Cours 6

Algorithme du simplexe

Autre Forme de présentation du tableau

Les calculs de l'algorithme du simplexe peuvent être présentés sous différentes formes ;

Une des formes utilisées est la forme tableaux du simplexe.

Dans ces tableaux les c_j coefficients de la fonction objectif, les C_B coefficients de la fonction objectif des variables de base ainsi que les $z_j = C_B a_j$ ou par abus d'écriture $z_j = C_B x_j$, avec x_j représentant la j colonne de la matrice **A** sont indiqués explicitement sur le tableau. La forme tableau utilisée dans ce cours est comme suit :

Tableau élaboré du simplexe.

	c_j	c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6	
C_B	**Variables de base**	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6	**Solution de base**
c_j des variables de base	x_j des variables de base	Coefficients des variables	Valeurs des variables
z_j $c_j - z_j$			Z =

$$z_j = \sum c_{B_i} a_{ij} \qquad\qquad Z = \sum c_{B_i} x_{B_i}$$

Utilisons cette forme de tableau pour optimiser le modèle de PL suivant :

$$\begin{cases} Max\ Z = 66x_1 + 84x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4200 \\ \quad x_1 + 3x_2 + x_4 = 2250 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2600 \\ \quad x_1 + x_6 = 1100 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau : Solution de départ

	c_j	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Solution de base**
0	x_3	3	4	1	0	0	0	4200
0	x_4	1	3	0	1	0	0	2250
0	x_5	2	2	0	0	1	0	2600
0	x_6	1	0	0	0	0	1	1100
z_j		0	0	0	0	0	0	Z = 0
$c_j - z_j$		66	84	0	0	0	0	

Ainsi

$$z_1 = c_B a_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \ldots, z_6 = c_B a_6 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \ \ et$$

$$Z = c_B X_B = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 4200 \\ 2250 \\ 2600 \\ 1100 \end{bmatrix} = 0.$$

Les variables hors de la base sont $x_1 \quad x_2$

Appliquons les critères d'entrée et de sortie d'une variable.

$$\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{a_{ir}},\ a_{ir}>0\right\}=\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{a_{i2}},\ a_{i2}>0\right\}=\min\left\{\frac{4200}{4},\ \frac{2250}{3},\ \frac{2600}{2}\right\}$$

$$=\min\{1050,\ 750,\ 1300\}=750=\frac{\bar{b}_2}{a_{22}}$$

La variable x_2 entre la base et sa valeur sera 750,

La variable sortante est x_4 $k=2$

Et le pivot est $a_{22}=3$

Ce calcul s'indique habituellement sur le tableau.

Tableau 1

	c_j	66	84	0	0	0	0		
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Solution de base**	**Quotient**
0	x_3	3	4	1	0	0	0	4200	42200/4
0	x_4	1	**3**	0	1	0	0	2250	2250/3
0	x_5	2	2	0	0	1	0	2600	2600/2
0	x_6	1	0	0	0	0	1	1100	----
z_j		0	0	0	0	0	0	Z = 0	
$c_j - z_j$		66	84	0	0	0	0		

$$\min\{4200/4,\ 2250/3,\ 2600/2\} = 750$$

Variable entrante : x_2 **Variable sortante :** x_4 **Pivot :** $a_{22} = 3$

En pivotant sur a_{22} , on obtient le tableau 2.

Tableau 2

	c_j	66	84	0	0	0	0		
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Solution de base**	**Quotient**
0	x_3	5/3	0	1	-4/3	0	0	1200	1200/(5/3)=720
84	x_2	1/3	1	0	1/3	0	0	750	750/(1/3)=2250
0	x_5	4/3	0	0	-2/3	1	0	1100	1100/(4/3)=825
0	x_6	1	0	0	0	0	1	1100	1100/(1)=1100
z_j		28	84	0	-28	0	0	**Z = 63000**	
$c_j - z_j$		38	0	0	-28	0	0		

Le tableau 2 n'est pas optimal $c_1 - z_1 = 38 > 0$.

Variable entrante : x_1 **Variable sortante :** x_3 **Pivot :** $a_{11} = 5/3$.

En pivotant sur $a_{11} = 5/3$, on obtient le tableau 3.

Tableau 3

	c_j	66	84	0	0	0	0		
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Solution de base**	**Quotient**
66	x_1	1	0	3/5	-4/5	0	0	720	——
84	x_2	0	1	-1/3	3/5	0	0	510	510 / (3/5)=**850**
0	x_5	0	0	-4/5	**2/5**	1	0	140	140 / (2/5)=**350**
0	x_6	0 1	0	-3/5	4/5	0	1	380	380 / (4/5)=**475**
z_j		66	84	22.8	-2.4	0	0	**Z = 90360**	
$c_j - z_j$		0	0	-22.8	2.4	0	0		

Le tableau **3** n'est pas optimal $c_4 - z_4 = 2.4 > 0$.

Variable entrante : x_4 **Variable sortante :** x_5 **Pivot :** $a_{24} = 2/5$.

En pivotant sur $a_{24} = 2/5$, on obtient le tableau 4.

Tableau 4

	c_j	66	84	0	0	0	0		
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Solution de base**	**Quotient**
66	x_1	1	0	-1	0	2	0	1000	——
84	x_2	0	1	1	0	-3/2	0	510	510 / (3/5)=**850**
0	x_4	0	0	-2	1	5/2	0	350	140 / (2/5)=**350**
0	x_6	0	0	1	0	-2	1	100	380 / 4/5)=**475**
z_j		66	84	18	0	6	0	**Z = 91200**	
$c_j - z_j$		0	0	-18	0	-6	0		

Le tableau **4** est optimal puisque

$c_3 - z_3 = -18 < 0 \quad et \quad c_5 - z_5 = -6 < 0$.

Solution optimale de base :

$$x_{B_1} = x_1 = 1000$$

$$x_{B_2} = x_2 = 300$$

$$x_{B_3} = x_4 = 350$$

$$x_{B_4} = x_6 = 100$$

La solution optimale de complète de notre modèle :

$$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1000,\ 300,\ 0, 350, 0, 100).$$

$$Z^* = 91200$$