CHAPITRE 2

VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

2.1 Variable aléatoire

Définition 2.1.1 (*Variable aléatoire*)

Une variable aléatoire est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble E.

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \longrightarrow & E \\ & \omega & \longmapsto & X(\omega) = x \end{array}$$

Définition 2.1.2 (*Variable aléatoire réelle*)

Une variable aléatoire réelle est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1.3 (*Variable aléatoire réelle discrète*)

Une variable aléatoire réelle discrète est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble discrèt $E \subset \mathbb{R}$.

Dans ce chapitre on s'interesse qu'aux variables aléatoires discrètes. Pour simplifier, on écrit v.a. au lieu d'écrire variable aléatoire.

Remarque 2.1.1. Soient A une sous partie de Ω et x un réel.
L'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$ est un événement. De même, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}$ est aussi un événement.
Pour simplifier les écritures, on notera : $\mathbb{P}(X \in A)$ au lieu de $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}\right)$ et $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}\right)$

Exemple 2.1.1

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. L'ensemble des résultats possibles est

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

Chacun des événements élémentaires de Ω a une probabilité égale à $\frac{1}{4}$ de se produire. Considérons la v.a. X représentant le nombre de "faces" obtenues. Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

2.2 Loi de probabilité d'une v.a. discrète

Définition 2.2.1

On appelle distribution ou loi de probabilité de la v.a X l'ensemble des couples (x_i, p_i), $i \in \mathbb{N}$ telle que :

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

La loi de probabilité d'une v.a. discrète est souvent présentée sous forme d'un tableau.

2.3 Fonction de répartition d'une v.a. discrète

Définition 2.3.1

On appelle fonction de répartition de la v.a. (variable aléatoire) X, la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i).$$

2.4 Moments d'une v.a. discrète

2.4.1 Espérance mathématique

Définition 2.4.1

On appelle espérance mathématique de la v.a. X la quantité, si elle existe :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Propriétés 2.4.1

Si on ajoute une constante à une v.a., il en est de même pour son espérance :

$$E(X + a) = E(X) + a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Si on multiplie une v.a. par une constante, il en est de même pour son espérance :

$$E(aX) = aE(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

L'espérance d'une somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

On résume ces trois propriétés en disant que l'opérateur espérance est linéaire :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2.4.2 Variance

Il s'agit d'un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x_i autour de $E(X)$:

$$V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 P(X = x_i).$$

Lorsque cette quantité existe, elle s'écrit aussi :

$$V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2.$$

On note encore cette quantité $V(X) = \sigma_X^2$, σ_X désignant alors l'écart type de la v.a. X.

Propriétés 2.4.2

Par définition :

$$V(X) \geq 0.$$

Pour tout réel a :

$$V(X + a) = V(X) \quad et \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

2.4.3 Moments non centrés et centrés d'une v.a. discrète

Définition 2.4.2 (*Moments non centrés*)

Le moment non centré (ou simple) d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

Définition 2.4.3 (*Moments centrés*)

Le moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E(\left[X - E(X)\right]^r) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

2.5 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments d'une v.a. X est la fonction $G_X(t)$ définie par :

$$G_X(t) = E\left(e^{tX}\right).$$

Propriétés 2.5.1

- $G_X(0) = E(1) = 1.$

- *Le moment non centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. X est*

$$m_r(X) = E(X^r) = G_X^{(r)}(0).$$

- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = G''_X(0) - [G'_X(0)]^2.$
- *Si X et Y sont deux variables aléatoires tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = G_Y(t),$$

alors les deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité.

2.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2.6.1

Pour tout réel strictement positif α,

$$\mathbb{P}\left(|X - E(X)| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

Démonstration : La démonstration est une simple application de l'inégalité de Markov

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha},$$

à la variable $(X - E(X))^2$ et au réel α^2 strictement positif compte tenu du fait que

$$\{|X - E(X)| \geq \alpha\} = \{(X - E(X))^2 \geq \alpha^2\}.$$

■

2.7 Transformation d'une v.a. discrète

Un problème qui se pose souvent est de déterminer la loi de probabilité d'une v.a. discrète Y lorsque celle-ci est liée à une v.a. discrète $X(\Omega)$ par la relation $Y = g(X)$, où g est une fonction continue sur $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X étant connue.
Pour déterminer la loi de probabilité de Y, il suffit de :

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{P}(g(X) = y_j), \quad \forall y_j \in Y(\Omega)$.

2.8 Exercices corrigés

Exercice 2.1

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est rouge, il gagne 10 points, si elle est jaune, il perd 5 points, si elle est verte, il tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 points, sinon il perd 4 points.
Soit X la v.a. associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur.

1. *Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.*
2. *Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X.*
3. *Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de la v.a. X soit nulle.*

Corrigé exercice 2.1.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :

$$X(\Omega) = \{-5, -4, 8, 10\}.$$

La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	-5	-4	8	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

2. Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= (-5) \times \frac{2}{7} + (-4) \times \frac{10}{21} + 8 \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} \\ &= -1,14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= (-5)^2 \times \frac{2}{7} + (-4)^2 \times \frac{10}{21} + 8^2 \times \frac{2}{21} + 10^2 \times \frac{1}{7} \\ &= 35,14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 35,14 - (-1,14)^2 \\ &= 33,84. \end{aligned}$$

3. Notons α le gain correspondant à l'événement $V_1 \cap R_2$:

On a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) \\ &= (-5) \times \frac{2}{7} + (-4) \times \frac{10}{21} + \alpha \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{2\alpha - 40}{21}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de résoudre l'équation :

$$E(X) = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha - 40 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 20 \text{ points.}$$

Exercice 2.2

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X la v.a. représentant le nombre de faces obtenues.

1. *Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.*
2. *Soit la v.a. $Y = X^2 - 1$. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. Y et donner sa fonction de répartition.*

Corrigé exercice 2.2.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :

$$\Omega = \{\text{PPP, PPF, PFP, PFF,FPP, FPF, FFP, FFF}\}.$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = X^2 - 1$ et donner sa fonction de répartition :

$$Y(\Omega) = \{-1, 0, 3, 8\}.$$

y_i	-1	0	3	8
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

Exercice 2.3

Soit une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\mathbb{P}(X = n) = k\frac{3^{n-1}}{n!}.$$

1. *Quelle valeur doit-on donner au nombre réel k pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée ?*
2. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$.*

Corrigé exercice 2.3.

1. Pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)=1 &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} k\frac{3^{n-1}}{n!}=1 \\
&\Longrightarrow \frac{k}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}=1 \\
&\Longrightarrow \frac{k}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}-1\right)=1 \\
&\Longrightarrow \frac{k}{3}\left(e^3-1\right)=1 \\
&\Longrightarrow k=\frac{3}{e^3-1}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=n)=\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!}.$$

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!} \\
&= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)e^3 \\
&= \frac{3e^3}{e^3-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{e^3-1}\right)\frac{3^n}{n!} \\
&= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \left(\frac{3}{e^3-1}\right)4e^3 \\
&= \frac{12e^3}{e^3-1}.
\end{aligned}$$

   En effet,

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=(xe^x)'=(x+1)e^x.$$

Donc,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{12e^3}{e^3-1} - \left(\frac{3e^3}{e^3-1}\right)^2 \\ &= \frac{3e^3\left(e^3-4\right)}{\left(e^3-1\right)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.4

Dans un jeu, un joueur doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile. S'il répond juste à la première question, il peut tenter de répondre à l'autre question. La question facile rapporte au joueur 1000 DA et la question difficile lui rapporte 3000 DA. Les questions sont indépendantes, et on estime avoir 30 % de chances de bien répondre à la question difficile, et 60 % de chances de répondre à la question facile.
Soit X la v.a. égale au gain du jeu.

1. *Dans le cas où il choisit de répondre à la question facile en premier, quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Que vaut le gain moyen dans ce cas ?*
2. *Même question, si le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier.*
3. *Que peut-on déduire ?*

Corrigé exercice 2.4.

1. La loi de la v.a. X dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question facile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 1000, 4000\}.$$

x_i	0	1000	4000
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,4$	$0,42$	$0,18$

Le gain moyen du joueur est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,4) + 1000 \times (0,42) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1140 \text{ DA}. \end{aligned}$$

2. La loi de la v.a. X dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 3000, 4000\}.$$

x_i	0	3000	4000
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,7$	$0,12$	$0,18$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,7) + 3000 \times (0,12) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1080 \text{ DA}. \end{aligned}$$

3. **La déduction :** On déduit qu'il est plus avantageux au joueur de choisir de répondre à la question la plus facile en premier.

Exercice 2.5

Pour ses besoins en gestion, un fabricant de montres électroniques a fourni les données suivantes à un cabinet de conseils :

- *À la sortie d'usine, le quart des montres fabriquées sont défectueuses, elles sont par conséquent renvoyées à l'atelier pour réparation. Le reste est mis en vente.*
- *La moitié des montres renvoyées à l'atelier sont réparées et mises en vente, le reste est détruit.*
- *Le prix de revient de la production d'une montre est de 5000 da.*
- *Le coût de réparation d'une montre est de 300 da.*

À la sortie d'usine, nous avons choisi une montre au hasard.

1. *Calculer la probabilité que la montre soit vendue.*

Soit X la v.a. qui représente le prix de vente d'une montre électronique, et soit Y la v.a. qui représente le bénéfice réalisé à la vente d'une montre.

2. *À partir de quel prix de vente unitaire le fabricant espère-t-il réaliser des bénéfices ?*
3. *Si le fabricant vend la montre à 5300 da, quel sera son bénéfice (ou perte) par montre vendue ?*

Corrigé exercice 2.5.

1. Calculer la probabilité que la montre soit vendue :
   On note :
   - D : « La montre est défectueuse ».
   - R : « La montre est réparée ».
   - V : « La montre est vendue ».

   Donc, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}\left(D \cap R\right) + \mathbb{P}\left(\overline{D}\right)\\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\\ &= \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

2. Calculer le prix de vente unitaire pour lequel le fabricant espère réaliser des bénéfices :
   On note :
   - X : la v.a. représentant le prix de vente d'une montre.
   - Y : la v.a. représentant le bénéfice réalisé à la vente d'une montre.

   On distingue trois cas :

$$\begin{cases}\text{Si la montre n'est pas défectueuse alors } Y = X - 5000.\\ \text{Si la montre est défectueuse et réparable alors } Y = X - 5300.\\ \text{Si la montre est défectueuse et irréparable (détruite) alors } Y = -5300.\end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= (x-5000)\mathbb{P}(Y=x-5000)+(x-5300)\mathbb{P}(Y=x-5300)+(-5300)\mathbb{P}(Y=-5300)\\
&= (x-5000)\mathbb{P}(\overline{D})+(x-5300)\mathbb{P}(D\cap R)+(-5300)\mathbb{P}(D\cap\overline{R})\\
&= (x-5000)\times\frac{3}{4}+(x-5300)\times\frac{1}{8}+(-5300)\times\frac{1}{8}\\
&= \frac{7}{8}x-5075.
\end{aligned}$$

Le fabriquant espère réaliser des bénéfices si

$$\begin{aligned}
E(Y)>0 &\Longrightarrow \frac{7}{8}x-5075>0\\
&\Longrightarrow x>5800.
\end{aligned}$$

Donc, le fabriquant espère réaliser des bénéfices en fixant le prix de vente d'une montre à partir de 5800 DA.

3. Si le fabriquant vend la montre à 5300 DA, on trouve :

$$E(Y)=\frac{7}{8}\times 5300-5075=-437,5.$$

Ainsi, le fabriquant aura une perte de 437,5 DA par montre.

2.9 Lois usuelles discrètes

2.9.1 Loi uniforme

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si
1. $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
2. $\forall k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{x_1,\dots,x_n\}}.$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ et } V(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - [E(X)]^2 .$$

Situation caractéristique : Cette loi modélise une expérience aléatoire dont les résultats sont équiprobables.

Remarque 2.9.1. Dans le cas particulier d'une v.a. X suivant une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on écrit :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}.$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Exemple 2.9.1

Prenons l'exemple d'un lancé de dé équilibré.
Soit X la v.a. égale au résultat du dé, on a :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, on peut écrire : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,6\}}$.

2.9.2 Loi de Bernoulli

On dit qu'une v.a. X suit une loi de Bernoulli si
1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
2. $\forall k \in \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p).$$

Situation caractéristique : Cette loi modélise une expérience aléatoire qui a uniquement deux issues appelées « succès » ou « échec ». En effet, le chiffre 1 représente le « succès » alors que le chiffre 0 représente « l'échec ».

Exemple 2.9.2

On lance une pièce de monnaie équilibrée.
Soit la v.a. X « avoir pile », il s'agit ici d'une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'avoir pile est $p = \frac{1}{2}$.
On dit dans ce cas que la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, et on écrit :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$

2.9.3 Loi binomiale

On dit qu'une v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.
2. $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = np \ \text{ et } \ V(X) = np(1-p).$$

Situation caractéristique : Cette loi modélise une expérience aléatoire où on répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p, p étant la probabilité d'avoir le succès.

Proposition 2.9.1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$

Remarques 2.9.1.

1. La loi de Bernoulli est une loi binomiale particulière où $n = 1$.
2. Le coefficient binomial k parmi n, noté C_n^k, permet de déterminer les possibilités d'avoir k succès parmi n épreuves.
   On peut calculer les coefficients binomiaux grâce à la formule suivante :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2.9.4 Loi géométrique

On dit qu'une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre p si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
2. $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Situation caractéristique : La loi géometrique modélise le rang du premier succès en répétant une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante à l'infini (théoriquement).

Exemple 2.9.3

On lance continuellement un dé non truqué jusqu'à obtenir un six.
Désignons par X la v.a. représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un six.
Dans ce cas, la v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$, et on écrit :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right).$$

2.9.5 Loi de Poisson

On dit qu'une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

Situation caractéristique : La loi de Poisson modélise des phénomènes rares, elle peut être aussi utilisée pour approximer la loi binomiale comme nous allons le voir dans la section 2.10.

Proposition 2.9.2

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

2.10 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de deux paramètres n et p, alors que la loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre λ. Pour qu'une loi binomiale soit au plus proche d'une loi de Poisson, on doit au moins souhaiter que ces deux lois aient la même espérance. L'espérance de la loi binomiale étant np et celle de la loi de Poisson étant λ, il faut que $\lambda = np$. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour réaliser une telle approximation, théoriquement l'approximation est parfaite lorsque :

$$\begin{cases} n & \to & +\infty \\ p & \to & 0 \\ np & = & \text{constante.} \end{cases}$$

En pratique, la condition :

$$\begin{cases} n & > & 30 \\ np & < & 5. \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} n & > & 50 \\ p & < & 0,1. \end{cases}$$

est suffisante pour envisager l'approximation.

Exemple 2.10.1

On considère une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,1$.
On est dans les conditions d'approximation de cette loi par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,1 \times 35 = 3,5$.

2.11 Fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète

La fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète X est donné par :

$$G_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk}\mathbb{P}(X = k).$$

Exemple 2.11.1

La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$:

$$\begin{aligned} G_X(t) = E\left(e^{tX}\right) &= \sum_{k=0}^{1} e^{tk}\mathbb{P}(X = k) \\ &= e^{t\times 0}(1-p) + e^{t\times 1}p \\ &= (1-p) + pe^t. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une v.a. $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

$$\begin{aligned} G_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}\mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)e^t\right)^k \\ &= \frac{p}{(1-p)}\frac{1}{(1-(1-p)e^t)}. \end{aligned}$$

2.12 Exercices corrigés

Exercice 2.6

On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé.
Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. *Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X. Reconnaître la loi.*
2. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$.*

Corrigé exercice 2.6.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :
   On a
   $$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}.$$
   $$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$
   $$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   $$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$
   La loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

   Puisque $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4)$, on déduit que la v.a. X suit une loi uniforme, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,2,3,4\}}$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$:
   $$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{5}{2}.$$
   $$V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{5}{4}.$$

Exercice 2.7

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.
On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. *Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?*
4. *Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?*

Corrigé exercice 2.7.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :
   $X = \sum_{i=1}^{8} X_i$ tel que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,1)$, $i = 1, \dots, 8$.
   Donc, la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 0,1$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8; 0,1)$, et on a :
   $$\mathbb{P}(X = k) = C_8^k (0,1)^k (0,9)^{8-k}.$$
2. La probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut :
   $$\mathbb{P}(X = 0) = C_8^0 (0,1)^0 (0,9)^{8-0} = (0,9)^8 = 0,43.$$
3. La probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut :
   $$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,43 = 0,57.$$
4. La probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\\ &= \sum_{i=0}^{1} C_8^i (0,1)^i (0,9)^{8-i}\\ &= 0,813.\end{aligned}$$

Exercice 2.8

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.
Soit X la v.a. représentant le nombre de pommes avariées dans un emballage.

1. *Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.*
2. *Quelle est la probabilité d'avoir une seule pomme avariée dans l'emballage ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?*
4. *Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes ?*

Corrigé exercice 2.8.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :
   $X = \sum_{i=1}^{5} X_i$ tel que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,25)$, $i = 1, \dots, 5$.
   Donc, la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,25$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,25)$, et on a :
   $$\mathbb{P}(X = k) = C_5^k (0,25)^k (0,75)^{5-k}.$$
2. La probabilité d'avoir une seule pomme avariée dans l'emballage :
   $$\mathbb{P}(X = 1) = C_5^1 (0,25)^1 (0,75)^{5-1} = 0,396.$$

3. La probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= 1 - \left(C_5^0(0,25)^0(0,75)^{5-0} + C_5^1(0,25)^1(0,75)^{5-1}\right) \\ &= 0,367.\end{aligned}$$

4. Soit la v.a. Y : « le nombre de clients qui se plaignent à l'épicier », si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,37)$, et on a :

$$E(Y) = np = 100 \times 0,367 = 36,7 \approx 37.$$

Ainsi, si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, il y aura en moyenne 37 plaintes.

Exercice 2.9

Un certain matériel a une probabilité $p = 0,02$ de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne.
Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne.

1. *Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?*
2. *Quelle est la probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai ?*

Corrigé exercice 2.9.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :
La v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,02$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(0,02)$, et on a :
$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} = (0,02)(0,98)^{k-1}.$$
2. La probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai :
$$\mathbb{P}(X = 10) = (0,02)(0,98)^{10-1} = 0,016.$$

Exercice 2.10

On suppose que le pourcentage de gauchers est de 1%. Soit X la v.a. prenant comme valeurs le nombre de gauchers dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.

1. *Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?*
2. *Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait plus de 4 gauchers dans l'échantillon ?*

Corrigé exercice 2.10.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :
$X = \sum_{i=1}^{200} X_i$ tel que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,01)$, $i = 1, \ldots, 200$.
Donc, la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 200$ et $p = 0,01$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(200; 0,01)$, et on a :
$$\mathbb{P}(X = k) = C_{200}^k(0,01)^k(0,09)^{200-k}.$$

2. On a
$$\begin{cases} n = 200 & > & 50 \\ p = 0,01 & < & 0,1. \end{cases}$$
Alors, on peut approximer la loi de probabilité de la v.a. X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 200 \times 0,01 = 2$.
3. La probabilité pour qu'il y ait plus de 4 gauchers dans l'échantillon :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 4) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) \\ &= 1 - e^{-2}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 0,633. \end{aligned}$$

Exercice 2.11

On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit X la v.a. représentant le nombre de médecins dans le train.

1. *Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?*
2. *Quelle est la probabilité de trouver :*
   (a) *Aucun médecin.*
   (b) *Entre 2 et 4 médecins (au sens large).*
   (c) *Au moins deux médecins.*

Corrigé exercice 2.11.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :
La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, et on a :
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1}\frac{1}{k!}.$$
2. La probabilité de trouver :
   (a) Aucun médecin est :
$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-1}\frac{1}{0!} = e^{-1} = 0,368.$$
   (b) Entre 2 et 4 médecins (au sens large) est :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= e^{-1}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 0,261. \end{aligned}$$
   (c) Au moins deux médecins est :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= 1 - \left(0,368 + e^{-1}\frac{1}{1!}\right) \\ &= 0,262. \end{aligned}$$

Exercice 2.12

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. On examine n pièces choisies au hasard et on note X la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

I. Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses. Pour $n = 5$:

1) Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Calculer son espérance et son écart-type.

2) Quelle est la probabilité que deux pièces soient défectueuses ?

3) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

4) Déterminer la valeur de X la plus probable. Calculer la probabilité associée.

II. Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses devient 5%. Pour $n = 100$:

1) Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ? Justifiez votre réponse.

2) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses.

3) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses.

4) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuse soit compris entre 2 et 4 (au sens large).

Corrigé exercice 2.12.

I. Pour $n = 5$:

1) La loi de probabilité de la v.a. X :

$X = \sum_{i=1}^{5} X_i$ tel que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,3)$, $i = 1, \ldots, 5$.

Donc, on déduit que la v.a. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,3$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,3)$, et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_5^k (0,3)^k (0,7)^{5-k}.$$

Calculer son espérance et son écart-type :

$$E(X) = np = 5 \times 0,3 = 1,5.$$
$$V(X) = np(1-p) = 5 \times 0,3 \times 0,7 = 1,05.$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,05} = 1,025.$$

2) La probabilité que deux pièces soient défectueuses :

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 (0,3)^2 (0,7)^3 = 0,309.$$

3) La probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\\ &= C_5^0 (0,3)^0 (0,7)^5 + C_5^1 (0,3)^1 (0,7)^4\\ &= 0,528.\end{aligned}$$

4) Déterminons la valeur de X la plus probable :
On peut résumer la loi de probabilité de la v.a. X dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,168	0,36	0,309	0,132	0,029	0,0024

Ainsi, la valeur de X la plus probable est $X = 1$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = 0,36$.

II. Pour $n = 100$:

1) On a
$$\begin{cases} n = 100 & > \quad 50 \\ p = 0,05 & < \quad 0,1. \end{cases}$$
Alors, on peut approximer la loi de probabilité de la v.a. X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 100 \times 0,05 = 5$

2) La probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses :
$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-5}\frac{5^0}{0!} = 0,0067.$$

3) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses :
$$\mathbb{P}(X = 2) = e^{-5}\frac{5^2}{2!} = 0,0842.$$

4) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuse soit compris entre 2 et 4 (au sens large) :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= e^{-5}\left(\frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}\right) \\ &= 0,4. \end{aligned}$$

Exercice 2.13

Une usine produit et commercialise 40 téléviseurs par mois. Le coût de fabrication d'un téléviseur est de 5000 DA. L'usine fait réaliser un test de conformité sur chacun de ses téléviseurs. Le test est positif dans 95% des cas et un téléviseur reconnu conforme peut être vendu k DA. Si le test est en revanche négatif, le téléviseur est bradé au prix de 2500 DA. Soit X la v.a. qui indique le nombre de téléviseurs conformes parmi les 40 téléviseurs produits par l'usine.

1. *Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Donner son expression et calculer son espérance.*
2. *Quelle est la probabilité que tous les téléviseurs soient conformes ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'au maximum 38 téléviseurs soient conformes ?*
4. *On note Y la v.a. qui indique le bénéfice mensuel en Dinars.*
   (a) *Donner l'expression de Y (en fonction de X et k).*
   (b) *Calculer l'espérance de Y (en fonction de k).*
   (c) *Quelle doit être la valeur minimale de k pour que l'usine ne fasse pas faillite ?*

Corrigé exercice 2.13.

1. La loi de probabilité de la v.a. X :
   $X = \sum_{i=1}^{40} X_i$ tel que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,95)$, $i = 1, \ldots, 40$.
   Donc, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0,95$, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40; 0,95)$, et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{40}^{k}(0,95)^{k}(0,05)^{40-k}.$$

$$E(X) = np = 40 \times 0,95 = 38.$$

2. La probabilité que tous les téléviseurs soient conformes :

$$\mathbb{P}(X = 40) = C_{40}^{40}(0,95)^{40}(0,05)^{40-40} = (0,95)^{40} = 0,129.$$

3. La probabilité qu'au maximum 38 téléviseurs soient conformes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 38) &= 1 - \mathbb{P}(X > 38) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X = 39) + \mathbb{P}(X = 40)) \\
&= C_{40}^{39}(0,95)^{39}(0,05)^{40-39} + C_{40}^{40}(0,95)^{40}(0,05)^{40-40} \\
&= 0,271 + 0,129 \\
&= 0,4.
\end{aligned}$$

4. On note Y la v.a. qui indique le bénéfice mensuel en Dinars.
   (a) Donner l'expression de Y (en fonction de X et k) :

$$\begin{aligned}
Y &= kX + 2500(40 - X) - 40 \times 5000 \\
&= (k - 2500)X - 100000.
\end{aligned}$$

   (b) Calculer l'espérance de Y (en fonction de k) :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\left((k - 2500)X - 100000\right) \\
&= (k - 2500)E(X) - 100000 \\
&= (k - 2500) \times 38 - 100000 \\
&= 38k - 195000.
\end{aligned}$$

   (c) Déterminer la valeur minimale de k pour que l'usine ne fasse pas faillite :

$$\begin{aligned}
E(Y) \geq 0 &\Longleftrightarrow 38k - 195000 \geq 0 \\
&\Longrightarrow k \geq \frac{195000}{38} \\
&\Longrightarrow k \geq 5131,579.
\end{aligned}$$

   Ainsi, la valeur minimale de k pour que l'usine ne fasse pas faillite est :

$$k = 5131,579 \ \text{ DA}.$$