INTRODUCTION

La théorie des probabilités est une branche bien établie des mathématiques qui trouve des applications dans tous les domaines de l'activité scientifique, de la musique à la physique, et dans l'expérience quotidienne, de la prévision météorologique à la prédiction des risques des nouveaux traitements médicaux.

Ce polycopié est une introduction au calcul des probabilités, il est destiné aux étudiants de la deuxième année des classes préparatoires.

Il est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel sur le calcul des probabilités. Dans ce chapitre, nous avons introduit la définition mathématique d'un espace de probabilité, la notion de probabilité conditionnelle ainsi que la notion d'indépendance pour les événements qui reste une notion propre à la théorie de la probabilité.

Le deuxième chapitre est consacré aux variables aléatoires discrètes, après la définition de cette notion, nous étudions les principales lois de probabilité discrètes, le problème de transformation d'une variable aléatoire discrète ainsi que l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Enfin, le troisième et dernier chapitre est consacré aux variables aléatoires continues. Dans ce chapitre, nous avons donné la définition de cette notion en étudiant en détail les principales lois de probabilité continues, le problème de transformation d'une variable aléatoire continue ainsi qu'une première approche concernant l'approximation d'une loi binomiale par une loi Normale.

Dans le deuxième et le troisième chapitre, nous avons proposé des séries d'exercices corrigés à difficulté variable pour que l'étudiant puisse assimiler le contenu de chaque chapitre.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

1.1 Vocabulaire des probabilités

1.1.1 Univers

On donne les définitions suivantes :

- **Une expérience aléatoire** est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard.
- Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** liée à l'expérience aléatoire.
- L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, il est très souvent noté Ω.

Exemple 1.1.1

- *L'univers associé à l'expérience aléatoire « Lancer d'une pièce de monnaie » est :*

$$\Omega = \{P, F\}.$$

- *L'univers associé à l'expérience aléatoire « Lancer d'un dé » est :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

1.1.2 Événements

On donne les définitions suivantes :

- Un **événement** d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers Ω.
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.
- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'**événement impossible**, noté $\emptyset$.
- L'événement composé de toutes les éventualités est appelé **événement certain**.

Exemple 1.1.2

Lancer d'un dé à six faces :

- *L'univers :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- *Obtenir 2 est une éventualité de cette expérience aléatoire.*
- A : *« obtenir un 5 » est un événement élémentaire que l'on peut noter* $A = \{5\}$.
- B : *« obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter* $B = \{2, 4, 6\}$.
- *Obtenir 7 est un événement impossible.*
- *Obtenir un nombre positif est un événement certain.*

1.2 Opérations sur les ensembles

Soit Ω un ensemble et A, B deux sous-ensembles de Ω :

1.2.1 Intersection et réunion

Définition 1.2.1

La réunion des deux ensembles A et B noté $A \cup B$ est l'ensemble constitué par les éléments de Ω appartenant à A ou à B. Autrement dit :

$$A \cup B = \{w \in \Omega \ / \ w \in A \ \ ou \ \ w \in B\}.$$

Définition 1.2.2

L'intersection des deux ensembles A et B noté $A \cap B$ est l'ensemble constitué par les éléments de Ω appartenant à A et à B. Autrement dit :

$$A \cap B = \{w \in \Omega \ / \ w \in A \ \ et \ \ w \in B\}.$$

Remarque 1.2.1. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événements A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**.

Exemple 1.2.1

On considère l'ensemble constitué des chiffres de 1 à 10.
On note A l'événement « obtenir un chiffre pair » et B l'événement « obtenir un chiffre strictement inférieur à six ».

- $A \cap B$: *« obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six »*

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

- $A \cup B$: *« obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six »*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}.$$

1.2.2 Le complémentaire

Définition 1.2.3

Le complémentaire de l'ensemble A noté $\overline{A}$ (ou A^c) est l'ensemble constitué des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit :

$$\overline{A} = \{w \in \Omega \ / \ w \notin A\}.$$

On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$ *et* $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

1.2.3 La différence

Définition 1.2.4

La différence des ensembles A *et* B *noté* $A - B$ *est l'ensemble constitué par les éléments de* Ω *appartenant à* A *et n'appartenant pas à* B*. Autrement dit :*

$$A - B = \{w \in \Omega \ / \ w \in A \ \ \text{et} \ \ w \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

1.2.4 La différence symétrique

Définition 1.2.5

La différence symétrique des ensembles A *et* B *noté* $A \triangle B$ *est l'ensemble constitué par les éléments de* Ω *appartenant à* $A \cup B$ *et n'appartenant pas à* $A \cap B$*. Autrement dit :*

$$A \triangle B = \{w \in \Omega \ / \ w \in A \cup B \ \ \text{et} \ \ w \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B).$$

1.2.5 L'ensemble des parties

Définition 1.2.6

L'ensemble des parties de Ω *noté* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est l'ensemble des sous-ensembles de* Ω.

Exemple 1.2.2

Sur l'univers $\Omega = \{a, b, c\}$*, on a :*

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}.$$

Remarque 1.2.2.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ contient toujours $\emptyset$ et Ω.
- Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont les sous-ensembles de Ω et non pas les éléments de Ω. En effet :

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \iff A \subset \Omega.$$

1.3 Algèbre des événements

Définition 1.3.1 (*Tribu ou σ-algèbre*)

Une famille $\mathcal{A}$ *de parties de l'univers* Ω *est une tribu, si elle satisfait les trois propriétés suivantes :*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.3.1

Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un univers Ω. Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$, *alors* $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
3. *Si* $(A_i)_{0\leq i\leq N}$ *est une suite finie de* N *éléments de* $\mathcal{A}$, *alors* $\bigcup_{i=0}^{N} A_i \in \mathcal{A}$.
4. *Si* $(A_i)_{0\leq i\leq N}$ *est une suite finie de* N *éléments de* $\mathcal{A}$, *alors* $\bigcap_{i=0}^{N} A_i \in \mathcal{A}$.

1.4 Espace Probabilisé

Définition 1.4.1 (*Espace probabilisable*)

On appelle espace probabilisable, le couple $(\Omega, \mathcal{A})$, *où* $\mathcal{A}$ *est une tribu de* Ω.

Définition 1.4.2

Une probabilité sur l'univers Ω *est une application* $\mathbb{P}$ *telle que :*

1. $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Remarques 1.4.1.

- La probabilité d'un événement de l'univers Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.
- On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

- Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a généralement dans l'énoncé une expression du type :
  – On lance un dé **non pipé**.
  – Dans une urne, il y a des boules **indiscernables** au toucher.
  – On rencontre au **hasard** une personne parmi . . .

Définition 1.4.3 (*Espace probabilisé*)

On appelle espace probabilisé, le triplé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *où* $\mathcal{A}$ *est une tribu de* Ω *et* $\mathbb{P}$ *une probabilité.*

Propriétés 1.4.1

Soit A *et* B *deux événements, on a les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

- $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- *Si A et B sont des événements incompatibles, alors*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Exemple 1.4.1

On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard. A est l'événement « le nombre est multiple de 3 » :

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

B est l'événement « le nombre est multiple de 2 » :

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}.$$

Calcul des probabilités :

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7$.
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$.

1.5 Probabilités conditionnelles

Définition 1.5.1

Soient A et B deux événements telle que que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à B ou de A sachant B, la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé. Cette probabilité vaut

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 1.5.1. On trouve aussi la notation $\mathbb{P}(A/B)$ pour $\mathbb{P}_B(A)$.

Exemple 1.5.1

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

- *A : « la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ».*
- *B : « la face obtenue porte un numéro pair ».*

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

- *L'événement (A/B) correspond à l'événement « obtenir un numéro multiple de 3 parmi les éventualités de B », autrement dit parmi $\{2, 4, 6\}$. Il n'y a donc que l'issue « obtenir 6 » qui correspond. Ainsi, on obtient :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{3}.$$

- *Par le calcul, on a :*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} \quad et \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Donc, d'après la formule :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 1.5.1

Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B).$$

Proposition 1.5.2

Soit S un événement de probabilité non nulle, on a :
- $0 \leq \mathbb{P}_S(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}_S(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}_S(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}_S(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_S(A)$.
- $\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B) - \mathbb{P}_S(A \cap B)$.
- *Si A et B sont des événements incompatibles, alors*

$$\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B).$$

- $\mathbb{P}_S(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}_S(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}_S(A \cup B)$.

Proposition 1.5.3 (*Formule des probabilités totales*)

Pour tous A et B deux événements de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}).$$

Théorème 1.5.1 (*Théorème de Bayes*)

Pour tous A et B deux événements de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

En fait, cette formule permet de calculer directement $\mathbb{P}_A(B)$ sans passer par des étapes intermédiaires.

Exemple 1.5.2

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6,3% sont défectueuses), le reste étant fourni

par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).
La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. *La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 est :*
$$\mathbb{P}_{M_1}(D) = 0,063.$$
2. *La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 est :*
$$\mathbb{P}_{M_2}(D) = 0,04.$$
3. *La probabilité de prélever une pièce défectueuse :*
En utilisant la formule des probabilités totales, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(M_1 \cap D) + \mathbb{P}(M_2 \cap D)\\ &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}_{M_1}(D) + \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}_{M_2}(D)\\ &= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,04\\ &= 0,0538.\end{aligned}$$
4. *Si on prélève une pièce défectueuse, calculons la probabilité qu'elle soit produite par la machine M_1 :*
En utilisant le théorème de Bayes, on a
$$\mathbb{P}_D(M_1) = \frac{\mathbb{P}_{M_1}(D) \times \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0,063 \times 0,6}{0,0538} = 0,703.$$

1.6 Événements indépendants

Définition 1.6.1

On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque 1.6.1. Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

Exemple 1.6.1

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.
Soient les événements :
A : *« Obtenir pile au premier lancé ».*
B : *« Obtenir pile au deuxième lancé ».*
C : *« Obtenir pile-face ou face-pile ».*
Nous allons montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.
On a
$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{PP, PF\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{PP, FP\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{PF, FP\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Rightarrow A \textit{ et } B \textit{ sont indépendants.}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{PF\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) \Rightarrow A \textit{ et } C \textit{ sont indépendants.}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{FP\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \Rightarrow B \textit{ et } C \textit{ sont indépendants.}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$
$$\Rightarrow A,\ B \textit{ et } C \textit{ ne sont pas mutuellement indépendants.}$$

Ainsi, les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

Proposition 1.6.1

Si A et B sont des événements indépendants, alors : A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et B ; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également des événements indépendants.