éléments de combinatoire

Dans le cas particulier où il y a équiprobabilité sur un ensemble fini d'événements élémentaires, nous avons vu (§ I, C) que le calcul d'une probabilité se ramenait à un problème de dénombrement. Ce type de problèmes est parfois très complexe et nécessite de connaître quelques éléments de combinatoire, permettant d'exprimer par une formule le nombre de configurations ayant des propriétés données. Examinons les configurations usuelles.

A. Permutations avec répétition

Une *permutation avec répétition* de r objets pris parmi n est une suite **ordonnée** de r éléments choisis parmi n, et pouvant se répéter.

▶ **Exemple 1.23**

Un mot de six lettres est une permutation avec répétition de six objets choisis parmi un ensemble, l'alphabet, de 26 éléments : coucou, habile, garage...

h	a	b	i	l	e
1	2	3	4	5	6

Une telle permutation peut être représentée par les r objets rangés dans des cases numérotées de 1 à r. Pour chacune de ces r cases, il y a n choix possibles de l'objet à ranger, donc le nombre total de ces permutations est :

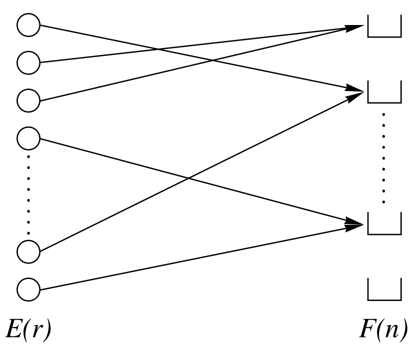
$$P_n^r = n^r$$

▶ **Exemple 1.24**

Le nombre de mots possibles de trois lettres est $26^3 = 17\,576$.

Cela correspond au cardinal de l'ensemble fondamental associé à r tirages avec remise (schéma binômial) dans une urne contenant n objets distincts (ou éventuellement considérés comme tels de façon justement à obtenir des événements équiprobables) et tenant compte de l'ordre des tirages.

C'est aussi le nombre d'applications quelconques d'un ensemble E à r éléments dans un ensemble F à n éléments, une application quelconque pouvant être définie comme un rangement de r objets dans n boîtes, chaque boîte pouvant contenir zéro, un ou plusieurs objets.



B. Permutations sans répétition ou arrangements

Une *permutation sans répétition*, ou *arrangement*, de r objets pris parmi n est une suite **ordonnée** de r éléments choisis parmi n, et qui ne peuvent pas se répéter.

▶ Exemple 1.25

Le quinté est un exemple d'arrangement de cinq chevaux pris parmi tous les partants de la course.

Une telle permutation peut être représentée par les r objets rangés dans des cases numérotées de 1 à r. Pour la première case il y a n choix possibles, pour la deuxième il n'y en a plus que $n-1$, et pour la r-ème il n'en reste plus que $n-r+1$; le nombre d'arrangements est donc :

$$A_n^r = n\,(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Cela correspond au cardinal de l'ensemble fondamental associé à r tirages sans remise (schéma hypergéométrique) dans une urne contenant n objets distincts et tenant compte de l'ordre des tirages.

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble E à r éléments dans un ensemble F à n éléments, une application injective pouvant être définie comme un rangement de r objets dans n boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir que zéro ou un objet. Il faut bien sûr que $n = card F \geqslant card E = r$.

▶ Exemple 1.26

Le nombre de tiercés dans l'ordre avec quinze partants est :

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2\,730$$

Permutation : il s'agit du cas particulier $n = r$.

Une *permutation* est donc une suite ordonnée de n objets distincts ; le nombre de permutations est :

$$P_n = A_n^n = n!$$

▶ Exemple 1.27

Le classement de cinq candidats à une épreuve forme une permutation, il y en a $5! = 120$.

C'est aussi le nombre de bijections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à n éléments.

Permutations avec répétition de *n* objets, dont *k* seulement sont distincts

Il s'agit d'une suite ordonnée de n objets choisis dans k classes distinctes, le nombre d'objets de la classe i étant n_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, avec bien sûr $n_1 + \ldots + n_k = n$. Prenons l'exemple de n boules numérotées, extraites sans remise d'une urne, et de k couleurs distinctes. Il y a $n!$ tirages ordonnés possibles ; mais si on efface les numéros des n_1 boules rouges par exemple, les $n_1!$ permutations de ces boules conduisent à la même permutation, donc le nombre de permutations distinctes devient $n!/n_1!$ Il en est bien sûr de même pour toutes les autres couleurs et par conséquent le nombre de permutations est :

$$\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$$

▶ **Exemple 1.28**

Cherchons le nombre de mots différents formés avec les lettres du mot barbare. Il y a sept lettres, mais seulement quatre catégories distinctes, soit un nombre de mots distincts égal à :

$$\frac{7!}{2!2!2!1!} = 630$$

C'est aussi le nombre de partitions de n objets en k classes d'effectifs $n_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, fixés. Dans le cas particulier où il n'y a que deux classes, on obtient le coefficient binômial $\binom{n}{n_1}$ qui représente le nombre de sous-ensembles à n_1 éléments que l'on peut extraire d'un ensemble à n éléments.

Combinaisons (sans répétition)

Une *combinaison* est un sous-ensemble **non ordonné** de r objets choisis dans un ensemble qui en contient n. Ces sous-ensembles sont au nombre de :

$$\binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

▶ **Exemple 1.29**

Le nombre de tiercés dans le désordre avec quinze chevaux au départ est :

$$\binom{15}{3} = 455$$

Le sous-ensemble choisi définit bien sûr le sous-ensemble restant et donc :

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

▶ **Exemple 1.30**

On joue au poker d'as avec quatre dés identiques et on souhaite calculer la probabilité des différents résultats possibles. Bien que les dés ne soient pas distincts, nous retenons comme ensemble fondamental $\Omega = E^4$, où $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'ensemble des résultats associés à un dé particulier ; ainsi tous les événements élémentaires sont équiprobables et ont même probabilité $1/6^4$. En effet, un résultat est une permutation de quatre objets choisis parmi six. Un carré est un résultat de la forme $(aaaa)$ avec six choix possibles pour la hauteur :

$$P(carré) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3}$$

Un brelan est un résultat de la forme $(aaab)$ avec six choix pour la hauteur a, cinq choix pour b et quatre places possibles, soit :

$$P\,(brelan) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^4} = \frac{20}{6^3}$$

Une double paire est un résultat de la forme $(aabb)$ avec $\binom{6}{2}$ choix possibles pour les paires et une permutation de quatre objets dont deux seulement sont distincts, soit $\frac{4!}{2!2!}$ et :

$$P\,(double\ paire) = \frac{15}{6^3}$$

Une paire est un résultat de la forme $(aabc)$ avec six choix possibles pour la hauteur, $\binom{5}{2}$ choix possibles pour les hauteurs qui l'accompagnent et un nombre de permutations de quatre objets dont trois distincts $\frac{4!}{2!1!1!}$, soit :

$$P\,(paire) = \frac{120}{6^3}$$

Le nombre de résultats quelconques $(abcd)$ est le nombre de permutations sans répétition de quatre objets pris parmi six, d'où :

$$P\,(quelconque) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} = \frac{60}{6^3}$$

On vérifie bien que la somme des probabilités est égale à $\frac{216}{6^3} = 1$.

Tous les sous-ensembles que l'on peut extraire d'un ensemble E à n éléments peuvent contenir 0, 1, ..., n éléments, d'où la relation :

$$card\ \mathcal{P}(E) = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Enfin, parmi les sous-ensembles à r éléments, il y a ceux qui contiennent un objet particulier, en nombre $\binom{n-1}{r-1}$, et ceux qui ne le contiennent pas, en nombre $\binom{n-1}{r}$, d'où la relation :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

qui permet de construire le triangle de Pascal.

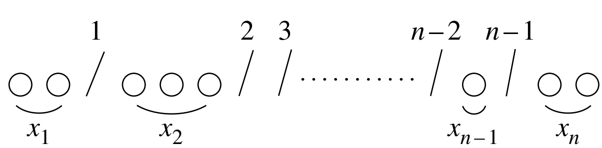
E. Combinaisons avec répétition

Une *combinaison avec répétition* est un sous-ensemble **non ordonné** de r objets choisis dans un ensemble qui en contient n et qui peuvent se répéter.

▶ Exemple 1.31

Les r objets tirés avec remise dans une urne qui en contient n distincts forment une combinaison avec répétition puisque seule compte la nature des objets tirés, indépendamment de l'ordre des tirages.

Une telle combinaison sera représentée sous la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, représentera le nombre d'objets i appartenant au sous-ensemble, avec bien sûr $x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = r$. Elle peut être symbolisée par une suite formée d'objets ◯ et de séparateurs / avec x_1 objets ◯ avant le premier séparateur, x_2 objets entre le premier et le deuxième /..., x_n objets ◯ après le $(n-1)$-ème /. Elle est donc caractérisée par la place des r objets ◯ dans la suite des $r + n - 1$ symboles.



Par exemple, la combinaison constituée de deux objets de la catégorie 1, d'un objet de la catégorie 3 et de trois objets de la catégorie 4 s'écrit $(2,\ 0,\ 1,\ 3)$ ou $2+0+1+3=6$ représentée sous la forme symbolique : ◯ ◯ // ◯ / ◯ ◯◯. Réciproquement, la suite de symboles / ◯ / ◯ ◯ ◯ / ◯ ◯ représente une combinaison d'un objet de la catégorie 2, de trois objets de la catégorie 3 et de deux objets de la catégorie 4. Il y a donc une bijection entre une combinaison et une telle suite, et le nombre de combinaisons avec répétition est donc égal au nombre de rangements des r objets ◯ (ou des $n-1$ séparateurs /) dans les $r+n-1$ cases, soit :

$$\mathcal{C}_n^r = \binom{r+n-1}{r}$$

F. Partitions

Le nombre de partitions de n objets en r classes d'effectifs non fixés est appelé *nombre de Stirling de deuxième espèce* et se calcule à partir de la récurrence :

$$S_{n+1}^r = S_n^{r-1} + rS_n^r, \quad 1 < r < n$$

avec bien sûr $S_n^1 = 1$ et $S_n^2 = 2^{n-1} - 1$. Les partitions de $n+1$ objets en r classes se décomposent en effet en celles où le $(n+1)$-ème objet constitue une classe à lui tout seul, il y en a S_n^{r-1}, et celles où on l'intègre à une classe déjà formée, il y en a rS_n^r.

Une surjection d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à r éléments correspond à un rangement de n objets dans r boîtes dont aucune n'est vide, c'est-à-dire à une partition de ces n objets en r classes, où l'ordre des classes intervient. À une partition donnée correspondent $r!$ surjections distinctes, donc le nombre total de surjections est $r!S_n^r$.

Le nombre de partitions de n objets distincts en k classes dont n_j ont le même effectif j, $1 \leqslant j \leqslant k$, (avec bien sûr $\sum_{j=1}^{k} jn_j = n$) est :

$$\frac{n!}{(1!)^{n_1}\,(2!)^{n_2}\ldots(k!)^{n_k}\,n_1!\ldots n_k!}$$