces défectueuses et la moyenne soit inférieur ou égale à 15.*

Corrigé exercice 3.9.

1. La v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 1000$ et $p = 0,03$.
   On peut approximer la loi de probabilité de la v.a. X par une loi normale de paramètre $m = np = 30$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{29,1} \approx 5,4$.
2. Calculer la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses :

On pose : $Z = \frac{X-30}{5,4} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 50) \xrightarrow[\textit{de continuité}]{\textit{Correction}} \mathbb{P}(X > 50,5) &= \mathbb{P}(X > 50,5) \\
&= \mathbb{P}\left(Z > \frac{50,5-30}{5,4}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z > 3,79) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 3,79) \\
&= 1 - F_Z(3,79) \\
&= 1 - 0,99992 \\
&= 0,00008.
\end{aligned}$$

3. Calculer la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(20 \leq X \leq 40) \xrightarrow[\textit{de continuité}]{\textit{Correction}} \mathbb{P}(19,5 < X < 40,5) &= \mathbb{P}\left(\frac{19,5-30}{5,4} < Z < \frac{40,5-30}{5,4}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-1,94 < Z < 1,94\right) \\
&= 2F_Z(1,94) - 1 \\
&= 2(0,9738) - 1 \\
&= 0,9476.
\end{aligned}$$

4. Calculer la probabilité pour que la différence absolue entre le nombre de pièces défectueuses et la moyenne soit inférieur ou égale à 15 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-30| \leq 15) &= \mathbb{P}\left(-15 \leq X - 30 \leq 15\right) \\
&= \mathbb{P}\left(15 \leq X \leq 45\right) \\
&\xrightarrow[\textit{de continuité}]{\textit{Correction}} \mathbb{P}\left(14,5 \leq X \leq 45,5\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2,78 < Z < 2,78\right) \\
&= 2F_Z(2,78) - 1 \\
&= 2(0,9937) - 1 \\
&= 0,9874.
\end{aligned}$$

Exercice 3.10

Tous les jours, un étudiant parcourt le même trajet de 40 Km pour se rendre à son université. Sa vitesse est une v.a. V qui dépend des conditions météorologiques et de la circulation. Sa densité est de la forme :

$$f_V(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \textit{si} \ \ x \geq 0, \\ 0, & \textit{sinon} \ . \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$.

1. *Reconnaître la loi de probabilité de la v.a. V. Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h.*
2. *Calculer la fonction de répartition de la v.a. V.*

3. *Sur la route empruntée par l'étudiant, la vitesse est limitée à 120 Km/h, un radar mesure la vitesse de toutes les automobiles. Quelle est la probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse ?*
4. *La durée du trajet est décrite par la v.a.* $T = \frac{40}{V}$*. Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.* T*.*
5. *On pose* $U = 2\lambda V$*.*
Déterminer la densité de la v.a. U*. De quelle loi usuelle s'agit-il ?*

Corrigé exercice 3.10.

1. Reconnaître la loi de V :
Par identification : $V \hookrightarrow \Gamma(2, \lambda)$.
Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h :
$$E(V) = 80 \Longrightarrow \frac{2}{\lambda} = 80 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{40}.$$
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. V :
   - Si $x < 0$ alors $F_V(x) = 0$.
   - Si $x \geq 0$ alors
$$\begin{aligned} F_V(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_V(x)\ dx \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{40}\right)^2 x e^{-\frac{1}{40}x}\ dx \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{40}x}\left(\frac{1}{40}x + 1\right). \end{aligned}$$
Ainsi
$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{40}x}\left(\frac{1}{40}x + 1\right), & \text{si } \ x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. La probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \geq 120) &= 1 - \mathbb{P}(V < 120) \\ &= e^{-\frac{1}{40}120}\left(\frac{1}{40}120 + 1\right) \\ &= 4e^{-3} \\ &= 0,199. \end{aligned}$$
4. Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a. $T = \frac{40}{V}$:
$$V(\Omega) = [0, +\infty[\ \Rightarrow \ T(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathbb{P}(T \leq t) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{40}{V} \leq t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V \geq \frac{40}{t}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(V < \frac{40}{t}\right) \\
&= 1 - F_V\left(\frac{40}{t}\right).
\end{aligned}$$

Donc, pour $t \in [0, +\infty[$, on a

$$f_T(t) = F'_T(t) = \frac{40}{t^2} f_V\left(\frac{40}{t}\right).$$

Ainsi,

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance de la v.a. T est :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \, dt = \left[e^{-\frac{1}{t}}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

5. Déterminer la densité de la v.a. $U = \frac{1}{20}V$ et reconnaître sa loi :

$$V(\Omega) = [0, +\infty[\;\Rightarrow\; U(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \mathbb{P}(U \leq u) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{20} V \leq u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V \leq 20u\right) \\
&= F_V\left(20u\right).
\end{aligned}$$

Donc, pour $u \in [0, +\infty[$, on a

$$f_U(u) = F'_U(u) = 20 f_V(20u).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \begin{cases} \frac{1}{4} u e^{-\frac{1}{2}u}, & \text{si} \quad u \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 u e^{-\frac{1}{2}u}, & \text{si} \quad u \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par identification : $U \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire, $U \hookrightarrow \chi^2(4)$.

Exercice 3.11

Soit X une v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{x+1}, & si \;\; 0 \leq x \leq e-1, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

1. *Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.*
2. *Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $\mathbb{P}(0,7 \leq X \leq 1,7)$.*
3. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.*
4. *Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. X.*
5. *Déterminer la loi de la v.a. $Y = \ln(1+X)$.*
6. *Monter que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux, préciser son degré de liberté.*

Corrigé exercice 3.11.

1. Calculons k pour que f soit une densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1 \Rightarrow \int_0^{e-1} \frac{k}{x+1}\ dx = 1 \\ \Rightarrow k\,[\ln(x+1)]_0^{e-1} = 1 \\ \Rightarrow k\,(\ln(e) - \ln(1)) = 1 \\ \Rightarrow k = 1. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \\ &= \int_1^{e-1} \frac{1}{x+1}\ dx + \int_{e-1}^{+\infty} 0\ dx \\ &= [\ln(x+1)]_1^{e-1} \\ &= 1 - \ln 2 \\ &= 0,306. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,7 \leq X \leq 1,7) &= \int_{0,7}^{1,7} f(x)\ dx \\ &= \int_{0,7}^{1,7} \frac{1}{x+1}\ dx \\ &= [\ln(x+1)]_{0,7}^{1,7} \\ &= \ln(2,7) - \ln(1,7) \\ &= 0,462. \end{aligned}$$

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\ dx \\
&= [x-\ln(x+1)]_0^{e-1} \\
&= e-2 \\
&= 0,718.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \frac{x^2}{x+1}\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \frac{x^2-1+1}{x+1}\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \left(\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)\ dx \\
&= \int_0^{e-1} \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\ dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^{e-1} \\
&= \frac{(e-1)^2}{2}-e+2 \\
&= 0,758.
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut déduire que

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2 \\
&= 0,758-0,758^2 \\
&= 0,242.
\end{aligned}$$

4. La fonction de répartition de la v.a. X :
   - si $x < 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0.$$

   - si $0 \leq x \leq e-1$,

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x \frac{1}{t+1}\ dt = [\ln(t+1)]_0^x = \ln(x+1).$$

- si $x > e-1$,

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_{0}^{e-1} \frac{1}{t+1}\, dt + \underbrace{\int_{e-1}^{x} 0\ dt}_{\text{est égale à 0}} = 1.$$

Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0, \\ \ln(x+1), & \text{si } \ 0 \leq x \leq e-1, \\ 1, & \text{si } \ x > e-1. \end{cases}$$

5. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = \ln(1+X)$:

$$X(\Omega) = [0, e-1] \ \Rightarrow \ Y(\Omega) = [0, 1].$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\ln(1+X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(1+X \leq e^y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq e^y - 1) \\ &= F_X(e^y - 1). \end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y^{'}(y) \\ &= e^y f_X(e^y - 1) \\ &= e^y \frac{1}{e^y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par identification, on déduit que la v.a. Y suit une loi uniforme $Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$.

6. Montrer que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux et déterminer son degré de liberté :

$$Y(\Omega) = [0, 1] \Rightarrow Z(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\ &= \mathbb{P}(-2\ln(Y) \leq z) \\ &= \mathbb{P}(\ln(Y) \geq -\frac{1}{2}z) \\ &= \mathbb{P}(Y \geq e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y < e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - F_Y(e^{-\frac{1}{2}z}). \end{aligned}$$

Donc, pour $z \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= F_Z^{'}(z) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \underbrace{f_Y(e^{-z})}_{\text{est égale à 1}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-z}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} & , \quad \text{si} \quad z \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Par identification, la v.a. Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2).$$

On déduit que la v.a. Z suit une loi du khi-deux à 2 degrés de liberté.